Guía 5: Turbulencia Geofísica y Magnetohidrodinámica

1) Anisotropía, longitudes características y números de Reynolds

Haciendo uso del solver `ROTH` en GHOST, resuelva numéricamente la ecuación para un flujo rotante incompresible con densidad uniforme $\rho_0 = 1$ y $\nu = 2 \times 10^{-3}$ en un recinto cubico $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ y resolución espacial $N_x = N_y = 192$ y $N_z = 48$. Hacer uso del Material Adicional. Para condiciones iniciales nulas para el campo de velocidades y un forzado mecánico aleatorio con amplitud $f_0 = 0.75$ y número de onda `kup = kdn = 1` integre las ecuaciones hasta $t = 25$. En el forzado actualice las fases al azar (con la opción `rand = 2` en el archivo de entrada) con un tiempo de correlación `cort = 0.5` (de esta forma las fases de los modos Fourier en el forzado cambiarán cada $\Delta t = 0.5$). Utilice una frecuencia de rotación $\Omega_z = 8$ y guarde los espectros cinéticos cada $\Delta t \sim 0.5$ y el campo de velocidades cada $\Delta t \sim 1.5$.

a) Utilizando la resolución espacial y la condición CFL, y asumiendo que en el estado turbulento la velocidad característica será $u \sim 1$, elija el paso temporal dt que utilizará para la integración numérica.

b) Grafique la energía, la enstrofía y la tasa de inyección de energía en función del tiempo *(ayuda: ver la segunda, tercera y cuarta columna del archivo 'balance.txt')*. Verifique numéricamente la relación

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon - 2\nu Z, \tag{1}$$

donde Z es la enstrofía. Interprete el resultado.

c) Identifique el tiempo aproximado en el que el sistema llega al régimen turbulento t^*. Grafique el espectro de energía isótropo $E(k)$, el espectro de energía perpendicular $E(k_\perp)$, y el espectro de energía paralelo $E(k_\parallel)$, promediados en el tiempo desde t^* hasta $t = 25$ (ayuda: el código guarda el espectro perpendicular en los archivos 'kspecperp.*.txt', y el espectro paralelo en 'kspecpara.*.txt'). Compare el espectro perpendicular con la predicción fenomenológica.

d) Utilizando los espectros de energía calcule la longitud integral isótropa L, la longitud perpendicular $L_\perp$, y la longitud paralela $L_\parallel$ en función del tiempo.

e) Estime el número de Reynolds, el número de Rossby, y el número de onda de Zeman k_Ω en el régimen turbulento. Note que como el forzado varía aleatoriamente en el tiempo también varía y puede cambiar de signo. Por lo tanto, puede obtener una mejor estimación de k_Ω asumiendo que en el estado turbulento $dE/dt \sim 0$ (en promedio temporal) y usando $\varepsilon \sim 2\nu Z$. Compare k_Ω con el mayor número de onda resuelto. Son isótropas las estructuras en las escalas más pequeñas de este flujo?

f) Para algún tiempo $t > t^*$, grafique un corte de la vorticidad ω_z en el plano $x - z$. Qué observa? Son compatibles las estructuras con lo que esperaba?

2) Rehacer el Problema 1) considerando ahora un flujo estratificado en la aproximación de Boussinesq. Utilice el solver BOUSS de GHOST, nuevamente con condiciones iniciales nulas para el campo de velocidad, con forzado mecánico aleatorio con amplitud $f_0 = 0.75$ centrado en los modos Fourier con k entre 1 y 4 (i.e., `kdn = 1, kup = 4`) con las mismas propiedades temporales que en el problema anterior (`rand = 2, cort=0.5`), y sin fluctuaciones iniciales en la temperatura y sin fuentes térmicas ($c_0 = s_0 = 0$). Utilice una frecuencia de Brunt-Väisälä $N = 8$, viscosidad cinemática y difusividad térmica $\nu = \kappa = 2 \times 10^{-3}$ y $192 \times 192 \times 48$ puntos de resolución espacial en un dominio cúbico con tamaño $2\pi \times 2\pi \times \pi/2$.

a) Compare las resoluciones espaciales $\Delta x, \Delta y$ y Δz del problema con las del Problema 1). Como justifica los cambios en el tamaño del dominio y en la resolución?

b) Grafique la energía cinética, la energía potencial, y el cociente entre ambas. Como son las fluctuaciones térmicas comparadas con la velocidad?

c) Grafique el espectro de energía cinética isótropo $E(k)$, el espectro de energía cinética perpendicular $E(k_\perp)$, y el espectro de energía cinética paralelo $E(k_\parallel)$ promediados en el tiempo, para tiempos suficientemente tardíos. Compare los espectros con las predicciones fenomenológicas.

d) Utilizando los espectros de energía calcule la longitud integral isótropa L, la longitud perpendicular $L_\perp$, y la longitud paralela $L_\parallel$ en función del tiempo. Calcule la longitud paralela obtenida por análisis dimensional (la "longitud de empuje"), $L_B = 2\pi/k_B$ (con $k_B = N/U$, donde U es la velocidad típica del fluido), y compare esta longitud con la obtenida a partir del espectro, $L_\parallel$. Utilizando estas longitudes estime el número de Reynolds y los números de Froude paralelo y perpendicular (puede asumir $U_\perp \sim U$).

e) Para algún tiempo $t > t^*$, grafique un corte de las fluctuaciones de temperatura π en el plano $x - z$. Qué observa? Son compatibles las estructuras con lo que esperaba?

3) Magnetohidrodinámica

Haciendo uso del solver `MHDB`, resuelva numéricamente las ecuaciones MHD con un campo guía $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$ desde $t = 0$ hasta $t = 20$ usando $dt = 4 \times 10^{-3}$ con $128 \times 128 \times 64$ puntos espaciales en un dominio con tamaño $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Imponga un campo guía $B_0 = 2$, y utilice una viscosidad cinemática y difusividad magnética $\nu = \eta = 3.5 \times 10^{-3}$. Utilice condiciones iniciales aleatorias para el campo de velocidad y magnético con amplitud igual a 1 entre `kdn = 1` y `kup = 10`, con una correlación cruzada K mayor a ~ 0.3, y sin fuerzas externas. En particular, deje decaer libremente al sistema (si a $t = 0$ K es menor que ~ 0.3, cambie el valor de la semilla `seed` para el generador de números al azar en el archivo "parameter.inp").

a) Grafique la energía total y la helicidad cruzada en función del tiempo. Decaen con la misma tasa?

b) Grafique la energía cinética y magnética en función del tiempo.

c) Grafique el producto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}/(\langle u^2\rangle\langle b^2\rangle)^{1/2}$. A qué valor evoluciona? Por qué?

d) Grafique los espectros de la energía cinética y magnética. Qué pendientes observa en dichos espectros?