

## PRÁCTICA 7 - SISTEMAS DEDUCTIVOS, COMPLETITUD Y COMPACIDAD PARA LÓGICA DE PRIMER ORDEN -

\*Se aconseja escribir (preferiblemente en  $\text{\LaTeX}$ ) la demostración completa de estos ejercicios para no sufrir en el parcial.

**Ejercicio 1.** Demostrar que MP preserva validez para toda clase de modelos. Es decir que, si  $\mathcal{C} \models \alpha \rightarrow \beta$  y  $\mathcal{C} \models \alpha$  entonces  $\mathcal{C} \models \beta$ .

**Ejercicio 2.** \* Sea  $\Delta = \{SQ1, \dots, SQ7\}$  el conjunto de todos los axiomas de  $SQ$ .

- Supongamos que agregamos a  $\Delta$  una fórmula  $\varphi$  que no es universalmente válida. Mostrar que el sistema resultante no es correcto con respecto a la clase de todos los modelos.
- Yendo al otro extremo, supongamos que eliminamos todos los axiomas, esto es,  $\Delta = \emptyset$ . Mostrar que el sistema resultante no es completo con respecto a la clase de todos los modelos.
- Supongamos que agregamos a  $\Delta$  una nueva fórmula universalmente válida  $\varphi$ . Explicar por qué el sistema resultante es correcto y completo con respecto a la clase de todos los modelos.

**Ejercicio 3.** Se dice que un modelo de primer orden es transitivo cuando todas sus relaciones binarias son transitivas. Partiendo de la axiomatización para  $SQ$ , proponer una extensión  $SQ^T$  que caracterice la clase de modelos transitivos.

- Demostrar que  $SQ^T$  es correcta con respecto a la clase de los modelos transitivos.
- Demostrar que  $SQ^T$  es completa con respecto a la clase de todos los modelos.
- Demostrar que  $SQ^T$  es completa con respecto a la clase de los modelos transitivos.
- Demostrar que  $SQ^T$  no es correcta con respecto a la clase de todos los modelos.

**Ejercicio 4.** Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario  $P$  y un símbolo de constante  $r$ . Sea la clase de modelos  $\mathcal{C} = \{\mathcal{M} \mid P^{\mathcal{M}} \text{ define un árbol con raíz } r \text{ sobre todos los elementos de } \mathcal{M}\}$ , donde por árbol se entiende cualquier árbol dirigido donde cada nodo puede tener una cantidad arbitraria de hijos ( $P(x, y)^{\mathcal{M}}$  afirma que  $x^{\mathcal{M}}$  es el padre de  $y^{\mathcal{M}}$ ). Considerar la axiomatización  $SQ_{\text{Tree}}$ , que extiende a la axiomatización  $SQ$  vista en clase de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{SQ8} & (\forall x)(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)) \\ \text{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(y, x) \wedge P(z, x)) \rightarrow (y = z)) \\ \text{SQ10} & (\forall x)((\forall y)\neg P(y, x) \rightarrow x = r) \end{aligned}$$

Suponiendo que  $SQ$  es correcta y completa con respecto a la clase de todos los modelos:

- Demostrar que los axiomas  $SQ8, SQ9$  y  $SQ10$  son válidos en  $\mathcal{C}$ .
- Sea  $\varphi = (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x))$ . Demostrar que existe un modelo  $\mathcal{M}$  tal que todos los axiomas de  $SQ_{\text{Tree}}$  son válidos en  $\mathcal{M}$ , pero  $\mathcal{M} \not\models \varphi$ .
- Analizar si  $\varphi$  es válida en  $\mathcal{C}$ , y si junto con los puntos anteriores se puede afirmar que  $SQ_{\text{Tree}}$  es correcta pero no es completa con respecto a  $\mathcal{C}$ .

**Ejercicio 5.** \* Sea un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado binarios  $P$  y  $T$ . Sea la clase de modelos  $\mathcal{C} = \{\mathcal{M} \mid P_{\mathcal{M}} \text{ y } T_{\mathcal{M}} \text{ son relaciones binarias, y } P_{\mathcal{M}}^+ = T_{\mathcal{M}}\}$ , en donde  $P_{\mathcal{M}}^+$  representa la clausura transitiva de  $P_{\mathcal{M}}$  (i.e.  $P_{\mathcal{M}}^+$  es la mínima relación transitiva tal que  $P_{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{M}}^+$ ). Considerar la axiomatización  $SQ^+$ , que extiende la axiomatización  $SQ$  vista en clase de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{SQ8} \quad & (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow T(x, y)) \\
\text{SQ9} \quad & (\forall x)(\forall y)(\forall z)((T(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow T(x, z)) \\
\text{SQ10} \quad & (\forall x)(\forall y)((T(x, y) \wedge \neg P(x, y)) \rightarrow (\exists z)(T(x, z) \wedge P(z, y)))
\end{aligned}$$

Sabiendo que  $SQ$  es correcta y completa con respecto a la clase de todos los modelos:

- Demostrar que los axiomas  $SQ8, SQ9$  y  $SQ10$  son válidos en  $\mathcal{C}$ .
- Sea  $\varphi = (\forall x)(\forall y)(T(x, y) \rightarrow ((\exists z)P(x, z)))$ . Mostrar que existe un modelo  $\mathcal{M}$  en donde todos los axiomas de  $SQ^+$  son válidos, pero  $\mathcal{M} \not\models \varphi$ .
- Suponiendo que  $\varphi$  es válida en  $\mathcal{C}$ , demostrar que  $SQ^+$  no es completa con respecto a  $\mathcal{C}$ .

**Ejercicio 6.** \* Considerar un lenguaje de primer orden igualdad, un símbolo de función binario  $+$  y dos constantes  $0$  y  $1$ . Sea  $P$  la axiomatización que extiende a  $SQ$  con:

$$\begin{aligned}
\text{P1} \quad & (\forall x)\neg(0 = x + 1) \\
\text{P2} \quad & (\forall x)(\forall y)x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\
\text{P3} \quad & (\forall x)(\forall y)(x + y) + 1 = x + (y + 1)
\end{aligned}$$

Demostrar que  $P$  no es completa con respecto al modelo de los naturales con la suma.

**Ejercicio 7.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje con igualdad.

- Dar un conjunto de fórmulas  $\Gamma$  tal que si  $\Gamma$  es satisfacible en un modelo  $\mathcal{M}$  entonces el dominio de  $\mathcal{M}$  sea infinito. *Sugerencia:* escribir una fórmula que, dado un  $n$  fijo, fuerce a que el modelo tenga al menos  $n$  elementos.
- Usando compacidad y el ítem anterior, demostrar que no existe ninguna fórmula  $\varphi$  tal que  $\varphi$  es satisfacible en un modelo  $\mathcal{M}$  sii el dominio de  $\mathcal{M}$  es finito.

**Ejercicio 8.** \* Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje con un símbolo de predicado  $R$  binario. Demostrar usando compacidad que no existe una fórmula  $\varphi_R(x, y)$  tal que su interpretación en cualquier  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathcal{M}$  sea que  $(x, y)$  pertenece a la clausura transitiva de la relación binaria  $R^{\mathcal{M}}$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje con un símbolo de predicado  $R$ , y  $\mathcal{M}$  cualquier modelo cuyo dominio represente a los nodos de un grafo no orientado, y el símbolo  $R$  pueda ser interpretado como la relación “es adyacente a” (esto es, cualquier interpretación donde la relación  $R^{\mathcal{M}}$  sea irreflexiva y simétrica). Demostrar que no es posible expresar la propiedad que afirma que un grafo es conexo, es decir, que entre cualquier par de nodos hay un camino de longitud finita.

**Ejercicio 10.** \* Una función  $f$  se dice *circular* cuando para todo elemento  $e$  en el dominio de  $f$  existe un natural  $n > 0$  tal que  $f^n(e) = e$ , en donde  $f^n$  representa el resultado de aplicar  $n$  veces la función  $f$  en forma sucesiva. Mostrar que no es expresable en primer orden la proposición “ $f$  es una función circular”.

**Ejercicio 11.** \* Un número  $r$  es llamado *infinitesimal* si es mayor que cero y menor que todos los reales positivos. Claramente, en el modelo estándar de los reales (notación:  $\mathcal{R}$ ) no hay números infinitesimales. Sea  $SQ_{\mathcal{R}}$  una axiomatización de primer orden correcta con respecto a  $\mathcal{R}$  sobre el lenguaje  $S = \{0, suc, <, +, -, *, /\}$ , que extiende a  $SQ$  con nuevos axiomas. Sea  $SQ_{\mathcal{R}}^+$  una extensión de  $SQ_{\mathcal{R}}$  en donde se agrega un nuevo símbolo de constante  $c$  y los siguientes (infinitos) axiomas:

$$\begin{aligned}
\text{Positivo} \quad & c > 0 \\
\text{Menor}_n \quad & c < \frac{1}{suc^{(n)}(0)} \quad \text{para todo } n > 1
\end{aligned}$$

- Demostrar que si  $\mathcal{M}$  es modelo de  $SQ_{\mathcal{R}}^+$ , entonces  $\mathcal{M}$  es modelo de  $SQ_{\mathcal{R}}$ .
- Demostrar que  $SQ_{\mathcal{R}}^+$  es satisfacible (*Sugerencia:* usar compacidad).

- c. Demostrar que cualquier axiomatización correcta con respecto a  $\mathcal{R}$  admite un modelo que posea números infinitesimales.

**Ejercicio 12.** Vamos a llamar  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0; suc \rangle$  al modelo usual de los números naturales con cero y sucesor. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad  $\mathcal{L}$  con un símbolo de constante 0 y un símbolo unario de función  $suc$ . Sea la siguiente axiomatización  $SQ_N$ , que extiende a  $SQ$  con infinitos axiomas:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{S1} & (\forall x) suc(x) \neq 0 \\ \mathbf{S2} & (\forall x)(\forall y)(suc(x) = suc(y) \rightarrow x = y) \\ \mathbf{S3} & (\forall y)(y \neq 0 \rightarrow (\exists x)(y = suc(x))) \\ \mathbf{S4}_n & (\forall x)(suc^{(n)}(x) \neq x) \quad \text{para todo } n > 1 \end{array}$$

- a. Demostrar que  $S1$  y toda instancia de  $S4_n$  es verdadera en  $\mathcal{N}$ .
- b. Dado un conjunto de fórmulas de primer orden  $\Sigma$ , demostrar que si existe un conjunto finito de fórmulas  $\Gamma$  tal que  $Con(\Gamma) = Con(\Sigma)$ , entonces existe un conjunto finito  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$  tal que  $\Sigma_0 \models \Sigma$ . *Sugerencia:* usar alguna de las formulaciones del teorema de compacidad.
- c. Demostrar que para cualquier subconjunto finito  $\Gamma$  de axiomas de  $SQ_N$  existe un modelo  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M} \models \Gamma$  pero  $\mathcal{M} \not\models SQ_N$ .
- d. Sabiendo que  $SQ_N$  es correcta y completa con respecto a  $\mathcal{N}$ , demostrar que ninguna axiomatización correcta y finita de primer orden es completa con respecto a  $\mathcal{N}$ . *Sugerencia,* aplicar el punto b al ítem anterior.