

# Guía 4 - Lógica Proposicional

Solución de un alumno

Verano 2021

## Ejercicio 1

- a.  $v \models \neg p_1$  por def de valuación
- b.  $v \not\models (p_5 \vee p_3) \rightarrow p_1$  porque podemos encontrar la valuación que cumpla  $v \models p_5$  y entonces no cumpliría.
- c.  $v \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$  si porque  $(p_1 \vee p_2)$  siempre es falso.
- d.  $v \not\models \neg p_4$  porque podemos encontrar la valuación que cumpla  $v \models p_4$  como  $v \models \neg p_4$
- e.  $v \not\models ((p_8 \rightarrow p_5) \rightarrow (p_8 \wedge p_0))$  porque puede ser que  $v(p_5) = v(p_8) = 1$  y  $v(p_0) = 0$ .

## Ejercicio 2

## Ejercicio 3

- a.  $(\Rightarrow)$  Para toda  $v$  valuación,  $v \models \alpha$ , entonces para toda valuación  $v \not\models \neg \alpha$ , entonces  $\neg \alpha$  no es satisfacible.
- $(\Leftarrow)$  Los entonces también son para el otro lado.
- b. Si para toda  $v$  valuación  $v \models \alpha \wedge \beta$  entonces  $v \models \alpha$  y  $v \models \beta$ , entonces ambas son tautologías. El entonces es sii.
- c. Si para toda  $v$  valuación  $v \not\models \alpha \vee \beta$  entonces  $v \not\models \alpha$  y  $v \not\models \beta$ , entonces ambas son contradicciones. El entonces es sii.
- d. Si para toda  $v$  valuación  $v \not\models \alpha \rightarrow \beta$  entonces  $v \models \alpha$  y  $v \not\models \beta$ , entonces  $\alpha$  es una tautología y  $\beta$  una contradicción. El entonces es sii.

## Ejercicio 4

a.

$$\begin{aligned} &v_1 \models (\alpha \wedge \beta) \text{ y } v_2 \not\models (\alpha \wedge \beta) \\ \Rightarrow &(v_1 \models \alpha \text{ y } v_1 \models \beta) \text{ y } (v_2 \not\models \alpha \text{ ó } v_2 \not\models \beta) \\ \Rightarrow &(v_1 \models \alpha \text{ y } v_2 \not\models \alpha) \text{ ó } (v_1 \models \beta \text{ y } v_2 \not\models \beta) \end{aligned}$$

b. La definición de  $\models$  es recursiva,

Sea  $\gamma$  una fórmula compuesta por símbolos proposicionales:

- $v \models p_1 \rightarrow p_2 \Leftrightarrow v(p_1) = 0 \text{ ó } v(p_2) = 1 \xLeftrightarrow{v(p_i)=v'(p_i)} v' \models p_1 \rightarrow p_2$
- $v \models \neg p_1 \Leftrightarrow v(p_1) = 0 \xLeftrightarrow{v(p_i)=v'(p_i)} v' \models \neg p_1$

Entonces, como toda fórmula está constituida por fórmulas o por símbolos proposicionales, entonces  $v(p_i) = v'(p_i) \Rightarrow (v \models \alpha \Leftrightarrow v' \models \alpha)$ .

c. ( $\Leftarrow$ ) Directo.

( $\Rightarrow$ )

$$(\alpha \rightarrow \beta) \text{ tautología} \Leftrightarrow (\forall v \text{ valuación})(v \models (\alpha \rightarrow \beta))$$

$$\Leftrightarrow (\forall v \text{ valuación}) v \models \neg \alpha \text{ ó } (v \models \neg \alpha \text{ y } v \models \beta) \text{ ó } (v \models \beta)$$

Pero como  $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$  entonces podemos encontrar una  $v'$  tal que:

$$(v \models \neg \alpha \text{ y } v \not\models \beta)$$

Entonces tiene que ser  $\alpha$  una contradicción o  $\beta$  una tautología.

d.

## Ejercicio 5

Veamos para cada caso de fórmula: - Forma  $p$ :

$$v \models \neg p \Leftrightarrow v \not\models p$$

- Forma  $\neg \varphi$ :

$$v \models \varphi \Leftrightarrow v \not\models \neg \varphi$$

- Forma  $\varphi \wedge \psi$ :

$$\begin{aligned} v \models \neg \varphi \vee \neg \psi \\ \Leftrightarrow_{DeMorgan} v \models \neg(\varphi \wedge \psi) \\ \Leftrightarrow v \not\models \varphi \wedge \psi \end{aligned}$$

- Forma  $\varphi \vee \psi$ :

$$\begin{aligned} v \models \neg \varphi \wedge \neg \psi \\ \Leftrightarrow_{DeMorgan} v \models \neg(\varphi \vee \psi) \\ \Leftrightarrow v \not\models \varphi \vee \psi \end{aligned}$$

## Ejercicio 6

## Ejercicio 7

a) Sea  $\varphi \in \Gamma$ , entonces por def. de consecuencia semántica,  $\Gamma \models \varphi$ , entonces  $\varphi \in \text{Con}(\Gamma)$ .

b)  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ .

Sea  $\varphi \in \text{Con}(\Gamma_1)$ . Entonces  $\Gamma_1 \models \varphi$ . Entonces  $\Gamma_2 \models \varphi$  (por definición de  $\models$  y que  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ ).  
Entonces  $\text{Con}(\Gamma_1) \subseteq \text{Con}(\Gamma_2)$

c)

$$\Gamma_2 \subseteq \text{Con}(\Gamma_3) \Rightarrow \text{Con}(\Gamma_2) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma_3)) = \text{Con}(\Gamma_3)$$

$$\Rightarrow \Gamma_1 \subseteq \text{Con}(\Gamma_3)$$

d) Ya sabemos que  $\text{Con}(\Gamma) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$ .

Sea  $\varphi \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$ , entonces para toda  $v$  valuación pasa que:

$$v \models \text{Con}(\Gamma) \Rightarrow v \models \varphi$$

Y como tenemos que para toda  $v$ :

$$v \models \text{Con}(\Gamma) \Leftrightarrow v \models \Gamma$$

Entonces, para toda  $v$ :

$$v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$$

## Ejercicio 8

a.

$$\text{Con}(\{\beta\}) \subseteq \text{Con}(\{\alpha\})$$

$$\Leftrightarrow \{\alpha\} \models \beta$$

Por def quiere decir:

$$(\forall v)v \models \alpha \Rightarrow v \models \beta$$

Entonces:

$$(\forall v)v \models \alpha \rightarrow \beta$$

b.

1. VERDADERO. Para toda  $v$  valuación:

$$v \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow v \models \alpha \wedge v \models \beta$$

Entonces son las mismas valuaciones, entonces las consecuencias semánticas son las mismas.

2. VERDADERO. Para toda  $v$  valuación:

$$v \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow v \models \alpha \vee v \models \beta$$

Entonces son las mismas valuaciones, entonces las consecuencias semánticas son las mismas.

3. FALSO. Sea  $\alpha = \neg\beta$  y  $\beta = p$  siendo  $p$  una variable prop. Entonces

$$Con(\alpha \rightarrow \beta) = FORM$$

Pero

$$\neg\beta \notin Con(\beta)$$

Entonces no cumple.

## Ejercicio 9

a)  $\Gamma$  es satisfacible, entonces existe  $v_0$  tq  $v_0 \models \Gamma$ . Entonces, como  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ,  $v_0 \models \Gamma'$ , entonces  $\Gamma'$  es satisfacible.

Ahora veamos que no es cierto la recíproca con un contra ejemplo:

$$\Gamma = \{p, \neg p\} \text{ y } \Gamma' = \{p\}$$

b)  $\Gamma$  es satisfacible, entonces existe  $v_0$  tq  $v_0 \models \Gamma$ . Entonces por def de consecuencia semántica, para todo  $\varphi \in Con(\Gamma)$ ,  $v_0 \models \varphi$ , entonces  $v_0 \models Con(\Gamma)$ , entonces  $Con(\Gamma)$  es satisfacible.

c) Puede pasar que  $\Gamma$  sea insatisfacible, entonces  $\Gamma \models \alpha$  o  $\Gamma \models \neg\alpha$ . También puede ser que no sea consecuencia semántica.

No puede ser que no sea ninguna de las dos. Por definición de  $\Gamma \models \varphi$ , se cumple o no se cumple.

## Ejercicio 10

(a  $\Rightarrow$  b)

$$\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$$

$$(\neg\alpha_1 \vee \dots \vee \neg\alpha_n) \in Con(\emptyset)$$

$$\Rightarrow (\forall v : \text{valuación}) v \models (\neg\alpha_1 \vee \dots \vee \neg\alpha_n)$$

$$\Rightarrow (\forall v : \text{valuación}) (\exists i)_{1 \leq i \leq n} v \not\models (\alpha_i)$$

(b  $\Rightarrow$  c) (c) nos dice que el conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es insatisfacible. Y está bien porque en (b) dijimos que toda valuación no satisface algún  $\alpha_i$ .

(c  $\Rightarrow$  d) Sabemos que  $Con(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$  es insatisfacible, entonces por def todas las fórmulas son consecuencia semántica del conjunto.

(d  $\Rightarrow$  a)

$\beta \in Con(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$  para toda fórmula  $\beta$ . Entonces el conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es insatisfacible.

Entonces la fórmula  $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$  no es satisfacible para ninguna valuación.

Entonces  $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$  es satisfacible para todas las valuaciones.

Entonces  $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$ .