Parcial de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

Curso de verano 2021

- El parcial tiene una duración de 4 horas y 15 minutos. No corregiremos exámenes que lleguen después de la hora (21:15), a menos que el retraso se deba a circunstancias de fuerza mayor, bajo lo cual se comprometen a darnos aviso previo.
- Se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clases prácticas, clases teóricas y también pueden usar los ejercicios de las guías. Sean explícitos cuando citan algún resultado. Todas sus respuestas deben estar justificadas.
- Entregar cada ejercicio en archivos separados identificados de la siguiente manera: **Apellido-Nombre-LU-ejercicio**. Por favor, respetar el formato para mejor organización. Las soluciones deberán enviarse al siguiente correo: logicaycomputabilidad@gmail.com.
- Criterio de aprobación: dos ejercicios bien (B), o un ejercicio bien (B) y dos regulares (R). Criterio de promoción: al menos dos ejercicios bien (B) y un regular (R).

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función que a cada n le asigna la tripleta $\langle a, b, c\rangle$ donde a es el número total de instrucciones tipo $V \leftarrow V + 1$ que aparecen en el programa de número n, b es el número total de instrucciones tipo $V \leftarrow V - 1$ que aparecen en el programa de número n y c es el número total de instrucciones tipo IF $V \neq 0$ GOTO L que aparecen en el programa de número n. Probar que f es primitiva recursiva. Por ejemplo, para el siguiente programa P

$$\begin{array}{ll} [A] & X_5 \leftarrow X_5 - 1 \\ & Y \leftarrow Y + 1 \\ & \text{IF } X_5 \neq 0 \text{ GOTO } A \\ & \text{IF } Z_3 \neq 0 \text{ GOTO } B \end{array}$$

se cumple que $f(\#P) = \langle 1, 1, 2\rangle$.

Ejercicio 2. Decidir y demostrar si la siguiente función es computable:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{0, 1, \ldots, y\} \subseteq \text{Dom}(\Phi_x^{(1)}) \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Sea R un conjunto c.e. Demuestre que el conjunto

$$W = \bigcup_{x \in R} \text{Dom}(\Phi_x^{(1)})$$

también es c.e.

Solución 1º Parcial Lógica y Computabilidad - Verano 2021

Schiavinato Mauro

Ejercicio 1

Definamos $f(x)$ como la función:

$$f(x) = < sumaIns1(x), sumaIns2(x), sumaIns3(x) >$$

Si $sumaIns1(x), sumaIns2(x), sumaIns3(x)$ son pr, entonces $f(x)$ es pr, porque la codificación de tripleta está dada como:

$$< \cdot, \cdot, \cdot > = < \cdot, < \cdot, \cdot >>$$

Que es una composición de codificación de pares con codificación de pares. Y la codificación de pares es pr (demostrado en teórica).

Sabemos que:

- $V \leftarrow V + 1$ tiene número de instrucción 1.
- $V \leftarrow V \dot{-} 1$ tiene número de instrucción 2.
- $IF V \neq 0\ GOTO\ L$ tiene número de instrucción $\#(L) + 2$ la cual es siempre mayor a 2 (porque las etiquetas se enumeran desde el 1).

Definimos una función auxiliar que nos va a dar el número de instrucción de una línea del programa:

$$numIns(x, i) = l(r((x + 1)[i]))$$

Que es pr por ser composición de:

- $l(x)$ y $r(x)$ que son pr (visto en teórica).
- $x + 1$ que es pr (la suma es pr, visto en teórica).
- $x[i]$ es pr (visto en teórica).

Luego definimos las funciones:

$$sumaIns1(x) = \sum_{i=1}^{|x+1|} (numIns(x, i) = 1)$$

$$sumaIns2(x) = \sum_{i=1}^{|x+1|} (numIns(x, i) = 2)$$

$$sumaIns3(x) = \sum_{i=1}^{|x+1|} (numIns(x, i) > 2)$$

Que las tres son pr por ser composición de las siguientes funciones:

- $\sum_{t=1}^{y} f(x, t)$ que es pr (visto en teórica).
- $| \cdot |$ es pr (visto en teórica).
- $x + 1$ que es pr (la suma es pr, visto en teórica).

- $numIns(x, i)$ que es pr (demostrado más arriba).
- $=, >$ que son predicados pr (ejercicio 5 guía 1).

Entonces $f(x)$ es primitiva recursiva.

Ejercicio 2

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \{0,1,...,y\} \subseteq Dom(\Phi_x^{(1)}) \\ 0 & cc \end{cases}$$

Suponemos que es computable. Entonces también es computable la función:

$$g'(x) = g(x,0) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \in Dom(\Phi_x^{(1)}) \equiv \Phi_x^{(1)}(0) \downarrow \\ 0 & cc \end{cases}$$

$g'(x)$ es computable porque es una composición de $g(x, y)$ con la función $f(x) = 0$ en el segundo parámetro. La función nula es primitiva recursiva (función inicial), entonces es computable.

La función $g'(x)$ es la función característica del conjunto:

$$G' = \{x : \Phi_x^{(1)}(0) \downarrow\}$$

Sea C definido como la siguiente clase de funciones:

$$C = \{g(x) : g(0) \downarrow\}$$

Entonces G' es un conjunto de índices porque lo podemos escribir como:

$$G' = \{x : \Phi_x^{(1)} \in C\}$$

Sea P_1 el programa:

```
[A] GOTO A
```

Notar que $GOTO\ A$ es una macro (definida en teórica).

Y sea P_2 el programa:

```
Y <- 0
```

Entonces $P_1 \notin G'$ y $P_2 \in G'$.

Entonces no es un conjunto trivial ($\mathbb{N}$ o). Entonces por teorema de Rice, es un conjunto no computable.

Entonces $g'(x)$ no es computable. Absurdo porque compusimos una función computable con funciones pr (computables).

Entonces $g(x, y)$ no es computable.

Ejercicio 3

R es un conjunto c.e., entonces podemos escribir R como:

$$R = \{x : g(x) \downarrow\} = dom\ g$$

Siendo $g(x)$ alguna función parcial computable.

Entonces para ver que

$$W = \bigcup_{x \in R} Dom(\Phi_x)$$

Es un conjunto c.e., podemos buscar un programa donde se defina únicamente en los elementos de W. Si llegase a ocurrir eso, entonces podríamos tener:

$$W = \{x : g'(x) \downarrow\} = dom\ g'$$

Lo cual es la definición de ce. Veamos como construir tal $g'(x)$.

Para que un elemento pertenezca a W, tiene que pertenecer al Dom de los programas generados por los elementos de R.

Sea w el número de un programa que computa la función $g(x)$ (la del dominio de R, existe porque R es ce), entonces podemos definir $g'(x)$ como:

$$g'(y) = (\exists < x, t_1, t_2 >)(STP^{(1)}(x, w, t_1) = 1 \land\ STP^{(1)}(y, x, t_2) = 1)$$

Esta es parcial computable, porque es una composición de las siguientes funciones:

- El $(\exists x)p(x)$ es parcial computable si el predicado $p(x)$ es computable (visto en la teórica).
- $STP^{(1)}(x, y, z)$ es pr (entonces computable)(visto en teórica). Es un predicado que devuelve 1 sii el programa y termina en z o menos pasos con entrada x.
- $=$ es pr (ej4 guía 1).
- $\land$ es pr (ej4 guía 1).

Veamos que se define donde queramos (en los elementos que pertenecen al conjunto) y se indefine en el resto (los que no pertenecen).

Sea $p \in Dom(\Phi_x)$ tal que $x \in R$. Entonces va a existir x, t_1, t_2 tal que:

- $STP^{(1)}(x, w, t_1) = 1$ porque $x \in R$, entonces $g(x) \downarrow$.
- $STP^{(1)}(p, x, t_2) = 1$ porque $p \in Dom(\Phi_x)$, entonces $\Phi_x(p) \downarrow$.

Notemos que estos dos puntos son **si solo si**, entonces si no suceden ambas cosas la función se va a indefinir.