

Solución 1º Parcial Lógica y Computabilidad - Verano 2021

Solución hecha por un alumno.

Ejercicio 1

Definamos $f(x)$ como la función:

$$f(x) = \langle sumaIns1(x), sumaIns2(x), sumaIns3(x) \rangle$$

Si $sumaIns1(x), sumaIns2(x), sumaIns3(x)$ son pr, entonces $f(x)$ es pr, porque la codificación de tripleta está dada como:

$$\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$$

Que es una composición de codificación de pares con codificación de pares. Y la codificación de pares es pr (demostrado en teórica).

Sabemos que:

- $V \leftarrow V + 1$ tiene número de instrucción 1.
- $V \leftarrow V - 1$ tiene número de instrucción 2.
- $IFV \neq 0 \text{ GOTO } L$ tiene número de instrucción $\#(L) + 2$ la cual es siempre mayor a 2 (porque las etiquetas se enumeran desde el 1).

Definimos una función auxiliar que nos va a dar el número de instrucción de una línea del programa:

$$numIns(x, i) = l(r((x + 1)[i]))$$

Que es pr por ser composición de:

- $l(x)$ y $r(x)$ que son pr (visto en teórica).
- $x + 1$ que es pr (la suma es pr, visto en teórica).
- $x[i]$ es pr (visto en teórica).

Luego definimos las funciones:

$$sumaIns1(x) = \sum_{i=1}^{|x+1|} (numIns(x, i) = 1)$$

$$sumaIns2(x) = \sum_{i=1}^{|x+1|} (numIns(x, i) = 2)$$

$$sumaIns3(x) = \sum_{i=1}^{|x+1|} (numIns(x, i) > 2)$$

Que las tres son pr por ser composición de las siguientes funciones:

- $\sum_{t=1}^y f(x, t)$ que es pr (visto en teórica).
- $|\cdot|$ es pr (visto en teórica).
- $x + 1$ que es pr (la suma es pr, visto en teórica).
- $numIns(x, i)$ que es pr (demostrado más arriba).
- $=, >$ que son predicados pr (ejercicio 5 guía 1).

Entonces $f(x)$ es primitiva recursiva.

Ejercicio 2

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{0, 1, \dots, y\} \subseteq Dom(\Phi_x^{(1)}) \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Suponemos que es computable. Entonces también es computable la función:

$$g'(x) = g(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in Dom(\Phi_x^{(1)}) \equiv \Phi_x^{(1)}(0) \downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$g'(x)$ es computable porque es una composición de $g(x, y)$ con la función $f(x) = 0$ en el segundo parámetro. La función nula es primitiva recursiva (función inicial), entonces es computable.

La función $g'(x)$ es la función característica del conjunto:

$$G' = \{x : \Phi_x^{(1)}(0) \downarrow\}$$

Sea C definido como la siguiente clase de funciones:

$$C = \{g(x) : g(0) \downarrow\}$$

Entonces G' es un conjunto de índices porque lo podemos escribir como:

$$G' = \{x : \Phi_x^{(1)} \in C\}$$

Sea P_1 el programa:

[A] GOTO A

Notar que *GOTO A* es una macro (definida en teórica).

Y sea P_2 el programa:

Y <- 0

Entonces $P_1 \notin G'$ y $P_2 \in G'$.

Entonces no es un conjunto trivial (\mathbb{N} o \emptyset). Entonces por teorema de Rice, es un conjunto no computable.

Entonces $g'(x)$ no es computable. Absurdo porque compusimos una función computable con funciones pr (computables).

Entonces $g(x, y)$ no es computable.

Ejercicio 3

R es un conjunto c.e., entonces podemos escribir R como:

$$R = \{x : g(x) \downarrow\} = \text{dom } g$$

Siendo $g(x)$ alguna función parcial computable.

Entonces para ver que

$$W = \bigcup_{x \in R} \text{Dom}(\Phi_x)$$

Es un conjunto c.e., podemos buscar un programa donde se defina únicamente en los elementos de W . Si llegase a ocurrir eso, entonces podríamos tener:

$$W = \{x : g'(x) \downarrow\} = \text{dom } g'$$

Lo cual es la definición de ce. Veamos como construir tal $g'(x)$.

Para que un elemento pertenezca a W , tiene que pertenecer al Dom de los programas generados por los elementos de R .

Sea w el número de un programa que computa la función $g(x)$ (la del dominio de R , existe porque R es ce), entonces podemos definir $g'(x)$ como:

$$g'(y) = (\exists < x, t_1, t_2 >)(STP^{(1)}(x, w, t_1) = 1 \wedge STP^{(1)}(y, x, t_2) = 1)$$

Esta es parcial computable, porque es una composición de las siguientes funciones:

- El $(\exists x)p(x)$ es parcial computable si el predicado $p(x)$ es computable (visto en la teórica).
- $STP^{(1)}(x, y, z)$ es pr (entonces computable)(visto en teórica). Es un predicado que devuelve 1 sii el programa y termina en z o menos pasos con entrada x .
- $=$ es pr (ej4 guía 1).
- \wedge es pr (ej4 guía 1).

Veamos que se define donde queramos (en los elementos que pertenecen al conjunto) y se indefin en el resto (los que no pertenecen).

Sea $p \in \text{Dom}(\Phi_x)$ tal que $x \in R$. Entonces va a existir x, t_1, t_2 tal que:

- $STP^{(1)}(x, w, t_1) = 1$ porque $x \in R$, entonces $g(x) \downarrow$.
- $STP^{(1)}(p, x, t_2) = 1$ porque $p \in \text{Dom}(\Phi_x)$, entonces $\Phi_x(p) \downarrow$.

Notemos que estos dos puntos son **si solo si**, entonces si no suceden ambas cosas la función se va a indefinir.