Redes Neuronales: Práctico 1

Mauricio Mazuecos

1 Introducción

Este práctico se basa en el **Modelo Predador-Presa de Lokta-Volterra**. Siendo $R(t)$ la población de conejos y $F(t)$ la población de zorros, el modelo está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{R}(t) = aR(t) - bR(t)F(t)$$

$$\dot{F}(t) = -cF(t) + dR(t)F(t)$$

En este práctico se analiza el sistema con los métodos teóricos enseñados en clase y con el método de Runge-Kutta. Se expondrán los resultados del método de Runge-Kutta, los gráficos provenientes de ello. Luego se hará un análisis con las herramientas teóricas. Se finalizará con las conclusiones de los análisis.

Los parámetros que se toman para el modelo son:

a =	0.1
b =	0.02
c =	0.3
d =	0.01

2 Aproximación numérica

Empleamos el método de Runge-Kutta para aproximar el valor de $R(t)$ y $F(t)$. Para esto tomamos paso de integración $h = 0.05$, $t_0 = 0$ y $t_{max} = 200$. Como estado inicial y_0 tenemos:

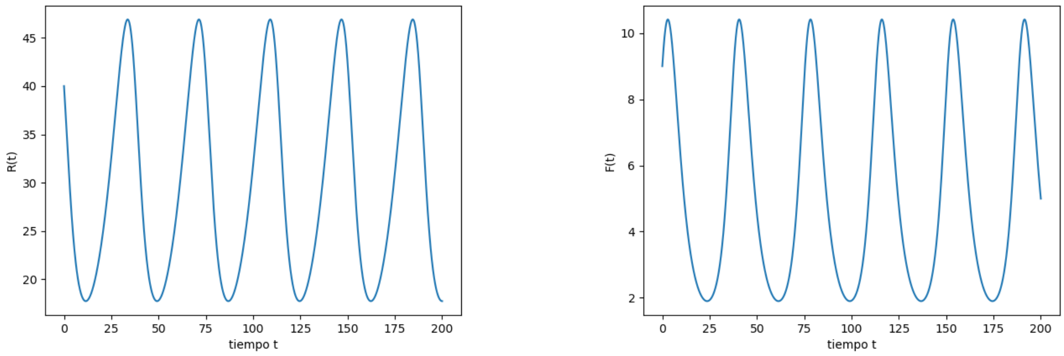
$$y_0 = \begin{bmatrix} R(t_0) \\ F(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Con este método se encuentran aproximaciones a las funciones y se grafican:

De estos gráficos 1 podemos ver que las poblaciones oscilan. También se puede apreciar que cuando una función alcanza un mínimo local en t, la otra alcanza un máximo local en el mismo t. Esto muestra un carácter oscilatoria de las poblaciones.

En la figura 2 se grafica $R(t)$ vs $F(t)$. En esta imagen se pone en evidencia que las poblaciones oscilan.

El código está disponible en `https://github.com/maurygreen/RedesNeuronales-Pr-ctico1`.



(a) t vs R(t)

(b) t vs F(t)

Figure 1: R(t) y F(t) graficadas en la línea temporal.

3 Análisis teórico

Para comenzar con el análisi teórico necesitamos encontrar los puntos extremos de nuestro sistema, i.e:

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \dot{R}^* \\ \dot{F}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dichos puntos fijos se corresponden con los puntos $(0,0)$ y $(30,5)$.

El paso siguiente es linealizar el sistema, por lo que necesitamos calcular la matriz Jacobiana del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial F} \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \frac{1}{50}F & -\frac{1}{50}F \\ \frac{1}{100}R & -\frac{3}{10} + \frac{1}{100}R \end{bmatrix}$$

Al rededor del $(0,0)$ se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

Para entender cómo se comporta el sistema analiza su ecuación característica:

$$det \begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{3}{10} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = \lambda^2 + \frac{2}{10}\lambda - \frac{3}{100} = 0$$

Notar que $\tau = \frac{2}{10}$ y $\Delta = -\frac{3}{100}$. Si $\Delta < 0$, entonces el punto $(0,0)$ es un *saddle point.*

Veamos los autovalores de la matriz:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{2}{10} \pm \sqrt{\frac{2}{10}^2 - 4\frac{-3}{100}}}{2} \\ &= -\frac{1}{10} \pm \frac{\sqrt{\frac{16}{100}}}{2} \\ &= -\frac{1}{10} \pm \frac{2}{10} \end{aligned}$$

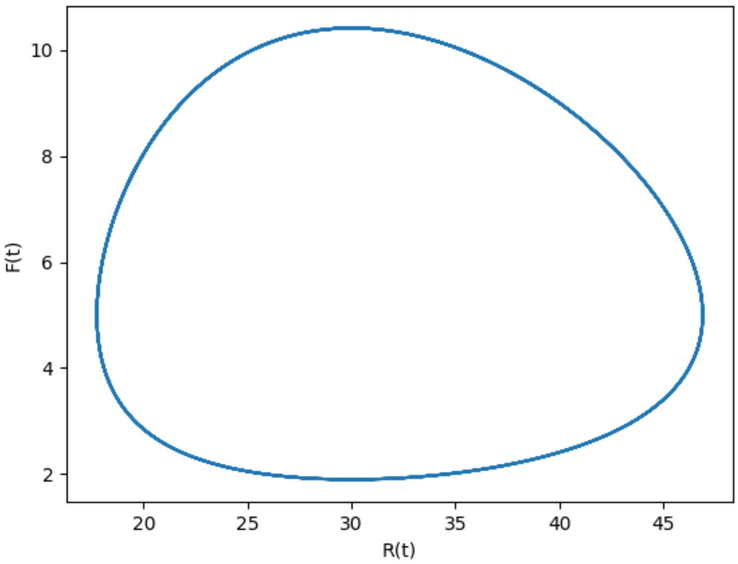


Figure 2: R(t) vs F(t) calculadas con el método de Runge-Kutta.

De lo cual se obtiene que $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ y $\lambda_2 = -\frac{3}{10}$.

Obteniendo los autovectores relacionados para cada autovalor vemos cómo se comportan las configuraciones cerca del punto fijo:

Para $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que queda $-\frac{4}{10}v_2 = 0$. De esto se desprende que $\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 | v_2 = 0\}$ son autovectores. En particular el $[1, 0]^T$ es autovector.

Análogamente se obtiene que para el autovalor $lambda_2 = -\frac{3}{10}$, el conjunto $\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 | v_1 = 0\}$ es el conjunto de autovectores y en particular $[0, 1]^T$ es autovector. Por esto se ve que el punto $(0, 0)$ es atractivo con respecto al eje $F(t)$ y repulsivo en el eje $R(t)$.

Al rededor del otro punto fijo, el $(30, 5)$, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Analizando la ecuación característica se obtiene que:

$$det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{3}{100} = 0$$

De esto se obtiene que $\tau = 0$ y $\Delta = \frac{3}{100}$. Si $\Delta > 0$ entonces los autovalores de A o son reales con el mismo signo (un nodo) o son complejos y conjugados (una espiral o un centro).

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{3}{100}}$$

De donde se obtiene que $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}i}{10}$ y $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}i}{10}$, por lo que efectivamente el $(30, 5)$ es una espiral o un centro. Más aún, $\tau = 0$, lo cual corresponde a un centro. Finalmente, con ese análisis se puede realizar un gráfico aproximado del comportamiento de la función en la figura 3.

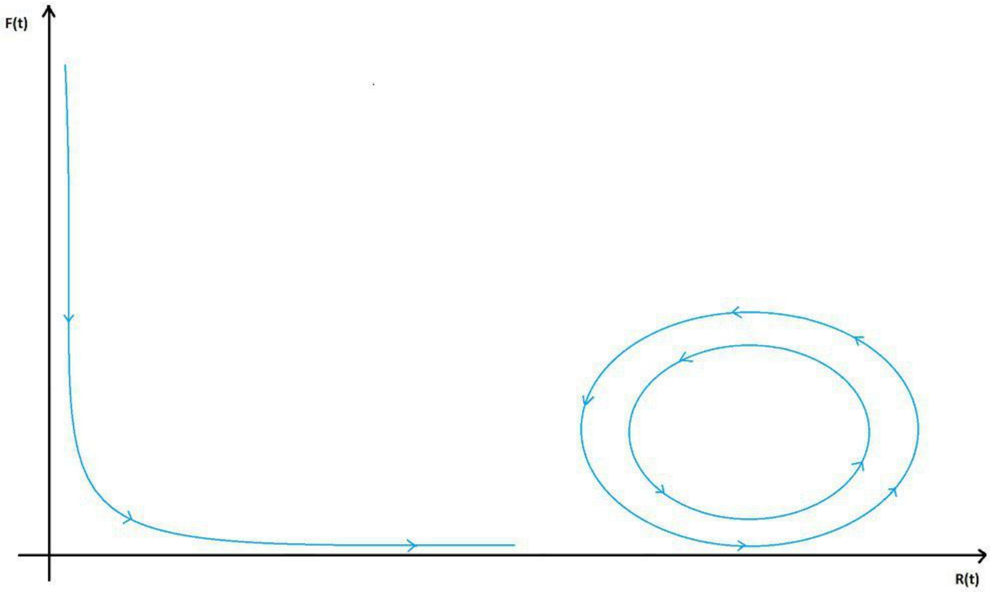


Figure 3: Esquema del comportamiento del sistema.

4 Conclusiones

De los gráficos obtenidos numéricamente con Runge-Kutta y el análisis teórico realizado se puede notar que una población inicial $(R(0), F(0)) = (40, 9)$ va a resultar en una coexistencia de las especies con crecimientos de una y decrecimientos de otra de a momentos. Más aún, se sabe que una población inicial sin zorros lleva a un crecimiento al infinito de la población de conejos y una población inicial sin conejos lleva a la extinción de los zorros. En otras configuraciones, el sistema se queda en una órbita de crecimiento y decrecimiento.