Guía 7 - Sistemas deductivos, completitud y compacidad para lógica de primer orden

Solución de un alumno

Verano 2021

Ejercicio 1

Ejercicio 2

a. Sabemos que $\Delta \vdash \varphi$ (pertenece al conjunto).
Si φ no es universalmente válida, entonces existe un modelo $\mathcal{M}$ tq $\mathcal{M} \not\models \varphi$.
Entonces no es correcto con respecto a la clase de todos los modelos.

b. el conjunto de todos los modelos $\vdash SQ_1$. Pero $\Delta \not\vdash SQ_1$. Entonces Δ no es completo con respecto al conj de todas las interpretaciones.

c.

- CORRECTO: Sabemos que $\Delta \vdash \varphi$ (pertenece al conjunto).
Si φ es universalmente válida, entonces todo modelo $\mathcal{M}$ pasa que $\mathcal{M} \models \varphi$. Entonces es correcto con respecto a la clase de todos los modelos.
- COMPLETO: el conjunto de todos los modelos $\vdash SQ_i$. También $\Delta \vdash SQ_i$ (porque pertenece).
Entonces Δ es completo con respecto al conj de todas las interpretaciones.

Ejercicio 3

SQ8: $\forall xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$

$SQ^T = SQ \cup \{SQ8\}$

a. Si

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es un modelo transitivo}\}$$

Sea

$$\mathcal{C}' = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models SQ^T\}$$

Basta con ver que:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}'$$

Para demostrar que SQ^T es correcto y completo con respecto a $\mathcal{C}$.
($\subseteq$) Si $\mathcal{M}$ es un modelo transitivo entonces $\mathcal{M} \models SQ8$.

($\supseteq$) Si $\mathcal{M} \models SQ8$ implica que la relación binaria que tiene el modelo es transitiva.

Entonces estamos bajo el teorema de Godel, entonces SQ^T es correcto y completo con respecto a $\mathcal{C}$.

b. Qvq para toda fórmula φ:

$$\mathcal{C} = \{\text{todos los modelos}\}$$

$$\mathcal{C} \models \varphi \Rightarrow SQ^T \vdash \varphi$$

Vemos que:

$$\mathcal{C} \models \varphi \Rightarrow SQ \vdash \varphi \underset{(*)}{\Rightarrow} SQ \cup \{SQ8\} \vdash \varphi$$

$$\Rightarrow SQ^T \vdash \varphi$$

(*) vale porque $SQ \cup \{SQ8\}$ es consistente.

c. Ya visto en (a).

d. Qvq NO es cierto que para toda fórmula φ:

$$\mathcal{C} = \{\text{todos los modelos}\}$$

$$SQ^T \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{C} \models \varphi$$

Entonces buscamos φ tq:

$$SQ^T \vdash \varphi \wedge \mathcal{C} \not\models \varphi$$

Sea el modelo $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, =)$, es decir la funcío binaria es la igualdad con interpretación estandar. Vemos que si tomamos φ como $SQ8$:

$$SQ^T \vdash \varphi \wedge \mathcal{M} \not\models \varphi \Rightarrow \mathcal{C} \not\models \varphi$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5

a. SQ8 es válido porque $P \subseteq T$.
SQ9 es válido porque $P \subseteq T$ y T es transitiva.
SQ9 es válido porque T es la relación transitiva extendida de P.

b.

$$\varphi : \forall xy(T(x,y) \rightarrow \exists z(P(x,z)))$$

La φ nos dice: "Si hay una relación transitiva entre x e y, entonces existe una relación entre x y z"

Tomamos el modelo:

Cumple SQ8, SQ9, SQ10 pero no cumple φ.

c. No es completa porque encontramos un modelo que en el que no vale φ, entonces no es posible que $SQ^+ \vdash \varphi$.

Ejercicio 6

Veamos que nos dicen los tres axiomas nuevos:

- $\forall x(0 \neq x+1)$ Es decir, x aplicada con 1 nunca nos da 0.
- $\forall xy(x+1 = y+1 \rightarrow x = y)$ Es inyectiva (al aplicarle 1).
- $\forall xy((x+y)+1 = x+(y+1))$ Es asociativa (no tan fuerte enrealidad).

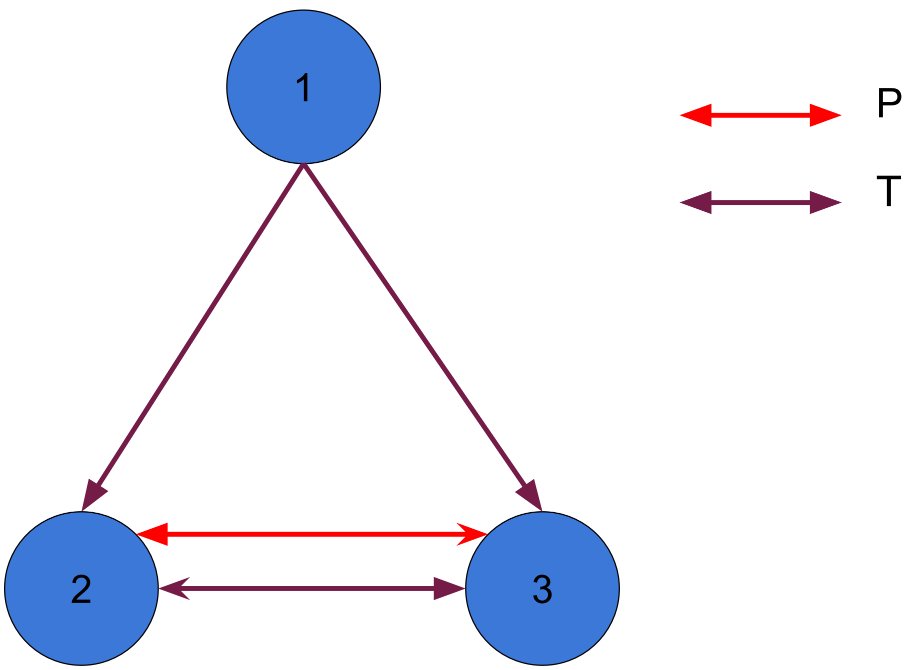

Figure 1: alt text

Tomamos el modelo $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, +, 0_{\mathcal{M}}, 1_{\mathcal{M}})$.
Donde $0_{\mathcal{M}} : 1$ y $1_{\mathcal{M}} : 2$. Este modelo cumple con los axiomas.

Sea la siguiente fórmula:

$$\varphi : \forall x(0 + x = x)$$

Sucede que:

$$\mathcal{C} \models \varphi$$

$$\mathcal{M} \models P$$

Pero

$$\mathcal{M} \not\models \varphi \Rightarrow P \not\vdash \varphi$$

Ejercicio 7

a.

$$\varphi_2 : \exists xy(x \neq y)$$

$$\varphi_3 : \exists xyz(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

$$...$$

$$\varphi_n : \exists z_1 ... z_n(z_1 \neq z_2 \wedge ... \wedge z_1 \neq z_n \wedge z_2 \neq z_3 \wedge ... \wedge z_{n-1} \neq z_n)$$

$\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces M es infinito.

Nota: $(\times_1 \neq \times_2) \equiv \neg(\times_1 = \times_2)$

b. Asumimos que existe tal fórmula y la llamamos α. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\alpha\}$.

- Veamos que es insatisfacible: Suponemos que es satisfacible, entonces existe un modelo y una valuación tal que $\mathcal{M}, v \models \Gamma'$. Entonces $\mathcal{M}, v \models \Gamma$ entonces el dominio es infinito. Pero también $\mathcal{M}, v \models \alpha$ que significa que el dominio es finito. Absurdo. Entonces el conjunto Γ' es insatisfacible.
- Veamos que es satisfacible: para cualquier subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma'$ puede pasar que no contenga ningún φ_i entonces simplemente tomando el modelo con un elemento en el dominio lo satisface. Si por el otro lado contiene φ_i, tomamos k como el mayor i tq $\varphi \in \Delta$. Entonces tomamos el modelo que tiene $k + 1$ elementos en el dominio y este va a satisfacer a Δ. Entonces por compacidad, como todo subconjunto es satisfacible entonces el conjunto Γ' es satisfacible.

Absurdo, no puede ser satisfacible y no satisfacible. Entonces no es expresable la fórmula α.

Ejercicio 8

Suponemos que es expresable. Entonces:

$$\varphi_s(x, y) : \text{pertenece a la clausura transitiva de la relación binaria } R^{\mathcal{M}}$$

Definimos las siguiente fórmulas:

$$\varphi_0(x, y) : \neg\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y) \rightarrow R(x, y))$$

$$...$$

$$\varphi_i(x, y) : \neg\exists z_1 z_2 ... z_i(R(x, z_1) \wedge$$

$$R(z_1, z_2) \wedge ... \wedge R(z_{n-1}, z_n) \wedge R(z_n, y) \to R(x, y))$$

Definimos:

$$\Phi = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$$

$$\Gamma = \Phi \cup \{\varphi_s\}$$

Veamos que sea satisfacible:

$$\mathcal{M} \models \Phi \Rightarrow R \text{ no es transitiva}$$

$$\mathcal{M} \models \varphi_s \Rightarrow R \text{ es transitiva}$$

Si $\mathcal{M} \models \Gamma$, entonces R es transitiva y no es transitiva. Absurdo.

Veamos que es satisfacible:
Sea Δ un conjunto finito tq $\Delta \subset \Gamma$, veamos que es satisfacible.

- $\Delta = \{\varphi_s\}$ ó $\Delta = \emptyset$
- En otro caso: Tomamos k como el máximo i tq $\varphi_i \in \Delta$. Entonces vamos a armar un modelo que satisfaga Δ.
  Tomamos el modelo $\mathcal{M}$ tq $R_{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 3), ..., (k, k + 1), (1, k + 1)\}$. Entonces $\mathcal{M} \models \Delta$.

Entonces es satisfacible. Absurdo. Entonces no existe una fórmula para para φ_s.

Ejercicio 9

Suponemos que es expresable la propiedad y la llamamos α a tal fórmula.

φ_i : "existen dos nodos que no están conectados por i o menos pasos"

$$\varphi_0 : \neg\forall xy(R(x, y))$$

$$\varphi_1 : \exists xy(\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)) \wedge R(x, y) \wedge distintos(x, y, z))$$

$$...$$

$$\varphi_n : \neg\forall xy(\exists z_1, ..., z_n(R(z_1, z_2) \wedge R(z_2, z_3) \wedge ... \wedge R(z_{n-1}, z_n))$$

$\Phi = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$
$\Gamma = \Phi \cup \{\alpha\}$

- Veamos que es insatisfacible: Suponemos que es satisfacible, entonces existe un modelo y una valuación tal que $\mathcal{M}, v \models \Gamma$. Entonces $\mathcal{M}, v \models \Phi$ entonces existe un par de nodos que no tiene camino finito. Pero también $\mathcal{M}, v \models \alpha$ que significa que para todo par de nodos hay un camino finito. Absurdo. Entonces el conjunto Γ es insatisfacible.

- Veamos que es satisfacible: para cualquier subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma'$ puede pasar que no contenga ningún φ_i entonces simplemente tomando el modelo con un elemento en el dominio lo satisface. Si por el otro lado contiene φ_i, tomamos k como el mayor i tq $\varphi \in \Delta$. Entonces tomamos el modelo que tiene $k + 1$ elementos en el dominio y este va a satisfacer a Δ. Entonces por compacidad, como todo subconjunto es satisfacible entonces el conjunto Γ' es satisfacible.

Absurdo, no puede ser satisfacible y no satisfacible. Entonces no es expresable la fórmula α.

Ejercicio 10

Suponemos que es expresable. Entonces:

$$\alpha : \text{f es una función circular}$$

Definimos las siguiente fórmulas:

$$\varphi_0 : \exists x(f(x) \neq x)$$
$$\varphi_1 : \exists x(f^2(x) \neq x)$$
$$...$$
$$\varphi_i : \exists x(f^i(x) \neq x)$$

$\Phi : \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$
$\Gamma : \Phi \cup \{\alpha\}$

I) Suponemos que Γ es satisfacible. Entonces existe $\mathcal{M}$ y v valuación tq $\mathcal{M}, v \models \Gamma$. De aquí se desprende que $\mathcal{M}, v \models \Phi$, lo cual implica que f no es circular porque no existe $i \in \mathbb{N}$ tq $\forall x(f^i(x) = x)$. Pero también $\mathcal{M}, v \models \alpha$. Lo cual implica que f es circular. Absurdo. Entonces Γ es insatisfacible.

II) Sea $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ finito. Entonces es de la forma:

- No tiene ningún φ_i: $\Delta = \{\alpha\}$ ó $\emptyset$
- Tiene algún φ_i: Tomamos k como el mayor natural i tq $\varphi_i \in \Delta$. Entonces tomamos el modelo $\mathcal{M}$ tq tiene una $f_{\mathcal{M}}$ que cumple que es circular a partir de $k+1$ iteraciones. Entonces el modelo satisface Δ.

Entonces por compacidad Γ es satisfacible. Absurdo, no puede ser satisfacible y no satisfacible. Entonces α no es expresable.

Ejercicio 11

Ejercicio 12

a. $S1$: Sabemos por los naturales que el sucesor de un número natural nunca va a ser 0.
$S4_n$: Sabemos que los naturales tienen la propiedad que siempre existe un sucesor (y es distinto del anterior). Entonces $S4_n$ es siempre verdadera.

b. Γ finito,

$$Con(\Gamma) = Con(\Sigma)$$

- Σ insatisfacible: por compacidad existe subconjunto de Σ insatisfacible. Listo.
- Σ satisfacible: Sabemos que $\Gamma \subseteq Con(\Sigma)$ (por def de Con).
Sea $\Delta \subseteq \Sigma$ tq $\Delta \models \Gamma$ y que sea el mínimo que se pueda formar. Entonces vemos que es finito porque Γ es finito (solo se necesitan finitos elementos para derivar finitos elementos).
Notemos que $\Delta \models \Gamma$, entonces $\Delta \models \Sigma$. Listo.

c. Sea k el mayor i tq $S4_i \in \Gamma$, entonces podemos formar el modelo $\mathcal{M}$ tq:

1. $\exists x(suc^{k+1}(x) = x)$ y que
2. para todo $z \leq k$ cumpla $\forall x(suc^z(x) \neq x)$.

Tomamos:
1. $M = \{0, 1, ..., k+2\}$
2. $suc_{\mathcal{M}}(x) = \begin{cases} 1 & x = k+2 \\ x+1 & cc \end{cases}$

Podemos pensarlo como una ronda de nodos, donde $suc_{\mathcal{M}}$ va pasando de nodo a nodo. Notamos que cumple con (1) tomando cualquier x distinto de 0 y cumple con (2).
Nota: no podemos hacer que vuelva al 0 porque sino no cumpliría $S1$.

d. Usamos el recíproco del item (b). Como no existe ningún subconjunto finito de SQ_N que fuerse a SQ_N, entonces no existe ningún conjunto de fórmulas/axiomas va a forzar a SQ_N, es decir ningún conjunto de fórmulas es completa con respecto a $\mathcal{N}$.