Informatica Teorica

Mauro Tellaroli

Indice

0 Introduzione

L'informatica è la disciplina che studia l'informazione e la sua elaborazione **automatica**. L'elaborazione in questione non è legata a nessun mezzo, si tratta quindi di una qualsiasi elaborazione che può avvenire con o senza un computer.

Obiettivo di questo corso è rispondere a due domande:

1. Cosa è calcolabile automaticamente? → Teoria della calcolabilità
2. Quanto "costa" risolvere un problema? → Teoria della complessità

1 Prerequisiti matematici

Classi di funzioni $f : A \to B$

Iniettive

f è iniettiva se $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Suriettive

f è suriettiva se $\forall b \in B \;\; \exists a \in A : f(a) = b$

Biettive

f è biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Composizione di funzioni

Date $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si definisce f composto g come la funzione $g \circ f : A \to C$ come:

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

La composizione non è un operatore commutativo.

Funzioni parziali e totali

La notazione $f(a)\downarrow$ indica che la funzione è definita su a, ovvero che esiste un valore b del codominio tale che $f(a) = b$.

Al contrario, la notazione $f(a)\uparrow$ indica che la funzione **non** è definita su a.

Una funzione $f : A \to B$ definita su tutto il suo dominio è detta totale. Se invece esistono dei valori del dominio nei quali f non è definita, f è detta parziale:

$$f \text{ è } \textbf{totale} \text{ se } \forall a \in A \;\; f(a)\downarrow$$

$$f \text{ è } \textbf{parziale} \text{ se } \exists a \in A : f(a)\uparrow$$

Campo di esistenza

Dalla definizione di funzione parziale si intuisce come l'insieme di tutti i valori nel quale la funzione $f : A \to B$ è definita, non sempre coincide con il dominio A. Questo insieme è detto **campo di esistenza di** f e si denota con Dom_f:

$$Dom_f = \{a \in A : f(a)\downarrow\} \subseteq A$$

Totalizzazione di una funzione parziale

Presa una funzione $f : A \to B$ parziale, la si può totalizzare, ovvero rendere totale, aggiungendo al codominio un valore $\perp$ che rappresenta il caso indefinito:

$$f : A \to B \underset{\text{totalizzazione}}{\longrightarrow} f : A \to B \cup \{\perp\}$$

$$f(a) = \begin{cases} f(a) & a \in Dom_f \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'insieme $B \cup \{\perp\}$ viene abbreviato con $B_\perp$.

Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

L'operatore $\times$ non gode della proprietà commutativa.

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}} = A^n$$

Insiemi di funzioni

Tutte le funzioni che vanno da A a B è detto B^A:

$$B^A = \{f : A \to B\}$$

$$B_\perp^A = \{f : A \to B_\perp\}$$

Funzione di valutazione

Si definisce funzione di valutazione $\omega : B_\perp^A \times A \to B$ con:

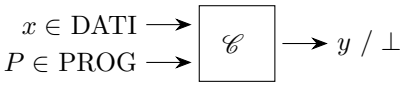
$$w(f, a) = f(a)$$

- Fissando a provo tutte le funzioni su a;
- Fissando f ottengo il suo grafico.

2 Teoria della calcolabilità

2.1 Sistema di calcolo $\mathscr{C}$

Si vuole modellare matematicamente un calcolatore o sistema di calcolo $\mathscr{C}$:



La figura mostra il sistema di calcolo $\mathscr{C}$ che, preso un programma P su input x, restituisce in output il risultato y o il valore $\perp$ se il programma va in loop.

DATI è l'insieme di tutti i possibili dati di input e PROG l'insieme di tutti i possibili programmi.

Il sistema di calcolo $\mathscr{C}$ non fa altro che eseguire il programma P su input x ricavandone il risultato y:

$$\mathscr{C} : \text{PROG} \times \text{DATI} \to \text{DATI}_\perp \tag{1}$$

Quello che fa il programma P è trasformare il dato di input x in un dato di output y; si può quindi dire che un programma non è altro che una funzione che agisce da DATI in DATI:

$$\begin{gathered} P : \text{DATI} \to \text{DATI}_\perp \\ \Downarrow \\ \text{PROG} = \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}} \end{gathered} \tag{2}$$

La funzione associata al programma P è detta **semantica di** P.

Da (1) e (2) si ottiene che:

$$\mathscr{C} : \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}} \times \text{DATI} \to \text{DATI}_\perp$$

$\mathscr{C}$ è una funzione di valutazione; $\mathscr{C}(P, x)$ è infatti la semantica di P.

2.2 Potenza computazionale di $\mathscr{C}$

Si definisce potenza computazionale di $\mathscr{C}$:

$$F(\mathscr{C}) = \{\mathscr{C}(P, \_) : P \in \text{PROG}\} \subseteq \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$$

$F(\mathscr{C})$ **contiene tutto ciò che un qualsiasi sistema di calcolo** $\mathscr{C}$ **può calcolare**. Quindi, per stabilire cosa l'informatica può risolvere, basta stabilire il carattere dell'inclusione:

- $F(\mathscr{C}) \subset \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}} \Rightarrow$ esistono problemi che l'informatica non può risolvere;
- $F(\mathscr{C}) = \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}} \Rightarrow$ l'informatica può risolvere tutto.

2.3 Cardinalità di insiemi infiniti

Per riuscire a capire se l'inclusione $F(\mathscr{C}) \subseteq \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$ sia propria o meno, si confronterà la cardinalità dei due insiemi. Infatti dalla cardinalità si può ricavare che:

- Se $|F(\mathscr{C})| < \left|\text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}\right| \quad \Rightarrow \quad F(\mathscr{C}) \subset \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$;
- Se $|F(\mathscr{C})| = \left|\text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}\right| \quad \Rightarrow \quad F(\mathscr{C}) = \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$.

Il concetto di cardinalità è semplice quando si tratta di insiemi finiti: basta contare il numero di elementi che compongono l'insieme. Tuttavia, in presenza di insiemi infiniti le cose si complicano.

Per esempio, si confrontino $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$: entrambi hanno cardinalità infinita ($|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| = \infty$) eppure $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$! Per comprendere quindi meglio la cardinalità di insiemi infiniti si dovrà andare più nel dettaglio.

2.3.1 Relazione binaria

Si definisce relazione binaria R sull'insieme A, un elenco di coppie ordinate di elementi di A: $R \subseteq A^2$. Due elementi $a, b \in A$ sono in relazione R se $(a, b) \in R$. Si usa la notazione:

- $a \ R \ b$: a è in relazione R con b;
- $a \not R \ b$: a non è in relazione R con b;

2.3.2 Relazione di equivalenza

$R \subseteq A^2$ è una relazione di equivalenza se gode di:

1. Riflessività: $\forall a \in A \quad a \ R \ a$
2. Simmetria: $\forall a, b \in A \quad a \ R \ b \ \Leftrightarrow \ b \ R \ a$
3. Transitività: $\forall a, b, c \in A \quad a \ R \ b \ \wedge \ b \ R \ c \Rightarrow a \ R \ c$

2.3.3 Classe di equivalenza

Si definisce classe di equivalenza $[a]_R$ l'insieme degli elementi in relazione R con a:

$$[a]_R = \{b \in A : a \ R \ b\}$$

Tutte le classi di equivalenza di R formano una partizione di A. L'insieme A partizionato attraverso le classi di equivalenza di R è detto **quoziente** di A rispetto a R ed è denotato da $A/_R$.

Esempio

Si consideri la relazione $\equiv_4 \subseteq \mathbb{N}^2$ di equivalenza modulo 4. Due numeri sono in relazione di equivalenza modulo 4 se il resto della divisione per 4 è uguale per entrambi.

$$5 \equiv_4 9 \ , \ 10 \equiv_4 2 \ , \ \ldots$$

Le classi di equivalenza sono:

$$\begin{aligned} [0]_4 &= \{4k\} && \text{(Multipli di 4)} \\ [1]_4 &= \{4k+1\} && \text{(Resto 1)} \\ [2]_4 &= \{4k+2\} && \text{(Resto 2)} \\ [3]_4 &= \{4k+3\} && \text{(Resto 3)} \end{aligned}$$

L'insieme $\{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\} = \mathbb{N}/_{\equiv_4}$ è una partizione di $\mathbb{N}$.

2.3.4 Insiemi isomorfi

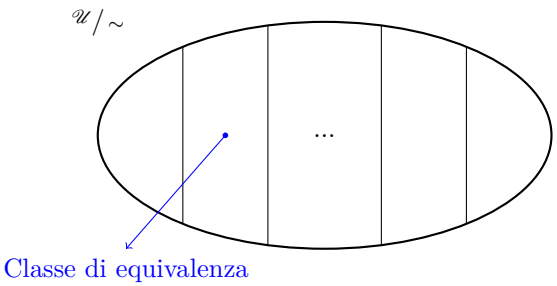
Due insiemi A e B sono **isomorfi** (o equinumerosi) se esiste una funzione biettiva tra essi. Formalmente si indica con:

$$A \sim B$$

La relazione di isomorfismo $\sim$ è una relazione di equivalenza in quanto:

1. Riflessiva: si usi la funzione identità;
2. Simmetrica: se esiste una funzione biettiva allora anche la sua inversa è biettiva;
3. Transitiva: la composizione di due funzioni biettive è una funzione biettiva.

Sia $\mathscr{U}$ l'insieme universo, ovvero l'insieme che contiene tutti gli insiemi. Il quoziente di $\mathscr{U}$ rispetto a $\sim$ ($\mathscr{U}/\sim$) definisce il concetto di cardinalità:



Ogni partizione di $\mathscr{U}/\sim$ contiene gli insiemi tra loro isomorfi, ovvero che hanno la stessa cardinalità.

Insiemi finiti

Si definisca la famiglia di insiemi:

$$J_n = \begin{cases} \varnothing & n = 0 \\ \{1, \dots, n\} & n > 0 \end{cases}$$

$$J_0 = \{\}\ ,\ J_1 = \{1\}\ ,\ J_2 = \{1, 2\}\ ,\ J_3 = \{1, 2, 3\}\ ,\ \dots$$

Un'insieme A ha cardinalità finita se $\exists n \in \mathbb{N} : A \sim J_n$ e si può dire che $|A| = n$.

Insiemi infiniti

Un insieme che non è finito ha cardinalità infinita.

2.3.5 Insiemi numerabili

Un insieme A è numerabile se $\mathbb{N} \sim A$ (ovvero $A \in [\mathbb{N}]_\sim$). Vuole quindi dire che esiste una biezione $f : \mathbb{N} \to A$ che permette di listare A come:

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

senza tralasciare nessun elemento.

Esempi

PARI :	$f(n) = 2n$
DISPARI :	$f(n) = 2n + 1$
$\mathbb{Z}$:	mappo i pari nei non-negativi e i dispari nei negativi
$\{0\} \cup 1\{0, 1\}^*$:	converto da binario a decimale

2.3.6 Insiemi non numerabili

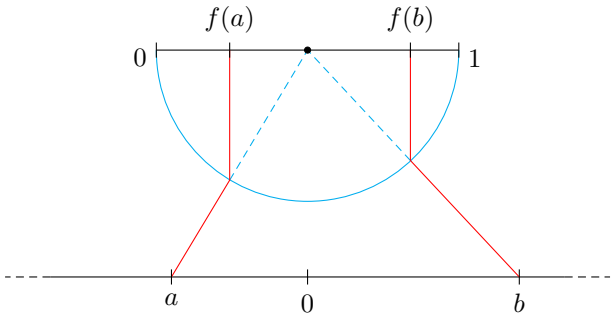
Gli insiemi non numerabili sono insiemi a cardinalità infinita ma non listabili come $\mathbb{N}$ (sono "più fitti"). Il re di questi insiemi è $\mathbb{R}$.

Teorema 1. *$\mathbb{R}$ è un insieme non numerabile:*

$$\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Per dimostrarlo dimostro che:

1. $\mathbb{R} \sim (0,1)$: la biezione è rappresentata graficamente in figura:



   (In realtà $\mathbb{R}$ è isomorfo a un suo qualsiasi intervallo).

2. $\mathbb{N} \nsim (0,1)$: dimostrazione per assurdo: assumo che $\mathbb{N} \sim (0,1)$; Questo vorrebbe dire che tutti i numeri compresi tra 0 e 1 sono numerabili. Elenco tutti i numeri associandoli a un numero naturale:

$$
\begin{array}{lcl}
0 & \mapsto & 0.a_{00}\ a_{01}\ a_{02}\ a_{03}\ a_{04}\ \dots \\
1 & \mapsto & 0.a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \dots \\
2 & \mapsto & 0.a_{20}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \dots \\
3 & \mapsto & 0.a_{30}\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \dots \\
4 & \mapsto & 0.a_{40}\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ddots
\end{array}
$$

   a_{ij} è la i-esima cifra dopo lo zero del j-esimo numero nella lista.
   Se $(0,1)$ fosse numerabile tutti i suoi numeri dovrebbero far parte della lista.
   Si consideri il numero:

$$0.c_0c_1c_2c_3\dots$$

   con:

$$c_i = \begin{cases} 2 & a_{ii} \neq 2 \\ 3 & a_{ii} = 2 \end{cases}$$

   Chiaramente $0.c_0c_1c_2c_3\cdots \in (0,1)$ ma non appare nella lista:

   - Differisce dal primo numero perchè $c_0 \neq a_{00}$;
   - Differisce dal secondo numero perchè $c_1 \neq a_{11}$;
   - ...
   - Differisce da qualunque numero nella lista sulla cifra diagonale.

   Ho trovato l'assurdo quindi $\mathbb{N} \nsim (0,1)$ (dimostrazione per diagonalizzazione).

Sfruttando la transitività di $\sim$ posso si può affermare quindi che:

$$\mathbb{R} \underset{(1)}{\sim} (0,1) \underset{(2)}{\nsim} \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$$

□

Tutti gli insiemi isomorfi a $\mathbb{R}$ sono detti continui. Altri insiemi non numerabili sono:

- Insieme delle parti di $\mathbb{N}$: $2^{\mathbb{N}} = \{\text{sottoinsiemi di } \mathbb{N}\}$
- Insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}_\perp^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp\}$

2.4 Esistono funzioni non calcolabili?

Ora che il concetto di cardinalità è più chiaro, si riprenda il concetto di potenza computazionale di un sistema di calcolo $\mathscr{C}$ (paragrafo 2.2):

$$F(\mathscr{C}) = \{\mathscr{C}(P, \_) : P \in \text{PROG}\} \subseteq \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$$

Per definizione $F(\mathscr{C})$ ha la stessa numerosità di PROG:

$$F(\mathscr{C}) \sim \text{PROG}$$

Ragionevolmente, **ma non formalmente**, si può notare che:

- PROG$\sim \mathbb{N}$: si prenda la stringa binaria con la quale il programma è salvato sul disco e si converta da binario a decimale;
- DATI$\sim \mathbb{N}$: si applichi lo stesso ragionamento del punto precedente.

Ne segue che:

$$F(\mathscr{C}) \sim \text{PROG} \sim \mathbb{N} \nsim \mathbb{N}_\perp^{\mathbb{N}} \sim \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$$
$$\Downarrow$$
$$F(\mathscr{C}) \nsim \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$$
$$\Downarrow$$
$$F(\mathscr{C}) \subset \text{DATI}_\perp^{\text{DATI}}$$

Quello che questa osservazione dice è che ho pochi programmi ($\mathbb{N}$) e troppe funzioni ($\mathbb{N}_\perp^{\mathbb{N}}$). **Alla domanda "Esistono funzioni non calcolabili?" si può quindi rispondere con un sì!**

2.4.1 DATI numerabile

Obiettivo di questa sezione è dimostrare formalmente che:

$$\text{DATI} \sim \mathbb{N}$$

Vogliamo quindi trovare una biezione che è in grado di associare biunivocamente dei dati a un numero e quindi anche di ottenere i dati di partenza dal numero. Per farlo si userà il seguente teorema.

Teorema 2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$

Dimostrazione. Si definisca la funzione coppia di Cantor $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$$

$\langle\ ,\ \rangle$ associa biunivocamente una coppia di numeri x e y a un numero n:

$$\langle x, y \rangle = n$$

La mappa che $\langle\ ,\ \rangle$ usa per assegnare i valori di ogni coppia viene descritta nelle seguenti tabelle:

$x\backslash y$	0	1	2	3	4
0	1	3	6	10	15
1	2	5	9	14	...
2	4	8	13	...	
3	7	12	...		
4	11	...			
5	↗				

$x\backslash y$	0	1	2	3
0	1	3	6	10
1	2	5	9	
2	4	8		
3	7			

Si vuole calcolare ora la forma analitica di $\langle\ ,\ \rangle$; si prenda una generica coppia di numeri $\langle x, y \rangle$:

$x\backslash y$	0	⋯	y
⋮			
x			$\langle x, y \rangle$
⋮			
$x+y$	$\langle x+y, 0 \rangle$		

Per come è definita $\langle x, y \rangle$ (vedi tabella precedente) si ha che:

$$\langle x, y \rangle = \langle x + y, 0 \rangle + y \tag{3}$$

Ora l'incognita da calcolare resta $\langle z, 0 \rangle$ che, si può ottenere come:

$$\langle z, 0 \rangle = \sum_{i=0}^{z} i + 1 = \frac{z(z+1)}{2} + 1 \tag{4}$$

Da (3) e (4) segue che:

$$\langle x, y\rangle = \langle x + y, 0\rangle + y = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y + 1$$

$\langle\ ,\ \rangle$ si dimostra quindi mappare univocamente le coppie di numeri in numeri ($\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^+$). Si cercherà ora di mostrare il passaggio inverso, ovvero come riottenere la coppia di numeri dal numero risultante ($\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^2$).

Si definiscano le seguenti funzioni:

$$\langle x, y\rangle = n \quad , \quad sin(n) = x \quad , \quad des(n) = y$$

Da (3) si ha che:

$$\begin{aligned} y &= \langle x, y\rangle - \langle x + y, 0\rangle \\ &= n - \langle x + y, 0\rangle \\ &= n - \langle \gamma, 0\rangle \end{aligned}$$

Il valore di γ è il più grande valore che, messo sulla prima colonna ($\langle \gamma, 0\rangle$) non supera n:

$$\gamma = \max\{z \in \mathbb{N} : \langle z, 0\rangle \leq n\}$$

$$\langle z, 0\rangle \leq n$$

$$\frac{z(z+1)}{2} + 1 \leq n$$

$$z^2 + z + 2 - 2n \leq 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{8n-7}}{2} \leq z \leq \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$$

In conclusione:

$$des(x) = n - \langle \gamma, 0\rangle$$

$$sin(x) = \gamma - des(x)$$

La funzione coppia di Cantor $\langle\ ,\ \rangle$ si è quindi mostrata essere una biezione tra $\mathbb{N}^+$ e $\mathbb{N}^2$ mostrando che i due insiemi hanno la stessa cardinalità. □

È facile poi, partendo da $\langle\ ,\ \rangle$, creare una biezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$ (dimostrando che $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$):

$$[\ ,\ ] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$[x, y] = \langle x, y\rangle - 1$$

Il precedente risultato mette alla luce anche che:

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$$

in quanto ogni suo elemento non è altro che una coppia di numeri messi a frazione.