

Solución 2º Parcial Lógica y Computabilidad - Verano 2021

Solución de un alumno

Ejercicio 1

Sea γ una formula proposicional del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$ tal que ninguna de sus variables proposicionales aparece mas de una vez. Demostrar que γ es una contingencia.

Decimos que una fórmula φ es una contingencia cuando existen v, v' tal que:

$$v \models \varphi \text{ y } v' \not\models \varphi$$

Veamos por inducción estructural:

CASO BASE ($\varphi = p$ es un símbolo proposicional): Es una contingencia, simplemente tomamos una valuación $v_1(p) = 1$ y luego tomamos otra $v_2(p) = 0$. Entonces $v_1 \models \varphi$ y $v_2 \not\models \varphi$.

PASO INDUCTIVO:

- Forma $\neg\varphi$ (por HI φ es una contingencia):
Como φ es una contingencia entonces existen v y v' tal que

$$v \models \varphi \text{ y } v' \not\models \varphi$$

Entonces:

$$v \not\models \neg\varphi \text{ y } v' \models \neg\varphi$$

Entonces $\neg\varphi$ es una contingencia.

- Forma $\varphi \rightarrow \psi$ (por HI φ y ψ son contingencias): Como ambas son contingencias, entonces existen v_1, v'_1, v_2, v'_2 tal que:

$$v_1 \models \varphi \text{ y } v'_1 \not\models \varphi$$

$$v_2 \models \psi \text{ y } v'_2 \not\models \psi$$

Luego:

$$v_2 \models \psi \Rightarrow_{\text{por def}} v_2 \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

Definimos:

$$v_s(p) = \begin{cases} v_1(p) & \text{si } p \in VAR(\varphi) \\ v'_2(p) & \text{cc} \end{cases}$$

Esto lo podemos hacer porque $VAR(\varphi) \cap VAR(\psi) = \emptyset$ (porque ninguna de sus variables proposicionales aparece más de una vez). Como:

$$v_s \models \varphi \text{ y } v_s \not\models \psi$$

$$\Rightarrow_{\text{por def}} v_s \not\models (\varphi \rightarrow \psi)$$

Entonces $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una contingencia.

Entonces γ es una contingencia.

Ejercicio 2

El conjunto de los naturales que tienen resto 2 al dividirlos por 3 es el conjunto:

$$\{2, 5, 8, \dots\} = \{2 + 3 \cdot x : x \in \mathbb{N}\}$$

Veamos como expresarlo con el lenguaje \mathcal{L} . Para esto vamos a necesitar utilizar la constante 2 en el alfabeto. Como no está en el lenguaje, vamos ver que es distinguible: Sabemos que:

$$a + b = c \equiv a \leq c$$

Entonces podemos distinguir a los elementos 0, 1 y 2 como:

$$\varphi_0(x) : x + x = x$$

$$\varphi_1(x) : \neg\varphi_0(x) \wedge \forall y(\neg\varphi_0(y) \rightarrow \exists z(f(x, z) = y))$$

$$\varphi_2(x) : \neg\varphi_0(x) \wedge \neg\varphi_1(x) \wedge \forall y(\neg\varphi_0(y) \wedge \neg\varphi_1(y) \rightarrow \exists z(f(x, z) = y))$$

Con esto podemos definir:

$$\varphi(x) : \exists y(\forall p(\varphi_2(p) \rightarrow x = p + y) \wedge \exists z(z + z + z = y))$$

Cumple que $\varphi(x)$ es verdadero sii x resto 3 es 2.

Entonces la nueva relación se puede expresar como:

$$R = \{v(x) : U \models \varphi[v]\}$$

Ejercicio 3

Queremos ver que SQB correcto con respecto a \mathcal{M} , es decir:

$$SQB \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$$

para toda \mathcal{L} -sentencia φ .

Notemos que:

$$\mathcal{M} \models SQB$$

Entonces, sea φ tal que:

$$SQB \vdash \varphi$$

Entonces también por correctitud:

$$SQB \models \varphi$$

Entonces:

$$SQB \models \varphi \text{ y } \mathcal{M} \models SQB \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$$

Ahora veamos que no es completo con respecto a \mathcal{M} , es decir:

$$\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow SQB \not\vdash \varphi$$

para alguna \mathcal{L} -sentencia.

Definimos:

$$\varphi : \forall xy(E(x, y) \rightarrow \exists z(E(y, z)))$$

Que quiere decir: “si te llega algún arco, entonces tenés que tener un arco saliente”.

Notamos que $\mathcal{M} \models \varphi$.

Veamos por el absurdo que $SQB \not\vdash \varphi$: Suponemos que si. Entonces $SQB \models \varphi$ (por correctitud). Entonces cualquier estructura que satisface SQB también satisface φ .

Definimos el modelo \mathcal{B} como:

- $B = \{a, b\}$
- $G_{\mathcal{B}} = \{a\}$
- $B_{\mathcal{B}} = \{b\}$
- $E = \{(a, b)\}$

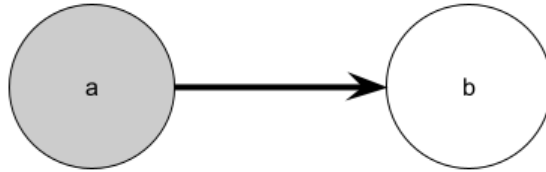


Figure 1: Modelo \mathcal{B}

Notamos que este modelo $\mathcal{B} \models SQB$ pero $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Absurdo, de suponer que $SQB \vdash \varphi$. Entonces $SQB \not\models \varphi$. Entonces SQB no es completo con respecto a \mathcal{M} .