Procesamiento Digital de Imágenes

1er Cuatrimestre 2021

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Transformada de Fourier

Motivación

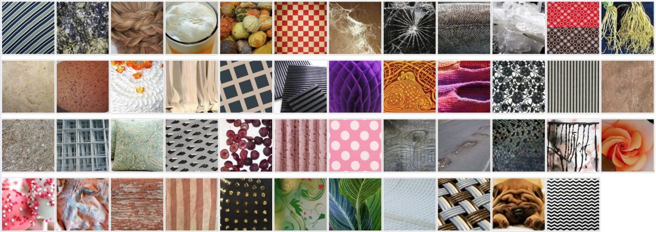
Una rama importante del procesamiento de imágenes estudia la textura

Motivación

Una rama importante del procesamiento de imágenes estudia la textura

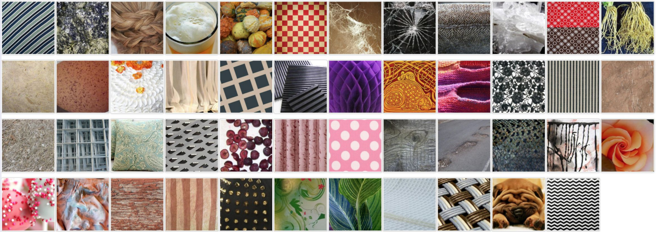
Motivación

Una rama importante del procesamiento de imágenes estudia la textura



Motivación

Una rama importante del procesamiento de imágenes estudia la textura



LA TEXTURA POSEE UNA INFORMACIÓN CUANDO SE REFIERE A UN PATRÓN REPETITIVO

Motivación

Que es un patrón repetido $\longrightarrow$

Motivación

Que es un patrón repetido $\longrightarrow$ un patrón periódico

Motivación

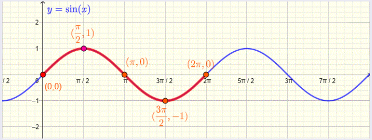
Que es un patrón repetido $\longrightarrow$ un patrón periódico

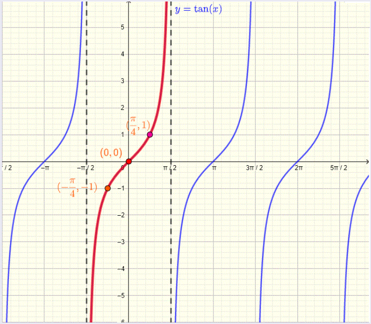
Este tipo de texturas periódicas aparece constantemente en la naturaleza.

Motivación

Una función contínua $f(t)$ periódica, con período T, posee la siguiente propiedad:

$$x(t) = x(t+T)$$

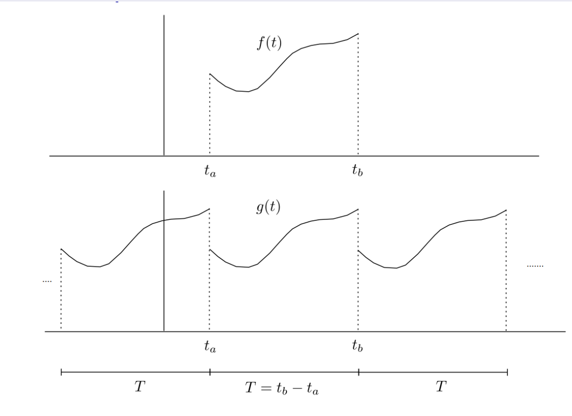




Motivación

Una función contínua $f(t)$ periódica, con período T, posee la siguiente propiedad:

$$x(t) = x(t + T)$$



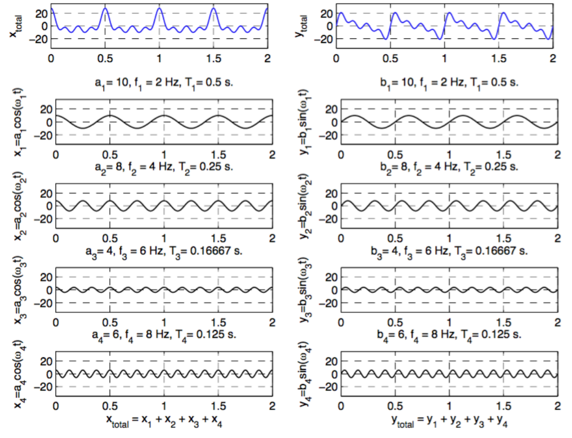
Jean-Baptiste Joseph Fourier
Matemático y físico francés (1768 - 1830)

Toda función periódica puede ser representada como una serie de sinusoides armónicamente relacionadas.

Institut de France (1807)

Series de Fourier

Que significa?



Series de Fourier

Matemáticamente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \qquad (1)$$

donde,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
El hecho que la ecuación 1 sea una suma ponderada de senos y cosenos se desprende de la fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\ \sin\theta$$

Series de Fourier

Prueba rápida:
Usando Euler, podemos escribir un coseno de período $T = 1$, por ejemplo:

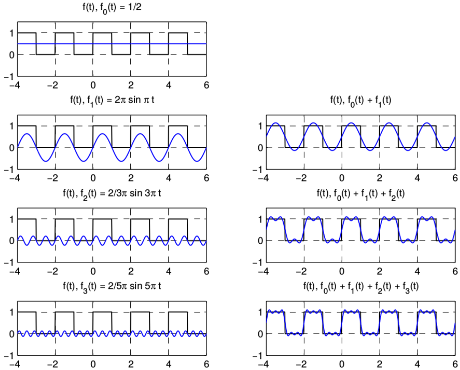
$$\cos(2\pi t) = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} = \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t}$$

Luego, vemos que se condice con las series de Fourier

$$\cos(2\pi t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

y tengo $c_1 = 1/2$ y $c_{-1} = 1/2$.

Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares

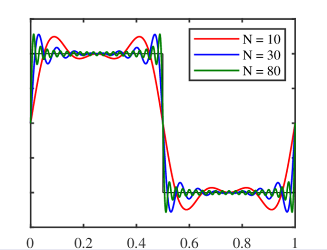


La serie de Fourier de $g(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} sin\pi t + \frac{2}{3\pi} sin3\pi t + \frac{2}{5\pi} sin5\pi t + \cdots$$

Series de Fourier: Funciones con discontinuidades

Fenómeno de Gibbs



Cuantos mas componentes de altas frecuencias, mas 'fina' es la aproximación a la cuadrada. De todas maneras, en la discontinuidad se conserva la integral igual a cero en su vecindario, con lo cual también se conserva el módulo por encima y debajo del valor unitario (para este ejemplo, claro).

Transformada de Fourier

Vimos que las funciones periódicas se pueden aproximar a sumas ponderadas de sinusoidales usando las series de Fourier.
Vamos a extender el análisis para funcions NO periódicas.

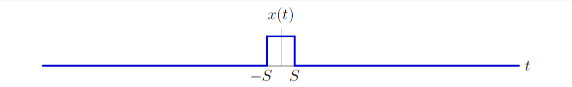
Transformada de Fourier

Una señal aperiódica puede pensarse como una señal periódica, de período infinito...

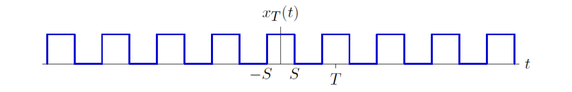
Transformada de Fourier

Una señal aperiódica puede pensarse como una señal periódica, de período infinito...

Sea una señal $x(t)$



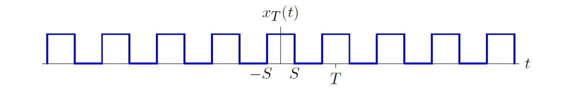
La versión periódica de $x(t)$ es $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$



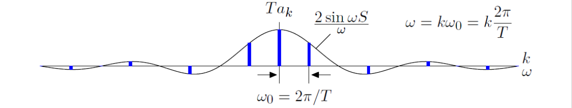
Luego, $x(t) = \lim_{T \to \infty} x_T(t)$

Transformada de Fourier

Representemos $x_T(t)$ en su serie de Fourier

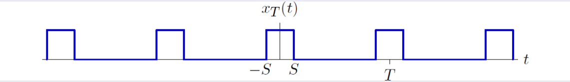


$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{1}{T}\int_{-S}^{S} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{\sin\frac{2\pi kS}{T}}{\pi k} = \frac{2}{T}\frac{sin\omega S}{\omega}$$

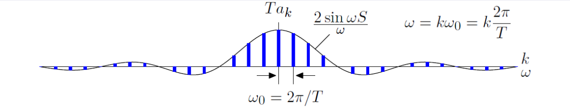


Transformada de Fourier

Duplicar el período duplica el nro de armónicos

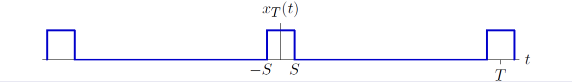


$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T}\int_{-S}^{S} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{\sin\frac{2\pi k S}{T}}{\pi k} = \frac{2}{T}\frac{sin\omega S}{\omega}$$

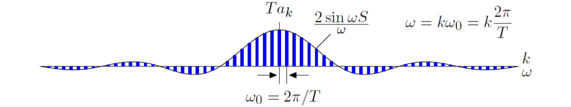


Transformada de Fourier

Para $T \to \infty$, los armónicos discretos tienden a un contínuo $E(\omega)$



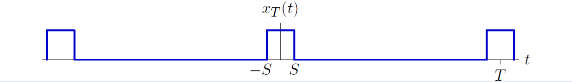
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{1}{T}\int_{-S}^{S} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt = \frac{\sin\frac{2\pi kS}{T}}{\pi k} = \frac{2}{T}\frac{sin\omega S}{\omega}$$

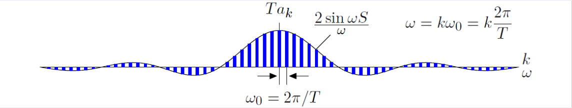


$$\lim_{T\to\infty} Ta_k = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{2}{\omega}\sin\omega S = E(\omega)$$

Transformada de Fourier

Para $T \to \infty$, la sumatoria $\to$ en una integral





$$\lim_{T\to\infty} Ta_k = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{2}{\omega}\sin\omega S = E(\omega)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T}E(\omega)}_{a_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi}E(\omega)e^{j\omega t} \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada de Fourier

Reemplazo $E(\omega)$ por $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{Ecuación de análisis}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \text{Ecuación de síntesis}$$

Función Delta de Dirac

Vamos a definir una herramienta muy útil y potente en el análisis de señales: la función Delta de Dirac $\delta(t)$.
También llamada impulso unitario, esta función contínua está definida en $t = 0$ y posee las siguientes propiedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

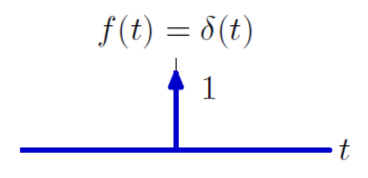
y además

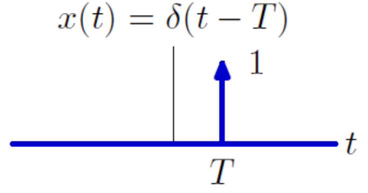
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Se puede utilizar esta función para definir la propiedad de desplazamiento

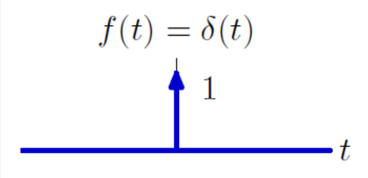
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \text{ y también } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

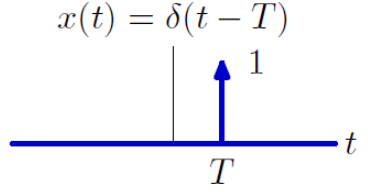
Función Delta de Dirac





Función Delta de Dirac





Y como última propiedad, la transformada de un delta desplazado es:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega T}$$

También, si es $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, su transformada inversa es:

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t} \qquad (2)$$

Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

Sea una función coseno con una frecuencia ω_0: $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.
Su transformada de Fourier se calcula:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

Sea una función coseno con una frecuencia ω_0: $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.
Su transformada de Fourier se calcula:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt$$

Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

Sea una función coseno con una frecuencia ω_0: $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.
Su transformada de Fourier se calcula:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

Sea una función coseno con una frecuencia ω_0: $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.
Su transformada de Fourier se calcula:

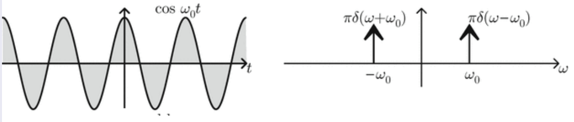
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt$$

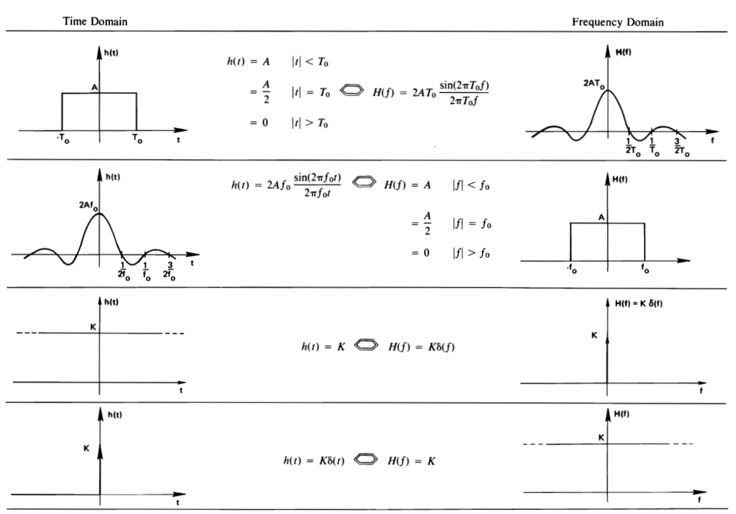
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

De 2 sabemos a que transformada de Fourier corresponden las exponenciales:

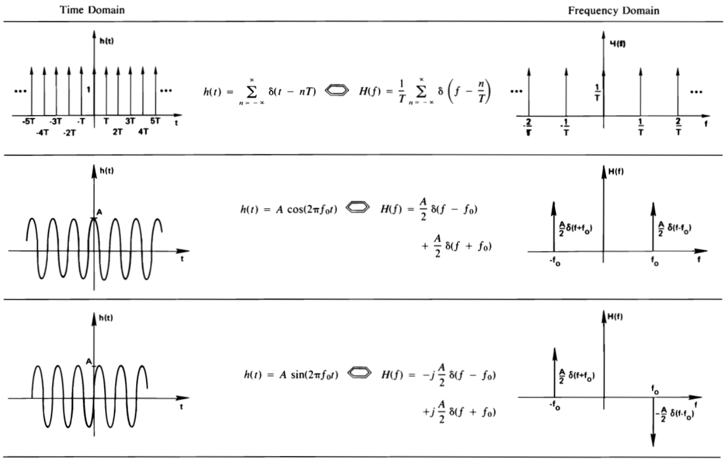
$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{2\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0)$$



Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

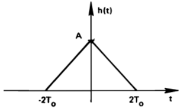


Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

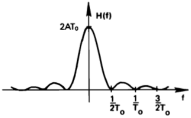


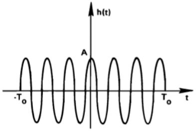
Ejemplo de Transformada de Fourier contínua

Time Domain		Frequency Domain

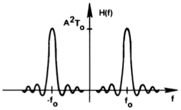


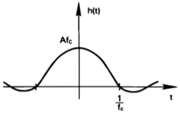
$$h(t) = -\frac{A}{2T_0}t + A \qquad |t| < 2T_0$$
$$= 0 \qquad |t| > 2T_0$$
$$\Longleftrightarrow \quad H(f) = 2AT_0 \frac{\sin^2(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$



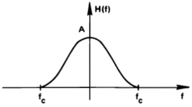


$$h(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \qquad |t| < T_0$$
$$= 0 \qquad |t| > T_0$$
$$\Longleftrightarrow \quad H(f) = A^2T_0[Q(f+f_0) + Q(f-f_0)]$$
$$Q(f) = \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$





$$h(t) = \frac{Af_c}{2}q(t) + \frac{Af_c}{4}q\left(t + \frac{1}{2f_c}\right) + \frac{Af_c}{4}q\left(t - \frac{1}{2f_c}\right)$$
$$q(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$
$$\Longleftrightarrow \quad H(f) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos\left(\frac{\pi f}{f_c}\right) \qquad |f| \le f_c$$
$$= 0 \qquad |f| > f_c$$



DFT - Transformada Discreta de Fourier 1-D

Sea $f(n) : n \in [0, .., N-1]$ se define el par transformada-antitransformada discreta de Fourier 1-D:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{\frac{-2\pi i n k}{N}}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{\frac{2\pi i n k}{N}}, \qquad n = 0, ..., N-1$$

DFT - Transformada Discreta de Fourier 2-D

Sea $f(m,n) : m,n \in [0,..,N-1]$ se define el par transformada-antitransformada discreta de Fourier 2-D:

$$F(k,l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f(m,n) e^{\frac{-2\pi i(mk+nl)}{N}}, \qquad k,l = 0,...,N-1$$

$$f(m,n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k,l) e^{\frac{2\pi i(mk+nl)}{N}}, \qquad m,n = 0,...,N-1$$

Definiciones

- $f(x,y)$ y su transformada $F(u,v)$, (x,y) variables espaciales, (u,v) variables de frecuencia
- $F(u,v)$ es una función compleja
- $F(u,v) = R(u,v) + i \quad Im(u,v)$
- $F(u,v) = |F(u,v)|e^{-i\phi(u,v)}$
- $|F(u,v)| = \sqrt{R^2 + I^2}$ es el espectro de Fourier de $f(x,y)$
- $\phi(u,v) = arctg(\frac{I(u,v)}{R(u,v)})$ es el ángulo de fase
- $|F(u,v)|^2$ es el espectro de potencia de $f(x,y)$

Propiedades

1. $F^{-1}(F(k)) = f(n)$
2. $F(f * g) = F(f).F(g)$
3. $F(k) = F(k + N)$
4. Si $f(n)$ es real, entonces $F(k) = F^*(-k)$(simétrica conjugada).
5. $|F(k)| = |F(-k)|$
6. $F^*(N - k) = F(k)$
7. $F^*(\frac{N}{2} + k) = F(\frac{N}{2} - k)$ para $k = 0, 1, .., \frac{N}{2} - 1$.

Teorema de Convolución

$$F[f(x,y) * h(x,y)] = F(u,v)H(u,v)$$

Convolución en el espacio = Multiplicación en las frecuencias

La transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es el producto de cada transformada de Fourier.

Importancia: las operaciones de filtrado lineal en el espacio son simples multiplicaciones en el dominio de Fourier.

Coordenadas espaciales - Coordenadas en frecuencia

- Linealidad

$$\alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \Leftrightarrow \alpha F(u,v) + \beta G(u,v)$$

- Similaridad

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab} F(\frac{u}{a}, \frac{v}{b})$$

Esto se aplica, por ejemplo, cuando una imagen es escalada.

- Desplazamiento (Shift)

$$f(x-a, y-b) \Leftrightarrow e^{i2\pi(au+bv)} F(u,v)$$

$$e^{-i2\pi(xa+yb)} f(x,y) \Leftrightarrow F(u-a, v-b)$$

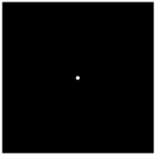
En particular:

$$(-1)^{(x+y)} f(x,y) \Leftrightarrow F(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2})$$

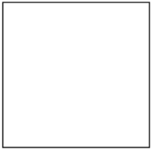
Ejemplos

$$f(x,y) = \delta(x,y) = \delta(x)\delta(y)$$

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int\int \delta(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dxdy \\ &= 1 \end{aligned}$$

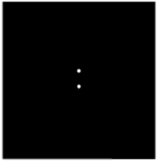


$f(x,y)$



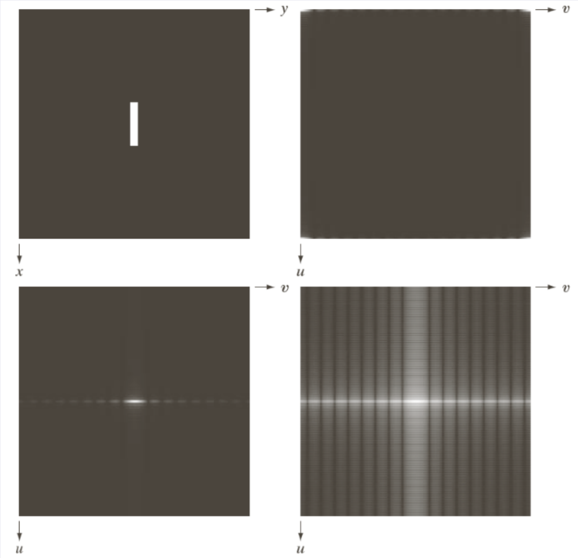
$F(u,v)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(\delta(x,y-a) + \delta(x,y+a))$$

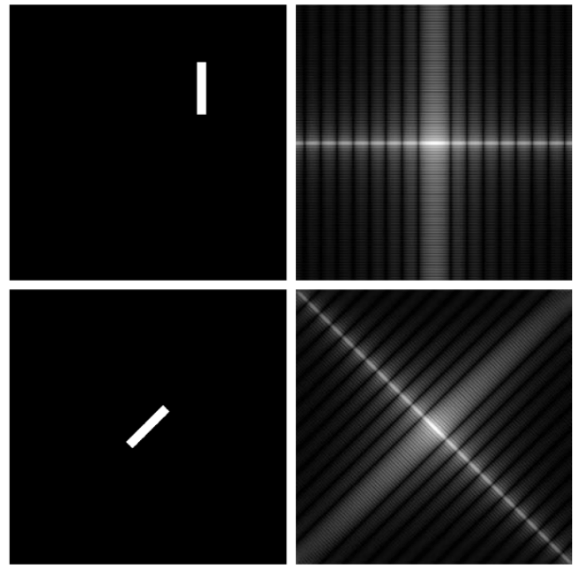


$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{1}{2}\int\int (\delta(x,y-a) + \delta(x,y+a))\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dxdy \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-j2\pi av} + e^{j2\pi av}\right) = \cos 2\pi av \end{aligned}$$

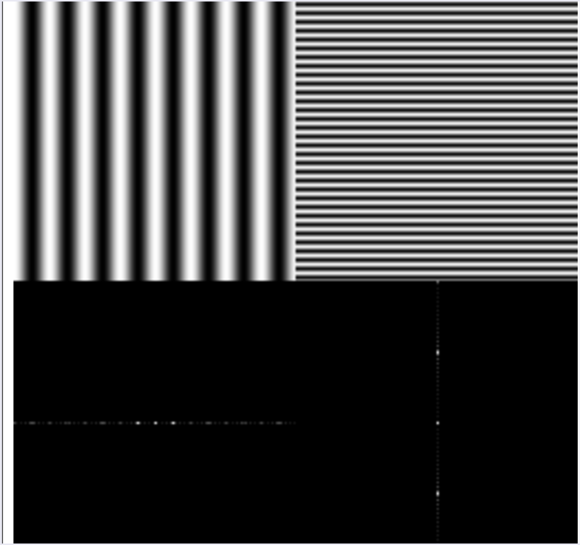
Ejemplos



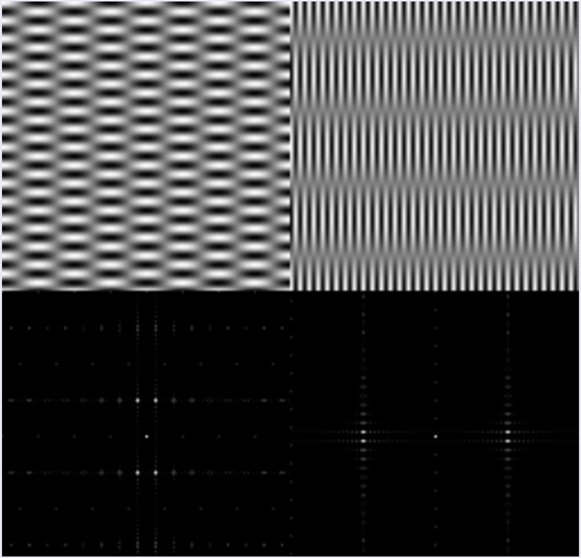
Ejemplos



Ejemplos



Ejemplos



Ejemplos

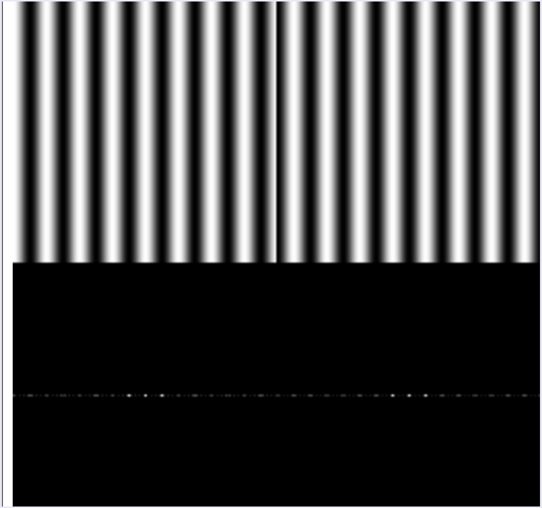
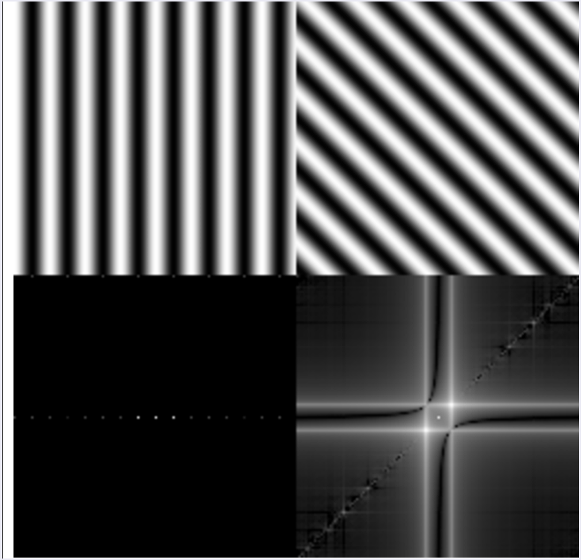
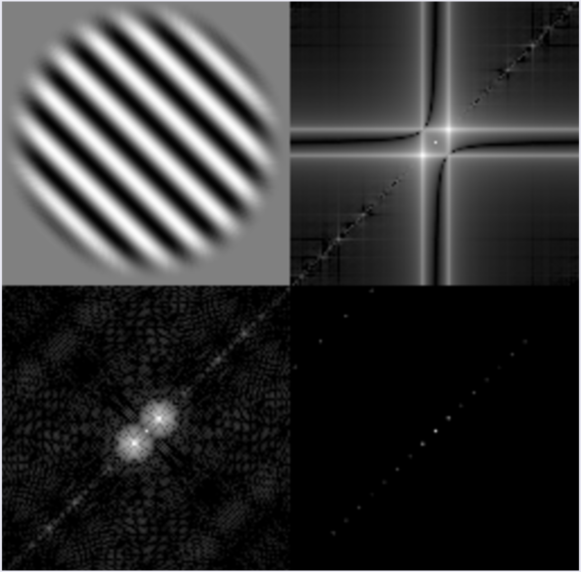


Figura: Imagen original y su trasladada (arriba) y sus transformadas de Fourier (abajo)

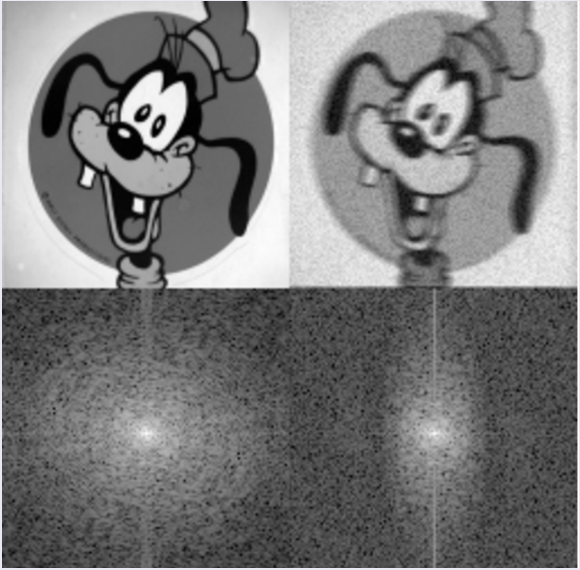
Ejemplos



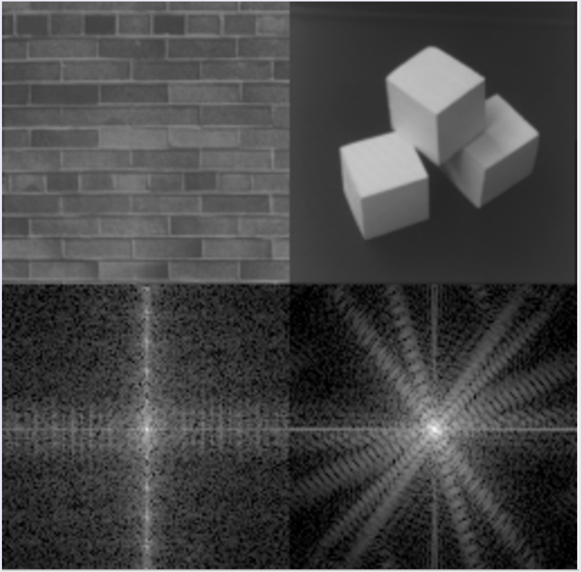
Ejemplos



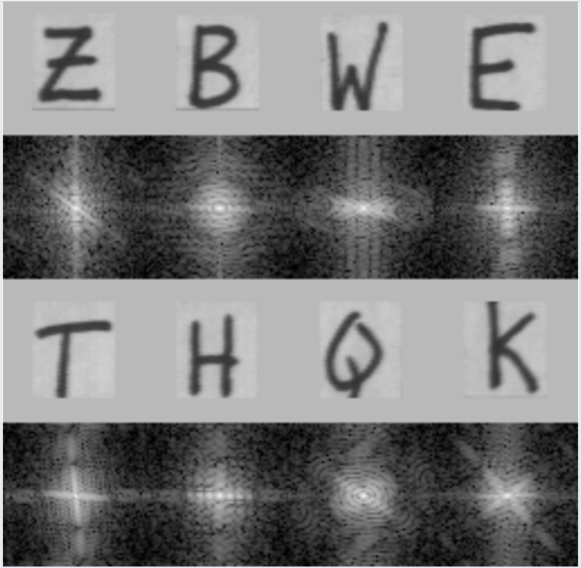
Ejemplos



Ejemplos



Ejemplos



Ejemplos

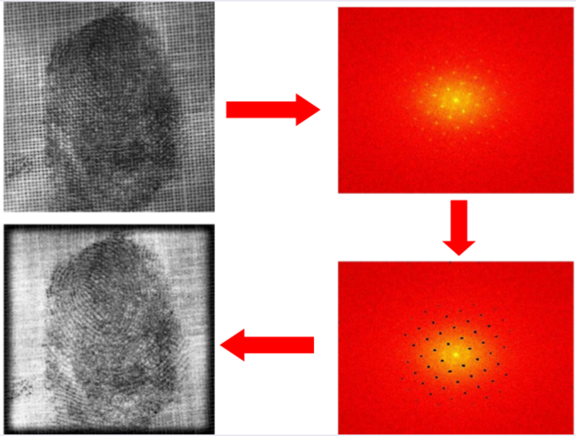


Figura: a) imagen de huella digital, b) $|F(u, v)|$ c) se remueven los picos, d)$F^{-1}(F(u, v))$.

Ejemplos

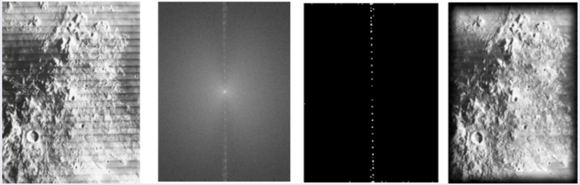
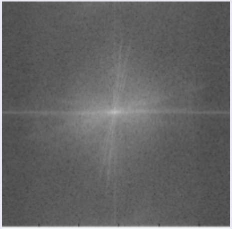
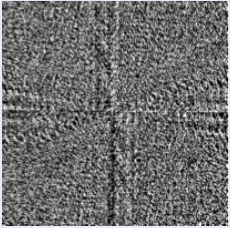


Figura: a) imagen de la luna, b) $|F(u,v)|$, c) se remueven las líneas, d)$F^{-1}(F(u,v))$.

Módulo y Fase

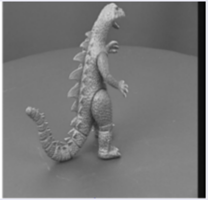


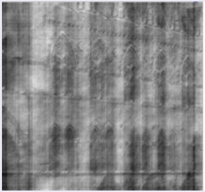
$|F(u,v)|$

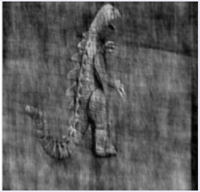


Fase

Intercambio de Módulo y Fase







a) Módulo de Gotzila, fase del edificio (izq.)
b) Módulo del edificio, fase de Gotzila (der.)