Guía 5 - Sistemas deductivos para lógica proposicional y aplicaciones de compacidad

Solución de un alumno

Verano 2021

Ejercicio 1

a.

1. $(\alpha \to \beta)$ [pertenece]

2. $(\beta \to \gamma)$ [pertenece]

3. $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ [SP1]
4. $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ [MP 2 y 3]

5. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ [SP2]

6. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ [MP 4 y 5]

7. $\alpha \to \gamma$ [MP 1 y 6]

b. Es SP3 # Ejercicio 2
c. Una fórmula φ es una tautología si para toda v valuación $v \models \varphi$.

$$\gamma : (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

Realizamos tabla de verdad:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \to \neg\psi$	$\psi \to \varphi$	γ
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Entonces vemos que no importa la valuación que tomemos, $v \models \gamma$, entonces es una tautología.

b.
c.

Ejercicio 3

($\Leftarrow$) $\exists \alpha$ tq $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$, entonces inconsistente.
($\Rightarrow$) Sea β tq $\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$. Qvq $\Gamma \vdash \alpha$ para cualquier α.
1. $\neg\beta$ [pertenece] 1. β [pertenece] 2. $\neg\beta \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ [SP1] 3. $(\neg\alpha \to \neg\beta)$ [MP 1 y 3]

4. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ [SP3]
5. $\beta \to \alpha$ [MP 2 y 3]
6. α [MP 2 y 6] # Ejercicio 4

b. (mc $\Leftrightarrow$ 1)

Ambos no pueden estar por consistencia. Veamos que hay uno por lo menos. Suponemos que no. Entonces, como Γ es mc:

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \text{ es inconsistente} \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$$

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \text{ es inconsistente} \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$$

Entonces Γ es inconsistente. Absurdo. La vuelta

(mc $\Leftrightarrow$ 2) $\vdash \varphi$ para toda φ axioma. Como Γ es mc, entonces $\varphi \in \Gamma$.

(mc $\Leftrightarrow$ 3) Como todos los axiomas están en SP, $\Gamma \vdash \beta \Rightarrow \beta \in \Gamma$.

c. $(\neg\alpha \to \beta) \equiv \alpha \vee \beta$.
Veamos por absurdo:

$$\alpha, \beta \notin \Gamma \Rightarrow \neg\alpha, \neg\beta \in \Gamma$$

$$\Rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$$

Absurdo.

Ejercicio 5

a.

- Γ_0 es consistente
- Γ_{n+1} es consistente por como se arma

b. Igual que 4.b.1

c. Sea α un teorema, entonces $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente, entonces por (b) $\alpha \in \Gamma^+$

d. Es consistente por (a). Es maximal por (b). # Ejercicio 6 (a $\Rightarrow$ b)
Veamos por absurdo: Γ no es satisfacible. Entonces Γ no es consistente. Entonces $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \neg\alpha$. Pero entonces por (a), existe $\Gamma_0 \in \Gamma$, $\Gamma_1 \in \Gamma$ finitos tq $\Gamma_0 \models \alpha$ y $\Gamma_1 \models \neg\alpha$. Absurdo.

(b $\Leftrightarrow$ c)
Es la recíproca.

(c $\Rightarrow$ a) ó (b $\Rightarrow$ a)
TERMINAR

Ejercicio 7

Ejercicio 8

Podemos tomar Γ_1 y Γ_2 como los conjuntos mc generados por $\Gamma \cup \{\beta\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ respectivamente.
$\Gamma \cup \{\beta\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ son conjuntos consistentes porque $\Gamma \not\vdash \beta$ y $\Gamma \not\vdash \neg\beta$.
Nota: podemos generarlos por lema de Lindenbaum. Entonces $Con(\Gamma)\alpha Con(\Gamma_1)$ y $Con(\Gamma)\alpha Con(\Gamma_2)$ (por ej 4.7.b).

Ejercicio 9

Ejercicio 10

Ejercicio 11

Γ_1, Γ_2 satisfacibles. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ insatisfacible, entonces inconsistente.
Entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi \wedge \neg\varphi$.
Entonces $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$.
Entonces $\alpha \in Con(\Gamma_1)$ y $\beta \in Con(\Gamma_2)$.
Si tomamos $\alpha = \varphi$ y $\beta = \neg\varphi$, entonces se cumple que $\varphi \to \varphi$.

Ejercicio 12

Ejercicio 13

Sabemos que insatisfacible $\Rightarrow$ existe subconjunto finito insatisfacible.

Tomamos el conjunto $\bar{\Gamma} = \{\neg\alpha : \alpha \in \Gamma\}$. Este conjunto no es satisfacible porque todas las valuaciones no satisfacen algún elemento.

Entonces existe $\bar{\Gamma}_0 \alpha \bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}_0 = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ insatisfacible. Entonces $(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$ es una contradicción.
Entonces $\neg(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$ es una tautología. Esta fórmula equivale a $(\neg\beta_1 \vee ... \vee \neg\beta_n)$ (de Morgan) y todos los $\neg\beta_i \in \Gamma$.

Ejercicio 14

$$\Gamma \models \gamma \underset{ej6.a}{\Rightarrow} \text{existe } \Gamma_0 \alpha \Gamma \text{ finito}, \Gamma_0 \models \gamma$$

$$\Gamma_0 = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$$

$$\alpha_1 \to \alpha_2 \text{ es tautología ó } \alpha_2 \to \alpha_1 \text{ es tautología}$$

Supongo $\alpha_1 \to \alpha_2$ tautología. Entonces podemos sacar α_2 del conjunto Γ_0 y va a seguir valiendo $\Gamma_0 \models \gamma$. De la otra forma sacabamos α_1.
Esto podemos repetirlo n-1 veces (sacando n-1 alfas del conjunto) obteniendo:

$$\Gamma_0 = \{\alpha_i\}$$

para algún $1 \leq i \leq n$. Entonces $\alpha_i = \delta$. # Ejercicio 15 Si Γ_1 satisfacible, Γ_2 satisfacible y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ insatisfacible entonces quiere decir que $\exists \varphi \in \Gamma_2$ tq $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ es insatisfacible. MAL
Qvq existe α tq $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

Veamos por absurdo.
No existe $\alpha \in FORM$,

$$\Gamma_1 \models \alpha \Rightarrow \Gamma_2 \models \neg\alpha$$

Vamos agregando elemento por elemento a Γ_1.

$$\Delta_0 = \Gamma_1$$
$$\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$$

Siendo φ_i el elemento i de Γ_2.
Sea j el mínimo número tal que Δ_j es inconsistente.

$$\Delta_j \cup \{\varphi_j\} \text{ inconsistente} \Leftrightarrow \Delta_j \vdash \neg\varphi_j \Leftrightarrow \Delta_j \models \neg\varphi_j$$

(dem en teórica, usa teo deducción)

TERMINAR

Ejercicio 16

Γ_1 y Γ_2 son consistentes. Entonces: - CASO $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ inconsistente: entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha$ y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\alpha$, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$. - CASO $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es consistente: entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \alpha \Delta$ tq Δ mc (lema de Lindenbaum). Entonces $\Gamma_1 \alpha \Delta$ y $\Gamma_2 \alpha \Delta$.