

## PRÁCTICA 3 - FUNCIONES NO-COMPUTABLES Y CONJUNTOS C.E. -

\*Se aconseja escribir (preferiblemente en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X) la demostración completa de estos ejercicios para no sufrir en el parcial.

**Ejercicio 1.** \* Probar, usando una diagonalización, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & f_2(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ f_3(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & f_4(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.** \*Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_2(x, y, z, w) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(w) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(w) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_3(x, y, z) &= \begin{cases} z + 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_4(x, y, z) &= \begin{cases} (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z) & \text{si } \Phi_y^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.** \* Probar que la siguiente función no es computable reduciendo la función  $f_4$  del Ej. 1.

$$g'_3(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*Sugerencia:* Revisar que la reducción maneje correctamente el caso  $f_4(0)$ .

**Ejercicio 4.** Decimos que una función parcial computable  $f$  es *extensible* si existe  $g$  computable tal que  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in \text{Dom } f$ . Probar que existe una función parcial computable que no es extensible (*Sugerencia:* considerar una función tal que con su extensión se podría computar alguna variante del halting problem).

**Ejercicio 5.** Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1 y usando el teorema del parámetro, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Halt}(1337, x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_2(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(z) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_3(x) &= \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ es la constante } 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_4(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq \Phi_y^{(1)}(x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.** Demostrar que existe un programa  $p$  tal que  $\Psi_p^{(1)}(x) \downarrow$  si y sólo si  $x = \#p$ .

**Ejercicio 7.** \* Demostrar, usando el teorema de la recursión, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{Im } \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & h_2(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ h_3(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Im } \Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & h_4(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\text{Dom } \Phi_x^{(1)}| = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejercicio 8.** \* Sean  $C_1, \dots, C_k$  conjuntos de índices de programas y sea  $C = C_1 \cap \dots \cap C_k$ .

- Demostrar que  $C$  es un conjunto de índices de programas (i.e.,  $C = \{x : \Phi_x \in \mathcal{C}\}$ , con  $\mathcal{C}$  una clase de funciones).
- Proponer un conjunto que no sea un conjunto de índices de programas y no sea computable.

**Ejercicio 9.** \* Probar que son equivalentes

- $D$  es un conjunto de índices de programas.
- Para todo par de programas  $p$  y  $q$ , si  $\#p \in D$  y  $\Psi_p = \Psi_q$  entonces  $\#q \in D$ .

**Ejercicio 10.** \* Demostrar, usando reducciones y el teorema de Rice, que las siguientes funciones no son computables:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_2(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \cup \text{Dom } \Phi_y^{(1)} = \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ g_3(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & g_4(x, y) &= \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(\Phi_y^{(1)}(72)) & \text{si } \Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)} \text{ es total} \\ 73 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

*Observación:* la composición de dos funciones parciales puede ser una función parcial.

**Ejercicio 11.** \* Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Si  $B$  es computable entonces es c.e.
- Si  $B$  es c.e. entonces  $B$  es computable o su complemento lo es.
- Si  $B$  es c.e. entonces su complemento es c.e.

**Ejercicio 12.** \* Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son p.r., cuáles son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2 * x\} & C_4 &= \{\langle x, y \rangle : \forall z \in (\text{Dom } \Phi_x^{(1)} \cap \text{Dom } \Phi_y^{(1)}) \Phi_x^{(1)}(z) < \Phi_y^{(1)}(z)\} \\ C_2 &= \{x : 1 \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)}\} & C_5 &= \{\langle x, y, t, i \rangle : \exists \sigma. \text{SNAP}^{(1)}(x, y, t) = \langle i, \sigma \rangle\} \\ C_3 &= \{x : \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0, \dots, x\}\} & C_6 &= \{\langle x, y, i \rangle : \exists \sigma, t. \text{SNAP}^{(1)}(x, y, t) = \langle i, \sigma \rangle\} \end{aligned}$$

**Ejercicio 13.** Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Si  $B_1, \dots, B_k$  son c.e. entonces  $\bigcup_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$  es c.e.
- Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de conjuntos c.e. entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  es c.e.
- Si  $B_1, \dots, B_k$  son c.e. entonces  $\bigcap_{n \in \{1, \dots, k\}} B_n$  es c.e.
- Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de conjuntos c.e. entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$  es c.e.

**Ejercicio 14.** Sea  $B$  un conjunto *infinito*.

- Probar que  $B$  es c.e. sii existe una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  inyectiva y computable tal que  $\text{Im } f = B$  (o sea,  $f$  es una *enumeración computable* de los elementos de  $B$ ).
- Probar que  $B$  es computable sii existe una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  computable y estrictamente creciente tal que  $\text{Im } f = B$  (o sea,  $f$  es una *enumeración ordenada y computable* de los elementos de  $B$ ).
- Probar que si  $B$  es c.e. entonces  $B$  contiene (al menos) un subconjunto computable infinito.

**Ejercicio 15.** Sea  $\text{TOT} = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es una función total}\}$ .

- Demostrar que  $\text{TOT}$  no es co-c.e.
- Demostrar que  $\text{TOT}$  no es c.e. (*Sugerencia:* considerar la función  $g(z) = \Phi_{f(z)}^{(1)}(z) + 9$  donde  $f$  es una enumeración computable de  $\text{TOT}$ ).

**Ejercicio 16.** \* Demostrar que los siguientes conjuntos no son c.e. ni co-c.e.

$$\begin{aligned} \text{ID} &= \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es la función identidad}\} \\ \text{S} &= \{x : \text{Im } \Phi_x^{(1)} = \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

*Sugerencia:* utilice una reducción de  $\text{TOT}$  usando el Teorema del Parámetro.

**Ejercicio 17.** Exhibir un conjunto *no vacío*  $C \subseteq \mathbb{N}$  tal que, para toda función  $f$  primitiva recursiva, exista un  $k$  que cumpla  $k \in (C \cup \text{Im } f)$  pero  $k \notin (C \cap \text{Im } f)$ . Justificar apropiadamente.

**Ejercicio 18.** Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Para toda función computable (total)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existe una función primitiva recursiva  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $(f \circ g)$  y  $(g \circ f)$  son primitivas recursivas.
- Sea  $C$  un conjunto infinito. Si para todo  $x \in C$  vale  $\neg \text{Halt}(x, x)$  entonces  $C$  no es computable.
- Si  $C$  y  $D$  son conjuntos c.e. infinitos, entonces existe  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , computable (total), inyectiva, y tal que  $\text{Im } f = C \cup D$ .
- Si  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  es una función tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $g_n(x) = f(n, x)$  es total y computable, entonces  $f$  es computable (total).
- La siguiente función es primitiva recursiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Im } \Phi_x^{(1)} \text{ es un conjunto c.e.} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- \* Sea  $e$  un número fijo, la siguiente función no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } \text{Halt}(e, e) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Existe una función computable  $f$  tal que para todo programa  $p$ , la función computada por el programa con número  $f(\#p)$  es *distinta* a la computada por  $p$ , es decir,  $\Psi_p^{(1)} \neq \Phi_{f(\#p)}^{(1)}$ .