Guía 4: Turbulencia Hidrodinámica

1) Ley de Richardson

a) Dos elementos de fluido en un flujo turbulento isótropo y homogéneo están inicialmente a una distancia λ dentro del rango inercial. A partir de análisis dimensional muestre que esta distancia crece como,

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}, \tag{1}$$

donde ε es la tasa de disipación de energía por unidad de tiempo.

b) Deduzca entonces la Ley de Richardson para la difusión turbulenta: el tiempo requerido para que la distancia entre los dos elementos de fluido sea λ_2 (con $\lambda_2 >> \lambda_1$) es $\tau \sim (\lambda_2^2/\varepsilon)^{1/3}$ (o, equivalentemente, que la distancia cuadrática que separa las partículas crece como el tiempo al cubo).

2)

a) A partir de análisis dimensional, muestre que para un flujo turbulento isótropo y homogéneo en ausencia de fuerzas externas el balance de energía en el rango inercial se reduce a,

$$\frac{\partial E}{\partial t} \sim -\varepsilon. \tag{2}$$

b) Asumiendo que la energía decae en forma auto–semejante, $E(t) \sim E_0 t^{-\alpha}$ y que el fluido está contenido en un recipiente con longitud característica L, muestre que $\alpha = 2$.

3) Espectro de Kolmogorov y la ley de los 4/5

Considere una magnitud escalar θ que es advectada y difundida en forma pasiva por un flujo incompresible turbulento isótropo y homogéneo con densidad uniforme ρ_0. Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son la ecuación de Navier-Stokes para el campo de velocidad $\mathbf{u}$, y la ecuación de advección para la concentración del escalar pasivo θ,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = \kappa\nabla^2\theta, \tag{4}$$

donde κ es la difusividad del escalar pasivo.

a) Asumiendo condiciones de contorno periódicas, obtenga una ecuación de balance para la varianza del escalar pasivo,

$$\Theta = \frac{1}{2}\langle\theta^2\rangle = \frac{1}{2V}\int \theta^2 dV \tag{5}$$

y muestre que Θ es una magnitud conservada cuando $\kappa = 0$.

b) Utilizando análisis dimensional, muestre que en el rango inercial el flujo de la varianza del escalar pasivo, $\varepsilon_\theta \sim \frac{d\Theta}{dt}$ satisface la siguiente relación,

$$\varepsilon_\theta \sim \frac{\delta\theta_\ell^2 \delta u_\ell}{\ell}, \tag{6}$$

donde ℓ es una escala del rango inercial y δ implica la función incremento. Esta ley es equivalente a la ley de los 4/5 de Kolmogorov para el campo de velocidades. Interprete este resultado en términos de una cascada turbulenta de la magnitud física.

c) Utilizando esta relación, y asumiendo que el espectro de la energía cinética es el espectro de Kolmogorov, $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, obtenga la predicción de Kolmogorov–Obukhov–Corrsin para el espectro de la varianza del escalar pasivo, $E_\theta(k) = C_\theta \varepsilon^{-1/3} \varepsilon_\theta k^{-5/3}$.

4) Escala de Kolmogorov y funciones de estructura

Haciendo uso del solver `HD` en GHOST, resuelva numéricamente las ecuaciones para un flujo incompresible con $\rho_0 = 1$ y $\nu = 3.5 \times 10^{-3}$ en un recinto cubico de longitud lineal 2π, resolución espacial $N_x = N_y = N_z = 128$ y en ausencia de forzado. Utilizar condiciones iniciales de Taylor Green con `kdn = kup = 1` y velocidad inicial r.m.s. $u_0 = 1$. Hacer uso del Material Adicional. Ayuda: usar los parametros `outs = 0` y `trans = 1`.

(a) Elija el paso temporal dt usando la condición CFL. Evolucione el sistema hasta $t = 20$. Guarde espectros de la velocidad cada $\Delta t \sim 0.7$, y el campo de velocidad cada $\Delta t \sim 1.4$.

(b) Grafique la enstrofía en función del tiempo (ayuda: estudiar el archivo ‘balance.txt’). Estime la tasa máxima de disipación de energía por unidad de tiempo ε, y con ese valor estime el numero de onda de Kolmogorov k_η. Cómo compara este número de onda con el máximo número de onda resuelto por la simulación?

(c) Durante el máximo de enstrofía, grafique el espectro de energía en escala log-log. GHOST guarda estos espectros en los archivos ‘kspectrum.*.txt’ (Ayuda: puede promediar varios espectros en el tiempo para reducir las fluctuaciones). Identifique los números de onda relevantes, y grafique como referencia una ley de potencias de Kolmogorov. Obtiene el resultado esperado? Interprete.

(d) En los archivos ‘ktransfer.*.txt’, GHOST guarda la función de transferencia $T(k)$. Utilice estos archivos para calcular el flujo de energía $\Pi(K) = -\sum_{k=0}^{K} T(k)$ durante el máximo de enstrofía. Qué signo tiene el flujo? Grafique $\Pi(K)$ en escala lin–log. Interprete.

(e) Grafique el decaimiento de la energía cinética $E(t)$ en escala log-log. Qué espera obtener? Compare los resultados con los obtenidos en el Problema 2.

(f) Utilizando la componente x del campo de velocidad en un instante cercano al máximo de enstrofía, calcule la función de estructura de segundo orden

$$S_2(r) = \left\langle [u_x(\mathbf{x} + r\hat{x}) - u_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle, \tag{7}$$

donde el valor medio es espacial sobre la coordenada **x** (es decir, sobre todos los puntos del recinto). Grafique $S_2(r)$ en escala log–log. Obtiene el resultado esperado? Por qué?