

Modelo Navier Stokes 3D

August 8, 2017

1 Definiciones

Diferencias centradas de primer orden.

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2dx}$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2dy}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n-1}}{2dt}$$

Diferencias centradas de segundo orden.

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2*U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{dx^2}$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{U_{i,j+1}^n - 2*U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{dy^2}$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{U_{i,j}^{n+1} - 2*U_{i,j}^n + U_{i,j}^{n-1}}{dt^2}$$

Diferencias adelantadas de primer orden. (menos estables)

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{dx}$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{dy}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{dt}$$

Diferencias atrasadas de primer orden. (menos estables)

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{dx}$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{dy}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}}{dt}$$

2 Esquema de Navier Stokes 3D

2.1 Primera ecuación

1. Primera ecuación de N-S para primera componente de la velocidad U:

$$\frac{\delta U}{\delta t} + U \frac{\delta U}{\delta x} + V \frac{\delta U}{\delta y} + W \frac{\delta U}{\delta z} = \frac{-1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + \nu \left(\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta z^2} \right)$$

2. Discretización utilizando diferencias finitas adelantadas para el tiempo, y atrasadas para las espaciales.

$$\begin{aligned} & \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i,j,k)}^n}{\Delta t} + \alpha U_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^n - U_{(i-1,j,k)}^n}{\Delta x} + (1 - \alpha) U_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{\Delta x} \\ & + \alpha V_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^n - U_{(i,j-1,k)}^n}{\Delta y} + (1 - \alpha) V_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i,j-1,k)}^{n+1}}{\Delta y} \\ & + \alpha W_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^n - U_{(i,j,k-1)}^n}{\Delta z} + (1 - \alpha) W_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i,j,k-1)}^{n+1}}{\Delta z} \\ & = \frac{-1}{\rho} \left(\alpha \frac{P_{(i+1,j,k)}^n - P_{(i-1,j,k)}^n}{2\Delta x} + (1 - \alpha) \frac{P_{(i+1,j,k)}^{n+1} - P_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ & + \nu \left(\alpha \left(\frac{U_{(i+1,j,k)}^n - 2*U_{(i,j,k)}^n + U_{(i-1,j,k)}^n}{\Delta x^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{U_{(i+1,j,k)}^{n+1} - 2*U_{(i,j,k)}^{n+1} + U_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \right) \\ & + \alpha \left(\frac{U_{(i,j+1,k)}^n - 2*U_{(i,j,k)}^n + U_{(i,j-1,k)}^n}{\Delta y^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{U_{(i,j+1,k)}^{n+1} - 2*U_{(i,j,k)}^{n+1} + U_{(i,j-1,k)}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\ & + \alpha \left(\frac{U_{(i,j,k+1)}^n - 2*U_{(i,j,k)}^n + U_{(i,j,k-1)}^n}{\Delta z^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{U_{(i,j,k+1)}^{n+1} - 2*U_{(i,j,k)}^{n+1} + U_{(i,j,k-1)}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) \end{aligned}$$

3. Despeje del término de interés:

$$\begin{aligned} U_{(i,j,k)}^{n+1} = U_{(i,j,k)}^n + \Delta t \left[& -\alpha U_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^n - U_{(i-1,j,k)}^n}{\Delta x} - (1 - \alpha) U_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\ & - \alpha V_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^n - U_{(i,j-1,k)}^n}{\Delta y} - (1 - \alpha) V_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i,j-1,k)}^{n+1}}{\Delta y} \\ & - \alpha W_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^n - U_{(i,j,k-1)}^n}{\Delta z} - (1 - \alpha) W_{(i,j,k)}^n \frac{U_{(i,j,k)}^{n+1} - U_{(i,j,k-1)}^{n+1}}{\Delta z} \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\alpha \frac{P_{(i+1,j,k)}^n - P_{(i-1,j,k)}^n}{2\Delta x} + (1 - \alpha) \frac{P_{(i+1,j,k)}^{n+1} - P_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ & + \nu \left(\alpha \left(\frac{U_{(i+1,j,k)}^n - 2*U_{(i,j,k)}^n + U_{(i-1,j,k)}^n}{\Delta x^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{U_{(i+1,j,k)}^{n+1} - 2*U_{(i,j,k)}^{n+1} + U_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \right) \\ & + \alpha \left(\frac{U_{(i,j+1,k)}^n - 2*U_{(i,j,k)}^n + U_{(i,j-1,k)}^n}{\Delta y^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{U_{(i,j+1,k)}^{n+1} - 2*U_{(i,j,k)}^{n+1} + U_{(i,j-1,k)}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\ & \left. + \alpha \left(\frac{U_{(i,j,k+1)}^n - 2*U_{(i,j,k)}^n + U_{(i,j,k-1)}^n}{\Delta z^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{U_{(i,j,k+1)}^{n+1} - 2*U_{(i,j,k)}^{n+1} + U_{(i,j,k-1)}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) \right] \end{aligned}$$

2.2 Segunda ecuación

1. Segunda ecuación de N-S para segundo componente de la velocidad V.

$$\frac{\delta V}{\delta t} + U \frac{\delta V}{\delta x} + V \frac{\delta V}{\delta y} + W \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{-1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta y} + \nu \left(\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} \right)$$

2. Discretización utilizando diferencias finitas adelantadas para el tiempo, y atrasadas para las espaciales.

$$\begin{aligned} & \frac{V_{(i,j,k)}^{n+1} - V_{(i,j,k)}^n}{\Delta t} + \alpha U_{(i,j,k)}^n \frac{V_{(i,j,k)}^n - V_{(i-1,j,k)}^n}{\Delta x} + (1 - \alpha) U_{(i,j,k)}^n \frac{V_{(i,j,k)}^{n+1} - V_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{\Delta x} \\ & + \alpha V_{(i,j,k)}^n \frac{V_{(i,j,k)}^n - V_{(i,j-1,k)}^n}{\Delta y} + (1 - \alpha) V_{(i,j,k)}^n \frac{V_{(i,j,k)}^{n+1} - V_{(i,j-1,k)}^{n+1}}{\Delta y} \\ & + \alpha W_{(i,j,k)}^n \frac{V_{(i,j,k)}^n - V_{(i,j,k-1)}^n}{\Delta z} + (1 - \alpha) W_{(i,j,k)}^n \frac{V_{(i,j,k)}^{n+1} - V_{(i,j,k-1)}^{n+1}}{\Delta z} \\ & = \frac{-1}{\rho} \left(\alpha \frac{P_{(i,j+1,k)}^n - P_{(i,j-1,k)}^n}{2\Delta y} + (1 - \alpha) \frac{P_{(i,j+1,k)}^{n+1} - P_{(i,j-1,k)}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\ & + \nu \left(\alpha \left(\frac{V_{(i+1,j,k)}^n - 2*V_{(i,j,k)}^n + V_{(i-1,j,k)}^n}{\Delta x^2} \right) + (1 - \alpha) * \left(\frac{V_{(i+1,j,k)}^{n+1} - 2*V_{(i,j,k)}^{n+1} + V_{(i-1,j,k)}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha\left(\frac{V_{i,j+1,k}^n-2*V_{i,j,k}^n+V_{i,j-1,k}^n}{dy^2}\right)+(1-\alpha)*\left(\frac{V_{i,j+1,k}^{n+1}-2*V_{i,j,k}^{n+1}+V_{i,j-1,k}^{n+1}}{dy^2}\right) \\
& +\alpha\left(\frac{V_{i,j,k+1}^n-2*V_{i,j,k}^n+V_{i,j,k-1}^n}{dz^2}\right)+(1-\alpha)*\left(\frac{V_{i,j,k+1}^{n+1}-2*V_{i,j,k}^{n+1}+V_{i,j,k-1}^{n+1}}{dz^2}\right)
\end{aligned}$$

3. Despeje para segunda ecuación del término de interés

$$\begin{aligned}
V_{i,j,k}^{n+1} = V_{i,j,k}^n + \Delta t \left[-\alpha U_{i,j,k}^n \frac{V_{i,j,k}^n - V_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} - (1-\alpha) U_{i,j,k}^n \frac{V_{i,j,k}^{n+1} - V_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
- \alpha V_{i,j,k}^n \frac{V_{i,j,k}^n - V_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} - (1-\alpha) V_{i,j,k}^n \frac{V_{i,j,k}^{n+1} - V_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} \\
- \alpha W_{i,j,k}^n \frac{V_{i,j,k}^n - V_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} - (1-\alpha) W_{i,j,k}^n \frac{V_{i,j,k}^{n+1} - V_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} \\
- \frac{1}{\rho} \left(\alpha \frac{P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + (1-\alpha) \frac{P_{i,j+1,k}^{n+1} - P_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\
+ \nu \left(\alpha \left(\frac{V_{i+1,j,k}^n - 2*V_{i,j,k}^n + V_{i-1,j,k}^n}{dx^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{V_{i+1,j,k}^{n+1} - 2*V_{i,j,k}^{n+1} + V_{i-1,j,k}^{n+1}}{dx^2} \right) \right. \\
+ \alpha \left(\frac{V_{i,j+1,k}^n - 2*V_{i,j,k}^n + V_{i,j-1,k}^n}{dy^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{V_{i,j+1,k}^{n+1} - 2*V_{i,j,k}^{n+1} + V_{i,j-1,k}^{n+1}}{dy^2} \right) \\
\left. + \alpha \left(\frac{V_{i,j,k+1}^n - 2*V_{i,j,k}^n + V_{i,j,k-1}^n}{dz^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{V_{i,j,k+1}^{n+1} - 2*V_{i,j,k}^{n+1} + V_{i,j,k-1}^{n+1}}{dz^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

2.3 Tercera ecuación

1. Tercera ecuación de N-S para tercer componente de la velocidad W.

$$\frac{\delta W}{\delta t} + U \frac{\delta W}{\delta x} + V \frac{\delta W}{\delta y} + W \frac{\delta W}{\delta z} = \frac{-1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta z} + \nu \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 W}{\delta z^2} \right)$$

2. Discretización utilizando diferencias finitas adelantadas para el tiempo, y atrasadas para las espaciales.

$$\begin{aligned}
& \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \alpha U_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^n - W_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} + (1-\alpha) U_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \\
& + \alpha V_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^n - W_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + (1-\alpha) V_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} \\
& + \alpha W_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^n - W_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} + (1-\alpha) W_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} \\
& = \frac{-1}{\rho} \left(\alpha \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + (1-\alpha) \frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) \\
& + \nu \left(\alpha \left(\frac{W_{i+1,j,k}^n - 2*W_{i,j,k}^n + W_{i-1,j,k}^n}{dx^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{W_{i+1,j,k}^{n+1} - 2*W_{i,j,k}^{n+1} + W_{i-1,j,k}^{n+1}}{dx^2} \right) \right. \\
& + \alpha \left(\frac{W_{i,j+1,k}^n - 2*W_{i,j,k}^n + W_{i,j-1,k}^n}{dy^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{W_{i,j+1,k}^{n+1} - 2*W_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j-1,k}^{n+1}}{dy^2} \right) \\
& \left. + \alpha \left(\frac{W_{i,j,k+1}^n - 2*W_{i,j,k}^n + W_{i,j,k-1}^n}{dz^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{W_{i,j,k+1}^{n+1} - 2*W_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k-1}^{n+1}}{dz^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

3. Despeje para segunda ecuación del término de interés

$$\begin{aligned}
W_{i,j,k}^{n+1} = W_{i,j,k}^n + \Delta t \left[-\alpha U_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^n - W_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} - (1-\alpha) U_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
- \alpha V_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^n - W_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} - (1-\alpha) V_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} \\
- \alpha W_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^n - W_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} - (1-\alpha) W_{i,j,k}^n \frac{W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} \\
- \frac{1}{\rho} \left(\alpha \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + (1-\alpha) \frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) \\
+ \nu \left(\alpha \left(\frac{W_{i+1,j,k}^n - 2*W_{i,j,k}^n + W_{i-1,j,k}^n}{dx^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{W_{i+1,j,k}^{n+1} - 2*W_{i,j,k}^{n+1} + W_{i-1,j,k}^{n+1}}{dx^2} \right) \right. \\
+ \alpha \left(\frac{W_{i,j+1,k}^n - 2*W_{i,j,k}^n + W_{i,j-1,k}^n}{dy^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{W_{i,j+1,k}^{n+1} - 2*W_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j-1,k}^{n+1}}{dy^2} \right) \\
\left. + \alpha \left(\frac{W_{i,j,k+1}^n - 2*W_{i,j,k}^n + W_{i,j,k-1}^n}{dz^2} \right) + (1-\alpha) * \left(\frac{W_{i,j,k+1}^{n+1} - 2*W_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k-1}^{n+1}}{dz^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

2.4 Cuarta ecuación

Para obtener la cuarta ecuación, en la que se introduce el término de presión, hacemos el siguiente proceso (facilitado por Lorena Barba):

1. De la ecuación vectorial de Navier-Stokes:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + u(\nabla u) = \frac{-1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u$$

2. Discretizamos el tiempo ($\frac{\delta u^n}{\delta t}$) de manera adelantada simplemente por claridad (Barba dice esto, que no es lo más preciso pero que lo hace por claridad). Luego despejamos de la siguiente manera:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(-u^n \nabla u^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nu \nabla^2 u^n \right)$$

3. Y derivamos....

$$\nabla u^{n+1} = \nabla u^n + \Delta t \left(-\nabla(u^n \nabla u^n) - \frac{1}{\rho} \nabla^2 p^{n+1} + \nu \nabla^2 (\nabla u^n) \right)$$

4. Procedemos a despejar el término de la presión para el tiempo n+1, usando que $\nabla u^{n+1} = 0$.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \rho \nabla \frac{u^n}{\Delta t} - \rho \nabla (u^n \nabla u^n) + \mu \nabla^2 (\nabla u^n)$$

Esta es la ecuación vectorial que aparece en la página de 12 steps for N-S.

Esto es porque no tenemos manera obvia de relacionar la velocidad con la presión a partir de la ecuación de Navier Stokes.

Además porque nosotros queremos cumplir la ecuación de "mass conservation", pero en el mundo discretizado no siempre se cumple. Para compensar el hecho de forzar a que lo sea (en el paso 4), usamos el cálculo de la velocidad que se hace en las ecuaciones primera, segunda y tercera. Las tomamos como un paso intermedio (citando a Barba, calculamos $u^{n+\frac{1}{2}}$) y luego la utilizamos en la cuarta ecuación (esto también justifica el por qué la ecuación de la presión debe ser la última).

Todo esto, es importante repetirlo, es exclusivamente para el caso donde nuestra representación de los números (como en la computadora) es discreta. Si estuviésemos en un ámbito de trabajo continuo, la ecuación de presión que se usa es la misma que está en la guía 3 del ejercicio 6.