

# Guía 5 - Sistemas deductivos para lógica proposicional y aplicaciones de compacidad

Solución de un alumno

Verano 2021

## Ejercicio 1

a)

1.  $(\alpha \rightarrow \beta)$  [pertenece]
  2.  $(\beta \rightarrow \gamma)$  [pertenece]
  3.  $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$  [SP1]
  4.  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$  [MP 2 y 3]
  5.  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$  [SP2]
  6.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$  [MP 4 y 5]
  7.  $\alpha \rightarrow \gamma$  [MP 1 y 6]
- b) Es SP3

## Ejercicio 2

- a. Una fórmula  $\varphi$  es una tautología si para toda  $v$  valuación  $v \models \varphi$ .

$$\gamma : (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Realizamos tabla de verdad:

$\varphi$	$\psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	$\psi \rightarrow \varphi$	$\gamma$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Entonces vemos que no importa la valuación que tomemos,  $v \models \gamma$ , entonces es una tautología.

- b. **COMPLETAR**  
c. **COMPLETAR**

### Ejercicio 3

( $\Leftarrow$ )  $\exists \alpha$  tq  $\Gamma \vdash \alpha$  y  $\Gamma \vdash \neg \alpha$ , entonces inconsistente.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\beta$  tq  $\Gamma \vdash \beta$  y  $\Gamma \vdash \neg \beta$ .  $\text{Qvq } \Gamma \vdash \alpha$  para cualquier  $\alpha$ .

1.  $\neg \beta$  [pertenece]
2.  $\beta$  [pertenece]
3.  $\neg \beta \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \neg \beta)$  [SP1]
4.  $(\neg \alpha \rightarrow \neg \beta)$  [MP 1 y 3]
5.  $(\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$  [SP3]
6.  $\beta \rightarrow \alpha$  [MP 2 y 3]
7.  $\alpha$  [MP 2 y 6]

### Ejercicio 4

b. ( $\text{mc} \Leftrightarrow 1$ )

Ambos no pueden estar por consistencia. Veamos que hay uno por lo menos. Suponemos que no. Entonces, como  $\Gamma$  es mc:

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \text{ es inconsistente} \Rightarrow \Gamma \vdash \neg \alpha$$

$$\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \text{ es inconsistente} \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$$

Entonces  $\Gamma$  es inconsistente. Absurdo. La vuelta

( $\text{mc} \Leftrightarrow 2$ )  $\vdash \varphi$  para toda  $\varphi$  axioma. Como  $\Gamma$  es mc, entonces  $\varphi \in \Gamma$ .

( $\text{mc} \Leftrightarrow 3$ ) Como todos los axiomas están en SP,  $\Gamma \vdash \beta \Rightarrow \beta \in \Gamma$ .

c.  $(\neg \alpha \rightarrow \beta) \equiv \alpha \vee \beta$ .

Veamos por absurdo:

$$\alpha, \beta \notin \Gamma \Rightarrow \neg \alpha, \neg \beta \in \Gamma$$

$$\Rightarrow (\neg \alpha \wedge \neg \beta) \equiv \neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$$

Absurdo.

### Ejercicio 5

a.

- $\Gamma_0$  es consistente
- $\Gamma_{n+1}$  es consistente por como se arma

b. Igual que 4.b.1

c. Sea  $\alpha$  un teorema, entonces  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  es consistente, entonces por (b)  $\alpha \in \Gamma^+$

d. Es consistente por (a). Es maximal por (b).

## Ejercicio 6

(a  $\Rightarrow$  b)

Veamos por absurdo:  $\Gamma$  no es satisfacible. Entonces  $\Gamma$  no es consistente. Entonces  $\Gamma \models \alpha$  y  $\Gamma \models \neg\alpha$ . Pero entonces por (a), existe  $\Gamma_0 \in \Gamma$ ,  $\Gamma_1 \in \Gamma$  finitos tq  $\Gamma_0 \models \alpha$  y  $\Gamma_1 \models \neg\alpha$ . Absurdo.

(b  $\Leftrightarrow$  c)

Es la recíproca.

(c  $\Rightarrow$  a) ó (b  $\Rightarrow$  a) **TERMINAR**

## Ejercicio 7

## Ejercicio 8

Podemos tomar  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como los conjuntos mc generados por  $\Gamma \cup \{\beta\}$  y  $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$  respectivamente.  $\Gamma \cup \{\beta\}$  y  $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$  son conjuntos consistentes porque  $\Gamma \not\models \beta$  y  $\Gamma \not\models \neg\beta$ .

Nota: podemos generarlos por lema de Lindenbaum. Entonces  $Con(\Gamma) \subseteq Con(\Gamma_1)$  y  $Con(\Gamma) \subseteq Con(\Gamma_2)$  (por ej 4.7.b).

## Ejercicio 9

## Ejercicio 10

## Ejercicio 11

$\Gamma_1, \Gamma_2$  satisfacibles.  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  insatisfacible, entonces inconsistente.

Entonces  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi \wedge \neg\varphi$ .

Entonces  $\Gamma_1 \models \alpha$  y  $\Gamma_2 \models \neg\varphi$ .

Entonces  $\alpha \in Con(\Gamma_1)$  y  $\beta \in Con(\Gamma_2)$ .

Si tomamos  $\alpha = \varphi$  y  $\beta = \neg\varphi$ , entonces se cumple que  $\varphi \rightarrow \varphi$ .

## Ejercicio 12

## Ejercicio 13

Sabemos que insatisfacible  $\Rightarrow$  existe subconjunto finito insatisfacible.

Tomamos el conjunto  $\bar{\Gamma} = \{\neg\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ . Este conjunto no es satisfacible porque todas las valuaciones no satisfacen algún elemento.

Entonces existe  $\bar{\Gamma}_0 \subseteq \bar{\Gamma}$ ,  $\bar{\Gamma}_0 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  insatisfacible. Entonces  $(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)$  es una contradicción. Entonces  $\neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)$  es una tautología. Esta fórmula equivale a  $(\neg\beta_1 \vee \dots \vee \neg\beta_n)$  (de Morgan) y todos los  $\neg\beta_i \in \Gamma$ .

## Ejercicio 14

$\Gamma \models \gamma \Rightarrow$  existe  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  finito,  $\Gamma_0 \models \gamma$   
*ej6.a*

$$\Gamma_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

$\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$  es tautología ó  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$  es tautología

Supongo  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$  tautología. Entonces podemos sacar  $\alpha_2$  del conjunto  $\Gamma_0$  y va a seguir valiendo  $\Gamma_0 \models \gamma$ . De la otra forma sacabamos  $\alpha_1$ .

Esto podemos repetirlo n-1 veces (sacando n-1 alfas del conjunto) obteniendo:

$$\Gamma_0 = \{\alpha_i\}$$

para algún  $1 \leq i \leq n$ . Entonces  $\alpha_i = \delta$ .

## Ejercicio 15

## Ejercicio 16

$\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son consistentes. Entonces:

- CASO  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  inconsistente: entonces  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha$  y  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\alpha$ , entonces  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$ .
- CASO  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  es consistente: entonces  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Delta$  tq  $\Delta$  mc (lema de Lindenbaum). Entonces  $\Gamma_1 \subseteq \Delta$  y  $\Gamma_2 \subseteq \Delta$ .