



سمینار درس سیستم های فازی

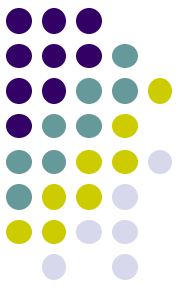
فازی و احتمالات

تفاوت ها و شباهت ها

وحید مواجی

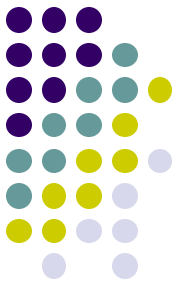
بهار 1384

دانشکده مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف



عدم دقت و عدم قطعیت

- از بین یک مجموعه از جهان های ممکن، کدامیک با توجه به داده های موجود، جهان واقعی می باشند.
- L : یک زبان گزاره ای متناهی.
- W : مجموعه جهان های متناظر با L بر حسب تفسیر L .
- برای هر زوج جهان در W یک گزاره در L وجود دارد که در یکی درست و در دیگری غلط است.
- فقط یکی از جهان های درون W ، جهان واقعی یا w_0 است.
- یک جهان واقعی و یکتا وجود دارد ولی دانش ما محدود است.



عدم دقت و عدم قطعیت

این که عدم دقت یا عدم قطعیت، خاصیت خود واقعیت می باشد، یک مشکل فلسفی است.

داده ها (اطلاعات و عبارات) همواره غیر دقیق هستند:

ا. علی حداقل دو بچه دارد و من از این موضوع مطمئنم.

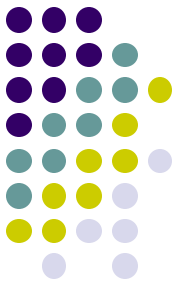
ا. علی سه بچه دارد ولی من مطمئن نیستم.

در |، تعداد بچه ها غیر دقیق ولی قطعی است.

در ||، تعداد بچه ها دقیق ولی غیر قطعی است.

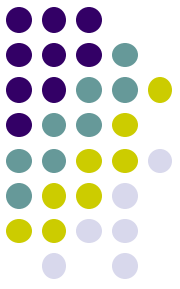
عبارت می تواند قطعی و دقیق ولی غلط باشد.

$I \text{ believe } P \neq I \text{ know } P$



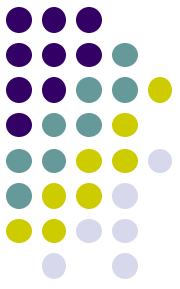
عدم دقت و عدم قطعیت

- عدم قطعیت با اعتقاد سروکار دارد نه با دانش.
- مفهوم عدم دقت به مسأله ربط دارد:
 - همسر علی، سارا یا مهتاب است ← دقیق اگر بخواهیم افراد متأهل را دعوت کنیم، غیر دقیق اگر بخواهیم افراد را با همسرانش دعوت کنیم.
- w_0 به مجموعه عادی یا فازی A تعلق دارد ← عدم دقت.
- اگر اعضای A به نوعی درجه بندی شوند ← عدم قطعیت.



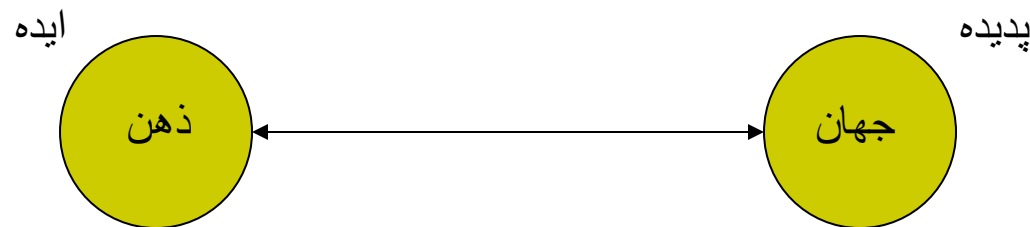
عدم دقت و عدم قطعیت

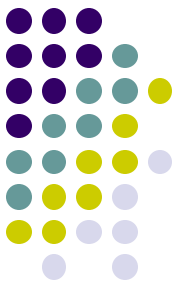
- فازی = نبودن محدوده های دقیق! = ابهام.
- من تو را ساعت 4 یا 5 می بینم ← مبهم.
- من تو را حول و حوش ساعت 5 می بینم ← فازی.
- من تو را یک وقتی خواهم دید ← هر دو.
- عدم قطعیت ناشی از جهل ما است ← عینی و ذهنی.
- عدم قطعیت عینی: عقیده ما ربطی به تصادفی بودن یک ویژگی از رویداد ندارد.
- عدم قطعیت ذهنی: عدم قطعیت عینی اصلا وجود ندارد و همه چیز ذهنی است.



احتمال در مقابل فازی

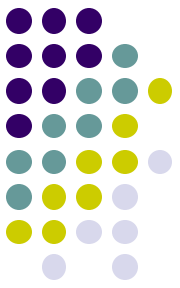
- قانون تفکر: روشی ترکیبی برای دستکاری ایده ها (ایده ها خود، اتمی هستند و تغییر نمی یابند).
- تمام ترکیبات ایده ها را نمی توانیم ذخیره کنیم.
- باید برای نگهداری آنها، قوانین بوجود آوریم.





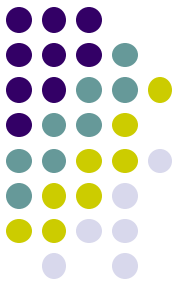
احتمال در مقابل فازی

- یک قانون تفکر، جوابگوی همه ایده ها نیست.
- مثلاً قانون ارسطو $A \cap A' = \emptyset$ اگر مجموعه همه سیب های سبز $A =$.
- در فازی قانون متمم حذف می شود حتی قانون $A = A$.
- مثلاً اعتبار آن زیر سوال می رود اگر بپرسیم: رضا تا چه اندازه ای همیشه رضا است ← اتمها، عقایدو... همه جزئی از وجود اویند و مختلف. پس رضا، رضا است و نیست.
- نتیجه: قانون identity یک قانون universal نیست.



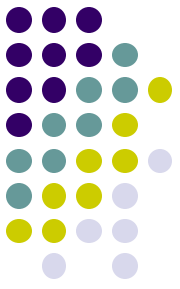
احتمال در مقابل فازی

- یافتن قانون تفکر یک روش تجربی ندارد.
- پدیده یا واقعیت، یک تعریف طبیعی ندارد و هر قانونی یک برداشت از واقعیت بدست می دهد.
- قانون تفکر ← در مورد کدام ایده ها می توان فکر کرد؟
- مثلاً نظریه گروه ها ← مکعب Rubik و ذرات بنیادی.
- نظریه احتمال ← درجه اعتقاد یا فرکانس نسبی.
- در نهایت یک سیستم قانون تفکر را باید انتخاب کرد.
- به یک ادعا همواره مقداری عدم قطعیت با درجه مشخصی چسبیده است.



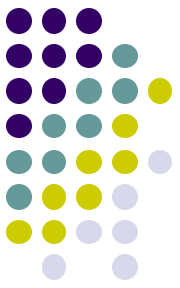
احتمال در مقابل فازی

- عدم قطعیت متافیزیکی: حوزه های مختلف وجودی را به هم وصل می کند.
- مثلاً اینکه یک سیستم کامپیوتری درست کار خواهد کرد چون درستی آن بطور فرمال تأیید شده است حتماً غیرقطعی است.
- قطعیت آن به میزان تطابق رفتار اجزا سیستم با آگزیماهای آن نظریه بر می گردد.
- Einstein: So far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain and so far as they are certain, they do not refer to reality.



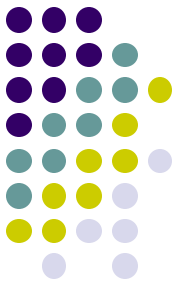
احتمال در مقابل فازی

- عدم قطعیت radical: برای توصیف یک سیستم، هیچ نظریه ای بطور قطعی وجود ندارد.
- مثلاً عملکرد یک ماشین می تواند به خاطر وجود یک سیب زمینی در فلان قسمت آن خراب شود.
- عدم قطعیت درباره عدم قطعیت.



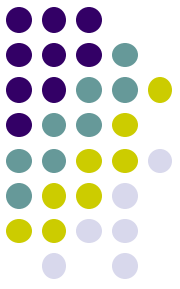
احتمال در مقابل فازی

- تعیین ناپذیری: برخی فرایندها نامعین هستند.
- دکارت ← وضعیت بعدی جهان را از روی وضعیت فعلی می توان بطور کامل فهمید.
- اینشتین ← خدا تاس نمی اندازد.
- مکانیک کوانتومی ← قوانین تصادف یعنی نظریه احتمال، یک توصیف دقیق از جهان فیزیکی می دهند.
- بخاطر عدم قطعیت کوانتومی، هیچ تعیین پذیری ای وجود ندارد ← اینشتین اشتباه می کرد.



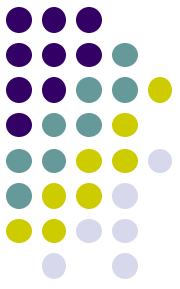
احتمال در مقابل فازی

- درجه اعتقاد: تصادفی بودن یک نوع عینی عدم قطعیت است و به ناظر بستگی ندارد ولی اعتقاد یک امر ذهنی است و یک رابطه بین شخص و ادعا است.
- وابستگی اجتماعی: برخی ایده ها در حوزه کاربرد معنا دارند مثلا "بلند"؟
- ویتگنشتاین فرایند گذاشتن معانی غیر قطعی برای ایده ها از طریق محاوره را "ساختار اجتماعی واقعیت" نامید.



احتمال در مقابل فازی

- تجرید کیفی: اطلاعات حذف شده است.
- آیا یک مفهوم، تجرید کیفی یا ساخته اجتماعی است؟
- آنرا با مقادیر عددی جایگزین می کنند:
- کوه ها ← نواحی مرتفع تر از 4000 متر.
- آیا فازی یک قوانین تفکر برای گونه ای از اطلاعات فراهم می آورد؟



احتمال در مقابل فازی

● $R \leftarrow$ مجموعه خربزه های قرمز.

● $G \leftarrow$ مجموعه خربزه های سبز.

● $W \leftarrow$ مجموعه هندوانه ها.

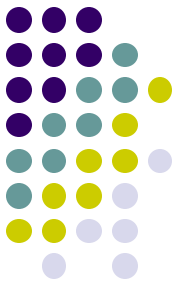
● $m_R(x) = 0.5, m_W(x) = 0.8, m_G(x) = 0.5$

● $m_{R \cap W}(x) = 0.5, m_{G \cap W}(x) = 0.5$??

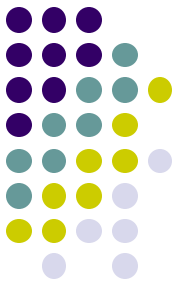
● وقتی تابع عضویت غیر قطعی باشد \leftarrow اشتراک یک عمل ترکیبی نیست.

● $1 - (1 - \Pr(A) + 1 - \Pr(B)) \leq \Pr(A \cap B) \leq \min\{\Pr(A), \Pr(B)\}$

احتمال در مقابل فازی



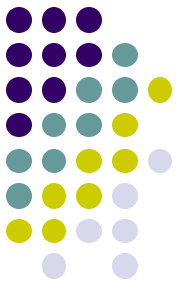
- $\Pr(\text{yellow}(Z)) = 0.8, \Pr(\text{watermelon}(Z)) = 0.8$
- $0.6 \leq \Pr(\text{yellow}(z) \ \& \ \text{watermelon}(z)) \leq 0.8$
- عملکرد تئوری مجموعه های فازی برای هیچ ایده ای که حاوی عدم قطعیت باشد مفید نیست.



احتمال در مقابل فازی

● منطق فازی چه کار می کند؟

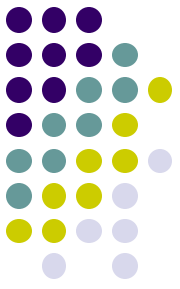
- $t(A \& B) = \min\{t(A), t(B)\}$
- $t(A \mid B) = \max\{t(A), t(B)\}$
- $t(\sim A) = 1 - t(A)$
- $A \rightarrow B = \sim(A \& \sim B) = B \mid (\sim A \& \sim B)$
- $t(\sim(A \& \sim B)) = 1 - \min\{t(A), 1 - t(B)\}$
 $= 1 + \max\{-t(A), -1+t(B)\} = \max\{1-t(A), t(B)\}$
- $t(B \mid (\sim A \& \sim B)) = \max\{t(B), \min\{1-t(A), 1-t(B)\}\}$
- Different if $t(B) < 1 - t(B) < 1 - t(A) \rightarrow t(B) < 1 - t(B)$ and
 $t(A) < t(B) \rightarrow t(A) < t(B) < 0.5$



احتمال در مقابل فازی

- | | | |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. | $\sim A \rightarrow B$ | $1 - t(A) < t(B) < 0.5$ |
| 2. | $A \rightarrow \sim B$ | $t(A) < 1 - t(B) < 0.5$ |
| 3. | $\sim A \rightarrow \sim B$ | $1 - t(A) < 1 - t(B) < 0.5$ |
| 4. | $B \rightarrow A$ | $t(B) < t(A) < 0.5$ |
| 5. | $\sim B \rightarrow A$ | $1 - t(B) < t(A) < 0.5$ |
| 6. | $B \rightarrow \sim A$ | $t(B) < 1 - t(B) < 0.5$ |
| 7. | $\sim B \rightarrow \sim A$ | $1 - t(B) < 1 - t(A) < 0.5$ |

$$t(A) = t(B) = 0.5 ??$$



احتمال در مقابل فازی

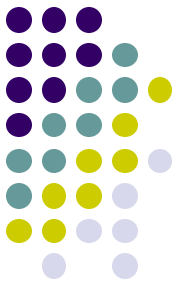
- تئوری subsethood:

- میزان این که چقدر A زیر مجموعه B است $\leftarrow S(A, B)$.

- ثابت می شود که $S(A, B) = M(A \cap B) / M(A)$

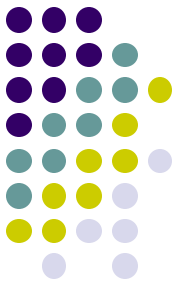
- Kosko: "شکل کسری اندازه زیر مجموعه بودن، $S(A, B)$ ، آشناست. این

مثل شکل کسری احتمال شرطی $P(B|A)$ است. تفاوت اساسی این است که برای $S(A, B)$ این رابطه بدست آمده است ولی برای احتمال $P(B|A)$ فرض شده است. نا توانی استخراج احتمال شرطی به این امر اشاره دارد که احتمال، واقعی نیست چون هر احتمالی یک احتمال شرطی است $P(A) = P(A|X)$."



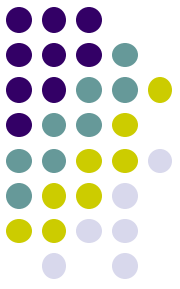
احتمال در مقابل فازی

- استدلال Lindley: اگر A, B, \dots, H رویداد باشند، سه رابطه وجود دارد که هر زوج مرتبی از رویدادها باید ارضا کنند تا احتمال شرطی برقرار باشد.
- Kosko: “ اگر A, B, \dots, H مجموعه های فازی باشند و $P(A|H)$ را بصورت $S(H, A)$ تعریف کنیم شرایط Lindley ارضا می شوند؛ بجای اینکه برتری را به اصول موضوعه احتمال بدهیم، فازی تحریف شده و به احتمال تبدیل شده است.”



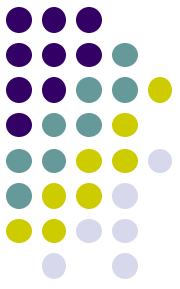
بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- $A[m]$ که A یک گزاره و m عدم قطعیت آن است.
- چند عمل باید تعریف شود:
- مقایسه: کدام یک از $A_i[m_i]$ ها بالاترین عدم قطعیت را دارد؟
- انتشار: از یک سری $A_i[m_i]$ ، یک نتیجه بصورت $A_{n+1}[m_{n+1}]$ بگیریم که A_{n+1} جدید و متفاوت باشد.
- بازبینی: m یک A را به m' تبدیل کنیم.
- بازبینی \neq انتشار



بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- S: مجموعه همه گزاره ها.
- باید طبق محدودیات اصول موضوعه یک احتمال اولیه روی S تعریف کنیم. یعنی یک دانش قبلی لازم است.
- داده های آماری یا تخمین ذهنی و اصول عمومی لازم است ← اصل بی تفاوتی یا آنتروپی ماکزیمم. به این ها شرایط ضمنی می گویند.
- $P_c : S \rightarrow [0,1]$
- $P_c(A_1|A_2) = P_c(A_1 \cap A_2) / P_c(A_2)$
(شرط صریح: A_2) $A_1, A_2 \in S$, $P_c(A_2) > 0$



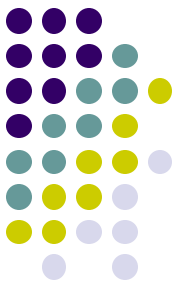
بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

● قانون بیز، انتشار است چون:

I. نتیجه، یک گزاره شرطی است درحالیکه فرض ها غیر شرطی بودند.

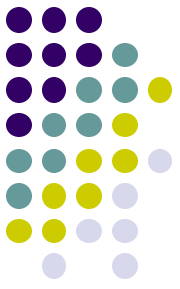
II. این قانون یک احتمال جدید حساب می کند و مقدار قبلی را عوض نمی کند. مقدار قبلی غیر شرطی A_1 هنوز معتبر است.

III. سیستم لازم نیست بداند که A_2 واقعا درست است بلکه فرض می کند که درست است. اگر سیستم منابع کافی داشته باشد می تواند همه احتمالات شرطی ممکن را بر اساس احتمالات اولیه حساب کند و به هیچ اطلاعات جدیدی که در C نبوده است، نیاز نخواهد داشت.



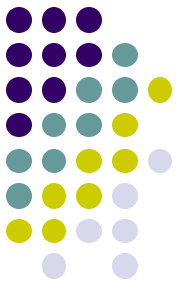
بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- بیز از $P_c(x)$ به $P_c(X|Y)$ می رود ولی نمی تواند از $P_c(x)$ به $P_{c'}(x)$ برود.
- مقایسه بر اساس تمام شواهد.
- اگر A_1, A_2 باشند، $P_c(A_1), P_c(A_2)$ مقایسه می شوند. اگر بعداً A_3 پیدا شد، $P_c(A_1|A_3), P_c(A_2|A_3)$ مقایسه می شوند. C, A_3 می شوند تمام شواهد موجود.
- شرایط صریح را در شرایط ضمنی ادغام می کنیم و به اصل شرطی سازی می رسیم $BEL(x) = P_c(x|K) \leftarrow$
- K : شاهد جاری است (تمام گزاره های S که می دانیم درست است).



بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- $BEL(x|y) = P_c(x \& y|k) / P_c(y|k)$
- فرق $BEL(x)$ با $P(x)$ در "تمام شواهد" است یعنی $BEL(x)$ متغیر در زمان است.
- $BEL_t(x)$: مقدار BEL در زمان $t \leftarrow t$ بر اساس ورود شواهد جلو می رود $BEL_0(x) = P_c(x)$
- A : شاهد جدید
- $BEL_{t+1}(x) = P_c(x|k_{t+1}) = P_c(x|A \& K_t) = P_c(x \& A|k_t) / P_c(A|k_t)$



بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- $$BEL_{t+1}(x) = BEL_t(x|A) = BEL_t(x \& A) / BEL_t(A)$$

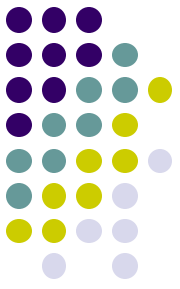
- به بازبینی تبدیل شد.

- سه شرط وجود داشت ←

- I. $m \in \{0, 1\}$, A or $\sim A$

- II. $A \in S$.

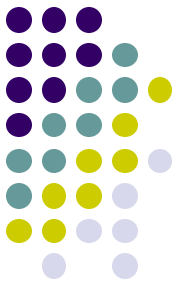
- III. $P_c(A) > 0$



بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

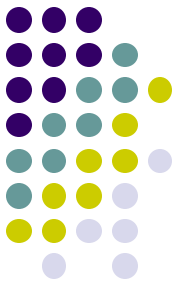
سه مشکل وجود دارد:

- I. یک شرط صریح باید یک گزاره دودویی باشد ولی یک شرط ضمنی می تواند نتایج آماری یا تخمین های ذهنی احتمالاتی در خود داشته باشد.
- II. یک شرط صریح باید در S باشد ولی شرط ضمنی می تواند در S نباشد ← “شترمرغ یک پرنده است و نمی تواند پرواز کند” در حالیکه S فقط شامل “پرنده ها می توانند پرواز کنند” باشد و حتی اسمی از شترمرغ در آن نباشد.
- III. اگر به یک گزاره مقدار اولیه صفر داده شود، دیگر نمی تواند بعنوان شرط صریح برای بازبینی تابع بکار رود در حالیکه در عمل، یک گزاره می تواند با یک دانش دیگر C' مقدار غیر صفر پیدا کند.



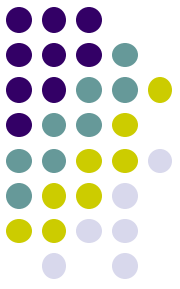
بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- نتیجه مهم: فقط گونه های خاصی از شرط ها می توانند بعنوان شرط صریح بیان شوند و در نتیجه اگر یک دانش، در تخصیص احتمال اولیه دخالت نکند، دیگر غیر ممکن است که بتواند وارد سیستم شود.
- هر بار که A بعنوان دانش جدید وارد می شود در آینده دیگر $A, \sim A$ نمی توانند بعنوان اطلاعات جدید وارد شوند ←
 $|S|/2 < |اطلاعت جدید|$



بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

- قانون Jeffery:
- $Pc'(x) = Pc(x|A)m + Pc(x|\sim A)(1 - m)$
- از شرط اول اجتناب می کند ولی دو شرط دیگر به قوت خود باقی اند.
- اگر $m = 1$ باشد به بیز تبدیل می شود.
- Update است یعنی اطلاعات قبلی در مورد A را نادیده می گیرد در حالیکه بازبینی یک Adjustment است.
- اگر دانش جدید $A[m]$ با سیستم تضاد داشته باشد، نمی تواند $A[m]$ را یاد بگیرد.

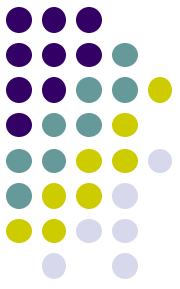


بازبینی اعتقاد در نظریه احتمال

در نتیجه اگر قانون بیز را اعمال کنیم:

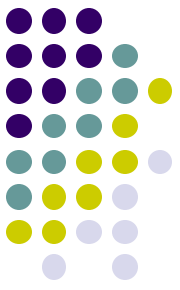
ا. شرایط ضمنی اولیه نباید هیچگاه عوض شوند (نمی توانند عوض شوند).

ب. تمام تغییرات در شرایط ضمنی، update می شوند یعنی اگر با قبلی ها تضاد داشتند، جانشین آنها می شوند.



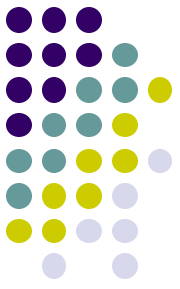
دفاع از احتمالات

- ایراد: احتمال یک رویداد، نسبت تعداد حالات ممکن (n) آن به کل رویدادهای ممکن (m) می باشد \leftarrow تعبیر فرکانسی.
- به حوزه هایی که تجربه های تکراری امکانپذیر است محدود می کند. اگر نمونه قبلی وجود نداشته باشد ($m=0$)، احتمال تعریف نشده است؛ اگر $n=m=1$ باشد $\leftarrow p = 1$ ؟
- اصل اعداد بزرگ برای حالات کوچک استفاده ندارد.
- جواب: احتمال (شرطی) یک گزاره با توجه به یک شاهد، عددی حقیقی بین 0 و 1 است که میزان اعتقاد به آن گزاره و با توجه به آن شاهد است.



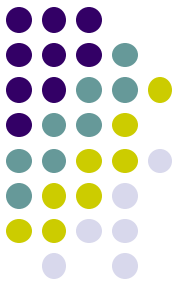
دفاع از احتمالات

- ایراد: تحلیل بیز به داده های زیادی نیاز دارد.
- “احتمال اینکه یک مریض، فلان بیماری را داشته باشد به شرطی که فلان علائم را داشته باشد” از روی مریض هایی که قبلا این علائم را داشتند، حساب می شود و لذا باید مریض های زیادی وجود داشته باشد ← اصل آنтроپی ماکزیمم.
- عدم قطعیت را بطور یکنواخت در همه جا پخش می کند. اگر آنтроپی ماکزیمم را نگیریم، یعنی اطلاعاتی بیشتر از آنچه موجود است دریافت کرده ایم.



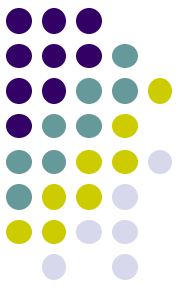
دفاع از احتمالات

- احتمالات اولیه، اطلاعات بیشتری از آنچه موجود است را فرض می کنند.
- تاس عادی 6 بیاید $\leftarrow 6/1$ ؛ تاس خراب (ندانیم کدام وجه، برتری دارد) 6 بیاید $\leftarrow 6/1$. پس تفاوت چیست؟
- در اولی بعد از تکرار، در دانش ما تغییری حاصل نمی شود ولی در دومی دانش ما تغییر می کند.



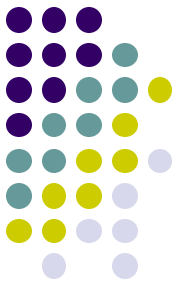
دفاع از احتمالات

- ایراد: به اعداد نیازی نداریم. ردپای همه شواهد را نگه داری کنیم و عدد احتمال فقط جمعبندی از این شواهد است.
- احتمال رابطه ای است مثلاً p_1 محتمل تر از p_2 است.
- جواب: این روش موقعی خوب است که بخواهیم تصمیم گیری یا قضاوت کنیم، اگر بخواهیم اصلاً انتخاب نکنیم بدرد نمی خورد.



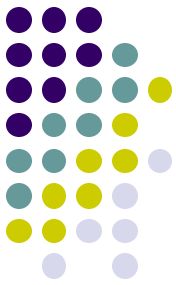
دفاع از احتمالات

- ایراد: یک عدد برای نشان دادن احتمال کافی نیست.
- یک عدد تمام قطعیت موجود در گزاره را نمی دهد یعنی نمی گوید که خود این احتمال چقدر قطعی یا غیر دقیق است.
- احتمال احتمال.
- جواب: فایده این کار چیست؟ می توانیم بجای احتمال نقطه ای به یک گزاره، یک تابع چگالی احتمال به آن بدهیم یا گشتاورهای مرتبه بالاتر آنرا حساب کنیم ولی هردو یک نتیجه را می دهند.
- مثل مکانیک که کل جرم با مرکز ثقل جایگزین می شود ولی اطلاعات تابع چگالی برای تحلیل حساسیت لازم است. می توان از انحراف معیار هم استفاده کرد.



دفاع از احتمالات

- ایراد: اگر $p(h|s_1, s_2, s_3) = 0.7$ باشد یعنی اینکه مشاهده این شواهد به اندازه 0.7 به نفع h ، اعتقاد ما را تغییر می دهد ولی دلیلی ندارد که به اندازه 0.3 به ضرر h باشد.
- جواب: شما احتمالات اولیه را رد کرده اید و دچار این مشکل شده اید. مثلا اول $p = 0.01$ بوده بعد دیدیم که به 0.7 تغییر یافت این بدین معناست که اول $p = 0.99$ بوده و سپس به 0.3 تبدیل شده است.



- **Theories of Uncertainty**, Philippe Smets ,IRIDIA. Université Libre de Bruxelles, July 27, 1999
- **Probability versus Fuzziness**, Charles Elkan, Department of Computer Science, University of Toronto.
- **Probability Theory and Fuzzy Logic**, Lotfi A. Zadeh, Berkeley initiative in Soft Computing (BISC), Computer Science Division and the Electronics Research Laboratory, Department of EECS, University of California Berkeley, December 9, 2002
- **In Defense of Probability**, Peter Cheeseman, SRI International 333 Ravenswood Ave., Menlo Park, California 94025.
- **Belief Revision in Probability Theory**, PeiWang, Center for Research on Concepts and Cognition, Indiana University, Bloomington, IN 47408.
- **Fuzzy sets and probability :Misunderstandings, bridges and gaps**, Didier Dubois – Henri Prade, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.) – C.N.R.S, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.