Ejercicio 1

Sea γ una formula proposicional del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$ tal que ninguna de sus variables proposicionales aparece mas de una vez. Demostrar que γ es una contingencia.

Decimos que una fórmula φ es una contingencia cuando existen v, v' tal que:

$$v \models \varphi \ y \ v' \not\models \varphi$$

Veamos por inducción estructural:
CASO BASE ($\varphi = p$ es un símbolo proposicional): Es una contingencia, simplemente tomamos una valuación $v_1(p) = 1$ y luego tomamos otra $v_2(p) = 0$. Entonces $v_1 \models \varphi$ y $v_2 \not\models \varphi$.

PASO INDUCTIVO:

- Forma $\neg\varphi$ (por HI φ es una contingencia):
  Como φ es una contingencia entonces existen v y v' tal que

  $$v \models \varphi \ y \ v' \not\models \varphi$$

  Entonces:

  $$v \not\models \neg\varphi \ y \ v' \models \neg\varphi$$

  Entonces $\neg\varphi$ es una contingencia.

- Forma $\varphi \rightarrow \psi$ (por HI φ y ψ son contingencias): Como ambas son contingencias, entonces existen v_1, v_1', v_2, v_2' tal que:

  $$v_1 \models \varphi \ y \ v_1' \not\models \varphi$$

  $$v_2 \models \psi \ y \ v_2' \not\models \psi$$

  Luego:

  $$v_2 \models \psi \underset{\text{por def}}{\Rightarrow} v_2 \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

  Definimos:

  $$v_s(p) = \begin{cases} v_1(p) & si \ p \in VAR(\varphi) \\ v_2'(p) & cc \end{cases}$$

  Esto lo podemos hacer porque $VAR(\varphi) \cap VAR(\psi) =$ (porque ninguna de sus variables proposicionales aparece más de una vez). Como:

  $$v_s \models \varphi \ y \ v_s \not\models \psi$$

  $$\underset{\text{por def}}{\Rightarrow} v_s \not\models (\varphi \rightarrow \psi)$$

  Entonces $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una contingencia.

Entonces γ es una contingencia.