Guía 4 - Lógica Proposicional

Solución de un alumno

Verano 2021

Ejercicio 1

a. $v \models \neg p_1$ por def de valuación

b. $v \not\models (p_5 \vee p_3) \to p_1$ porque podemos encontrar la valuación que cumpla $v \models p_5$ y entonces no cumpliría.

c. $v \models (p_1 \vee p_2) \to p_3$ si porque $(p_1 \vee p_2)$ siempre es falso.

d. $v \not\models \neg p_4$ porque podemos encontrar la valuación que cumpla $v \models p_4$ como $v \models \neg p_4$

e. $v \not\models ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$ porque puede ser que $v(p_5) = v(p_8) = 1$ y $v(p_0) = 0$.

Ejercicio 2

Ejercicio 3

a. $(\Rightarrow)$ Para toda v valuación, $v \models \alpha$, entonces para toda valuación $v \not\models \neg\alpha$, entonces $\neg\alpha$ no es satisfacible.

$(\Leftarrow)$ Los entonces también son para el otro lado.

b. Si para toda v valuación $v \models \alpha \wedge \beta$ entonces $v \models \alpha$ y $v \models \beta$, entonces ambas son tautologías. El entonces es sii.

c. Si para toda v valuación $v \not\models \alpha \vee \beta$ entonces $v \not\models \alpha$ y $v \not\models \beta$, entonces ambas son contradicciones. El entonces es sii.

d. Si para toda v valuación $v \not\models \alpha \to \beta$ entonces $v \models \alpha$ y $v \not\models \beta$, entonces α es una tautología y β una contradiccion. El entonces es sii.

Ejercicio 4

a.

$$
\begin{gathered}
v_1 \models (\alpha \wedge \beta) \ y \ v_2 \not\models (\alpha \wedge \beta) \\
\Rightarrow (v_1 \models \alpha \ y \ v_1 \models \beta) \ y \ (v_2 \not\models \alpha \text{ ó } v_2 \not\models \beta) \\
\Rightarrow (v_1 \models \alpha \ y \ v_2 \not\models \alpha) \text{ ó } (v_1 \models \beta \ y \ v_2 \not\models \beta)
\end{gathered}
$$

b. La definición de $\models$ es recursiva,

Sea γ una fórmula compuesta por símbolos proposicionales:

- $v \models p_1 \to p_2 \Leftrightarrow v(p_1) = 0$ ó $v(p_2) = 1 \underset{v(p_i)=v'(p_i)}{\Leftrightarrow} v' \models p_1 \to p_2$
- $v \models \neg p_1 \Leftrightarrow v(p_1) = 0 \underset{v(p_i)=v'(p_i)}{\Leftrightarrow} v' \models \neg p_1$

Entonces, como toda fórmula está constituida por fórmulas o por símbolos proposicionales, entonces $v(p_i) = v'(p_i) \Rightarrow (v \models \alpha \Leftrightarrow v' \models \alpha)$.

c. ($\Leftarrow$) Directo.

($\Rightarrow$)

$$(\alpha \to \beta) \ \textit{tautología} \Leftrightarrow (\forall v \ \textit{valuación})(v \models (\alpha \to \beta))$$

$$\Leftrightarrow (\forall v \ \textit{valuación}) \ v \models \neg\alpha \text{ ó } (v \models \neg\alpha \ y \ v \models \beta) \text{ ó } (v \models \beta)$$

Pero como $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$ entonces podemos encontrar una v' tal que:

$$(v \models \neg\alpha \ y \ v \not\models \beta)$$

Entonces tiene que ser α una contradicción o β una tautología.

d.

Ejercicio 5

Veamos para cada caso de fórmula: - Forma p:

$$v \models \neg p \Leftrightarrow v \not\models p$$

- Forma $\neg\varphi$:

$$v \models \varphi \Leftrightarrow v \not\models \neg\varphi$$

- Forma $\varphi \wedge \psi$:

$$v \models \neg\varphi \vee \neg\psi$$
$$\underset{DeMorgan}{\Leftrightarrow} v \models \neg(\varphi \wedge \psi)$$
$$\Leftrightarrow v \not\models \varphi \wedge \psi$$

- Forma $\varphi \vee \psi$:

$$v \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\underset{DeMorgan}{\Leftrightarrow} v \models \neg(\varphi \vee \psi)$$
$$\Leftrightarrow v \not\models \varphi \vee \psi$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7

a) Sea $\varphi \in \Gamma$, entonces por def. de consecuencia semántica, $\Gamma \models \varphi$, entonces $\varphi \in Con(\Gamma)$.

b) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.
Sea $\varphi \in Con(\Gamma_1)$. Entonces $\Gamma_1 \models \varphi$. Entonces $\Gamma_2 \models \varphi$ (por definición de $\models$ y que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$).
Entonces $Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)$

c)

$$\Gamma_2 \subseteq Con(\Gamma_3) \Rightarrow Con(\Gamma_2) \subseteq Con(Con(\Gamma_3)) = Con(\Gamma_3)$$

$$\Rightarrow \Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_3)$$

d) Ya sabemos que $Con(\Gamma) \subseteq Con(Con(\Gamma))$.

Sea $\varphi \in Con(Con(\Gamma))$, entonces para toda v valuación pasa que:

$$v \models Con(\Gamma) \Rightarrow v \models \varphi$$

Y como tenemos que para toda v:

$$v \models Con(\Gamma) \Leftrightarrow v \models \Gamma$$

Entonces, para toda v:

$$v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$$

Ejercicio 8

a.

$$Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$$
$$\Leftrightarrow \{\alpha\} \models \beta$$

Por def quiere decir:

$$(\forall v) v \models \alpha \Rightarrow v \models \beta$$

Entonces:

$$(\forall v) v \models \alpha \rightarrow \beta$$

b.

1. VERDADERO. Para toda v valuación:

$$v \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow v \models \alpha \wedge v \models \beta$$

Entonces son las mismas valuaciones, entonces las consecuencias semánticas son las mismas.

2. VERDADERO. Para toda v valuación:

$$v \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow v \models \alpha \vee v \models \beta$$

Entonces son las mismas valuaciones, entonces las consecuencias semánticas son las mismas.

3. FALSO. Sea $\alpha = \neg\beta$ y $\beta = p$ siendo p una variable prop. Entonces

$$Con(\alpha \to \beta) = FORM$$

Pero

$$\neg\beta \notin Con(\beta)$$

Entonces no cumple.

Ejercicio 9

a) Γ es satisfacible, entonces existe v_0 tq $v_0 \models \Gamma$. Entonces, como $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $v_0 \models \Gamma'$, entonces Γ' es satisfacible.

Ahora veamos que no es cierto la recíproca con un contra ejemplo:

$\Gamma = \{p, \neg p\}$ y $\Gamma' = \{p\}$

b) Γ es satisfacible, entonces existe v_0 tq $v_0 \models \Gamma$. Entonces por def de consecuencia semántica, para todo $\varphi \in Con(\Gamma)$, $v_0 \models \varphi$, entonces $v_0 \models Con(\Gamma)$, entonces $Con(\Gamma)$ es satisfacible.

c) Puede pasar que Γ sea insatisfacible, entonces $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$. También puede ser que no sea consecuencia semántica.
No puede ser que no sea ninguna de las dos. Por definición de $\Gamma \models \varphi$, se cumple o no se cumple.

Ejercicio 10

(a $\Rightarrow$ b)

$$\neg(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$$

$$(\neg\alpha_1 \vee ... \vee \neg\alpha_n) \in Con(\emptyset)$$

$$\Rightarrow (\forall v : valuación) v \models (\neg\alpha_1 \vee ... \vee \neg\alpha_n)$$

$$\Rightarrow (\forall v : valuación)(\exists i)_{1 \leq i \leq n} v \not\models (\alpha_i)$$

(b $\Rightarrow$ c) (c) nos dice que el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es insatisfacible. Y está bien porque en (b) dijimos que toda valuación no satisface algún α_i.

(c $\Rightarrow$ d) Sabemos que $Con(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\})$ es insatisfacible, entonces por def todas las fórmulas son consecuencia semántica del conjunto.

(d $\Rightarrow$ a)
$\beta \in Con(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\})$ para toda fórmula β. Entonces el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es insatisfacible.
Entonces la fórmula $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ no es satisfacible para ninguna valuación.
Entonces $\neg(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ es satisfacible para todas las valuaciones.
Entonces $\neg(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$.