Guía 6 - Lógica de primer orden

Solución de un alumno

Verano 2021

Ejercicio 1

a. No porque el codominio de la raíz no son los naturales.

b. Está bien.

c. Está bien.

Ejercicio 2

Ejercicio 3

a. $\exists xy(x \neq y)$

b. $\exists xy(x \neq y \land \neg\exists z(z \neq x \land z \neq y))$

c. $\neg\exists xyz(x \neq y \land x \neq z \land y \neq z)$

d.

e.

f.

Ejercicio 4

$$\varphi : \neg(\forall x)(\exists y)(f_{\mathcal{A}}(x) = y) \land (\forall x, y)(f_{\mathcal{A}}(x) \neq f_{\mathcal{A}}(y))$$

Es satisfacible si tomamos $f_{\mathcal{A}}$ como una función inyectiva pero no sobreyectiva. Para un modelo finito tmb es satisfacible.

Ejercicio 5

Ejercicio 6

$\mathcal{L} = \{=, +, <\}$
$\mathcal{I} = \{\mathbb{N}, +, <\}$

$$\varphi_0(x) : x + x = 0$$

$$\varphi_1(x) : \forall y(y < x \to \varphi_0(x)) \wedge \neg\varphi_0(x)$$
$$...$$
$$\varphi_n(x) : \forall y(y < x \to \varphi_0(x) \vee ... \vee \varphi_{n-1}(x)) \wedge \neg\varphi_0(x) \wedge ... \wedge \neg\varphi_{n-1}(x)$$

Otra forma más fácil es utilizar el operador mayor pegado, que se definiría:

$$>' (x, y) : x > y \wedge \neg\exists z(x + z = y \wedge z \neq 0)$$
$$>' = \{(i, i + 1) : \text{para todo } i\}$$

Notar que acá sí podemos usar la constante porque estamos definiendo en el operador, cuando definamos la $\mathcal{L}$-estructura vamos a simplemente dar el conjunto de la relación.

Ejercicio 7

$\mathcal{I}_\infty$) Primero veamos que 0 es un elemento distinguido.

$$\varphi_0(x) : f(x, x) = x$$

Sabemos que:

$$a + b = c \equiv a \leq c$$

Entonces:

$$\varphi_1(x) : \neg\varphi_0(x) \wedge \forall y(\neg\varphi_0(y) \to \exists z(f(x, z) = y))$$

Que en palabras queremos decir: “no es cero y todos los elementos excepto el cero son mayores”. Notar que entonces todos los naturales son distinguibles simplemente con la suma e igualdad.

$\mathcal{I}_\in$)

$$\varphi_1(x) : \forall y(f(x, y) = x)$$

Ejercicio 8

a) Definimos:

$$noAnteriores_i(x) = \neg\varphi_1(x) \wedge ... \wedge \neg\varphi_i(x)$$
$$esAnterior_i(x) = \varphi_1(x) \vee ... \vee \varphi_i(x)$$

Solo podemos usarlas cuando están definidas $\varphi_1(x), ..., \varphi_i(x)$.

Entonces:
$\varphi_1(x) : \neg\exists y(y \leq x \wedge x \neq y)$
$\varphi_2(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_1(y)) \wedge \exists y_0, y_1, y_2(x \leq y_0 \wedge y \leq y_1 \wedge y \leq y_2 \wedge y_0 \neq y_1 \neq y_2 \neq y)$
$\varphi_3(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_1(y)) \wedge noAnteriores_2(x)$
$\varphi_4(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_2(y)) \wedge noAnteriores_3(x)$
$\varphi_5(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_3(y)) \wedge noAnteriores_4(x)$
$\varphi_6(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_5(y)) \wedge noAnteriores_5(x)$

b) $\varphi_1(x) : \neg\exists y(y \leq x)$
$\varphi_2(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_1(y)) \wedge noAnteriores_1(x)$
$\varphi_3(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_2(y)) \wedge noAnteriores_2(x) \wedge \exists z(x \leq z \wedge x \neq z)$
$\varphi_4(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_3(y)) \wedge noAnteriores_3(x)$
$\varphi_5(x) : \forall y(y \leq x \to esAnterior_2(y)) \wedge noAnteriores_3(x)$

Ejercicio 9

Si n elementos del universo son distinguibles, entonces el (n+1)-ésimo elemento se puede distinguir mediante la siguiente fórmula:

$$\varphi_{n+1}(x) : \neg\varphi_1 \wedge ... \wedge \neg\varphi_n$$

Ejercicio 10

a.

$$\varphi_1(n, m) : \exists z(f(n, z) = m)$$

$$R_1 = \{(x, y) : \mathcal{I} \models \varphi_1[v] \text{ para algún v que } v(n) = x \wedge v(m) = y\}$$

$$\varphi_2(n) : \neg\exists z(z \neq 1 \wedge z \neq m \wedge \varphi_1(z, m))$$

$$P_1 = \{(x) : \mathcal{I} \models \varphi_2[v] \text{ para algún v}\}$$

b.

$$\varphi(n, m) = \exists z(f(n, z) = m \wedge z \neq a)$$

c.

$$\varphi(a, b) = \exists xy((x \circ a \circ y) = b)$$

Ejercicio 11

a. $K_0 = \emptyset$ entonces tenemos que ver que ninguna interpretación $\mathcal{I}$ y valuación v cumpla que $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ para una φ que elijamos nosotros.

$$\varphi(x) : x \neq x$$

b.

$$\varphi(x) : x = x$$

c.

$$\varphi_0(x) : x = x$$

$$\varphi_1(x) : P(x, x)$$

$$\varphi_2(x, y, z) : P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z)$$

d.

$$\varphi_0(x) : x = x$$

$$\varphi_1(x) : \exists y(f(x) = g(y))$$