Prácticas de Lógica y Computabilidad

Mauro Abel Campillo

11/05/2012

• PRÁCTICA 3

1. (a) No se que es, creo que no es nada porque por definición f_2 es binaria pero aqui se la usa como si fuese una función unaria. Además el cuantificador existencial está cuantificando una fórmula cuando debería cuantificar una variable
   (b) Es una fórmula ya que f_1 es unaria y f_2 es binaria
   (c) No es una fórmula debido a que se está cuantificando una constante C con el cuantificador existencial, cuando solo se deben cuantificar variables ¿Es un término?
   (d) Idem anterior
   (e) El $\exists x$ aparece dos veces en la misma sentencia, esta mal formado, no es fórmula ¿Es un término?
   (f) Es fórmula

2. (a) En la primera parte x aparece ligada en el $\forall x$, también y aparece ligada pues ambas estan siendo afectadas por cuantificadores
   (b) En $(\exists x P(y, y))$ y aparece libre, x NO debido a que está siendo afectada por un cuantificador, luego en $\exists y P(y, z)$ y aparece ligada y z libre
   (c) Veamos que x aparece ligada ya que está afectada por el cuantificador existencial, de modo que en subsiguientes apariciones x ya estará ligada. Analizando la primera parte de la conjunción $(\exists y P(x, x))$ y aparece ligada pero en la segunda parte $(P(x, y))$ y aparece libre pues el cuantificador solo afecta a la primera parte de la conjunción
   (d) Bastante parecido al anterior

3. (a) No es una interpretación válida ya que f_1 va de los $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mientras que el universo de interpretación $U_I = \mathbb{N}$, absurdo ya que la imagén de la función corresponde a algo que cae fuera del universo de interpretación
   (b) Es válida
   (c) Si el universo de interpretación U_I son los $\mathbb{N}$ entonces esta no es una interpretación válida debido a que las constantes $c_I = d_I = 0$ y el 0 esta fuera del universo de interpretación. Si se esta incluyendo al 0 dentro de los $\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{N} \cup 0$ entonces la interpretación es válida. Además la imagen de la función $g_1(n, n) = n^2 - n$ es siempre ≥ 0 $\forall n \in \mathbb{N} \cup 0$ y puede demostrarse por inducción

4. (a) Para todo x, y si $x \leq y$ existe un numero z tal que $x \leq z$ y $z \leq y$. Me esta diciendo en los reales dados dos numeros siempre voy a poder encontrar un numero mayor al primero y menor al segundo.
   (b) Todos los días nace un esclavo
   (c) Para todos los números, si son pares, vale que su suma da como resultado un número impar

5. (a) Hay una persona que quiere a todas
   (b) Toda persona tiene alguien que lo quiera
   (c) Para toda persona que quiera a alguien, hay una persona que lo quiere a él.

(d) Hay alguien que no quiere a nadie

6. (a) Caso Suma: Para todo número a existe otro número b que multiplicado por 2 me devuelve a. O puede ser que le tenga que sumar una constante c. Verdadero ya que todo número par puede dividirse por 2 y ese sería nuestro b o puedo hacer la división por 2 si es impar y quedarme con el cociente truncado y sumarle 1(nuestra constante c).
   Caso Multiplicación: Todo número a puede obtenerse mediante algún b^2 o mediante algun $((b^2).0)$ Esto es claramente falso porque si selecciono un número a que no es un cuadrado no podré encontrar dicho b
   (b) Caso Suma: Este enunciado dice que existe un solo número para todos tal que multiplicado por dos me devuelve todos los numeros, o multiplicado por dos más una constante c. Falso
   Caso Multiplicación: Existe un número b tal que b^2 me devuelve todos los números, o $((b^2).0)$. Falso
   (c) Caso Suma: Si la suma de dos números da como resultado 1 entonces alguno de los dos era 1. Verdadero
   Caso Multiplicación: Si la multiplicación de dos números da como resultado 0 entonces alguno de los dos era 0. Verdadero

7. (a)

8. (a)

9. (a)
   (b) $\forall x(f(x,y) = x)$

10. (a) Por hipótesis sabemos que tenemos un U_I que es finito con $n+1$ elementos de los cuales n son distinguibles. Entonces tendremos un conjunto de funciones $\varphi = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ donde cada ϕ_i es una función que describe a cada uno de los n elementos. Si suponemos que el elemento $n+1$ no es distinguible entonces existiría una función ϕ_i $(0 < i \leq n)$ tal que distinguiría al elemento $n+1$ y a otro de los n elementos. Pero esto es absurdo ya que por definición un elemento es distinguible si solo si una función ϕ es verdadera para dicho elemento y solo para él además esto lo sabemos por hipótesis de modo que si tenemos un conjunto de funciones $\varphi = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ necesariamente debe existir una función ϕ_{n+1} que distingue al elemento $n+1$

11. (a) En el primer gráfico se distingue al 5 y en el segundo al 4
    (b)
    - Primer gráfico: $\exists x \exists y((x < y) \wedge \neg(y \leq x) \wedge (y < w) \wedge \neg(w \leq y))$
    - Segundo gráfico: $\exists x \exists y \exists w \exists z((x < y) \wedge \neg(x \leq y) \wedge (y < w) \wedge \neg(w \leq y) \wedge (w < z) \wedge \neg(z \leq w) \wedge (z < x))$

12. Para demostrar que todos los elementos de este universo son distinguibles deberíamos hallar un conjunto de funciones $\phi_{\{1,2,...,n-1,n\}}$ donde cada una distinga un y solo un elemento.
    Vamos a describir con el subíndice de ϕ al elemento que queremos distinguir de modo que ϕ_1 distinguirá al elemento 1.
    Usaremos la igualdad $(=)$ y el menor estricto $(<)$ asi que pasemos a la definición de ambos:
    Igualdad: $x = y \longleftrightarrow ((x \leq y) \wedge (y \leq x))$
    Menor Estricto: $x < y \longleftrightarrow ((x \leq y) \wedge \neg(y \leq x))$
    - Primer Gráfico:
      * $\phi_1 = \forall x(y < x)$
      * Idea: Para describir a 2 pienso que es el único elemento que tiene 3 sucesores (4, 5 y 6) aunque el elemento 1 también tiene 3 sucesores (tiene 5 exactamente) asi que también voy a decir que existe otro elemento que es antecesor (por el 1) o no es antecesor ni sucesor (por el 3).
        $\phi_2 = \exists x \exists y \exists w \exists z((t < x) \wedge (t < y) \wedge (t < w) \wedge ((z < t) \vee \neg((z < t) \wedge (t < z))))$
      * Idea: Similar a la anterior, el 3 es el único elemento que tiene 2 sucesores, un antecesor y cualquier otro elemento no es sucesor ni antecesor.
        $\phi_3 = \exists x, y, z((t < x) \wedge (t < y) \wedge (z < t)) \wedge \forall w(\neg(w = x) \wedge \neg(w = y) \wedge \neg(w = z) \wedge \neg(w = t) \rightarrow$
        $\neg((w < z) \vee (z < w)))$

* Idea: Es el único que tiene 2 antecesores, un sucesor y cualquier otro elemento no es antecesor ni sucesor.
  $\phi_4 = \exists x, y, z((x < t) \wedge (y < t) \wedge (t < z)) \wedge \forall w(\neg(w = x) \wedge \neg(w = y) \wedge \neg(w = z) \wedge \neg(w = t) \rightarrow$
  $\neg((w < z) \vee (z < w)))$
* Idea: Es el único elemento que tiene 3 antecesores, 1 sucesor y cualquier otro elemento no es antecesor ni sucesor.
  $\phi_5 = \exists x, y, w, z((x < t) \wedge (y < t) \wedge (w < t) \wedge ((t < z) \vee \neg((z < t) \wedge (t < z))))$
* Idea: Ya sabemos que si tenemos un conjunto finito de $n+1$ elementos y n elementos son distinguibles entonces todos los elementos son distinguibles (lo probamos en el ejercicio 10) igual escribimos la fórmula pues es muy sencilla.
  $\phi_6 = \forall x(x < y)$

• PRÁCTICA 4

1. (a) Si el universo es finito podemos tomar $U_I = \mathbb{N}_{[4,9,16,25]}$ y la función $f_1(x, y) = \sqrt{x}.\sqrt{y}$ o si el universo es infinito simplemente podemos tomar los Reales de 1 a 10 $U_I = \mathbb{R}_{(1..10]}$ y la misma función me sirve para los dos casos.

   (b) TODO

   (c) Podemos tomar $U_I = \mathbb{N}_{[0,..,10]}$ y la función $f_1(x, y) = x.y$ donde y sería la constanste $c_1 = 0$. Si quisieramos un universo infinito simplemente podríamos tomar los Naturales con el cero.

2. (a) $\forall x \exists y(f(x, y) = c)$ Este enunciado no es universalmente válido porque pues para los Naturales o los Enteros no vale.

   (b) $\forall x \exists y(f(x, y) = c)$ Solo vale para los complejos.

3. (a) $\alpha : \forall x \exists y(f(x, y) = c$ donde $c_1 = 0$

   (b) $\beta :$

   (c) $\gamma :$

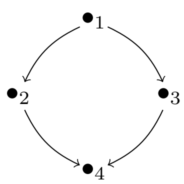
4. (a) Sea $I_1 : U_I = \mathbb{C},\ f_1(x) = x^2$
   Esta interpretación funciona para α pués la inversa de la función $f_1(x)$ no se indefine en los complejos, asi que siempre podré obtener un $f(y) = x$. Sin embargo si vemos β notaremos que el enunciado no se cumple para esta función ya que $f_1(x) = f_1(-x)$ y $x \neq -x$

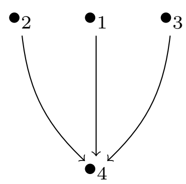
   (b)

5. (a) $\exists x \forall y(x \leq y)$

   (b) Vamos a usar el símbolo • para indicar que $x \bullet y \longleftrightarrow (\neg(x \leq y) \wedge \neg(y \leq x))$
   También usaremos el símbolo $\neq$ para indicar que $x \neq y \longleftrightarrow \neg((x \leq y) \wedge (y \leq x))$
   La idea es que en el primer gráfico hay 4 números (1,2,3,4) entre los cuales no hay una relación de orden, es decir, ninguno es menor o igual al otro y además que para cualquier otro número distinto a ellos, dicho número es mayor.
   $\exists x, y, w, z, t((x \bullet y) \wedge (x \bullet w) \wedge (x \bullet z) \wedge (y \bullet w) \wedge (y \bullet z) \wedge (w \bullet z) \wedge (t \neq x) \wedge (t \neq y) \wedge (t \neq w) \wedge (t \neq z)) \rightarrow$
   $\forall t((x \leq t) \vee (y \leq t) \vee (w \leq t) \vee (z \leq t))$

6. Se grafican a continuación los dos ejemplos, el primero cumple mientras que el segundo no :





7. (a)

   (b)

   (c)

   (d)

8. Para probar que las fórmulas son equivalentes debemos probar $(\alpha \to \phi)$ y $(\phi \to \alpha)$, esto lo hacemos negando la primera implicación y demostrando que su árbol de refutación se cierra, hacemos lo mismo con la implicación para el otro lado y si el árbol también se cierra, esto indicaría que las implicaciones son tautología. En otras palabras las fórmulas son equivalentes.
Probemos primero que: $\neg(\forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)) \to \forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x)))$

	$\neg(\forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)) \to \forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x)))$	
$R_{\neg\to}$	$\neg\neg\forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x))$	$\bullet_1$
	$\neg\forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x))$	$\bullet_2$
de $\bullet_2$ $R_{\neg\forall} \wedge R_{\exists}$	$\neg(P(c_1,c_2) \to \exists z P(z,c_1))$	$\bullet_3$
de $\bullet_3$ $R_{\neg\to}$	$\neg\neg(P(c_1,c_2))$	$\bullet_4$
	$\neg\exists z P(z,c_1)$	$\bullet_5$
de $\bullet_4$	$P(c_1,c_2)$	$\bullet_6$
de $\bullet_5$ $R_{\neg\exists}$	$\neg P(c_2,c_1)$	$\bullet_7$
de $\bullet_1$ $R_{\forall}$	$\exists y(P(c_1,y) \to P(y,c_1))$	$\bullet_8$
de $\bullet_8$ $R_{\exists}$	$P(c_1,c_2) \to P(c_2,c_1)$	$\bullet_9$
de $\bullet_9$ $R_{\to}$	$\neg P(c_1,c_2)$ X | $P(c_2,c_1)$ X	

En el punto 3 tengo un $\neg\forall$ y un $\exists$ de modo que los reemplazo por dos constantes c_1, c_2 distintas.
En el punto 5 tengo un $\neg\exists$ y como lo puedo reemplazar por cualquier cosa, uso c_2.
En el punto 8 tengo un $\exists$ y como ya lo había reemplazado por c_2 uso la misma constante en este caso.

Ahora analizamos la siguiente implicación: $\neg(\forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x)) \to \forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)))$

$$\neg(\forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x)) \to \forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)))$$

$$
\begin{array}{rlcr}
R_{\neg\to} & \left\{ \begin{array}{c} \neg\neg\forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x)) \\ | \\ \neg\forall x \exists y(P(x,y) \to P(y,x)) \end{array} \right. & & \begin{array}{c} \bullet_1 \\ \\ \bullet_2 \end{array} \\
\text{de } \bullet_2 \ R_{\neg\forall} \ \wedge R_{\exists} & \{ & \neg(P(c_1,c_2) \to P(c_2,c_1)) & \bullet_3 \\
\text{de } \bullet_3 \ R_{\neg\to} & \left\{ \begin{array}{c} \neg\neg P(c_1,c_2) \\ | \\ \neg P(c_2,c_1) \end{array} \right. & & \begin{array}{c} \bullet_4 \\ \\ \bullet_5 \end{array} \\
\text{de } \bullet_1 \ \neg\neg & \{ & \forall x \exists y(P(x,y) \to \exists z P(z,x)) & \bullet_6 \\
\text{de } \bullet_6 \ R_{\forall} & \{ & \exists y(P(c_1,y) \to \exists z P(z,c_1)) & \bullet_7 \\
\text{de } \bullet_7 \ R_{\exists} & \{ & P(c_1,c_2) \to \exists z P(z,c_1) & \bullet_8 \\
\text{de } \bullet_8 \ R_{\to} & \{ & \neg P(c_1,c_2) \qquad\qquad \exists z P(z,c_1) & \bullet_9 \\
 & & \text{X} \qquad\qquad\qquad | & \\
 & & \text{de } \bullet_9 \ R_{\exists} \ \{ \ P(c_3,c_1) & \bullet_{10}
\end{array}
$$

Observemos que en $\bullet_{10}$ la rama solo se cierra si $c_3 = c_2$ de otro modo las fórmulas no serían equivalentes.

9. (a) Para probar que la fórmula es universalmente válida debo demostrar que su negación es una contradicción, esto lo probamos mediante el método de árboles de refutación, basta ver que es cerrado.
Negamos la fórmula : $\neg(\exists y P(y) \to \forall x \exists y P(y))$

$$\begin{array}{rc}
 & \neg(\exists y P(y) \to \forall x \exists y P(y)) \\
 & | \\
R_{\neg\to} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} \exists y P(y) \quad \bullet_1 \\ | \\ \neg\forall x \exists y P(y) \end{array} \\
 & | \\
R_{\neg\forall} \left\{ \right. & \neg P(c) \\
 & | \\
\text{de } \bullet_1 \left\{ \right. & P(c) \\
 & \text{X}
\end{array}$$

(b) Procedemos de la misma manera que en la parte a)
Negamos la fórmula: $\neg(\exists y P(y) \to \exists y \exists x P(y))$

$$\begin{array}{rc}
 & \neg(\exists y P(y) \to \exists y \exists x P(y)) \\
 & | \\
R_{\neg\to} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} \neg\exists y \exists x P(y) \qquad \bullet 1 \\ | \\ \neg\neg\exists y P(y) \end{array} \\
 & | \\
R_{\neg\exists} \left\{ \right. & \neg P(c) \\
 & | \\
\text{de } \bullet_1 \left\{ \right. & P(c) \\
 & \text{X}
\end{array}$$

(c) Misma idea, negamos la fórmula: $\neg(\forall x P(x) \to P(t))$

$$\begin{array}{rc}
 & \neg(\forall x P(x) \to P(t)) \\
 & | \\
R_{\neg\to} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} \neg P(t) \qquad \bullet 1 \\ | \\ \neg\neg(\forall x P(x) \end{array} \\
 & | \\
R_{\forall} \left\{ \right. & P(t) \\
 & | \\
\text{de } \bullet_1 \left\{ \right. & \neg P(t) \\
 & \text{X}
\end{array}$$

10. (a) Debemos introducir reglas de expansión para el $\leftrightarrow$ esto es lo mismo que, dadas dos funciones α y ϕ, $(\alpha \to \phi) \wedge (\phi \to \alpha)$.
De Modo que:
$R_{\leftrightarrow} = (\alpha \to \phi) \wedge (\phi \to \alpha)$ y
$R_{\neg\leftrightarrow} = \neg(\alpha \to \phi) \vee \neg(\phi \to \alpha)$

$$\neg(\forall x \forall y(\phi(x,y)) \leftrightarrow \forall y \forall x(\phi(x,y)))$$

$R_{\neg\leftrightarrow}$ $\neg(\forall x \forall y(\phi(x,y)) \to \forall y \forall x(\phi(x,y)))$ $\bullet_1$ | $\neg(\forall y \forall x(\phi(x,y)) \to \forall x \forall y(\phi(x,y)))$ $\bullet_2$

de $\bullet_1$ $R_{\neg\to}$ $\neg\neg\forall x \forall y(\phi(x,y))$ $\bullet_3$

de $\bullet_1$ $R_{\neg\to}$ $\neg\forall y \forall x(\phi(x,y))$ $\bullet_4$

de $\bullet_4$ $R_{\forall}$ $\neg\forall y(\phi(t,y))$ $\bullet_5$

de $\bullet_5$ $R_{\neg\forall}$ $\neg\phi(t,c_1)$ $\bullet_6$

de $\bullet_3$ $R_{\neg\neg}$ $\forall x \forall y(\phi(x,y))$ $\bullet_7$

de $\bullet_7$ $R_{\forall}$ $\phi(t,c_1)$

X

de $\bullet_2$ $R_{\neg\to}$ $\neg\neg\forall y \forall x(\phi(x,y))$ $\bullet_8$

de $\bullet_2$ $R_{\neg\to}$ $\neg\forall x \forall y(\phi(x,y))$ $\bullet_9$

de $\bullet_9$ $R_{\forall}$ $\neg\forall x(\phi(x,t))$ $\bullet_{10}$

de $\bullet_{10}$ $R_{\neg\forall}$ $\neg\phi(c_1,t)$ $\bullet_{11}$

de $\bullet_8$ $R_{\neg\neg}$ $\forall y \forall x(\phi(x,y))$ $\bullet_{12}$

de $\bullet_{12}$ $R_{\forall}$ $\phi(c_1,t)$

X