Guía 2: Flujos Rotantes y Estratificados

1) Rotación y helicidad cinética

Considere un fluido incompresible en un sistema rotante con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) + 2\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{1}$$

donde ν es la disipación cinemática y $p = p' - (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x})^2/2$ es la presión reducida.

a) Muestre que para condiciones de contorno periódicas, la helicidad cinética,

$$H \equiv \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV, \tag{2}$$

satisface una ecuación de balance y se conserva cuando $\nu = 0$ (*ayuda: halle la ecuación de evolución para la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}$, y utilice notación de índices para transformar los términos no lineales y de presión*).

b) Para el caso en que $\nu \neq 0$, muestre que la tasa de disipación de helicidad cinética esta controlada por,

$$S \equiv \int_V \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}) dV. \tag{3}$$

(*Ayuda: utilice la identidad vectorial de Green*).

c) La helicidad cinética es una forma de cuantificar si un flujo posee (o no) simetría de reflexión. Que ocurre con el signo de H ante reflexiones?

2) Haciendo uso del solver `ROTH` en GHOST, resuelva numéricamente la ecuación para un flujo rotante incompresible con densidad uniforme $\rho_0 = 1$ y $\nu = 3 \times 10^{-3}$ en un recinto cubico de longitud lineal 2π y resolución espacial $N_x = N_y = N_z = 128$. Hacer uso del Material Adicional. Construya una perturbación inicial aleatoria $\delta \mathbf{u}$ (incompresible) concentrada en una banda horizontal con altura $2\pi/3$ en el centro de la caja y nula en el resto del recinto, con número de onda $k = 5$, energía cinética inicial $E = \langle u^2/2 \rangle = 1$ (donde $\langle \cdot \rangle$ indica el valor medio espacial) y sin forzado. La resolución espacial de todas las simulaciones será $N_x = N_y = N_z = 128$.

(a) Estime en base a estos datos qué paso temporal debería utilizar según la condición CFL estudiada en la Guía 1. Estime el número de Rossby para la condición inicial.

(b) Para $\Omega = 10$, integre el sistema hasta $t = 1$, guardando la velocidad y la vorticidad cada $\Delta t = 0.05$ pasos. Visualice la densidad de helicidad,

$$h(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}), \tag{4}$$

en un corte bidimensional en el plano $\hat{x} - \hat{z}$. Que ocurre con dicha cantidad a medida que el sistema evoluciona?

(c) Estime a qué velocidad media se propagan los paquetes con $h > 0$ y con $h < 0$. Qué velocidad espera obtener? Compare estos resultados con una simulación no rotante, es decir, $\Omega = 0$.

(d) Realice simulaciones variando Ω entre 0 y 20 (con pasos de 5). Grafique la velocidad media de propagación de los paquetes en función de Ω.

(e) Para este conjunto de simulaciones, calcule $\langle | \frac{\partial u}{\partial z} | \rangle$ en función del tiempo (utilice diferencias finitas para estimar la derivada espacial). Que ocurre al aumentar Ω?

3) Estratificación y energía total

Considere un fluido estratificado e incompresible de densidad media $\bar{\rho}$, bajo la aproximación de Boussinesq. El fluido satisface las siguientes ecuaciones,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} \left(\frac{p}{\bar{\rho}} \right) - N\theta \hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta = N u_z + \kappa \nabla^2 \theta, \tag{6}$$

donde N es la frecuencia de Brunt-Väisälä uniforme, θ es el potencial de las fluctuaciones de temperatura, ν es la viscosidad cinemática y κ es la difusividad térmica.

a) Muestre que la energía cinética $E_c = \frac{\rho_0}{2} \int_V u^2 dV$ no se conserva en el caso ideal ($\nu = \kappa = 0$). Asuma condiciones de contorno periódicas. Se le ocurren otras?

b) Obtenga una ecuación de balance para la energía total (cinética más potencial),

$$E \equiv \frac{\rho_0}{2} \int_V u^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \theta^2 dV. \tag{7}$$

c) Que cantidades controlan la tasa de disipación total? Físicamente a que corresponden?

4) Haciendo uso del solver `BOUSS` en GHOST, resuelva numéricamente las ecuaciones para un flujo incompresible con $\rho_0 = 1$, $\nu = \kappa = 3 \times 10^{-3}$ en un recinto cubico de longitud lineal 2π y resolución espacial $N_x = N_y = N_z = 128$. Hacer uso del Material Adicional. Imponga un viento horizontal uniforme $\mathbf{u} = U\hat{x}$ ($U = 1$), y perturbe este viento con una fuerza $\mathbf{f} = f_0\hat{z}$ confinada a una banda vertical con $x \in [0, \pi/10]$. Observe que este es un modelo simplificado para el estudio de ondas de sotavento.

(a) Para $f_0 = 0.1$, integre el sistema hasta $t = 5$ con una frecuencia de Brunt-Väisälä $N = 10$. Verifique que se genera una onda estacionaria (ayuda: puede guardar los campos cada $\Delta t = 0.5$, y observar cortes de la temperatura en le plano $\hat{x} - \hat{z}$).

(b) Estudie la longitud de onda de la onda estacionaria en función de la frecuencia de Brunt-Väisälä N, variándola entre 1 y 15 (pasos de a 3).