دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرینهای Take – Home درس شبکه پیشرفته

استاد: دکتر احمد خونساری

وحید مواجی83205947

مهران صفایانی83203873

بهمن عرب رضایی83204234

حسن تکابی 83210022

تابستان 84

2 – 2

MMPP as a Markov renewal Process

MMPP یک فرایند پواسن تصادفی دوگانه است. زنجیره مارکف پیوسته $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty}$ با فضای حالت $\{1,...,r\}$ و ماتریس مولد Q را در نظر گیرید ما به این زنجیره، مارکف از درجه r می‌گوییم و یک MMPP است به هر یک از حالتهای آن یک نرخ ورود λ_i مرتبط است که به این معنی است که هرگاه زنجیره مارکف در حالت i قرار دارد نرخ ورود MMPP به صورت λ_i است. بردار $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_r)$ و ماتریس قطری $\Lambda = diag(\lambda)$ را تعریف می‌کنیم. یک MMPP با ماتریس مولد Q و ماتریس Λ تعریف می‌شود و از علامت $\phi = (Q,\Lambda)$ برای بیان آن استفاده می‌شود.

حال با یك مثال MMPP را توضیح داده و به اثبات روابط آن می‌پردازیم:

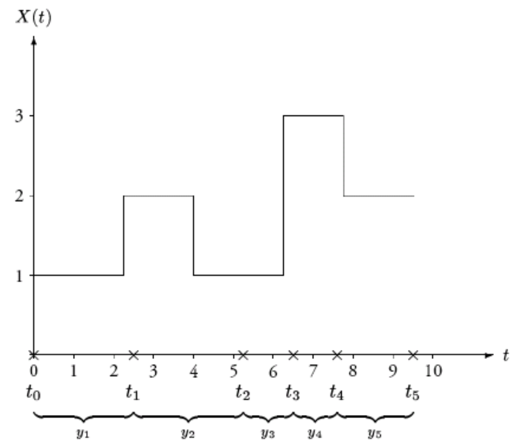
فرض می‌کنیم که فرایند در یك بازهٔ زمانی به طول T مشاهده می‌شود در خلال این بازه n+1 ورود داریم . $t_k, k = 0,1,...n,$ را به عنوان زمان‌های ورود در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $t_0 = 0$ و $t_n = T$ است. برای اختصار علامت گذاری $x_k = x_{(tk)}$ قرار می‌دهیم. و زمانهای بین ورودها را با Y_k نشان می‌دهیم که آن بیانگر فاصلهٔ بین k-1 امین و k امین ورود است. در نتیجه در بازهٔ مشاهده شده زمانهای بین ورودها به صورت $y_1,..., y_n$ است. در شکل 1 یك مثال نشان داده شده است. این شکل واحد زمانی MMPP را نشان می‌دهد که زنجیره مارکف پیوسته دارای فضای حالت {1،2،3} است که در نتیجه از درجه 3 است. زمانهای ورود در محور t علامت‌گذاری شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود $X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1$ است. در شکل زمانهای بین ورودی‌ها $y_1,..., y_5$ نیز علامت‌گذاری شده است. در اینجا T=9.5 و n=5 است. $u_1,....,u_m$ را بعنوان زمان انتقال زنجیره مارکف است که $u_0 = 0$ و $u_{m+1} = T$ در شکل 2 زمان انتقالها علامت‌گذاری به صورت دایره‌هایی بر محور t شده است. $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ و $I_k = [u_{k-1}, u_k]$ k=1,…,n قرار می‌دهیم. حالت X در خلال I_k با S_k بیان می‌شود و تعداد ورودها در خلال I_k (بدون در نظر گرفتن ورود در $t = \phi$) با Z_k نشان می‌دهیم همان‌گونه که در شکل 2 نشان داده شده است $S_1 = 1$ ، $S_2 = 2$ ، $S_3 =$ و $Z_1 = \phi$ ، $Z_2 = 1$ و $Z_3 = 1$ است فرایند $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ یك زنجیره مارکف renewal است. ماتریس احتمال انتقال با $P = \{pij\}$ که $P_{ij} = \mathrm{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$ بیان می‌شود . P توسط ماتریس مولد Q و Λ محاسبه می‌شود و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P = (\Lambda - Q)^{-1}\Lambda.$$

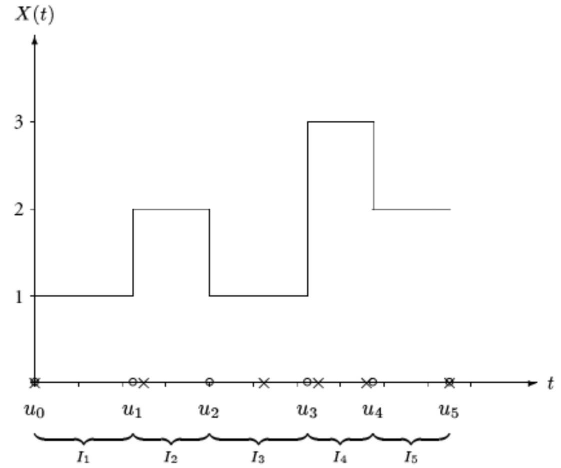
$\{X_{k-1}, Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ یك فرایند renewal مارکف است . برای این فرایند ماتریس $(r \times r)$ زیر را تعریف می‌کنیم

$$\bar{F}(t) = \{\bar{F}_{ij}(t)\}$$

$$\bar{F}_{ij}(t) = \mathbb{P}(Y_1 > t, X(t) = j \mid X(0) = i)$$



شکل 1 اولین 10 واحد زمانی



شکل 2 اولین 10 واحد زمانی

که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{F}(t) = \exp\{(Q - \Lambda)t\}.$$

سرانجام ماتریس چگالی انتقال را برای فرایند renewal مارکف $\{X_{k-1}, Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ بدست می‌آوریم . این ماتریس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_{ij}(y) = \frac{d}{dt}\mathbb{P}(Y_1 \le y, X_1 = j | X_0 = i)$$

و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(y) = \bar{F}(y)\Lambda = \exp\{(Q - \Lambda)y\}\Lambda.$$

1 – 3 – 2

Interrupted Poisson Process and hyperexponential distribution

IPP یکی از ساده‌ترین موارد MMPP است. فرض کنید که یك زنجیره مارکف پیوسته X با فضای حالت {0,1}(r=2) داریم . ماتریس مولد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1 \end{pmatrix}.$$

همچنین فرض می‌کنیم شدت ورود به یکی از حالتها برای مثال به حالت صفر برابر با صفر است . بنابراین ماتریس Λ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

این MMPP می‌تواند به صورت یك منبع on/off که یك فرایند بین دو حالت on و off پرش می‌کند بیان شود. هنگامی‌که در حالت on قرار دارد یك فرایند پواسن با پارامتر λ است و هنگامی‌که در وضعیت off است جریان ورودی‌ها متوقف می‌شود.هنگامی‌که بیش از دو حالت نداریم می‌توانیم احتمال P ، f(y)، F(t) را بطور جداگانه حساب کنیم.ماتریس انتقال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

این ماتریس به آسانی از طریق تعریف P بدست می‌آید برای مثال F(t) را می‌توان با تبدیل لاپلاس محاسبه کرد:

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} \bar{F}_{00}(t) & \bar{F}_{01}(t) \\ \bar{F}_{10}(t) & \bar{F}_{11}(t) \end{pmatrix}.$$

که نتیجه آن

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{00}(t) &= -\frac{(S_2-\theta_1)}{D}e^{-\theta_1 t} + \frac{(S_2-\theta_2)}{D}e^{-\theta_2 t}, \\
\bar{F}_{01}(t) &= -\frac{q_0}{D}e^{-\theta_1 t} + \frac{q_0}{D}e^{-\theta_2 t}, \\
\bar{F}_{10}(t) &= -\frac{q_1}{D}e^{-\theta_1 t} + \frac{q_1}{D}e^{-\theta_2 t}, \\
\bar{F}_{11}(t) &= -\frac{(S_1-\theta_1)}{D}e^{-\theta_1 t} + \frac{(S_1-\theta_2)}{D}e^{-\theta_2 t},
\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
S_1 &= q_0, \\
S_2 &= q_1 + \lambda, \\
K &= \lambda q_0, \\
D &= \sqrt{(S_1+S_2)^2 - 4K}, \\
\theta_1 &= (S_1+S_2+D)/2, \\
\theta_2 &= (S_1+S_2-D)/2.
\end{aligned}$$

پس از محاسبه F(t) می‌توان f(y) را به آسانی بدست آورد:

$$f(y) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\bar{F}_{01}(y) \\ 0 & \lambda\bar{F}_{11}(y) \end{pmatrix}.$$

تابع چگالی احتمال Hyperexponential به صورت زیر است

$$f_{H_2}(t) = p\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-p)\mu_2 e^{-\mu_2 t}$$

پس از محاسبه تابع چگالی احتمال IPP می‌توان توزیع Hyperexponential را به IPP و برعکس تبدیل نمود.

4 – 2

Conditional moment of the time between arrivals in an MMPP

به منظور اینکه بتوانیم توزیع زمان بین ورودیهای یك MMPP را محاسبه کنیم ما از توالی $\{(J_k, X_k), k \geq 0\}$ استفاده می‌کنیم که در آن X_k زمان بین k-1 امین و k امین ورودی است و J_k حالت CTMC در k امین ورودی است توالی renewal مارکفی که بوجود می‌آید دارای ماتریس توزیع احتمال حالت انتقال/ زمان بین ورودیها را ترکیب کرده است و به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x e^{[(Q-\Lambda)u]}\, du\, \Lambda \\
&= [-e^{(Q-\Lambda)u}(\Lambda - Q)]_0^x \Lambda \\
&= \{\mathbf{I} - e^{(Q-\Lambda)x}(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda
\end{aligned}
$$

هر کدام از اعضای F_{ij} یك احتمال شرطی هستند.

$$P\{J_k = j, X_k \leq x | J_{k-1} = i\}$$

تابع چگالی احتمال به صورت زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx} F(x) = \{e^{-(\Lambda-Q)x}(\Lambda - Q)\}(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda \\
&= e^{(Q-\Lambda)x}\Lambda
\end{aligned}
$$

چگالی توأم $X_1 .... X_n$ با حالت $J_n(n \geq 1)$ یك کانولوشن n fold از ماتریس تابع چگالی احتمال است تبدیل لاپلاس توأم به صورت زیر است:

$$f^*(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{k=1}^{n} (s_k \mathbf{I} - Q + \Lambda)^{-1}\Lambda$$

ما conditional moment زمان بین ورودیها با گرفتن مشتق جزئی از تبدیل لاپلاس ماتریس تابع چگالی احتمال توأم برای یك توالی n ورودی پشت سر هم بدست می‌آوریم. سپس شرط حالتهای اولیه را دوباره بررسی می‌کنیم و بر روی حالات پایانی جمع می‌کنیم سپس یك MMPP بر اساس تابع اتوکوواریانس سری‌های زمان بدست می‌آوریم:

π را نمایندهٔ حالت پایدار بردار Q از یك CTMC فرض می‌کنیم به طوریکه شرط π Q=0 برقرار باشد و $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$ باشد و e=(1.....1)^T است. π_i از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\pi_i^* = \frac{\pi_i \lambda_i}{\sum_{j=1}^{m} \pi_j \lambda_j}$$

بردار احتمال حالت بروی ورودیها به صورت زیر است:

$$\pi^* = \frac{\pi\Lambda}{\pi\lambda}$$

بنابراین

$$E[X_n^t] = \pi^* l! [(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda]^{n-1}(\Lambda - Q)^{-(l+1)}\Lambda e, l \geq 1$$

بویژه اولین لحظهٔ X_k به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E[X_k] = \pi^* [(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda]^{k-1}(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e, 1 \leq k \leq n$$

مقدار مورد انتظار $X_1 X_{k+1}$ توسط گرفتن مشتق جزئی $f^*(s_1 ...... s_{k+1})$ در $s_1 = s_2 .... = s_{k+1} = 0$ بدست می‌آید.

$$E[X_1 X_{k+1}] = \pi^* (\Lambda - Q)^{-2}\Lambda[(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda]^{k-1}(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e$$

اتوکوواریانس در lag k $E[(X_1 - E[X_1])(X_{k+1} - E[X_{k+1}])] = E(X_1 X_{k+1}) - E[X_1]E[X_{k+1}]$ به صورت زیر است.

$$\phi_k = \pi^*(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda\left[\{I - e\pi^*(\Lambda - Q)^{-1}\}\{(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda\}^{k-1}\right](\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e, k \geq 1$$

اتوکوواریانس در lag 0 ، واریانس زمانهای بین ورودیها ، بوسیلهٔ زیر بدست می‌آید

$$\phi_0 = E[X_1^2] - E[X_1]^2$$
$$= 2\pi^*(\Lambda - Q)^{-3}\Lambda e - \left(\pi^*(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e\right)^2$$

تابع autocorrelation برای یك MMPP به صورت زیر است.

$$p_k = \phi_k / \phi_0, \, fork \geq 1$$
$$\frac{\pi^*(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda\left[\{I - e\pi^*(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda\}\{(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda\}^{k-1}\right](\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e}{2\pi^*(\Lambda - Q)^{-3}\Lambda e - \left(\pi^*(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e\right)^2}$$

متوسط inter arrival time به صورت زیر است:

$$E[X_1] = \pi^*(\Lambda - Q)^{-2}\Lambda e$$
$$= \frac{\pi\Lambda(\Lambda - Q)^{-1}(\Lambda - Q)^{-1}\Lambda e}{\pi.\lambda}$$
$$= \frac{\pi\left(I + Q(\Lambda - q)^{-1}\right)\left(I + (\Lambda - q)^{-1}Q\right)e}{\pi\lambda}$$
$$= \frac{1}{\pi\lambda}$$

5 – 2

یک فرایند تکرار (Renewal) با زمان های بین رویداد با توزیع PH را در نظر می گیریم، $X_i \in PH(\vec{\alpha},T), i>1$. فرایند تصادفی فازها را با $J(t)$ نشان می دهیم. یعنی $J(t)$ مقدار فاز یا حالت زنجیره مارکف مرتبط با X_i را اختیار می کند. می دانیم که میانگین زمان های بین رویداد برابر است با $E(X_i)=\mu_1=\vec{\alpha}(-T)^{-1}\vec{e}$. یک بازه X با توزیع PH را در نظر می گیریم. τ_{ij} را زمان گذرانده شده در فاز j در نظر می گیریم با این شرط که در زمان 0 در فاز i باشیم. علاوه بر این فرایند تصادفی زیر را تعریف می کنیم:

$$I_{ij}(t)=\begin{cases} 1 & if J(t)=j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

آنگاه داریم

$$\tau_{ij}=\int_0^\infty I_{ij}(t)dt$$

لذا

$$E(\tau_{ij})=E\left(\int_0^\infty I_{ij}(t)dt\right)=\int_0^\infty p_{ij}(t)$$

$$\int_0^K e^{Tt}dt=\int_0^K\sum_{i=0}^\infty\frac{(Tt)^i}{i!}dt=\sum_{i=0}^\infty T^i\int_0^K\frac{t^i}{i!}dt=\sum_{i=0}^\infty T^t\left[\frac{t^{i+1}}{(i+1)!}\right]_{)}^K=\sum_{i=0}^\infty T^i\frac{K^{i+1}}{(i+1)!}=T^{-1}\left(e^{Tk}-I\right)\to(-T)^{-1}$$

بنابراین عنصر (i, j) در $(-T)^{-1}$ مقدار متوسط زمان گذرانده شده در فاز j است با این شرط که زنجیره در فاز i شروع شده باشد. از این تعبیر احتمالاتی واضح است که $0 \le (-T)^{-1}$. اکنون می توانیم زمان متوسط قبل از جذب را با شرط شروع از i با جمع کردن سطرهای $(-T)^{-1}$ بدست آوریم. بنابراین iامین عنصر $\vec{e}$ $(-T)^{-1}$ ، زمان متوسط گذرانده شده در حالت های گذرا با شرط شروع از i است. برای بدست آوردن متوسط یک توزیع PH با بردار احتمال اولیه $\vec{\alpha}$ یعنی $\mu_1=\vec{\alpha}(-T)^{-1}\vec{e}$ باید یک مجموع وزندار از $\vec{e}$ $(-T)^{-1}$ با فاکتورهای وزندهی $\vec{\alpha}$ ایجاد کنیم. این نتیجه با مشتق گیری از تبدیلات لاپلاس بدست می آید. بردار $\vec{\pi}$ بردار احتمال حالت پایدار زنجیره مارکف زیربنای فرایند تکرار PH می باشد. این بردار برابر است با $\vec{\pi}=\frac{1}{\mu_1}\vec{\alpha}(-T)^{-1}$. اکنون می توانیم این نتیجه را بصورت احتمالاتی تعبیر کنیم. i امین عنصر ستون j ام $(-T)^{-1}$ ، زمان متوسط گذرانده شده در فاز j با شروع از فاز i می باشد. ضرب $\vec{\alpha}$ در این ستون، زمان متوسط گذرانده شده در فاز j با توزیع زمان فاز $(\vec{\alpha},T)$ می باشد. با نگاه کردن به فرایند در یک لحظه تصادفی، احتمال اینکه زنجیره مارکف در فاز j باشد متناسب با زمان متوسط گذرانده شده در فاز j می باشد. شرط نرمال سازی μ_1 می باشد.

با درنظر گرفتن ساختار فرایند تکرار PH در می یابیم که ماتریس مولد CTMC به دو ماتریس T و $\vec{T}^0\vec{\alpha}$ تقسیم می شود. اولین ماتریس با انتقالات فاز ناوابسته به ورودها (arrivals) و دومین ماتریس با ورودها مرتبط هستند. حال این ساختار را طوری تعمیم می دهیم که حالات بیشتری را در تقسیم بندی $D=D_0+D_1$ در نظر گرفته باشیم. D یک مولد یکپارچه (irreducible) یک CTMC با m حالت می باشد. بنابراین فرایند تکرار PH، یک MAP(Markov Arrival Process) با $D_0=T$ و $D_1=\vec{T}^0\vec{\alpha}$ می باشد.

ماتریس D_0 که متناظر با انتقال های بدون ورود می باشد، یک ماتریس نا – یکه (non – singular) با عناصر منفی در قطر و عناصر نامنفی در غیرقطر می باشد. ماتریس D_1 که متناظر با انتقالات و ورودها می باشد، نامنفی است.

فرایند شمارش

احتمالات $P(n,t)$

معادلات زیر را (معادلات مستقیم چاپمن – کولمگروف) را بدست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
&P'(0,t)=P(0,t)D_0\\
&P'(1,t)=P(0,t)D_1+P(1,t)D_0\\
&\vdots\\
&P'(n+1,t)=P(n,t)D_1+P(n+1,t)D_0
\end{aligned}
$$

واضح است که یک سیستم معادلات دیفرانسیل خطی را می توان با تبدیل لاپلاس حل نمود. برای یک سیستم معادلات تفاضلی، که در اینجا با آن سروکار داریم، تبدیل Z ابزار مناسبی است. با ضرب کردن معادله i ام در z^i داریم:

$$
\begin{aligned}
&P'(0,t)=P(0,t)D_0\\
&zP'(1,t)=zP(0,t)D_1+zP(1,t)D_0\\
&\vdots\\
&z^{n+1}P'(n+1,t)=z^{n+1}P(n,t)D_1+z^{n+1}P(n+1,t)D_0
\end{aligned}
$$

با جمع کردن این معادلات داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i P'(0,t)=z\sum_{i=0}^{\infty} z^i P(0,t)D_1+\sum_{i=0}^{\infty} z^i P(0,t)D_0$$

با تعریف $P(z,t)=\sum_{i=0}^{\infty} z^i P(n,t)$ و $D(z)=D_0+D_1$ و با توجه به اینکه $\sum_{i=0}^{\infty} z^i P'(n,t)=P'(z,t)$ داریم:

$$P'(z,t)=P(z,t)D(z)$$

و نهایتا خواهیم داشت:

$$P(z,t)=e^{D(z)t}=e^{(D_0+zD_1)t}$$

می دانیم که در یک فرایند پواسن با پارامتر λ، $E\left(z^{N(t)}\right)=e^{-\lambda(1-z)t}$. بنابراین در حوزه تبدیل می بینیم که MAP یک تعمیم طبیعی از فرایند پواسن است.

$$
\begin{aligned}
&P_{ij}(n,t)=\Pr\{N_t=n, J_t=j|N_0=0, J_0=i\}\\
&P_{ij}(0,0)=\Pr\{N_0=0, J_0=j|N_0=0, J_0=i\}=\\
&\Pr\{J_0=j|J_0=i\}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\\
&\Rightarrow P(0,0)=I
\end{aligned}
$$

$$P^*(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} P(n,t)z^n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}P^*(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P'(n,t)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[P(n,t)(Q-\Lambda)+P(n-1,t)\Lambda\right]z^n=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n,t)(Q-\Lambda)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}P(n-1,t)\Lambda z^n=$$
$$P^*(z,t)(Q-\Lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}P(n-1,t)\Lambda z^n=$$
$$[n-1]=u\Rightarrow$$

$$P^*(z,t)(Q-\Lambda)+\sum_{u=0}^{\infty}P(u,t)\Lambda z^{u+1}=$$
$$P^*(z,t)(Q-\Lambda)+z\sum_{u=0}^{\infty}P(u,t)\Lambda z^u=$$
$$P^*(z,t)(Q-\Lambda)+zP^*(z,t)\Lambda$$

$$P^*(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n,0)z^n$$
$$P_{ij}(n,0)=\Pr\{N_0=0,J_0=j|N_0=0,J_0=i\}=\begin{cases}0 & n\neq 0 or i\neq j\\ 1 & n=0\&i=j\end{cases}$$
$$\Rightarrow P(n,0)=0,n>0$$
$$\Rightarrow P^*(z,0)=P(0,0)z^0=I.1=I$$

$$\frac{d}{dt}P^*(z,t)=P^*(z,t)[Q-\Lambda+z\Lambda]=$$
$$P^*(z,t)[Q+(z-1)\Lambda]$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}P^*(z,t)-[Q+(z-1)\Lambda]P^*(z,t)=0$$

می دانیم جواب معادله $y'-cy=0$ برابر $y=e^{ct}$ می باشد لذا داریم:

$$P^*(z,t)=e^{[Q+(z-1)\Lambda]t}$$

1 – 5 – 2

گشتاورهای فرایند ورود مارکف MAP

می توانیم تعداد متوسط ورودها در یک بازه به طول t را با مشتق گیری از معادله قبل بدست آوریم:

$$\frac{d}{dz}P(z,t)=\frac{d}{dz}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(D(z)t)^i}{i!}=\frac{d}{dz}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{((D_0+zD_1)t)^i}{i!}=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\sum_{j=0}^{i-1}(D_0+zD_1)^j D_1(D_0+zD_1)^{i-1-j}$$
$$\frac{d}{dz}P(z,t)\Big|_{z=1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\sum_{j=0}^{i-1}D^j D_1 D^{i-1-j}$$

عناصر i, j ام این ماتریس، تعداد متوسط $N(t)I_{ij}(t)$ می باشند یعنی تعداد متوسط رویدادها در بازه [0, t] اگر در زمان t در فاز j باشیم. با جمع کردن سطرها و ضرب در $\vec{e}$ و اینکه $D\vec{e}=\vec{0}$ بدست می آوریم:

$$\frac{d}{dz}P(z,t)\Big|_{z=1}\vec{e}=\vec{\mu}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}D^{i-1}D_1\vec{e}$$

عنصر j ام $\vec{\mu}$ ، تعداد متوسط رویدادها در [0, t] می باشد مشروط به اینکه در زمان 0 در فاز j باشیم. نتیجه نهایی MAP حالت پایدار اینگونه بدست می آید:

$$\vec{\theta}\vec{\mu}(t)=\vec{\theta}D_1\vec{e}t=\lambda^* t$$

از آنجا که $\vec{\theta}D=\vec{0}$. مقدار λ^* ، نرخ اساسی MAP نامیده می شود. حال با عبارت $\vec{\mu}$ ادامه می دهیم:

$$\vec{\mu}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(D)^{i-1}D_1\vec{e}$$

این عبارت مشابه ماتریس نمایی (Matrix Exponential) است با این تفاوت که توان D ، i نیست. نمی توانیم این امر را براحتی تصحیح کنیم چون D یکه است. از آنجا که می دانیم $\vec{\theta}$ منحصر به یک ثابت است، مقدار ویژه در 0 برابر 1 است. با استفاده از نظریه ماتریس ها می توان نشان داد که ماتریس $\vec{e}\,\vec{\theta}-D$ یک ماتریس نا – یکه است. تعریف می کنیم $\Theta=\vec{e}\,\vec{\theta}$. ماتریس D، یک مقدار ویژه واحد برابر صفر دارد. با ساختن ماتریس $\Theta-D$ ، آن مقدار ویژه را از صفر به یک جابجا می کنیم بدون اینکه بقیه ساختار ویژه را دستکاری کرده باشیم؛ یعنی D و $\Theta-D$ در بقیه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تفاوتی ندارند.

$$\vec{\theta}(\Theta-D)=\vec{\theta}\vec{e}\,\vec{\theta}-\vec{\theta}D=\vec{\theta}$$

دیده می شود که $\vec{\theta}$ هنوز یک بردار ویژه است که به یک مقدار ویژه برابر 1 متناظر است. از آنجا که بقیه بردارهای ویژه چپ D بجز $\vec{\theta}$ ، بر $\vec{e}$ متعامد هستند، همه آنها مقادیر ویژه ماتریس جدید نیز خواهند بود. یک بردار ویژه دلخواه مثل $\vec{\omega}$ با مقدار ویژه η را در نظر بگیرید:

$$\vec{\omega}(\vec{e}\,\vec{\theta}-D)=\vec{\omega}\vec{e}\,\vec{\theta}-\vec{\omega}D=-\eta\vec{\omega}$$

حال، عبارت مربوط به $\vec{\mu}(t)$ را دوباره می نویسیم:

$$\vec{\mu}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(\Theta-D)^{-1}(\Theta-D)D^{i-1}D_1\vec{e}$$
$$=(\Theta-D)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(\vec{e}\,\vec{\theta}-D)D^{i-1}D_1\vec{e}$$

حاصلضرب $\vec{e}\,\vec{\theta}D^{i-1}$ ، بوضوح به صفر میل می کند وقتی که $i>1$ ، لذا می توانیم بنویسیم:

$$\left(\vec{e}\,\vec{\theta}-D\right)^{-1}\left(t\vec{e}\,\vec{\theta}D_1\vec{e}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}D^iD_1\vec{e}\right)=$$

$$\left(\vec{e}\,\vec{\theta}-D\right)^{-1}t\vec{e}\,\vec{\theta}D_1\vec{e}+\left(\vec{e}\,\vec{\theta}-D\right)^{-1}\left(I-e^{Dt}\right)\vec{e}$$

نهایتا باید توجه داشت که چون $\vec{e}$ یک بردار ویژه راست $\Theta-D$ است، بنابراین یک بردار ویژه راست $\left(\Theta-D\right)^{-1}$ نیز می باشد.

$$\vec{\mu}(t)=t\Theta D_1\vec{e}+\left(\Theta-D\right)^{-1}\left(I-e^{Dt}\right)\vec{e}=t\Theta D_1\vec{e}+\left(I-e^{Dt}\right)\left(\Theta-D\right)^{-1}\vec{e}$$

تساوی آخر بخاطر خاصیت جابجایی پذیری ماتریس ها است. دوباره می فهمیم که برای MAP حالت پایدار داریم $\vec{\theta}\vec{\mu}=\vec{\theta}D_1\vec{e}=\lambda^*$. البته این نتیجه، غیر منتظره نیست چون این یک خاصیت کلی فرایندهای نقطه ای در حالت پایدار است.

$$M(t)=\frac{\partial}{\partial z}P^*(z,t)=\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty}P(n,t)z^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n,t)nz^{n-1}\Big|_{z=1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP(n,t)$$

$$\Rightarrow M_{ij}(t)=\sum_{n=}^{\infty}nP_{ij}(n,t)$$

می دانیم $e^x=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ و از طرفی داریم $P^*(z,t)=e^{[Q+(z-1)\Lambda]t}$ لذا اگر داشته باشیم $Q-(1-z)\Lambda=A$ آنگاه:

$$P^*(z,t)=e^{At}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}$$

و از طرفی می دانیم:

$$\frac{d}{dx}A^n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}A^j(x)A'(x)A^{n-1-j}(x)$$

و $\frac{\partial}{\partial z}(At)=\Lambda t$ ، بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial z}P^*(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(At)^j(z)(At)'(z)(At)^{n-1-j}(z)$$

داریم $(At)(z)\big|_{z=1}=Qt$ و $M(t)=\frac{\partial}{\partial z}P^*(z,t)\big|_{z=1}$ ، لذا:

$$\frac{\partial}{\partial z}P^*(z,t)\Big|_{z=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(Qt)^j\Lambda t(Qt)^{n-1-j}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}t^n(Q)^j\Lambda(Q)^{n-1-j}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}Q^j\Lambda Q^{n-1-j}$$

$$\Rightarrow M(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{v=0}^{n-1}Q^v\Lambda Q^{n-1-v}$$

6 – 2

برایند (Superposition) دو فرایند MMPP مستقل، نیز یک فرایند MMPP است بگونه ای که ترافیک وارد شونده به گروه اصلی که برایند یک فرایند پواسن و چندین فرایند پواسن منقطع (Interrupted) می باشد، یک MMPP است. این MMPP، 2^m حالت دارد که هر کدام متناظر با یک زیرمجموعه "روشن" از IPP می باشند. فضای حالت، را می توان براحتی با جمع کرونکر ماتریس ها نمایش داد. بطور خلاصه، جمع کرونکر دو ماتریس مربع L, M از مرتبه r, s بصورت $L\oplus M=L\otimes I_s+I_r\otimes M$ می باشد.

ماتریس I_k نشاندهنده ماتریس واحد از مرتبه k است و $\otimes$ نشاندهنده ضرب کرونکر است. ضرب کرونکر، $K\otimes P$، دو ماتریس، ماتریسی است با عناصر بلوکی بصورت $\{K_{ij}P\}$. لذا اگر K, P ماتریس های مربع از مرتبه r, s باشند، $K\otimes P$ از مرتبه rs می باشد. جمع کرونکر m ماتریس مربع $L_1,\ldots,L_m$ از مرتبه n، یک ماتریس مربع از مرتبه n^m می باشد و بصورت زیر تعریف می گردد:

$$L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_m=L_1\otimes I\otimes\cdots\otimes I+I\otimes L_2\otimes\cdots\otimes I+\cdots+I\otimes I\otimes\cdots\otimes L_m$$

با این نماد، برایند m فرایند مستقل MMPP که بصورت $(Q_i,\Lambda_i), 1\le i\le m$ می باشند را می توان بصورت یک فرایند MMPP (Q,Λ) بصورت زیر نمایش داد:

$$Q=Q_1\oplus Q_2\oplus\cdots\oplus Q_m$$
$$\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\cdots\oplus\Lambda_m$$

1 – 6 – 2

اگر داشته باشیم $Q=\begin{bmatrix}-\sigma_1 & \sigma_1\\ \sigma_2 & -\sigma_2\end{bmatrix}$ و $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$، آنگاه برایند n فرایند MMPP را می توان بدست آورد.

$$\Lambda \oplus \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1+\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1+\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}$$

با تکرار این فرایند به اندازه n بار بدست می آوریم:

$$\Lambda_n = \underbrace{\Lambda \oplus \Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda}_{n} = diag\left(i\lambda_1 + (n-i)\lambda_2\right), 0 \le i \le n$$

به طریق مشابه داریم:

$$Q \oplus Q = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -\sigma_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 & -(\sigma_1+\sigma_2) & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & 0 & -(\sigma_1+\sigma_2) & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & -2\sigma_2 \end{bmatrix}$$

با تکرار این فرایند به اندازه n بار بدست می آوریم:

$$Q_n = Q \oplus Q \oplus \cdots \oplus Q$$

و

$$\begin{cases} [Q_n]_{i,i} = -i\sigma_1 - (n-i)\sigma_2 & 0 \le i \le n \\ [Q_n]_{i,i-1} = i\sigma_1 & 1 \le i \le n \\ [Q_n]_{i,i+1} = (n-i)\sigma_2 & 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

در هر مرحله، اندازه ماتریس حاصل، یکی از ماتریس های جمعوند خود بیشتر است، بنابراین با استقرا و اینکه اندازه در مرحله 1 برابر 2 است خواهیم داشت:

$$\dim(Q_n) = \dim(\lambda_n) = n+1$$

3

MMPP/G/1

Model Parameterization 1 – 1 – 3

از آنجایی که $\widetilde{H}(x)$ توزیه زمان سرویس دهی می‌باشد و با توجه به تعریف P(n,t) خواهیم داشت:

$$\widetilde{A}_n(x) = \int_0^x P(n,t)d\widetilde{H}(t) \qquad n \geq 0, x \geq 0 \qquad (32)$$

ماتریس‌های تبدیل تعریف می‌شوند:

$$A_n(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\tilde{A}_n(x), \qquad B_n(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\tilde{B}_n(x),$$

$$A(z,s) = \sum_{n=0}^\infty A_n(s) z^n, \qquad B(z,s) = \sum_{n=0}^\infty B_n(s) z^n,$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$A_n = A_n(0) = \tilde{A}_n(\infty), \qquad B_n = B_n(0) = \tilde{B}_n(\infty)$$

$$A = A(1,0), \qquad B = B(1,0).$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$A(z,s) = \sum_{n=.0}^{\infty}\left[\int_0^\infty e^{-sx} d\left(\int_0^x P(n,t)d\widetilde{H}(t)\right)\right] z^n$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} d\left(\int_0^x \sum P(n,t) z^n d\widetilde{H}(t)\right) \qquad (33)$$

$$= \int e^{-sx} e^{[(Q-\Lambda)+z\Lambda]x} d\widetilde{H}(x)$$

حال با جایگزاری در رابطه (33) خواهیم داشت:

$$A = A(1,0) = \int e^{Qt} d\widetilde{H}(t)$$

اگر از رابطه A(z,s) برحسب z مشتق بگیریم و قرار دهیم z=1آنگاه خواهیم داشت:

$$\beta = \sum kA_k = \frac{d}{dz} A(z,0)\,|_{z=1} = (\mu_1' / \lambda_1')e + (A-I)(e\pi + D)^{-1}$$
$$= \rho e + (Q + e\pi)^{-1}(A-I)\lambda \qquad (34)$$

همچنین داریم:

$$B_n = \int_0^\infty e^{-sx} d\left(\int_0^x d\left(\int_0^x e^{(Q-\Lambda)t}\Lambda dt\right)\widetilde{A}_n(x-t)\right)$$
$$= (\Lambda - Q)^{-1}\Lambda A_n \qquad (35)$$

2 – 1 – 3

The queue length distribution at departure instants

تعریف می‌کنیم:

$$K(z,s) = z \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(s) G^\nu(z,s)$$

ماتریس K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(z) = K(z,0) = z \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu G^\nu(z),$$

$$K = K(1) = K(1,0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu G^\nu$$

می‌توان نشان داد که

$$K = -D_0^{-1}[D[G]-D_0] = I - D_0^{-1} D[G]$$

از طرفی نیز داریم

$$G = \int_0^\infty e^{D[G]x} d\tilde{H}(x)$$

در رابطه اخیر واضح است که w همان بردار ساکن G می‌باشد. این موضوع با توجه به منحصر بفرد بودن g قابل اثبات است. از طرفی نیز $-gD_0$ نیز مقدار مشخص سمت چپ برای K با توجه به رابطه اخیر برای K، می‌باشد. حال با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که به ازای یك مقدار ثابت C خواهیم داشت $x_0=-CgD_0$ و به همین ترتیب داریم $y_0 = c\lambda_1^{\prime -1} g$. از طرفی نیز می‌توان نشان داد که $y_0e=1-\rho$ پس در نتیجه $C = \lambda_1'(1-\rho)$ با جایگزاری خواهیم داشت:

$$x_0 = \lambda_1'(1-\rho)g(-D_0) = \frac{1-\rho}{\lambda_{tot}}.g(\Lambda - Q) \qquad (39)$$

1 – 2 – 1 – 3

Moment of the queue length at departures

طبق رابطه (٣٦) داریم:

$$x_i = x_0 B_i + \sum_{\nu=1}^{i+1} x_\nu A_{i+1-\nu}, \qquad \text{for} \quad i \geq 0$$

از طرفی نیز تعریف می‌کنیم:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i$$

حال اگر رابطه (۳٦) را در رابطه اخیر جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$X(z)[zI - A(z)] = x_0[zB(z) - A(z)]$$

از طرفی نیز می‌توانیم مقدار B(z) را طبق محاسبات قبلی جایگزین کنیم که در این صورت به رابطه زیر می‌رسیم:

$$= -x_0 D_0^{-1} D(z) A(z)$$

حال اگر در این رابطه طبق تعریف D(z=0) را جایگزین کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$X(z)[zI - A(z)] = -x_0 (Q - \Lambda)^{-1} D(z) A(z)$$

حال تعریف مشتقات مرتبه i-ام را بصورت زیر برای مقدار ۱ تعریف می‌کنیم:

$$U(z) = -x_0 D_0^{-1} D(z) A(z)$$

$$X^{(i)} = X^{(i)}(1)$$

$$U^{(i)} = U^{(i)}(1)$$

$$A^{(i)} = A^{(i)}(1), \text{ for } i \geq 1$$

$$X = X(1)$$

برای محاسبه X(1) در رابطه * قرار می‌دهیم z=1 و مقدار $X(1)e\pi$ را به دو طرف اضافه می‌نمایم. با توجه به اینکه ماتریس $I - A + e\pi$ غیرمنفرد و معکوس‌پذیر است در نتیجه خواهیم داشت:

$$X(1) = \pi + -x_0 D_0^{-1} D A (I - A + e\pi)^{-1}$$

حال اگر مشتق مرتبه اول را برای X(z) محاسبه کنیم و به ازای z=1 نتیجه را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$X^{(1)} = (X^{(1)} e)\pi + \{U^{(1)} - X[I - A^{(1)}]\}(I - A + e\pi)^{-1}$$

با جایگزاری مقدار X و انجام محاسبات به رابطه زیر می‌رسیم:

$$X^{(1)} e = \frac{1}{2(1-\rho)} \left\{ XA^{(2)} e + U^{(2)} e + 2\{U^{(1)} - X[I - A^{(1)}]\}(I - A + e\pi)^{-1} \beta \right\} \quad (40)$$

به همین ترتیب می‌توان محاسبات را برای مشتق مرتبه دوم انجام داد و به نتیجه زیر رسید:

$$X^{(2)} e = \frac{1}{3(1-\rho)} \left\{ 3X^{(1)} A^{(2)} e + XA^{(3)} e + U^{(3)} e + 3\{U^{(2)} + XA^{(2)} - 2X^{(1)}[I - A^{(1)}]\}(I - A + e\pi)^{-1} \beta \right\} \quad (41)$$

توجه داشته باشید با توجه به تعریف U(z) در روابط بالا داریم:

$$U(z) = -x_0(Q-\Lambda)^{-1} D(z)A(z)$$
$$U'(z) = -x_0(Q-\Lambda)^{-1}[D(z)A'(z) + \Lambda A(z)]$$
$$U''(z) = -x_0(Q-\Lambda)^{-1}[D(z)A''(z) + 2\Lambda A'(z)]$$
$$U^{(3)}(z) = -x_0(Q-\Lambda)^{-1}[D(z)A^{(3)}(z) + 3\Lambda A''(z)]$$

3 – 1 – 3

The system size distribution at an arbitrary time

فرض کنید $\xi(t)$ بیانگر طول صف و J(t) فاز فرایندهای وردی در زمان t باشد. حال پارامتر فرایند پیوسته $\{[\xi(t), J(t)], t \geq 0\}$ را بررسی می‌کنیم. در نتیجه احتمال شرطی زیر را خواهیم داشت:

$$Y(k,j;t) = P\{\xi(t)=k, J(t)=j \mid \xi_0 = k_0, J_0 = j_0\}$$

برای $k \geq 0, 1 \leq j \leq m, t \geq 0$. می‌توان نشان داد که اگر زمان به سمت بی‌نهایت میل کند خواهیم داشت:

$$y_{kj} = \lim_{t\to\infty} Y(k,j;t) \ , \ \text{for } k \geq 0, \ 1 \leq j \leq m$$

برای k>0 تعریف می‌کنیم $y_k=(y_{k1},y_{k2},...,y_{km})$. از اینجا خواهیم داشت :

$$y_0 = -\lambda_1'^{-1} x_0 D_0^{-1}$$

با توجه به اینکه $x_0 = \frac{1-\rho}{\lambda_{tot}} g(\Lambda - Q)$ و تعریف $D(z) = (Q-\Lambda) + z\Lambda \Rightarrow -D(0) = \Lambda - Q$ در رابطه اخیر با جایگزینی به رابطه (۴۲) می‌رسیم:

$$y_0 = (1-\rho)g$$

تابع مولد $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^i$ با تابع مولد x دارای رابطه زیر می‌باشد:

$$Y(z)D(z) = \lambda_1'^{-1}(z-1)X(z), \qquad \text{for } |z|<1$$

در نتیجه با محاسبه خواهیم داشت $Y(1)=\pi$. با محاسبه z^i در رابطه بالا براحتی خواهیم دید که بین y_i و x_i رابطه زیر وجود دارد:

$$y_{i+1} = \left[\sum_{j=0}^{i} y_j D_{i+1-j} - \lambda_1'^{-1}(x_i - x_{i+1})\right](-D_0^{-1}), \qquad \text{for } i \geq 0$$

که می‌توان این رابطه را براساس دیگر روابط بازنویسی کرد و با تبدیل اندیس به رابطه (۴۳) رسید.

$$y_i = (y_{i-1}\Lambda - \lambda_{tot}(x_{i-1} - x_i))(\Lambda - Q)^{-1} \qquad (43)$$

1 – 3 – 1 – 3

Moment of the system size at an arbitrary time

با توجه به رابطه بین مولد تابع y و مولد تابع x می‌توان مشتقات مختلف Y را بدست آورد. ابتدا در نظر داشته باشید که $Y^{(i)} = Y^{(i)}(1), D^{(i)} = D^{(i)}(1) \ \ for \ \ i \geq 1$. حال داریم:

$$Y(z)D(z) = \lambda_1^{\prime -1}(z-1)X(z)$$
$$Y^{(1)}D = \lambda_1^{\prime -1}X - \pi D^{(1)}$$
$$Y^{(2)}D = 2[\lambda_1^{\prime -1}X^{(1)} - Y^{(1)}D^{(1)}] - \pi D^{(2)}$$
$$Y^{(3)}D = 3[\lambda_1^{\prime -1}X^{(2)} - Y^{(2)}D^{(1)} - Y^{(1)}D^{(2)}] - \pi D^{(3)}$$

حال در روابط بالا به دو طرف مقدار $Y^{(1)}e\pi$ را اضافه می‌نماییم و توجه داریم که ماتریس $e\pi + D$ ، ماتریس غیرمنفرد معکوس‌پذیر است. درنتیجه خواهیم داشت:

$$Y^{(1)} = (Y^{(1)}e)\pi + [\lambda_1^{\prime -1}X - \pi D^{(1)}](e\pi + D)^{-1}$$

حال دو طرف رابطه را این بار در e ضرب می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$Y^{(1)}D^{(1)}e = \lambda_1^{\prime -1}X^{(1)}e - \frac{1}{2}\pi D^{(2)}e$$

با ضرب کردن رابطه اول در $D^{(1)}e$ و جایگزاری در رابطه دوم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$Y^{(1)}e = X^{(1)}e - \frac{1}{2}\lambda_1^{\prime}\pi D^{(2)}e + [\lambda_1^{\prime}\pi D^{(1)} - X](e\pi + D)^{-1}D^{(1)}e$$

که رابطه اخیر را می‌توان با جایگزاری روابط به دست آمده به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$Y^{(1)}e = X^{(1)}e + \left[\frac{1}{\lambda_{tot}}\pi\Lambda - X\right](e\pi + Q)^{-1}\Lambda e \qquad (46)$$

و به همین ترتیب برای مشتق مرتبه دوم داریم:

$$Y^{(2)}e = X^{(2)}e - 2\left[X^{(1)} - \frac{1}{\lambda_{tot}}Y^{(1)}\Lambda\right](e\pi + Q)^{-1}\Lambda e \qquad (47)$$

4 – 1 – 3

The waiting time distribution

طبق رابطه Ramaswami داریم که : $\begin{cases} W(s) = sy_0[sI + D(H(s))]^{-1} \\ W(0) = \pi \end{cases}$ از طرفی نیز داریم

با جایگذاری $D(z) = (Q - \Lambda) + z\Lambda = Q - \Lambda(1-z)$ در رابطه Ramaswami خواهیم داشت:

$$\begin{cases} W(s) = sy_0[sI + Q - \Lambda(1 - H(s))]^{-1} \\ W(0) = \pi \end{cases}$$

همچنین نیز میدانیم که $y_0=(1-\rho)g$ که با جایگذاری به رابطه (۴۸) می‌رسیم:

$$\begin{cases} W(s)=s(1-\rho)g[sI+Q-\Lambda(1-H(s))]^{-1} \\ W(0)=\pi \end{cases} \quad (48)$$

در نتیجه زمان انتظار مجازی نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$W_v(s)=W(s)e \quad (49)$$

و با توجه به تعریف کلی می‌توان زمان انتظار هر وردی دلخواه را از طریق هر یك از روابط زیر بدست آورد:

$$W_a(s)=\frac{sh}{\rho(1-H(s))}.(W_v(s)+\rho-1) \quad (50)$$

$$W_a(s)=\frac{1}{\lambda_{tot}}.W(s)\lambda \quad (51)$$

1 – 4 – 1 – 3

Moments of the waiting time distribution

ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$V(s)=D(H(s))$$
$$w^{(i)}=w^{(i)}(0)$$
$$V^{(i)}=V^{(i)}(0)$$
$$\mu_i'=\widetilde{H}^{(i)}(.)$$

با مشتق‌گیری متوالی خواهیم داشت:

$$V^{(1)}=-\mu_1'D^{(1)}$$
$$V^{(2)}=(\mu_1')^2D^{(2)}+\mu_2'D^{(1)}$$
$$V^{(3)}=-(\mu_1')^3D^{(2)}-\mu_2'D^{(2)}-\mu_3'D^{(1)}$$

توجه داشته باشید که $\pi D^{(1)}e=\lambda_1'^{-1}$. علاوه بر این تعریف می‌کنیم $v^i=V^{(i)}e$. رابطه (48) را می‌توا ن به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$W(s) = s(1-\rho)g[sI + D(H(s))]^{-1}$$
$$= sy_0[sI + D(H(s))]^{-1}$$
$$\Rightarrow W(s)[sI + D(H(s))] = sy_0$$
$$\Rightarrow sW(s) + W(s)D(H(s)) = sy_0$$

حال با مشتق‌گیری متوالی و جایگذاری از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$-W^{(1)}e = \frac{1}{2(1-\rho)}[2\rho + 2(y_0 - \pi V^{(1)})(e\pi + D)^{-1}v_1 + \pi v_2]$$
$$W^{(1)} = (W^{(1)}e)\pi - \pi + (y_0 - \pi V^{(1)})(e\pi + D)^{-1}$$
$$\Rightarrow W'(0) = (h\pi\Lambda + (1-\rho)g)(Q + e\pi)^{-1} - \pi(1 + W_v)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$W^{(2)}e = \frac{1}{3(1-\rho)}[3(2W^{(1)} + 2W^{(1)}V^{(1)} + \pi V^{(2)})(e\pi + D)^{-1}v_1$$
$$-3W^{(1)}v_2 - \pi v_3]$$
$$\Rightarrow W^2{}_v = \frac{1}{3(1-\rho)}\Big[3h(2W'(0)(h\Lambda - I) - h^{(2)}\pi\Lambda)(Q + e\pi)^{-1}\lambda$$
$$-3h^{(2)}W'(0)\lambda + \lambda_{tot}h^{(3)}\Big]$$
$$W''(0) = (2W'(0)(h\Lambda - I) - h^{(2)}\pi\Lambda)(Q + e\pi)^{-1} + w_v^{(2)}\pi$$

با توجه به رابطه‌های بدست آمده (50) و (51) با جایگذاری خواهیم داشت:

$$W_a = \frac{1}{\rho}\left(W_v - \frac{1}{2}\lambda_{tot}h^{(2)}\right)$$
$$W_a^{(2)} = \frac{1}{\rho}\left(W_v^{(2)} - \frac{\lambda_{tot}h^{(3)}}{3} - \lambda_{tot}W_a h^{(2)}\right)$$

MMPP/G/1

براي محاسبه مقادير مورد نظر براي صف MMPP/G/1 گام هاي زير بايد انجام شود:

گام اول: محاسبه ماتریس G

-محاسبه G براي صف MMPP با m حالت

-گام مقدار اوليه

مقادير اوليه زير در نظر گرفته مي شود

$$G_o = 0, H_{0,k} = I, k = 0,1,2,...$$
$$\theta = \max_i((\Lambda - Q)_{ii})$$

$$\gamma_n = \int_0^\infty e^{-\theta x}\frac{(\theta x)^n}{n!} d\tilde{H}(x), n = 0,1,...,n^*$$

که n^* طوري انتخاب مي شود که در شرايط زير صدق کند

$$\sum_{k=1}^{n^*}\gamma_n > 1-\varepsilon_1, \varepsilon_1 << 1$$

-براي مقادير k=0,1,2,… به صورت زير محاسبه مي شود:

$$H_{n+1,k} = [I + \frac{1}{\theta}(Q - \Lambda + \Lambda G_k)] H_{n,k}, n = 0,1,...,n^*$$

$$G_{k+1} = \sum_{n=0}^{n^*}\gamma_n H_{n,k}$$

$$\| G_{k-1} - G_k \| < \varepsilon_2 << 1$$

$$G = G_{k+1}$$

مقدار $\tilde{H}(0)$ را به عنوان توزيع زمان سرويس (service time distribution) در نظر مي گيريم.
براي هر n، ماتريس A_n به m^2 مقدار انتگرال عددي نياز دارد.
دنباله $\{A_n : 0 \le n \le M\}$ براي مقدار مناسب انتخاب شده M محاسبه مي شود.
مقدار اين ماتريس بايد خيره شود.
هم چنين براي اين که مطمئن شويم حاصل جمع يک مقدار تصادفي (stochastic) است مي توان دنباله $\{A_n\}$ را با يک روش مناسب نرمال سازي کرد.
مقادير ماتريس G از رابطه زير به دست مي آيد:

$$G_{k+1} = \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 1}}^{\infty} (I - A_1)^{-1} A_n (G_k)^n,$$

پس از اين که يک بار مقدار ماتريس G را با دقت مطلوب محاسبه کرديم، بردار احتمال stationary يعني g را مي توان با استفاده از روش هاي استاندارد محاسبه کرد.

-محاسبه γ_n

به دست آوردن مقدار γ_n براي سرويس هاي قطعي (deterministic) و سرويس هاي Erlang-k به شرح زير مي باشد.
-سرويس قطعي (deterministic)
براي سرويس هاي قطعي مقدار γ_n از روابط زير به دست مي آيد:

$$\gamma_n = \int_0^\infty e^{-\theta x}\frac{(\theta x)^n}{n!}\delta(h - x)dx$$

$$= e^{-\theta h}\frac{(\theta h)^n}{n!}$$

$$\gamma_0 = e^{-\theta h}$$

, for n>0 $\gamma_n = \gamma_{n-1}\frac{\theta h}{n}$

-سرويس Erlang-k

براي سرويس Erlang-**k** مقدار γ_n از رابطه زير به دست مي آيد

$$\gamma_n = \int_0^\infty e^{-\theta x}\frac{(\theta x)^n}{n!}\mu^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu x}dx$$

$$= \frac{\mu^k\theta^k}{n!(k-1)!}\int_0^\infty e^{-(\theta+\mu)x}x^{n+k-1}dx$$

$$\frac{\mu^k\theta^n}{n!(k-1)!}.\frac{(n+k-1)!}{(\theta+\mu)^{n+k}}$$

$$\gamma_0 = \frac{\mu^k}{(\theta+\mu)^k}$$

$$\gamma_n = \gamma_0.\frac{\theta^n}{(\theta+\mu)^n}\binom{n+k-1}{k-1}$$

for n>0 $\gamma_n = \gamma_{n-1}.\frac{\theta}{\theta+\mu}(1+\frac{k-1}{n})$

اگر k يک مقدار حقيقي باشد، مشابه رابطه بازگشتي فوق را مي توان براي Γ توزيع زمان سرويس به كار برد و مقادير مورد نظر را محاسبه كرد.

-تركيبي از توزيع هاي Erlang، نمايي و قطعي

اگر توزيع زمان سرويس به عنوان يک حاصل جمع وزندار از توزيع هايي كه در بالا به آن ها اشاره كرديم قابل بيان باشد، مقدار γ_n نيز يک حاصل جمع وزندار از مقادير γ_n كه با احتمال هاي يكساني به عنوان توزيع ها وزن دهي شده اند، مي باشد.

-محاسبه ماتريس G براي صف MMPP با 2 حالت

ماترس هاي زير را در نظر بگيريد

$$,\ \Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix}1-G_0 & G_0\\ G_1 & 1-G_1\end{bmatrix}\ R = \begin{bmatrix}-r_0 & r_0\\ r_1 & -r_1\end{bmatrix}$$

براي صف MMPP/G/1، داريم

, $D_1 = \Lambda$, $D_j = 0$ j>1, $D_0 = R - \Lambda$

مقدار G از رابطه زير به دست مي آيد

$$G = \int_0^\infty e^{(R-\Lambda+\Lambda G)x}d\tilde{H}(x)$$

در ابتدا G را به شرح زير مقداردهي اوليه مي كنيم

$$G_0 = 0$$

حال برا ي محاسبه G داريم

$$G_1 = \frac{G_0 r_0}{r_0 + G_0(\lambda_0 - \lambda_1)}$$

$$(1)\ G_0 = 1 - G_1 - H(r_0 + r_1 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1)$$

و اين کار را تا زماني که مقادير G_0 و G_1 به حالت پايدار(stable)ي برسند ادامه مي دهيم.
اگر مقدار G_0 همگرا نشد و مقادير منفي هستند، جاي انديس ها را عوض کرده و اين کار را از ابتدا تکرار مي کنيم.
فرض کنيد $\lambda_0 \geq \lambda_1$
آن گاه از رابطه (1) داريم

$$G_0 + G_1 = 1 - H(r_0 + r_1 + \lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1),$$

سپس خواهيم داشت

$$G_0(r_1 + \lambda_1 G_1) = G_1(r_0 + \lambda_0 G_0).$$

اين معادله را براي محاسبه G_1 حل مي کنيم، مقدار ماتريس G به شرح زير به دست مي آيد:

$$G = \begin{bmatrix} 1-x & x \\ \dfrac{r_1 x}{r_0 + (\lambda_0 - \lambda_1)x} & 1 - \dfrac{r_1 x}{r_0 + (\lambda_0 - \lambda_1)x} \end{bmatrix},$$

که مقدار x برابر از ربطه زير به دست مي آيد:

$$x = 1 - \frac{r_1 x}{r_0 + (\lambda_0 - \lambda_1)x} - H\left(r_0 + r_1 + \lambda_0 x + \frac{\lambda_1 r_1 x}{r_0 + (\lambda_0 - \lambda_1)x}\right).$$

در اغلب حالت ها، مي توان با شروع از x=0 و با جايگزيني در رابطه فوق مقدار x را به دست آورد.
اين روش خيلي سريع است و بر خلاف تکرارهاي ماتريس هاي مشابه، سرعت همگرايي به مقدار ρ هيچ ربطي ندارد. به عنوان نمونه، يک مثال با ρ =0.99999 فقط پس از 14 مرحله تکرار با دقت 0.1 همگرا مي شود.
براي محدوده برخي آرگومان ها، موفقيت در روش جايگزيني مقدار با نوسان زيادي همراه خواهد بود. اگر اين اتفاق رخ داد، حالت هاي 0 و 1 را مجددا به گونه اي انديس دهي کنيد. بنابراين $\lambda_1 \geq \lambda_{01}$ اين مساله را در هر حالتي که با آن روبرو شويم، حل خواهد کرد.
در هر حالتي، راه حل منحصر به فرد در (0,1) مي تواند به آساني با استفاده از دو طرف به دست آيد.
اگر چه اين روش کمي کندتر است، ولي قطعا همگرا خواهد شد.
اگر $\lambda_1 \geq \lambda_{01}$ را امتخاب کنيم، از روابط زير داريم:

$$0 \leq x \leq \min(1, r_0(r_1 + \lambda_1 - \lambda_0)^{-1}).$$

مقدار بردار g از رابطه زير به دست مي آيد:

$$g = (g_0, g_1) = \left(\frac{G_1}{G_0 + G_1}, \frac{G_0}{G_0 + G_1}\right),$$

-محاسبه توزيع طول صف در حالت departure

يک روش موثر و کارآ براي محاسبه x_i به ازاي i>0، به عنوان يک توزيع نرمال ماتريس حالت توسط P.J.Burke. ارائه شده است.

اگر مقدار بردار x_0 را داشته باشيم، بردار x_i به ازاي i>0 به طور بازگشتي از رابطه زير به دست مي آيد:

$$x_i = \left[x_0 \overline{B}_i + \sum_{v=1}^{i-1} x_v \overline{A}_{i=1-v} \right] (I - \overline{A}_1)^{-1}, i \geq 1 \quad (2)$$

که در اين رابطه مقادير $\overline{A}_k$ و $\overline{B}_k$ از رابطه زير به دست مي آيند

$$\overline{A}_k = \sum_{i=k}^{\infty} A_i G^{i-k} \qquad \overline{B}_k = \sum_{i=k}^{\infty} B_i G^{i-k}, k \geq 0 \ ,$$

توجه کنيد که تمام مقادير در اين رابطه بازگشتي نامنفي هستند.

پياده سازي رابطه (2) مي تواند به طور بهينه با در نظر گرفتن اين نکته که $i \to \infty, \overline{B}_i, \overline{A}_i \to 0$ انجام شود.

بنابراين ممکن است يک انديس بزرگ براي i انتخاب شود (يعني i مي تواند به گونه اي انتخاب شود که $\sum_{k=i+1}^{\infty} B_k e$ و $\sum_{k=i+1}^{\infty} A_k e$ داراي عناصر کوچک باشند) و مجموعه هاي $\overline{B}_i$ و $\overline{A}_i$ براي مقادير i>0 داراي به 0 مقداردهي شوند.

ديگر ماتريس هاي مورد نياز با استفاده از پياده سازي رابطه بازگشتي معکوس محاسبه مي شوند.

با استفاده از رابطه زير داريم:

$$\overline{A}_k = A_k + \overline{A}_{k+1} G \text{ and } \overline{B}_k = B_k + \overline{B}_{k+1} G$$

$$\text{for } k=i-1, i-2, \ldots, 0 \quad (3)$$

توجه داشته باشيد که ماتريس هاي A_k و B_k به ازاي $k \geq 0$ نيز لازم است محاسبه شوند.

براي پياده سازي رابطه هاي (2) و (3) مقدار ماتريس هاي A_v مورد نياز است

اين مقادير از روابط زير محاسبه مي شوند.

$$A_v = \sum_{n=v}^{\infty} \gamma_n k_v^{(n)}, v \geq 0 \quad (4)$$

$$k_0^{(0)} = I$$

$$k_v^{(0)} = 0, v \geq 1$$

$$k_0^{(n)} = k_0^{(n-1)} \left[\theta^{-1}(Q - \Lambda) + I \right], v \geq 0$$

$$k_v^{(n)} = k_v^{(n-1)} \left[\theta^{-1}(Q - \Lambda) + I \right] + k_{v-1}^{(n-1)} \theta^{-1} \Lambda, v \geq 0, n \geq v \geq 1$$

$$k_v^{(n)} = 0, n < 0, n < v$$

حاصل جمع رابطه (4) بايد براي يک مقدار N به اندازه کافي بزرگ محاسبه شود. مساله مهم انتخاب مقدار N است. يک روش عملي براي انتخاب N انتخاب ماکزيمم N_1 و N_2 است. مقدار N_1 به گونه اي انتخاب مي شود که در رابطه $\sum_{n=0}^{N_1} \gamma_n \geq 1 - \varepsilon$ با $\varepsilon < 10^{-8}$ صدق کند.

N_2 نيز بايد به گونه اي انتخاب شود که ماتريس $A = \sum_{v=0}^{\infty} A_v$ به مقدار تصادفي نزديک باشد، يعني

$$\max_j \left[\sum_{v=0}^{N_2} (A_v e)\, j^{-1} \right] < \varepsilon$$

مشتق $A^{(n)}$ كه براي محاسبه طول صف در departure مي تواند به طور مشابهي محاسبه كند.
از رابطه زير داريم

$$\left[A \quad A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n L_n$$

آن گاه خواهيم داشت

$$\gamma_n = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} \frac{(\theta x)^n}{n!}\, d\tilde{H}(x), n = 0,1,\dots,n^*$$

$$\theta = \max_j ((\Lambda - Q)_{ii})$$

L_o ماتريس m*4m به صورت [I 0 0 0] است و داريم $L_{k+1} = L_k (I + \theta^{-1} S), k \geq 0$ به گونه اي كه

$$S = \begin{bmatrix} Q & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & Q & 2\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & Q & 3\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

مقادير به ازاي جريان (Per-stream) براي جريان هاي superposition صف MMPP

-ماتريس قطري $\Lambda(i)$ به صورت زير تعريف مي شود:

$$\Lambda(i) = \overbrace{0 \oplus \dots \oplus \Lambda_i \oplus \dots \oplus 0}^{nstreams}$$

كه $\Lambda(i)$ ماتريس جريان i صف MMPP است.

- $\lambda(i)$ شامل عناصر قطري $\Lambda(i)$ است و نرخ ورود كلي (total arrival rate) $\lambda_{tot}(i)$ از رابطه زير به دست مي آيد:

$$\lambda_{tot}(i) = \pi \lambda(i)$$

-ميانگين زمان انتظار به ازاي جريان از رابطه زير به دست مي آيد:

$$W_{a,i} = -\frac{1}{\lambda_{tot}(i)} W^{'}(0)\lambda(i)$$

-مشتق دوم زمان انتظار به طور خاص به ازاي جريان از رابطه زير به دست مي آيد:

$$W_{a,i}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{tot}(i)} W^{''}(0)\lambda(i)$$

-اندازه احتمالات سيستم به ازاي جريان در نمونه هاي ورودي لز رابطه زير به دست مي آيد.

$$\pi_{k+i} = \frac{1}{\lambda_{tot}(i)} y_k \lambda(i)$$

-احتمالات تاخير به ازاي جريان نيز از رابطه زير به دست مي آيد.

$$P_{w,i} = 1 - \frac{1}{\lambda_{tot}(i)} y_0 \lambda(i)$$

مقادير گوناگون مورد نياز (Miscellaneous quantities of interest)

- A_{ij} احتمال اين است كه يک زمان سرويس با MMPP در حالت j داده شده پايان يابد وقتي كه سرويس در زمان i شروع شده است.

مقدارماتريس A از رابطه زير محاسبه مي شود

$$A = \int_0^\infty e^{Qt} d\,\tilde{H}(t)$$

در مورد صف با 2 حالت رابطه زير را خواهيم داشت

$$e^{Qt} = e\pi - \frac{e^{-(\sigma_1+\sigma_2)t}}{\sigma_1+\sigma_2} Q$$

بنابراين در اين حالت خواهيم داشت

$$A = e\pi - \frac{H(\sigma_1+\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2}Q$$

- U_{ij} احتمال اين است كه اولين ورودي به دوره تناوب مشغول (busy period) با صف MMPP در حالت j داده شده است كه آخرين departure از دوره تناوب مشغول قبلي با MMPP در حالت i است.

مقدار ماتريس U از رابطه زير به دست مي آيد

$$U = (\Lambda - Q)^{-1}\Lambda$$

- β_j مقدار مورد انتظار ورودي ها طي يک سرويس كه در زمان j شروع شده است مي باشد.

مقدار آن از رابطه زير به دست مي آيد.

$$\beta = \rho e + (Q + e\pi)^{-1}(A - I)\lambda$$

- μ_j مقدار مورد انتظار departureها طي يک دوره تناوب مشغول كه در زمان j شروع شده است مي باشد.

سيستم معادلات خطي به شرح زير است:

$$[I - A + (e-g)\beta]U = e \Rightarrow U = [I - A + (e-g)\beta]^{-1}e$$

$$\Rightarrow \mu = (I - G + eg)U = (I - G + eg)[I - A + (e-g)\beta]^{-1}e$$

- d_j احتمال مورد انتظار پايان يافتن يک دوره تناوب مشغول در زمان j است.

مقدار آن از رابطه زير به دست مي آيد.

dUG=d, de=1

- P_w احتمال اين است كه مشتري هنگام ورود تاخير داشته باشد.

مقدار آن از رابطه زير به دست مي آيد.

$$P_w = 1 - \frac{1}{\lambda_{tot}} y_o \lambda$$