

Guía 6 - Lógica de primer orden

Solución de un alumno

Verano 2021

Ejercicio 1

- a. No porque el codominio de la raíz no son los naturales.
- b. Está bien.
- c. Está bien.

Ejercicio 2

Ejercicio 3

- a. $\exists xy(x \neq y)$
- b. $\exists xy(x \neq y \wedge \neg \exists z(z \neq x \wedge z \neq y))$
- c. $\neg \exists xyz(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
- d.
- e.
- f.

Ejercicio 4

$$\varphi : \neg(\forall x)(\exists y)(f_{\mathcal{A}}(x) = y) \wedge (\forall x, y)(f_{\mathcal{A}}(x) \neq f_{\mathcal{A}}(y))$$

Es satisfacible si tomamos $f_{\mathcal{A}}$ como una función inyectiva pero no sobreyectiva. Para un modelo finito tmb es satisfacible.

Ejercicio 5

Ejercicio 6

$$\mathcal{L} = \{=, +, <\}$$

$$\mathcal{I} = \{\mathbb{N}, +, <\}$$

$$\varphi_0(x) : x + x = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) : \forall y(y < x \rightarrow \varphi_0(x)) \wedge \neg \varphi_0(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) : \forall y(y < x \rightarrow \varphi_0(x) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}(x)) \wedge \neg \varphi_0(x) \wedge \dots \wedge \neg \varphi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Otra forma más fácil es utilizar el operador mayor pegado, que se definiría:

$$\begin{aligned} >'(x, y) : x > y \wedge \neg \exists z(x + z = y \wedge z \neq 0) \\ >' = \{(i, i + 1) : \text{para todo } i\} \end{aligned}$$

Notar que acá sí podemos usar la constante porque estamos definiendo en el operador, cuando definamos la \mathcal{L} -estructura vamos a simplemente dar el conjunto de la relación.

Ejercicio 7

\mathcal{I}_∞) Primero veamos que 0 es un elemento distinguido.

$$\varphi_0(x) : f(x, x) = x$$

Sabemos que:

$$a + b = c \equiv a \leq c$$

Entonces:

$$\varphi_1(x) : \neg \varphi_0(x) \wedge \forall y(\neg \varphi_0(y) \rightarrow \exists z(f(x, z) = y))$$

Que en palabras queremos decir: “no es cero y todos los elementos excepto el cero son mayores”. Notar que entonces todos los naturales son distinguibles simplemente con la suma e igualdad.

\mathcal{I}_∞)

$$\varphi_1(x) : \forall y(f(x, y) = x)$$

Ejercicio 8

a) Definimos:

$$\begin{aligned} noAnteriores_i(x) &= \neg \varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \neg \varphi_i(x) \\ esAnterior_i(x) &= \varphi_1(x) \vee \dots \vee \varphi_i(x) \end{aligned}$$

Solo podemos usarlas cuando están definidas $\varphi_1(x), \dots, \varphi_i(x)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &: \neg \exists y(y \leq x \wedge x \neq y) \\ \varphi_2(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_1(y)) \wedge \exists y_0, y_1, y_2(x \leq y_0 \wedge y \leq y_1 \wedge y \leq y_2 \wedge y_0 \neq y_1 \neq y_2 \neq y) \\ \varphi_3(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_1(y)) \wedge noAnteriores_2(x) \\ \varphi_4(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_2(y)) \wedge noAnteriores_3(x) \\ \varphi_5(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_3(y)) \wedge noAnteriores_4(x) \\ \varphi_6(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_5(y)) \wedge noAnteriores_5(x) \end{aligned}$$

b) $\varphi_1(x) : \neg \exists y(y \leq x)$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_1(y)) \wedge noAnteriores_1(x) \\ \varphi_3(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_2(y)) \wedge noAnteriores_2(x) \wedge \exists z(x \leq z \wedge x \neq z) \\ \varphi_4(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_3(y)) \wedge noAnteriores_3(x) \\ \varphi_5(x) &: \forall y(y \leq x \rightarrow esAnterior_2(y)) \wedge noAnteriores_3(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 9

Si n elementos del universo son distinguibles, entonces el $(n+1)$ -ésimo elemento se puede distinguir mediante la siguiente fórmula:

$$\varphi_{n+1}(x) : \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$$

Ejercicio 10

a.

$$\varphi_1(n, m) : \exists z(f(n, z) = m)$$

$$R_1 = \{(x, y) : \mathcal{I} \models \varphi_1[v] \text{ para algún } v \text{ que } v(n) = x \wedge v(m) = y\}$$

$$\varphi_2(n) : \neg\exists z(z \neq 1 \wedge z \neq m \wedge \varphi_1(z, m))$$

$$P_1 = \{(x) : \mathcal{I} \models \varphi_2[v] \text{ para algún } v\}$$

b.

$$\varphi(n, m) = \exists z(f(n, z) = m \wedge z \neq a)$$

c.

$$\varphi(a, b) = \exists xy((x \circ a \circ y) = b)$$

Ejercicio 11

a. $K_0 = \emptyset$ entonces tenemos que ver que ninguna interpretación \mathcal{I} y valuación v cumpla que $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ para una φ que elijamos nosotros.

$$\varphi(x) : x \neq x$$

b.

$$\varphi(x) : x = x$$

c.

$$\varphi_0(x) : x = x$$

$$\varphi_1(x) : P(x, x)$$

$$\varphi_2(x, y, z) : P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)$$

d.

$$\varphi_0(x) : x = x$$

$$\varphi_1(x) : \exists y(f(x) = g(y))$$