Trabajo práctico
Probabilidad y Estadistica (C)

Alejandro Martín Ventura
249/11

1. Ejercicio 1

Sean $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con distribución $U(0, b)$ con b un parámetro desconocido. Calcular analíticamente los estimadores de momentos $\hat{b}_{mom}$ y de máxima verosimilitud $\hat{b}_{mv}$. Implementarlos en R como funciones.

1.1. Estimador de momentos.

Comenzaremos calculando la esperanza de una variable uniforme de parámetros 0 y b.
$E(U) = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2}$.

Ahora para la esperanza muestral, obtenemos

$\frac{X_1+...+X_n}{n}$.

Igualamos.

$\frac{X_1+...+X_n}{n} = \frac{b}{2}$
$2\frac{X_1+...+X_n}{n} = \hat{b}_{mom}$

1.2. Estimador de máxima verosimilitud.

Tomo $f(X_1, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} I_{[0,b]}(x_i)$

Con lo cual se obtiene la siguiente función de verosimilitud:

$L(b) = \frac{1}{b^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[0,b]}(x_i)$

Notemos que la función también se puede definir como $\frac{1}{b^n}$ si $0 < X_i < b \; \forall i$, o cero fuera de ese rango. O sea, si algún X_i es mayor a b, la función se vuelve nula.
Pero esta condición, $0 \leq X_i \leq b \; \forall i$ puede pensarse como $b > max(X_i)$.

Dado que donde no es nula, la función es monótona decreciente, puesto que esta compuesta por un cociente con un denominador positivo y monótono creciente, el máximo debe encontrarse exactamente en el punto en el cual deja de ser nula. Esto es, $max(X_i)$, y por lo tanto, este es el estimador de máxima verosimilitud.

$\hat{b}_{mv} = max(x_i)$

2. Ejercicio 2

Implemente el siguiente estimador de b:
$\hat{b}_{med} = 2xmediana\{x_1, ..., X_n\}$

2.1. Implementación.

Llamare a la función que implementa el estimador pedido, "Bmed". A continuación se encuentra el código fuente de la misma.

```
Bmed<-function(X)
{
sX = sort(X)
n = length(X)
    median = X[n/2]
  return(2*median)
}
```

Este código define una función que toma un vector X de números y calcula su mediana, luego retorna el doble de la mediana como resultado. Dado que el doble de la media es la expresión del estimador, es una implementación correcta del mismo.

3. Ejercicio 3

Utilizando $b = 1$, genere una muestra de tamaño $n = 15$. Calcule cada uno de los estimadores con la muestra obtenida y reporte el valor y error de cada estimador.

3.1. Resolución.

Comenzaremos implementando, como función, los dos estimadores restantes.

```
Bmom<-function(X)
{
mean = 0
  for(i in 1:length(X))
    {
      mean = mean + X[i];
    }
    mean = mean/length(X)
  return(2*mean)
}

Bmv<-function(X)
{
  return(max(X))
```

```
}
```

Bmom es la forma algorítmica en R de la expresión del estimador calculado en el primer punto, mientras que la función nativa de R, max, nos provee de una forma fácil para calcular el estimador Bmv. Se la deja aun así dentro de una función por consistencia.

A continuación se muestra un ejemplo de una corrida en la cual se utiliza la función runif, nativa de R, la cual genera números flotantes aleatorios siguiendo una distribución uniforme, para generar la muestra. Luego de eso realiza la estimación de b mediante Bmom, Bmv y Bmed.

```
> X = runif(15, 0.0, 1.0)
> X
 [1] 0.85100376 0.35369725 0.37211795 0.02894966 0.80028852
     0.73197841 0.24412642 0.84706643 0.74270632 0.85146423
     0.65617966 0.11617666 0.11925780 0.25546167 0.53364961
> Bmed(X)
[1] 0.7442359
> Bmv(X)
[1] 0.8514642
> Bmom(X)
[1] 1.00055
```

Utilizaremos ahora R para calcular también los errores

```
> abs(1-Bmom(X))
[1] 0.0005499117
> abs(1-Bmv(X))
[1] 0.1485358
> abs(1-Bmed(X))
[1] 0.2557641
>
```

Como puede verse, los valores obtenidos por los estimadores Bmv, Bmom y Bmed son 0.8514642, 1.00055 y 0.7442359 respectivamente, y sus errores son 0.1485358, 0.0005499117 y 0.2557641.

4. Ejercicio 4

Hacer una simulación para obtener el sesgo, varianza y error cuadrático medio (ECM) de cada uno de los estimadores.

4.1. Sesgo.

```
b = 1;
n = 15;
nrep = 1000;
Bmoms = double()
Bmeds = double()
Bmvs = double()
X = double()

for (i in 1:nrep){
 X = runif(n, 0.0, b);
 val1 =
 Bmoms[i] <- Bmom(X);
 Bmeds[i] <- Bmed(X);
 Bmvs[i] <- Bmv(X);
}
momMean = mean(Bmoms);
medMean = mean(Bmeds);
mvMean = mean(Bmvs);

momErr = abs(b-momMean);
medErr = abs(b-medMean);
mvErr = abs(b-mvMean);
```

Los resultados conseguidos son los siguientes:

```
> print(momErr)
[1] 0.0002888454
> print(medErr)
[1] 0.1260778
> print(mvErr)
[1] 0.06227115
>
```

como puede verse, los resultados fueron:

(momErr, medErr, mvErr) = (0.0002888454, 0.1260778, 0.06227115).

4.2. Varianza.

Las varianzas muestrales de los estimadores son las siguientes:

```
> momVar = var(Bmoms)
> medVar = var(Bmed)
Error: is.atomic(x) is not TRUE
> medVar = var(Bmeds)
> mvVar = var(Bmvs)
> print(momVar)
[1] 0.02233229
> print(medVar)
[1] 0.05594595
> print(mvVar)
[1] 0.003525818
>
```

Por lo tanto, al usar la varianza muestral de los estimadores Bmom, Bmed y Bmv, la aproximación obtenida para varianza da:

$$(\text{momVar}, \text{medVar}, \text{mvVar}) = (0.02233229, 0.05594595, 0.003525818)$$

4.3. Error cuadrático medio.

La formula que relaciona el error cuadrático medio con el sesgo y la varianza es

$$ECM_B(\hat{B}) = V_B(\hat{B}) + (E_B(\hat{B}) - B)^2$$

Utilizaremos esta formula para calcular, para cada estimador, el ECM como se muestra en el siguiente código:

```
> ECMBmom = momVar + (momErr^2);
> ECMBmed = medVar + (medErr^2);
> ECMBmv  = mvVar + (mvErr^2);
> print(ECMBmom)
[1] 0.02233238
> print(ECMBmed)
[1] 0.07184158
> print(ECMBmv)
[1] 0.007403514
>
```

Como puede verse, los errores cuadráticos medios, calculados así, resultan ser:

(ECMBmom, ECMBmed, ECMBmv) = (0.02233238, 0.07184158, 0.007403514).

5. Ejercicio 5

Implemente las funciones simulacion mv(b, n), simulacion mom(b, n) y simulacion med(b, n) que devuelve la aproximación del ECM de cada uno de los estimadores correspondientes al b y al n.

5.1. Implementacion.

```
simulacion_mom<-function(b,n)
{

nrep = 1000;
Bmoms = double();
X = double();

for (i in 1:nrep){
 X = runif(n, 0.0, b);
 Bmoms[i] <- Bmom(X);
}

momMean = mean(Bmoms);
momErr = abs(b-momMean);
momVar = var(Bmoms)
ECMBmom = momVar + (momErr^2);
return(ECMBmom);
}
simulacion_med<-function(b,n)
{

nrep = 1000;
Bmeds = double();
X = double();

for (i in 1:nrep){
 X = runif(n, 0.0, b);
 Bmeds[i] <- Bmed(X);

}

medMean = mean(Bmeds);
medErr = abs(b-medMean);
medVar = var(Bmeds);
ECMBmed = medVar + (medErr^2);
return(ECMBmed);
}
simulacion_mv<-function(b,n)
{

nrep = 1000;
Bmvs = double();
```

```
X = double();

for (i in 1:nrep){
 X = runif(n, 0.0, b);
 Bmvs[i] <- Bmv(X);
}

mvMean = mean(Bmvs);
mvErr = abs(b-mvMean);
mvVar = var(Bmvs);
ECMBmv  = mvVar + (mvErr^2);
return(ECMBmv);
}
```

6. Ejercicio 6

Realizar un gráfico del ECM de cada estimador con n = 15 y 0,5 ¡b ¡2. ¿Que observa? ¿Que estimador elige?

6.1. Implementación.

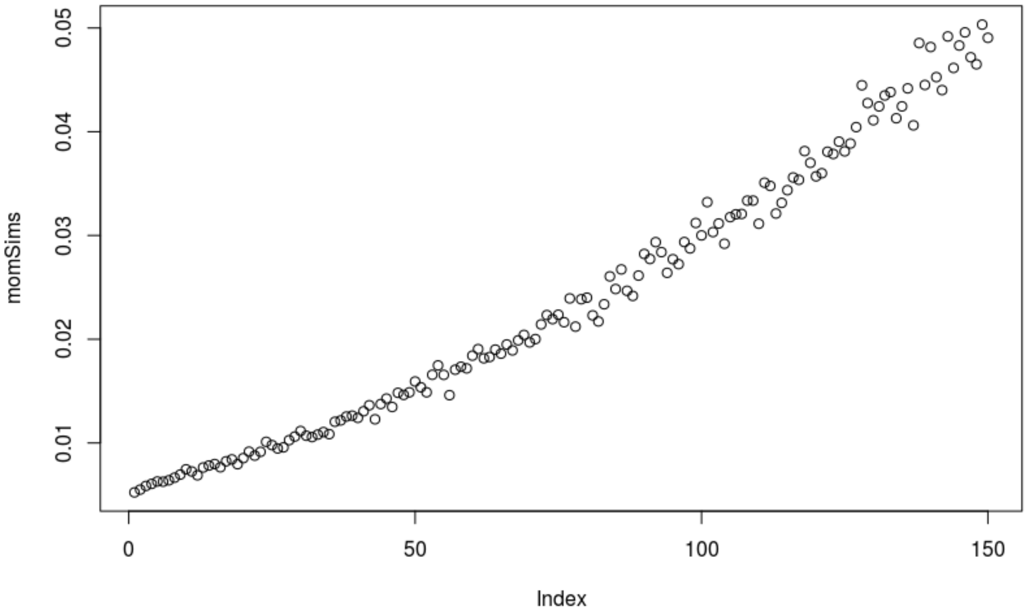
Se utiliza el siguiente código para generar los vectores.

```
steps = 150;
b0 = 0.5;
bn = 1.5;

step = (bn-b0)/steps;
b = b0;
Bs = double();
n = 15;

momSims = double();
medSims = double();
mvSims = double();

for(i in 1:steps){

momSims[i] <- simulacion_mom(b,n);
medSims[i] <- simulacion_med(b,n);
mvSims[i] <- simulacion_mv(b,n);
b = b+step;

}
```

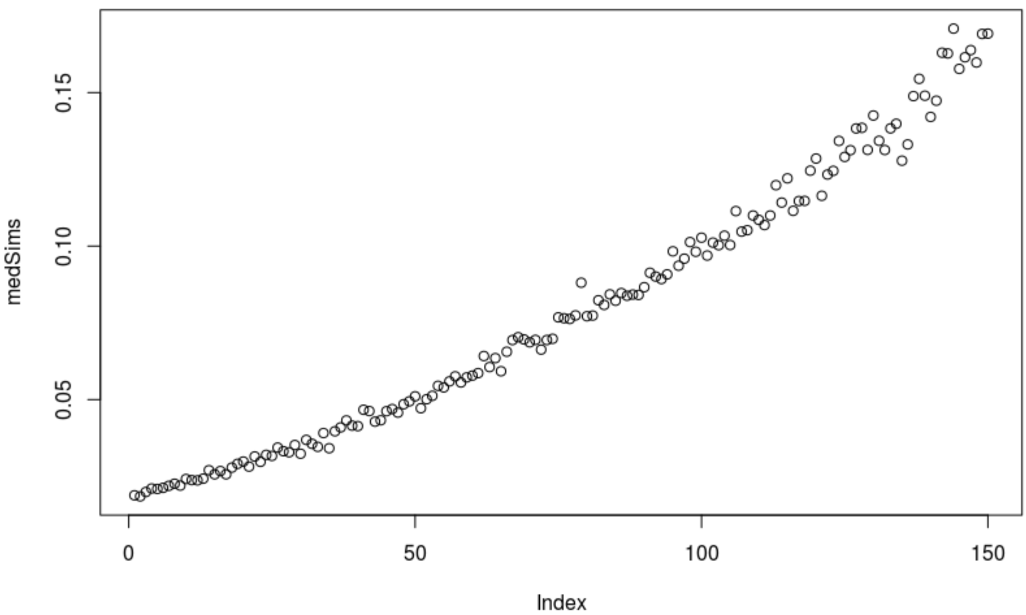
6.2. Resultados.

Los gráficos obtenidos son los siguientes.

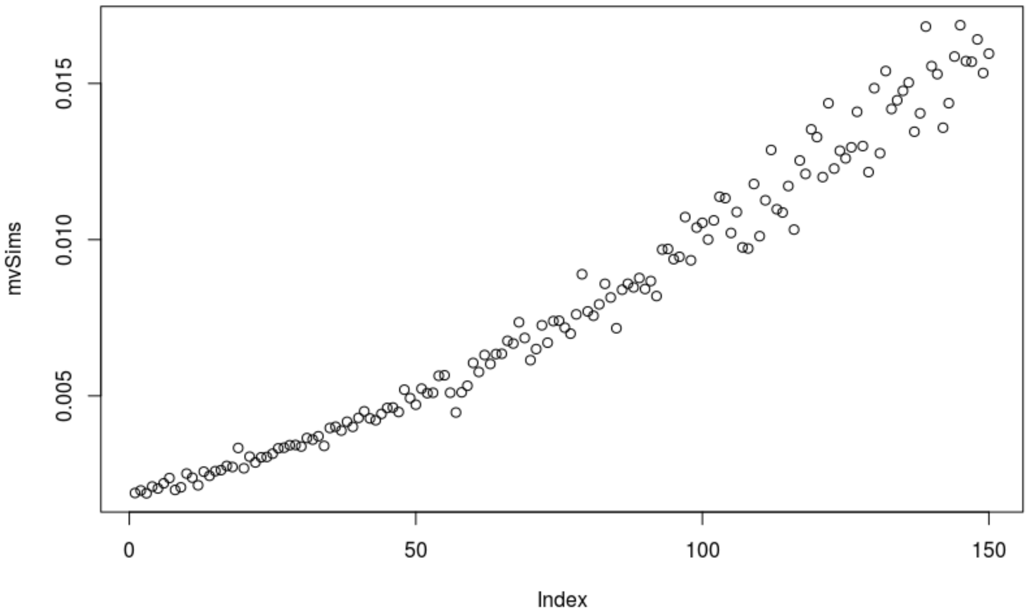
Error cuadrático medio de B_{mom}



Error cuadrático medio de B_{med}



Error cuadratico medio de B_{mv}



Como puede observarse la magnitud del error es menor en el estimador de máxima verosimilitud, B_{mv}, que en los otros dos. Siendo el estimador B_{med} el que peor aproxima. Notar que si bien los datos en el gráfico de B_{mv} se ven mas dispersos, esto es así gracias a que la escala vertical es menor, dado que el error lo es. Respondiendo a la pregunta del enunciado, bajo esta medida, el estimador B_{mv} funciona mejor que los otros dos, por lo cual elegiría ese.

7. Ejercicio 7

Realizar un gráfico de los ECM con $b = 1$ y $n = 15, 30, 50, 100, 150, 200$ ¿Que observa? ¿Que estimador elige? ¿Que sospecha sobre la consistencia de los estimadores?

7.1. Implementación.

Se utiliza el siguiente código para generar los vectores.

```
b = 1;
ni = double();
ni <- c(15, 30, 50, 100, 150, 200);
niLen = 6;
momSims = double();
medSims = double();
mvSims = double();

for(i in 1:niLen){
momSims[i] <- simulacion_mom(b,ni[i]);
medSims[i] <- simulacion_med(b,ni[i]);
mvSims[i] <- simulacion_mv(b,ni[i]);
}
```

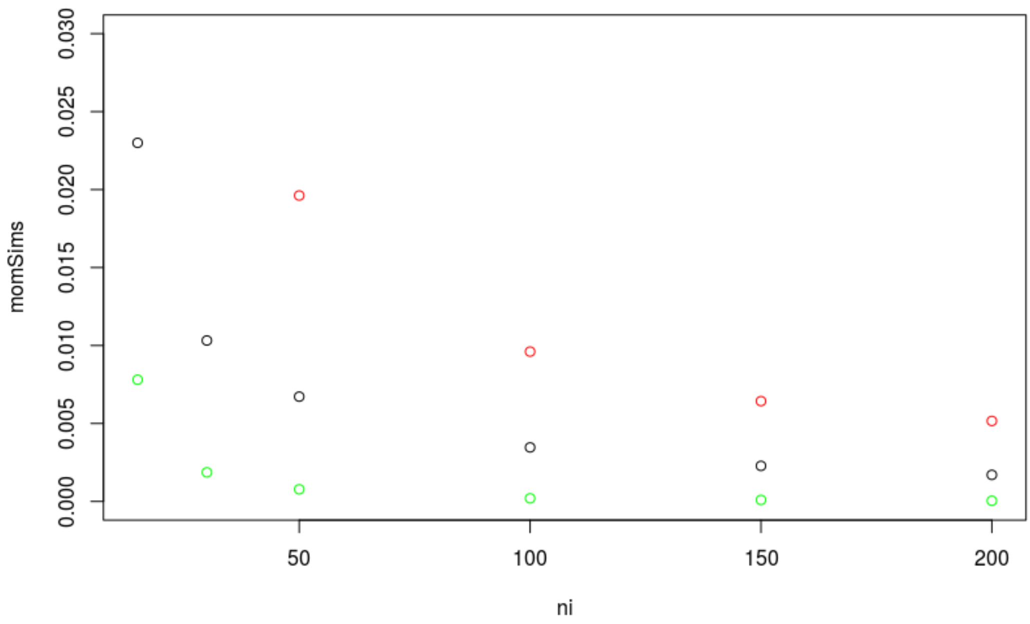
se crean luego los gráficos compuestos con el siguiente código:

```
> plot(ni, momSims, ylim=c(0,0.030))
> points(ni, medSims , col="red")
> points(ni, mvSims , col="green")
>
```

7.2. Resultados.

Se obtiene el siguiente gráfico, donde los puntos de color negro son los de B_{mom}, los de color rojo los de B_{med}, y los de color verde los de B_{mv}.

Error cuadratico medio de B_{mom}



Nuevamente se observa una convergencia mas rápida para el estimador de máxima verosimilitud. Ademas, en cuanto a la consistencia, el único estimador que converge al valor real, al menos con $n < 200$, es el de máxima verosimilitud, con lo cual es el único que parece consistente.

8. Ejercicio 8

Calcular los estimadores en la siguiente muestra. ¿Observa algo extraño? ¿a que cree que se debe?

0,917 0,247 0,384 0,530 0,798 0,912 0,096 0,684 0,394 20,1 0,769 0,137 0,352 0,332 0,670

8.1. Resolución.

Se utiliza el siguiente código para generar los vectores.

```
> vals = double();
> vals <- c(0.917, 0.247, 0.384, 0.530, 0.798, 0.912, 0.096, 0.684, 0.394, 20.1, 0.76
> Rmed = Bmed(vals)
> Rmom = Bmom(vals)
> Rmv = Bmv(vals)
> print(Rmom)
[1] 3.642933
> print(Rmv)
[1] 20.1
> print(Rmed)
[1] 0.192
```

8.2. Análisis.

Los resultados de los estimadores son (Bmom, Bmed, Bmv) = (3.642933, 0.192, 20.1). Es esperable que esto suceda ya que el estimador B_{mv}, estima utilizando el máximo. Si este fuera un outlier resultante de un error de medición, nos estaría dando un muy mal resultado. Lo que esto nos dice es que este método es mas sensible a errores de medición.

9. Ejercicio 9

Aproximar sesgo, varianza y error cuadrático medio para los estimadores bajo el siguiente escenario con datos atípicos: Una muestra uniforme con $b = 1$ y $n = 15$ que con probabilidad $p = 0,05$ un elemento de la muestra viene multiplicado por 100 (coma corrida dos lugares a la derecha). ¿Que estimador prefiere en este escenario? Aclaración: Para generar una muestra en estas condiciones basta generar una muestra como antes y luego decidir con probabilidad $= 0,05$ multiplicar por 100 al primer elemento de la muestra.

9.1. Sesgo.

```
b = 1;
n = 15;
nrep = 2000;
Bmoms = double()
Bmeds = double()
Bmvs = double()
X = double()
p = 0.05;
acumP = 0;
for (i in 1:nrep){
acumP = acumP+p;

X = runif(n, 0.0, b);
if(acumP >= 1){
acumP = 0;
X[1] = X[1]*100;
}
Bmoms[i] <- Bmom(X);
Bmeds[i] <- Bmed(X);
Bmvs[i] <- Bmv(X);
}
momMean = mean(Bmoms);
medMean = mean(Bmeds);
mvMean = mean(Bmvs);

momErr = abs(b-momMean);
medErr = abs(b-medMean);
mvErr = abs(b-mvMean);
```

Los resultados conseguidos son los siguientes:

```
> print(momErr)
[1] 0.3071968
> print(medErr)
[1] 0.01177621
> print(mvErr)
[1] 2.20998
>
```

9.2. Varianza.

Aquí vemos que:
(momErr, medErr, mvErr) = (0.3071968, 0.01177621, 2.20998).

Recordemos que para una muestra uniforme, los resultados habían sido:
(momErr, medErr, mvErr) = (0.0002888454, 0.1260778, 0.06227115).

Sucede algo parecido a lo visto en el punto anterior. El hecho de que haya un outlier, perjudica la medida del estimador de máxima verosimilitud (en caso de ser un error).

Las varianzas muestrales de los estimadores son las siguientes:

```
> momVar = var(Bmoms)
> medVar = var(Bmeds)
> mvVar = var(Bmvs)
> print(momVar)
[1] 2.58347
> print(medVar)
[1] 0.3396885
> print(mvVar)
[1] 142.4497
>
```

La aproximación obtenida para varianza da:
(momVar, medVar, mvVar) = (2.58347, 0.3396885, 142.4497)

Recordemos que los valores para muestras uniformes eran:
(momVar, medVar, mvVar) = (0.02233229, 0.05594595, 0.003525818)

Nuevamente vemos como el estimador de máxima verosimilitud es el mas afectado por estos nuevos valores. Extrañamente, la varianza en el estimador de momentos se redujo.

9.3. Error cuadrático medio.

Se utilizará esta formula de la aproximación del ECM como antes:

```
> ECMBmom = momVar + (momErr^2);
> ECMBmed = medVar + (medErr^2);
> ECMBmv  = mvVar + (mvErr^2);

> print(ECMBmom)
[1] 2.677839
> print(ECMBmed)
[1] 0.3398272
> print(ECMBmv)
[1] 147.3337
>
```

Se obtiene así:
(ECMBmom, ECMBmed, ECMBmv) = (2.677839, 0.3398272, 147.3337)

Siendo los valores anteriores:
(ECMBmom, ECMBmed, ECMBmv) = (0.02233238, 0.07184158, 0.007403514).

Vuelve a observarse como cambia el valor en B_{mv}.

9.4. Conclusión.

Al analizar las fortalezas y debilidades de los estimadores, tal y como fueron analizados aquí, se nota lo siguiente.
Si estamos seguros de que todas las mediciones fueron realizadas correctamente, B_{mv} es capaz de utilizar estos datos que parecen outliers para dar una mejor respuesta. en el caso general sin embargo, se espera que hayan errores de medición, con lo cual este estimador corre con la desventaja de ser sensible a outliers. Habiendo errores de medición, el estimador que mejor se comporta es aquel que menos utiliza la información de los outliers, es decir B_{med}. Esto puede verse reflejado en su menor error cuadrático medio, y otras medidas realizadas anteriormente.