

Guía 4 - Lógica Proposicional

Solución de un alumno

Verano 2021

Ejercicio 1

- a. $v \models \neg p_1$ por def de valuación
- b. $v \not\models (p_5 \vee p_3) \rightarrow p_1$ porque podemos encontrar la valuación que cumpla $v \models p_5$ y entonces no cumpliría.
- c. $v \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$ si porque $(p_1 \vee p_2)$ siempre es falso.
- d. $v \not\models \neg p_4$ porque podemos encontrar la valuación que cumpla $v \models p_4$ como $v \models \neg p_4$
- e. $v \not\models ((p_8 \rightarrow p_5) \rightarrow (p_8 \wedge p_0))$ porque puede ser que $v(p_5) = v(p_8) = 1$ y $v(p_0) = 0$.

Ejercicio 2

Ejercicio 3

- a. (\Rightarrow) Para toda v valuación, $v \models \alpha$, entonces para toda valuación $v \not\models \neg \alpha$, entonces $\neg \alpha$ no es satisfacible.
- (\Leftarrow) Los entonces también son para el otro lado.
- b. Si para toda v valuación $v \models \alpha \wedge \beta$ entonces $v \models \alpha$ y $v \models \beta$, entonces ambas son tautologías. El entonces es sii.
- c. Si para toda v valuación $v \not\models \alpha \vee \beta$ entonces $v \not\models \alpha$ y $v \not\models \beta$, entonces ambas son contradicciones. El entonces es sii.
- d. Si para toda v valuación $v \not\models \alpha \rightarrow \beta$ entonces $v \models \alpha$ y $v \not\models \beta$, entonces α es una tautología y β una contradicción. El entonces es sii.

Ejercicio 4

a.

$$\begin{aligned} &v_1 \models (\alpha \wedge \beta) \text{ y } v_2 \not\models (\alpha \wedge \beta) \\ \Rightarrow &(v_1 \models \alpha \text{ y } v_1 \models \beta) \text{ y } (v_2 \not\models \alpha \text{ ó } v_2 \not\models \beta) \\ \Rightarrow &(v_1 \models \alpha \text{ y } v_2 \not\models \alpha) \text{ ó } (v_1 \models \beta \text{ y } v_2 \not\models \beta) \end{aligned}$$

b. La definición de \models es recursiva,

Sea γ una fórmula compuesta por símbolos proposicionales:

- $v \models p_1 \rightarrow p_2 \Leftrightarrow v(p_1) = 0 \text{ ó } v(p_2) = 1 \xLeftrightarrow{v(p_i)=v'(p_i)} v' \models p_1 \rightarrow p_2$
- $v \models \neg p_1 \Leftrightarrow v(p_1) = 0 \xLeftrightarrow{v(p_i)=v'(p_i)} v' \models \neg p_1$

Entonces, como toda fórmula está constituida por fórmulas o por símbolos proposicionales, entonces $v(p_i) = v'(p_i) \Rightarrow (v \models \alpha \Leftrightarrow v' \models \alpha)$.

c. (\Leftarrow) Directo.

(\Rightarrow)

$$(\alpha \rightarrow \beta) \text{ tautología} \Leftrightarrow (\forall v \text{ valuación})(v \models (\alpha \rightarrow \beta))$$

$$\Leftrightarrow (\forall v \text{ valuación}) v \models \neg \alpha \text{ ó } (v \models \neg \alpha \text{ y } v \models \beta) \text{ ó } (v \models \beta)$$

Pero como $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$ entonces podemos encontrar una v' tal que:

$$(v \models \neg \alpha \text{ y } v \not\models \beta)$$

Entonces tiene que ser α una contradicción o β una tautología.

d.

Ejercicio 5

Veamos para cada caso de fórmula: - Forma p :

$$v \models \neg p \Leftrightarrow v \not\models p$$

- Forma $\neg \varphi$:

$$v \models \varphi \Leftrightarrow v \not\models \neg \varphi$$

- Forma $\varphi \wedge \psi$:

$$\begin{aligned} v \models \neg \varphi \vee \neg \psi \\ \Leftrightarrow_{DeMorgan} v \models \neg(\varphi \wedge \psi) \\ \Leftrightarrow v \not\models \varphi \wedge \psi \end{aligned}$$

- Forma $\varphi \vee \psi$:

$$\begin{aligned} v \models \neg \varphi \wedge \neg \psi \\ \Leftrightarrow_{DeMorgan} v \models \neg(\varphi \vee \psi) \\ \Leftrightarrow v \not\models \varphi \vee \psi \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7

a) Sea $\varphi \in \Gamma$, entonces por def. de consecuencia semántica, $\Gamma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \text{Con}(\Gamma)$.

b) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

Sea $\varphi \in \text{Con}(\Gamma_1)$. Entonces $\Gamma_1 \models \varphi$. Entonces $\Gamma_2 \models \varphi$ (por definición de \models y que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$).
Entonces $\text{Con}(\Gamma_1) \subseteq \text{Con}(\Gamma_2)$

c)

$$\Gamma_2 \subseteq \text{Con}(\Gamma_3) \Rightarrow \text{Con}(\Gamma_2) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma_3)) = \text{Con}(\Gamma_3)$$

$$\Rightarrow \Gamma_1 \subseteq \text{Con}(\Gamma_3)$$

d) Ya sabemos que $\text{Con}(\Gamma) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$.

Sea $\varphi \in \text{Con}(\text{Con}(\Gamma))$, entonces para toda v valuación pasa que:

$$v \models \text{Con}(\Gamma) \Rightarrow v \models \varphi$$

Y como tenemos que para toda v :

$$v \models \text{Con}(\Gamma) \Leftrightarrow v \models \Gamma$$

Entonces, para toda v :

$$v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$$

Ejercicio 8

a.

$$\text{Con}(\{\beta\}) \subseteq \text{Con}(\{\alpha\})$$

$$\Leftrightarrow \{\alpha\} \models \beta$$

Por def quiere decir:

$$(\forall v)v \models \alpha \Rightarrow v \models \beta$$

Entonces:

$$(\forall v)v \models \alpha \rightarrow \beta$$

b.

1. VERDADERO. Para toda v valuación:

$$v \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow v \models \alpha \wedge v \models \beta$$

Entonces son las mismas valuaciones, entonces las consecuencias semánticas son las mismas.

2. VERDADERO. Para toda v valuación:

$$v \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow v \models \alpha \vee v \models \beta$$

Entonces son las mismas valuaciones, entonces las consecuencias semánticas son las mismas.

3. FALSO. Sea $\alpha = \neg\beta$ y $\beta = p$ siendo p una variable prop. Entonces

$$Con(\alpha \rightarrow \beta) = FORM$$

Pero

$$\neg\beta \notin Con(\beta)$$

Entonces no cumple.

Ejercicio 9

a) Γ es satisfacible, entonces existe v_0 tq $v_0 \models \Gamma$. Entonces, como $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $v_0 \models \Gamma'$, entonces Γ' es satisfacible.

Ahora veamos que no es cierto la recíproca con un contra ejemplo:

$$\Gamma = \{p, \neg p\} \text{ y } \Gamma' = \{p\}$$

b) Γ es satisfacible, entonces existe v_0 tq $v_0 \models \Gamma$. Entonces por def de consecuencia semántica, para todo $\varphi \in Con(\Gamma)$, $v_0 \models \varphi$, entonces $v_0 \models Con(\Gamma)$, entonces $Con(\Gamma)$ es satisfacible.

c) Puede pasar que Γ sea insatisfacible, entonces $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$. También puede ser que no sea consecuencia semántica.

No puede ser que no sea ninguna de las dos. Por definición de $\Gamma \models \varphi$, se cumple o no se cumple.

Ejercicio 10

(a \Rightarrow b)

$$\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$$

$$(\neg\alpha_1 \vee \dots \vee \neg\alpha_n) \in Con(\emptyset)$$

$$\Rightarrow (\forall v : \text{valuación}) v \models (\neg\alpha_1 \vee \dots \vee \neg\alpha_n)$$

$$\Rightarrow (\forall v : \text{valuación}) (\exists i)_{1 \leq i \leq n} v \not\models (\alpha_i)$$

(b \Rightarrow c) (c) nos dice que el conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es insatisfacible. Y está bien porque en (b) dijimos que toda valuación no satisface algún α_i .

(c \Rightarrow d) Sabemos que $Con(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ es insatisfacible, entonces por def todas las fórmulas son consecuencia semántica del conjunto.

(d \Rightarrow a)

$\beta \in Con(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β . Entonces el conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es insatisfacible.

Entonces la fórmula $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$ no es satisfacible para ninguna valuación.

Entonces $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)$ es satisfacible para todas las valuaciones.

Entonces $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$.