Solución 2º Parcial Lógica y Computabilidad - Verano 2021

Solución de un alumno

Ejercicio 1

Sea γ una formula proposicional del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$ tal que ninguna de sus variables proposicionales aparece mas de una vez. Demostrar que γ es una contingencia.

Decimos que una fórmula φ es una contingencia cuando existen v, v' tal que:

$$v \models \varphi \ y \ v' \not\models \varphi$$

Veamos por inducción estructural:
CASO BASE ($\varphi = p$ es un símbolo proposicional): Es una contingencia, simplemente tomamos una valuación $v_1(p) = 1$ y luego tomamos otra $v_2(p) = 0$. Entonces $v_1 \models \varphi$ y $v_2 \not\models \varphi$.

PASO INDUCTIVO:

- Forma $\neg\varphi$ (por HI φ es una contingencia):
  Como φ es una contingencia entonces existen v y v' tal que

  $$v \models \varphi \ y \ v' \not\models \varphi$$

  Entonces:

  $$v \not\models \neg\varphi \ y \ v' \models \neg\varphi$$

  Entonces $\neg\varphi$ es una contingencia.

- Forma $\varphi \rightarrow \psi$ (por HI φ y ψ son contingencias): Como ambas son contingencias, entonces existen v_1, v_1', v_2, v_2' tal que:

  $$v_1 \models \varphi \ y \ v_1' \not\models \varphi$$
  $$v_2 \models \psi \ y \ v_2' \not\models \psi$$

  Luego:

  $$v_2 \models \psi \underset{\text{por def}}{\Rightarrow} v_2 \models (\varphi \rightarrow \psi)$$

  Definimos:

  $$v_s(p) = \begin{cases} v_1(p) & si \ p \in VAR(\varphi) \\ v_2'(p) & cc \end{cases}$$

  Esto lo podemos hacer porque $VAR(\varphi) \cap VAR(\psi) =$ (porque ninguna de sus variables proposicionales aparece más de una vez). Como:

  $$v_s \models \varphi \ y \ v_s \not\models \psi$$
  $$\underset{\text{por def}}{\Rightarrow} v_s \not\models (\varphi \rightarrow \psi)$$

  Entonces $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una contingencia.

Entonces γ es una contingencia.

Ejercicio 2

El conjunto de los naturales que tienen resto 2 al dividirlos por 3 es el conjunto:

$$\{2, 5, 8, ...\} = \{2 + 3 \cdot x : x \in \mathbb{N}\}$$

Veamos como expresarlo con el lenguaje $\mathcal{L}$.
Definimos:

$$\varphi(x) : \exists y(x = 2 + y \wedge \exists z(z + z + z = y))$$

Cumple que $\varphi(x)$ es verdadero sii x resto 3 es 2.
Entonces la nueva relación se puede expresar como:

$$R = \{v(x) : U \models \varphi[v]\}$$

Ejercicio 3

Queremos ver que SQB correcto con respecto a $\mathcal{M}$, es decir:

$$SQB \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$$

para toda $\mathcal{L}$-sentencia φ.
Notemos que:

$$\mathcal{M} \models SQB$$

Entonces, sea φ tal que:

$$SQB \vdash \varphi$$

Entonces también por correctitud:

$$SQB \models \varphi$$

Entonces:

$$SQB \models \varphi \text{ } y \text{ } \mathcal{M} \models SQB \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$$

Ahora veamos que no es completo con respecto a $\mathcal{M}$, es decir:

$$\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow SQB \nvdash \varphi$$

para alguna $\mathcal{L}$-sentencia.
Definimos:

$$\varphi : \forall xy(E(x, y) \rightarrow \exists z(E(y, z)))$$

Que quiere decir: "si te llega algún arco, entonces tenés que tener un arco saliente".
Notamos que $\mathcal{M} \models \varphi$.

Veamos por el absurdo que $SQB \nvdash \varphi$: Suponemos que si. Entonces $SQB \models \varphi$ (por correctitud). Entonces cualquier estructura que satisface SQB también satisface φ.
Definimos el modelo $\mathcal{B}$ como:

- $B = \{a, b\}$
- $G_{\mathcal{B}} = \{a\}$
- $B_{\mathcal{B}} = \{b\}$
- $E = \{(a, b)\}$

Notamos que este modelo $\mathcal{B} \models SQB$ pero $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Absurdo, de suponer que $SQB \vdash \varphi$.
Entonces $SQB \nvdash \varphi$. Entonces SQB no es completo con respecto a $\mathcal{M}$.

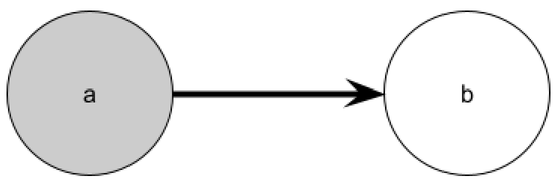

Figure 1: Modelo $\mathcal{B}$