

Processamento Morfológico de Imagens

Laercio Brito

Objetivos

- Introduzir os conceitos básicos de morfologia matemática e suas aplicações

O que é processamento morfológico de Imagens?

- É uma área que descreve **várias técnicas de processamento de imagem** que lidam com as **características de forma** em uma imagem
- Operações morfológica são tipicamente aplicadas na **remoção de imperfeições** introduzidas durante o **processo de segmentação**

Exemplo:



Imagem após segmentação



Imagem após segmentação e
processamento morfológico

Introdução

- A palavra morfologia denota um ramo da biologia que lida com a forma e a estrutura de animais e plantas.
- A morfologia matemática serve como ferramenta para extrair componentes da imagem (estrutura e forma) que são úteis para a descrição e representação.
- Além disso, a morfologia matemática pode ser aplicada para pré e pós-processamento de imagens.
- A linguagem morfológica matemática é a Teoria dos conjuntos. Conjuntos em morfologia representam objetos em uma imagem.
- Todo ferramental se aplica em imagens binárias (preto e branco). Extensão para tons de cinza serão apresentadas no final

Definições Básicas

Definições Básicas

- Sejam A e B conjuntos de \mathbb{Z}^2 , com componentes:

$$a = (a_1, a_2) \quad b = (b_1, b_2)$$

$$\text{Sendo } z = (z_1, z_2)$$

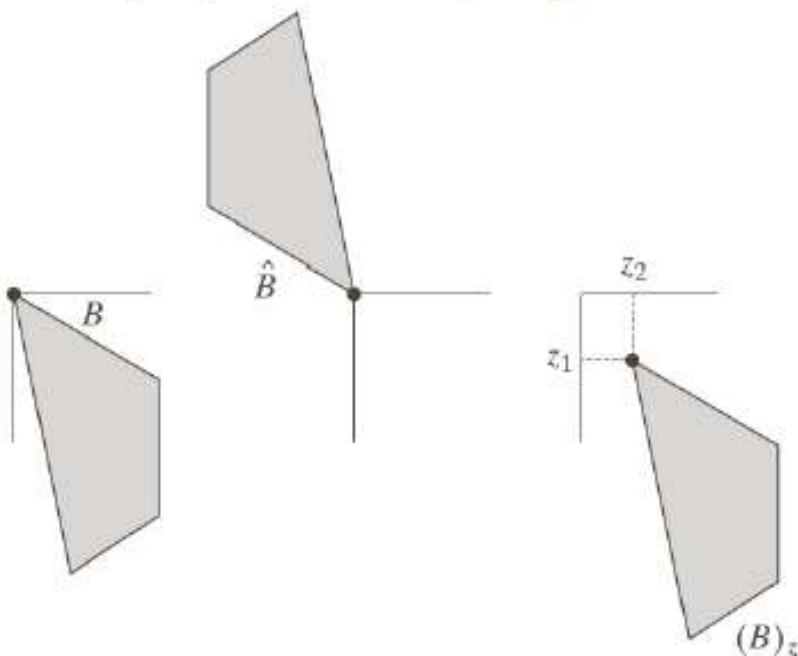
Translação de A por x :

$$(A)_z = \{c \mid c = a + x, \text{ para } a \in A\}$$

Definições Básicas

- Reflexão de B

$$\hat{B} = \{x \mid x = -b, \text{ para } b \in B\}$$



a b c

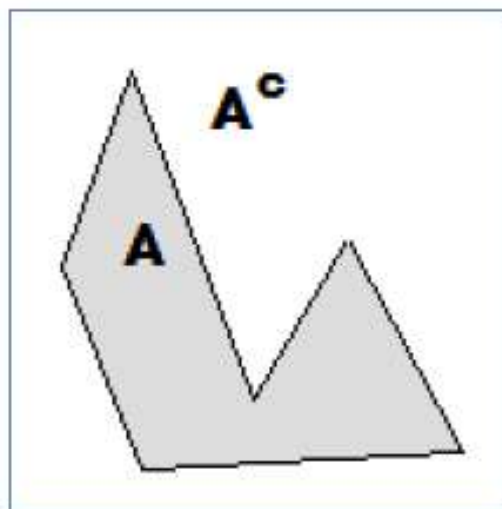
FIGURE 9.1

(a) A set, (b) its reflection, and (c) its translation by z .

Definições Básicas

- **Complemento** do conjunto A :

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$



Definições Básicas

- **Interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto de pixels pertencentes a ambos A e

B :

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

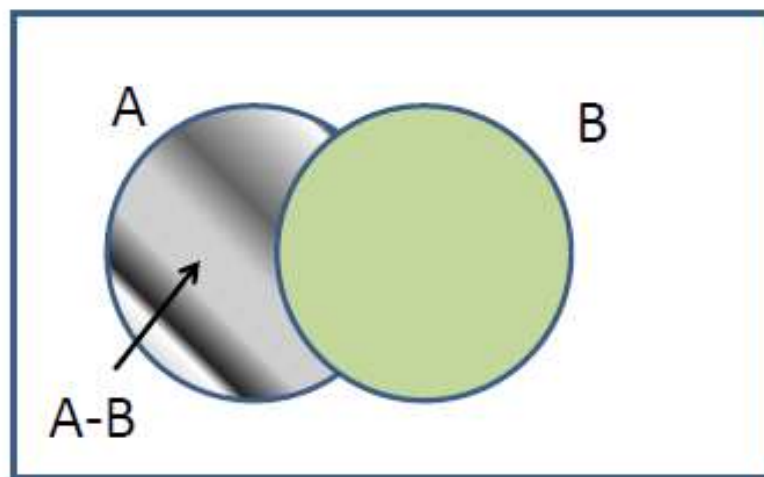
- **União** de dois conjuntos A e B é o conjunto de pixels que pertencem ou A ou B ou ambos:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Definições Básicas

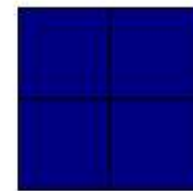
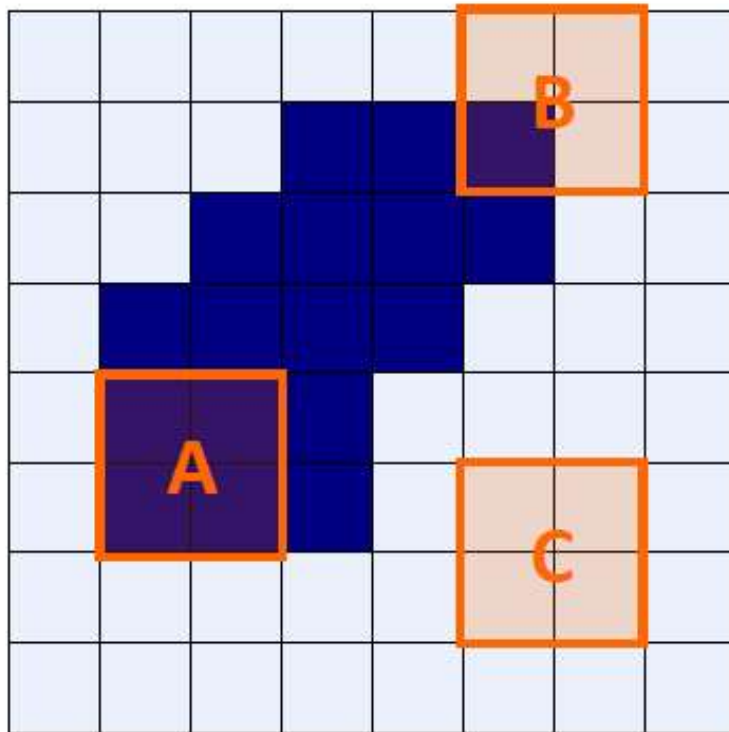
- **Diferença** de dois conjuntos $A - B$:

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



Elemento Estruturantes, Hit e Fit

Elemento Estruturantes, Hit e Fit



Elemento estruturante

Fit: Todos os pixels 1 no elemento estruturante cobrem uma área na imagem também com valores 1 (área segmentada)

Hit: Qualquer pixel 1 do elemento estruturante cobre um elemento 1 da imagem

Todas as operações morfológicas estão basedas nesse dois simples conceitos.

Elemento Estruturantes, Hit e Fit

- Elementos estruturantes podem ser de qualquer tamanho e de qualquer forma
- Entretanto, por simplicidade, serão usados elementos estruturantes retangulares com suas origens no pixel central

1	1	1
1	1	1
1	1	1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

Elemento Estruturantes, Hit e Fit

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	B	1	1	1	0	C	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	A	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Elemento
estruturante 1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento
estruturante 2

Elemento Estruturantes, Hit e Fit

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	B	1	1	1	0	C	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	A	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Elemento
estruturante 1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento
estruturante 2

Região A:

Há fit tanto do elemento estruturante 1, quanto do elemento estruturante 2
Todos os pixels 1 do elemento estruturante, cobrem valores de pixel 1 da imagem.

Elemento Estruturantes, Hit e Fit

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	B	1	1	1	0	C	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	A	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Elemento
estruturante 1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento
estruturante 2

Região B:

Apenas há fit com o elemento
estruturante 2.

Elemento Estruturantes, Hit e Fit

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	B	1	1	1	0	C	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	A	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Elemento
estruturante 1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento
estruturante 2

Região C:

Não há fit com nenhum elemento.

Operações Básicas

Operações Básicas

- Fundamentalmente técnicas de processamento morfológico de imagens são como técnicas de filtragem espacial
- O elemento estruturante é movimentado por cada pixel da imagem original para gerar um pixel na nova imagem processada
- O valor do novo pixel dependerá da operação que está sendo realizada
- Há duas operações morfológicas básicas: erosão e dilatação

Operadores Morfológicos - Erosão

Operadores Morfológicos - Erosão

- A e B conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
- A **Erosão** de A por B é definida como

$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

O conjunto resultante da erosão de A por B é o conjunto de todos os pontos x tais que B , quando transladado por x , fique contido em A

Operadores Morfológicos - Erosão

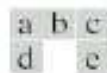
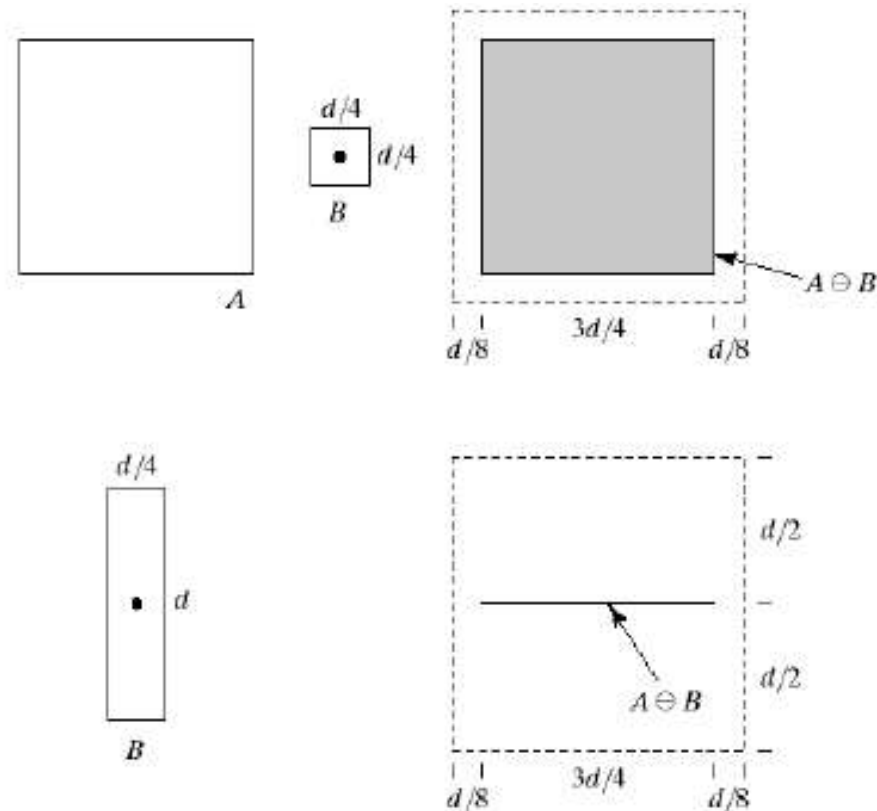
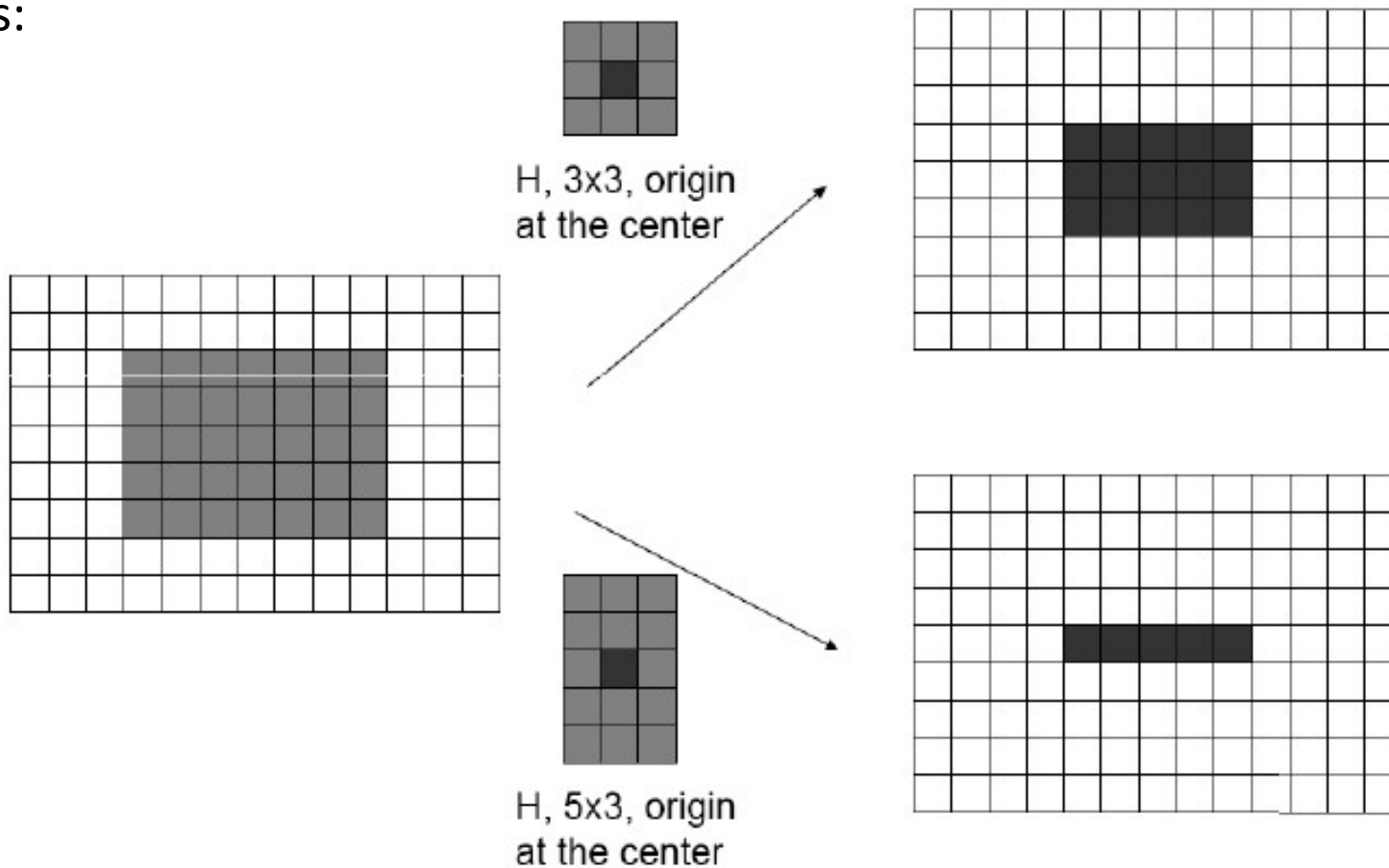


FIGURE 9.6 (a) Set A . (b) Square structuring element. (c) Erosion of A by B , shown shaded. (d) Elongated structuring element. (e) Erosion of A using this element.

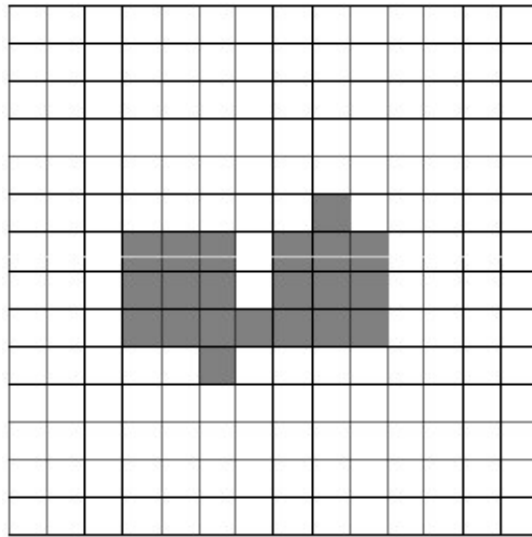
Operadores Morfológicos - Erosão

- Exemplos:

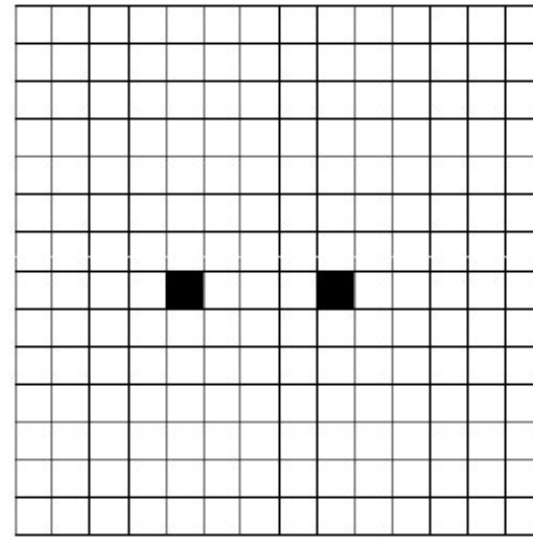


Operadores Morfológicos - Erosão

- Exemplos:



F



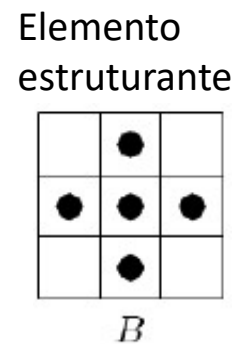
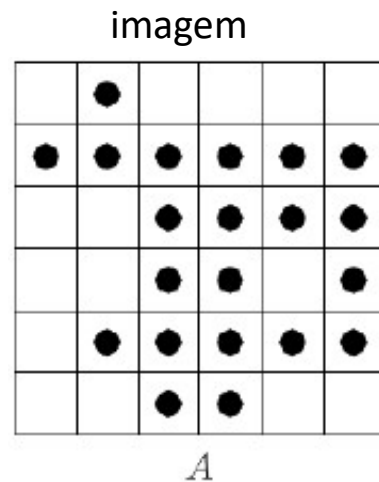
G



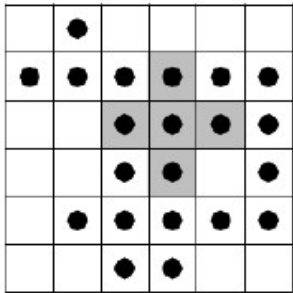
H, 3x3, origin at the center

Operadores Morfológicos - Erosão

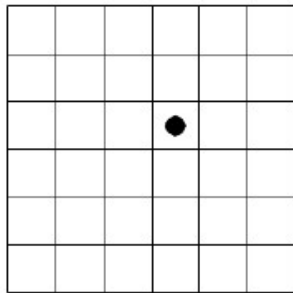
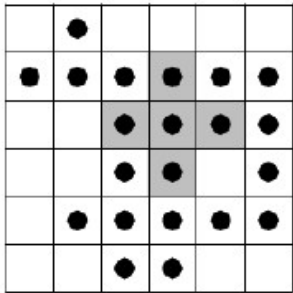
- Exercício:
- Qual será a imagem encontrada após o procedimento de erosão?



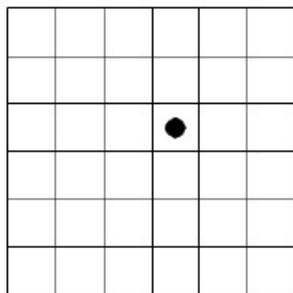
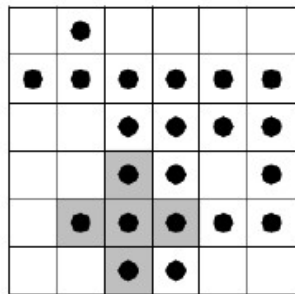
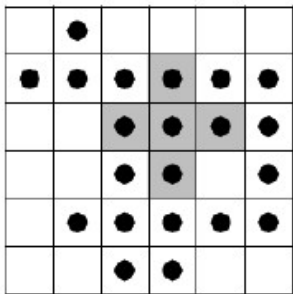
Operadores Morfológicos - Erosão



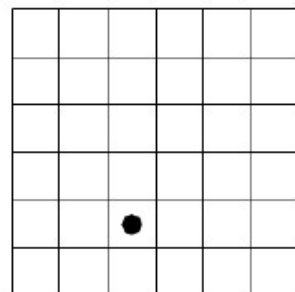
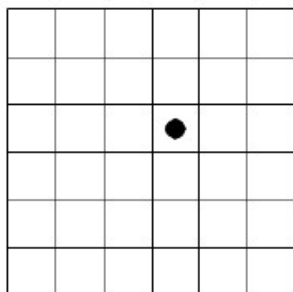
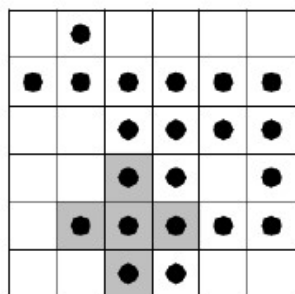
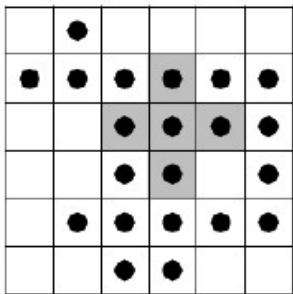
Operadores Morfológicos - Erosão



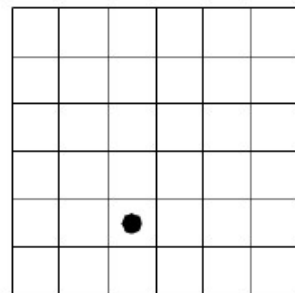
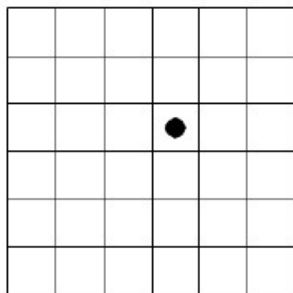
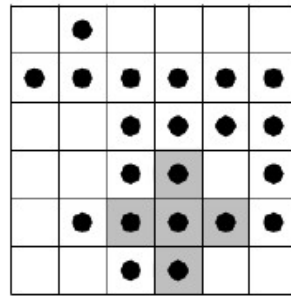
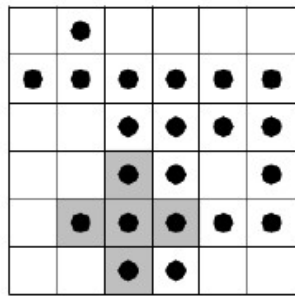
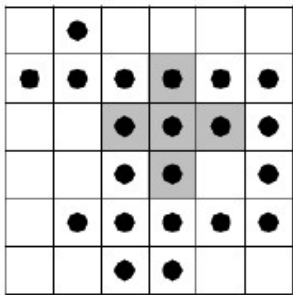
Operadores Morfológicos - Erosão



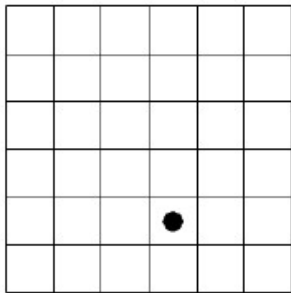
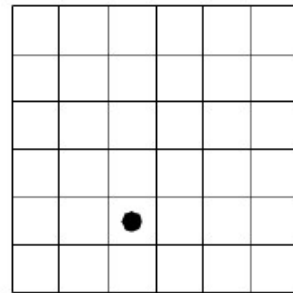
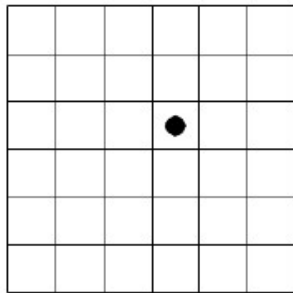
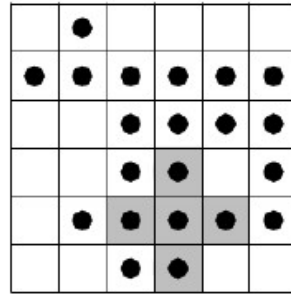
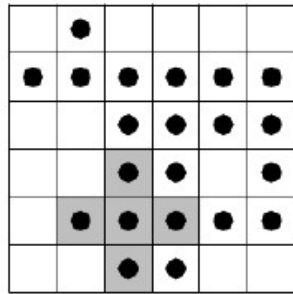
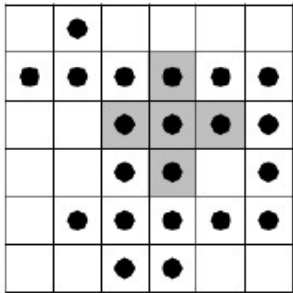
Operadores Morfológicos - Erosão



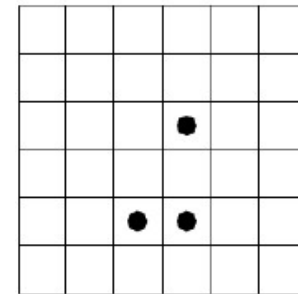
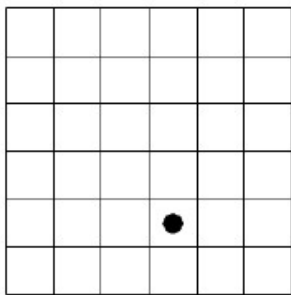
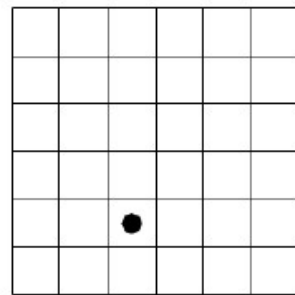
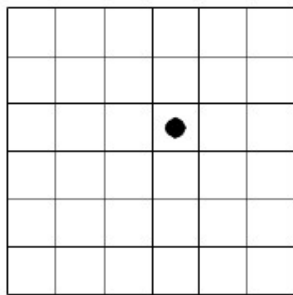
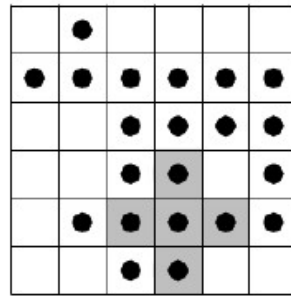
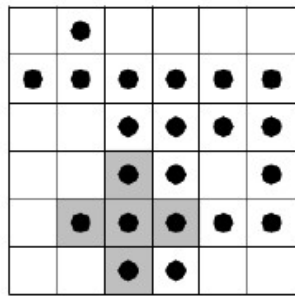
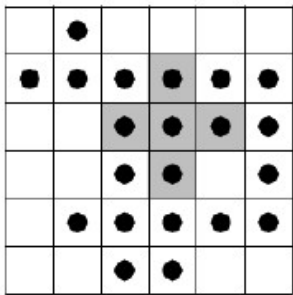
Operadores Morfológicos - Erosão



Operadores Morfológicos - Erosão



Operadores Morfológicos - Erosão



$A \ominus B$

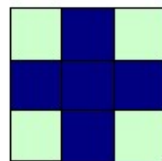
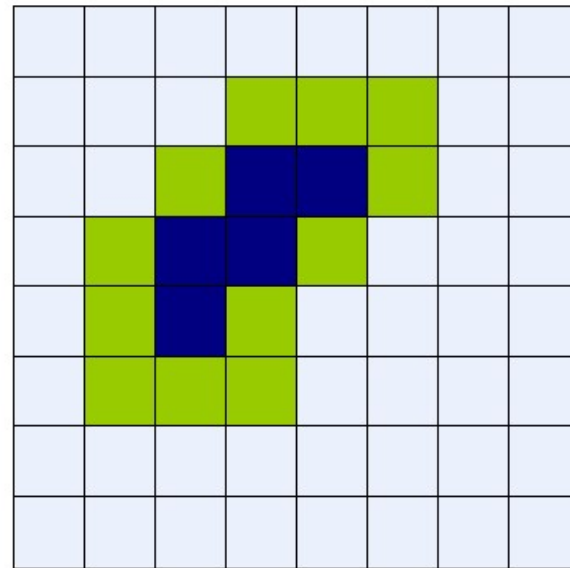
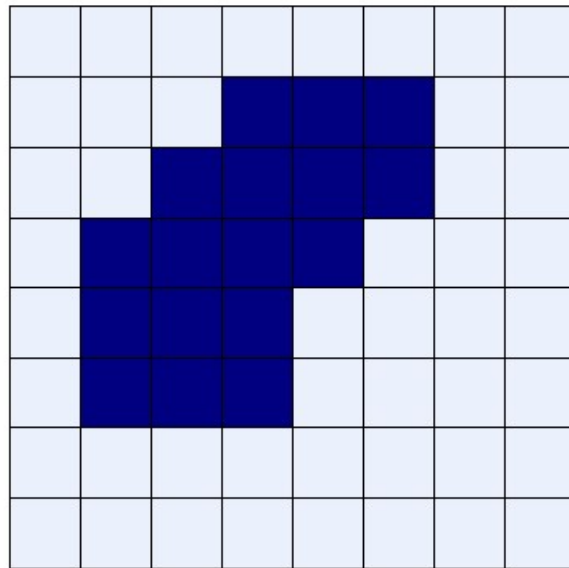
Operadores Morfológicos - Erosão

- O elemento estruturante s é posicionado com sua origem em (x, y) e o valor do pixel na nova imagem é determinado usando-se a seguinte regra:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \text{ fits } f \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Operadores Morfológicos - Erosão

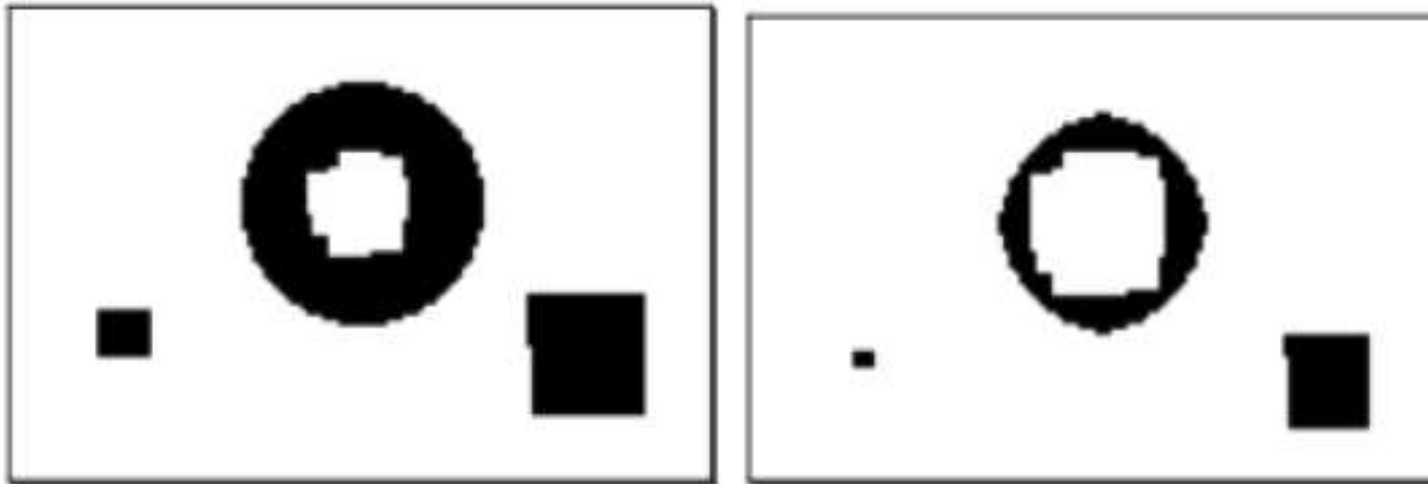
- Mais exemplos:



Elemento Estruturante

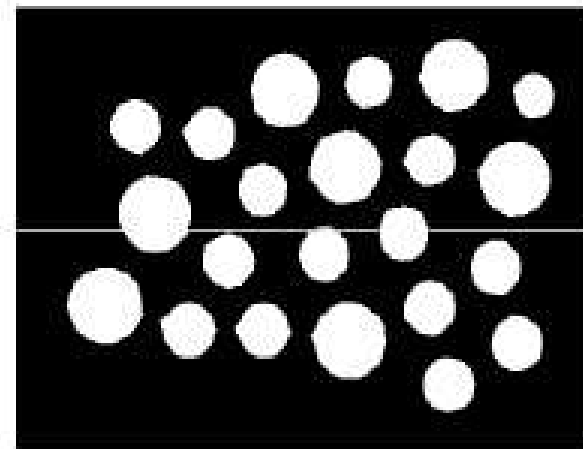
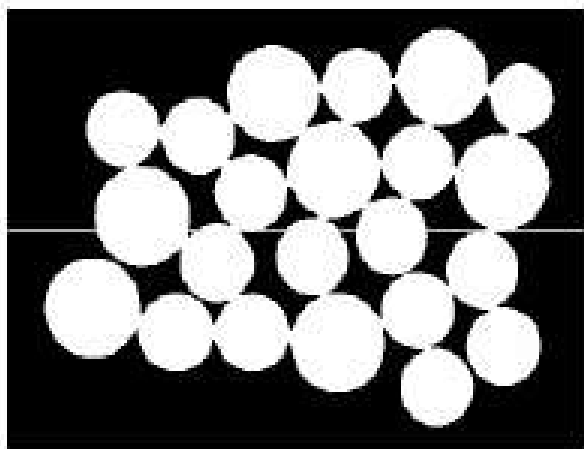
Operadores Morfológicos – Erosão

- Efeitos da erosão:
 - Diminuir partículas
 - Eliminar componentes menores que o elemento estruturante
 - Aumentar buracos
 - Permitir separação de componentes conectados



Operadores Morfológicos - Erosão

- Exemplos:



Operadores Morfológicos - Erosão

Exemplo

```
import cv2
import numpy as np

img = cv2.imread('j.png',0)
kernel = np.ones((5,5),np.uint8)
#kernel = cv2.getStructuringElement(cv2.MORPH_RECT,(5,5))
#kernel = cv2.getStructuringElement(cv2.MORPH_ELLIPSE,(5,5))
#kernel = cv2.getStructuringElement(cv2.MORPH_CROSS,(3,3))

erosion = cv2.erode(img,kernel,iterations = 1)

cv2.imshow("erosao", erosion)
cv2.waitKey(0)
```

- Você pode definir o elemento estruturante ou usar os disponíveis no OpenCV através da função `cv2.getStructuringElement`
- Note que o OpenCV considera os pixels brancos como sendo relevantes

Operadores Morfológicos – Erosão

- Exercícios:
- Implemente a erosão na imagem de moedas utilizando como elemento estruturante uma matriz de uns de tamanho 3x3. Use o código feito por você (implementação da convolução)
- Com o auxílio da função `cv2.getStructuringElement`, utilize diferentes elementos estruturantes e números de interações na sua imagem de moedas.



Operadores Morfológicos – Dilatação

Operadores Morfológicos – Dilatação

- A e B conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
- A **Dilatação** de A por B é definida como

$$A \oplus B = \{x \mid (\hat{B})_x \cap A \neq \emptyset\}$$

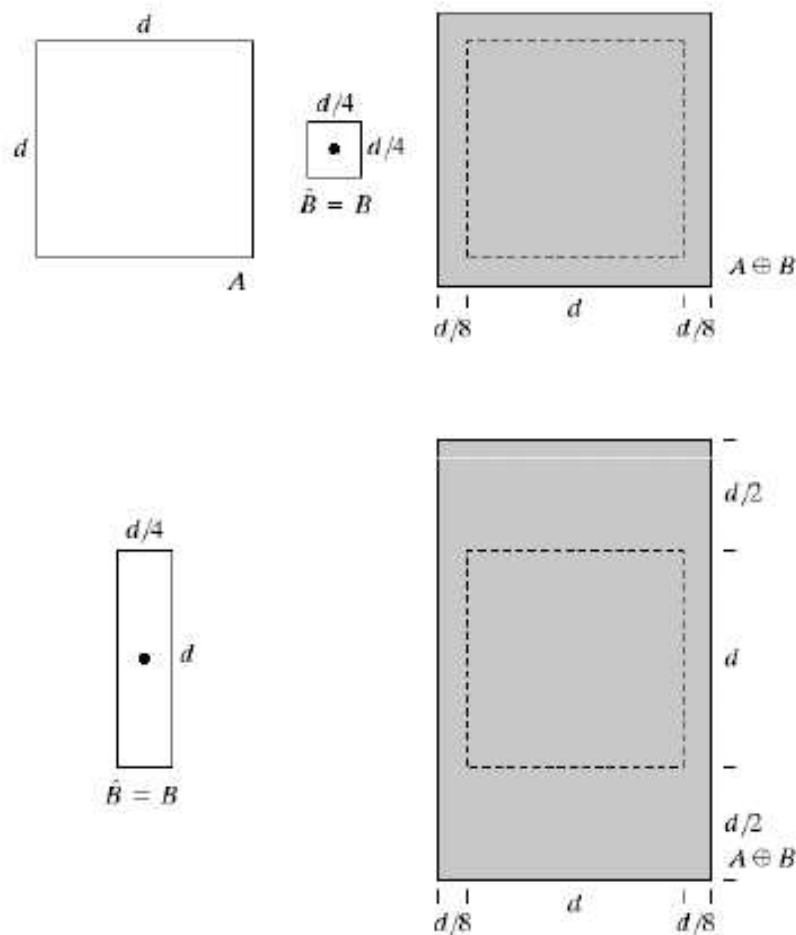
- Reflexão de B em torno de sua origem
- Translação dessa reflexão por x
- **A dilatação por B** : conjunto de todos os deslocamentos de x tais que B refletido e A se sobreponham em pelo menos um elemento não nulo

Operadores Morfológicos – Dilatação

a b c
d e

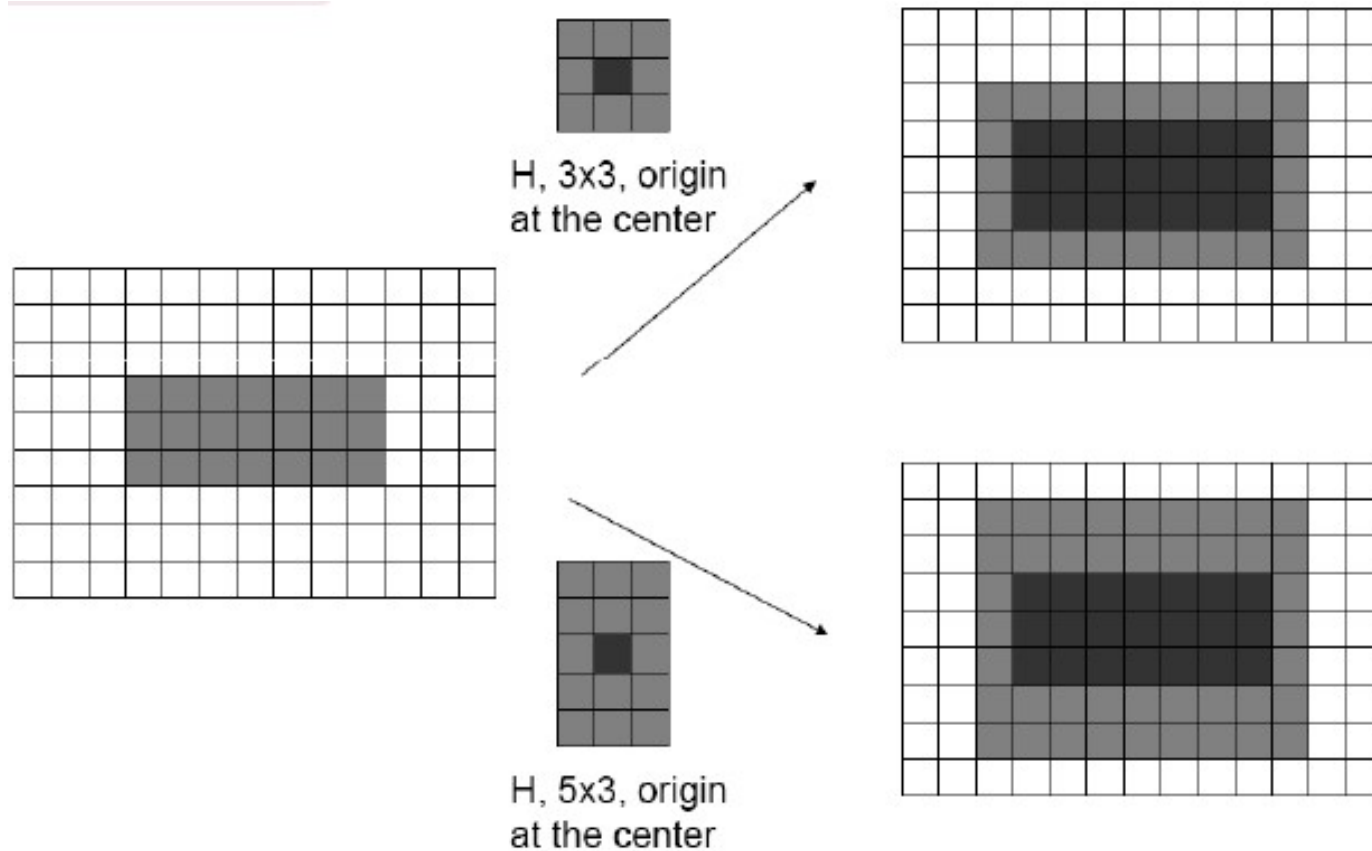
FIGURE 9.4

- (a) Set A .
(b) Square structuring element (dot is the center).
(c) Dilation of A by B , shown shaded.
(d) Elongated structuring element.
(e) Dilation of A using this element.



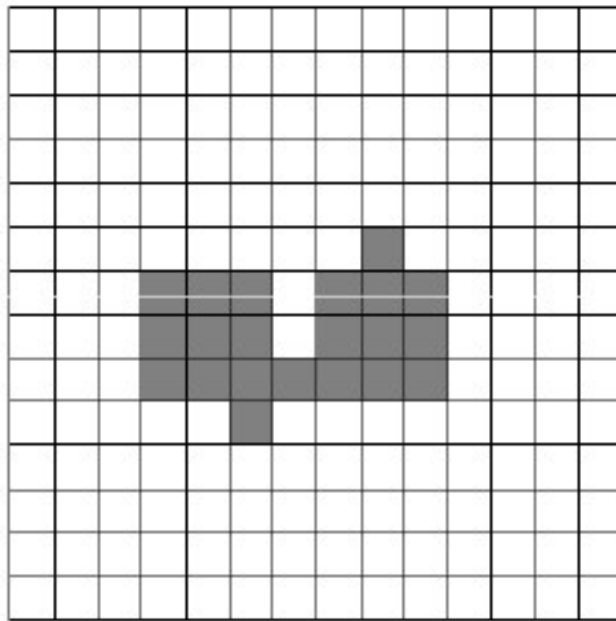
Operadores Morfológicos – Dilatação

- Exemplos:

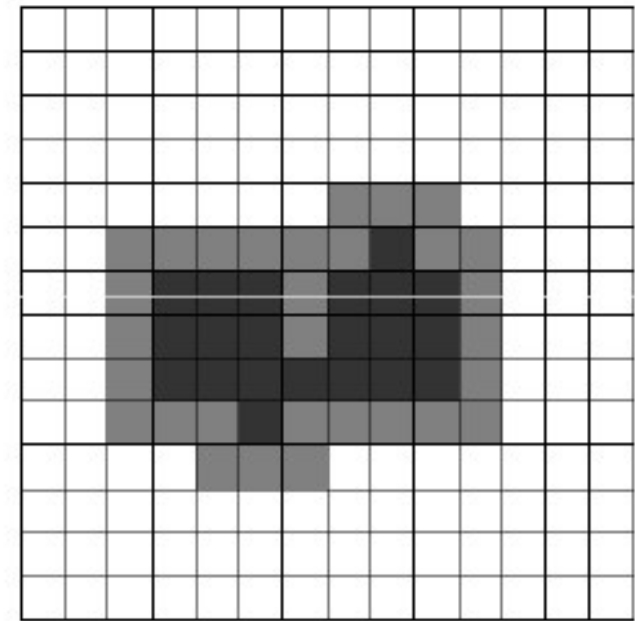


Operadores Morfológicos – Dilatação

- Exemplos:



F



G



H, 3x3, origin at the center

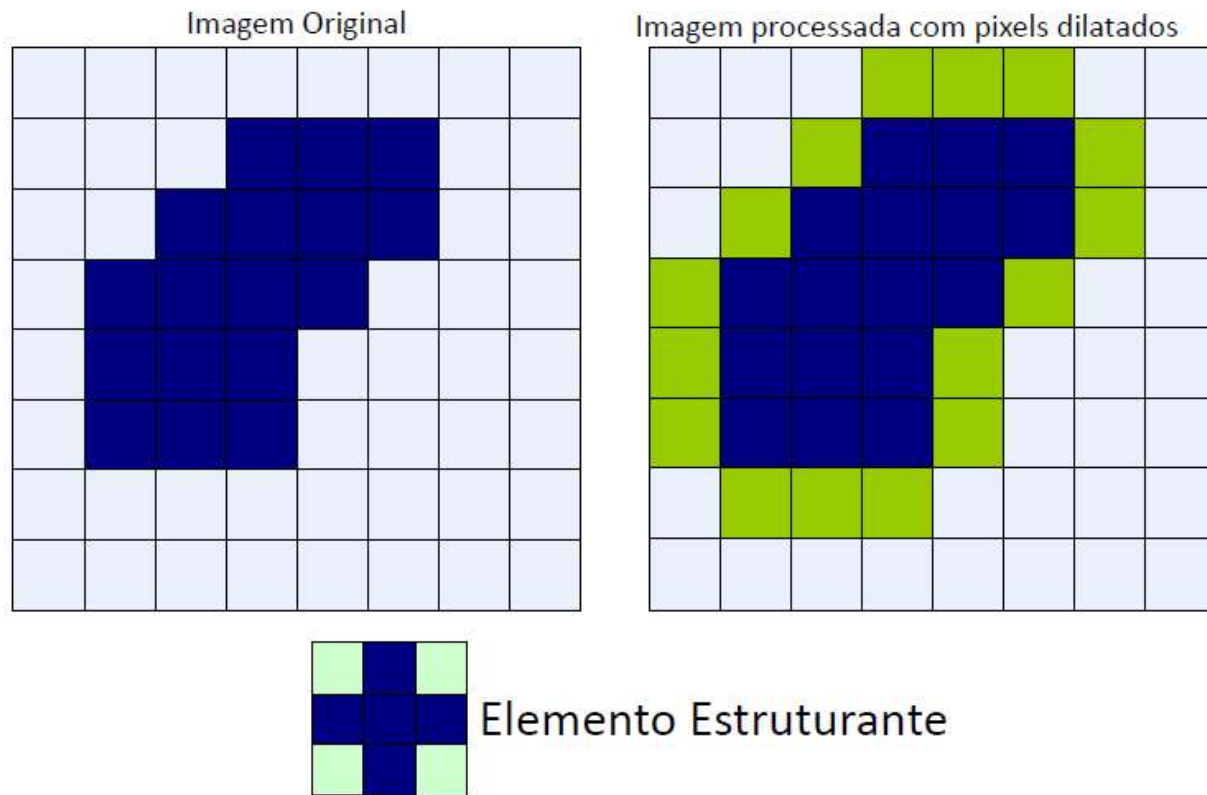
Operadores Morfológicos - Dilatação

- O elemento estruturante s é posicionado com sua origem em (x, y) e o novo valor de pixel é determinado através da regra:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \text{ hits } f \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

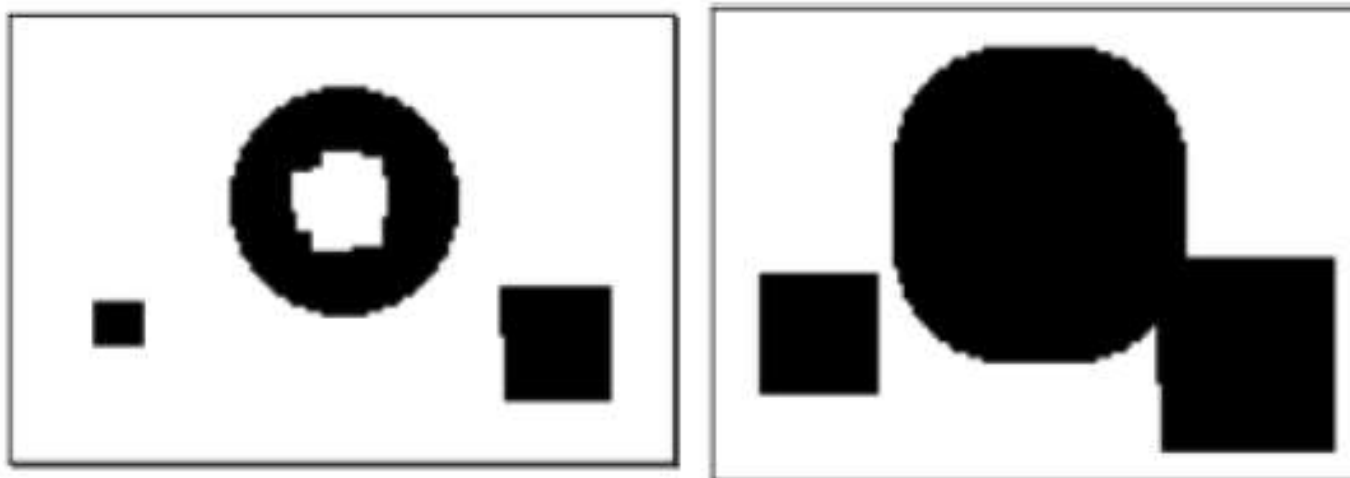
Operadores Morfológicos - Dilatação

- Exemplos:



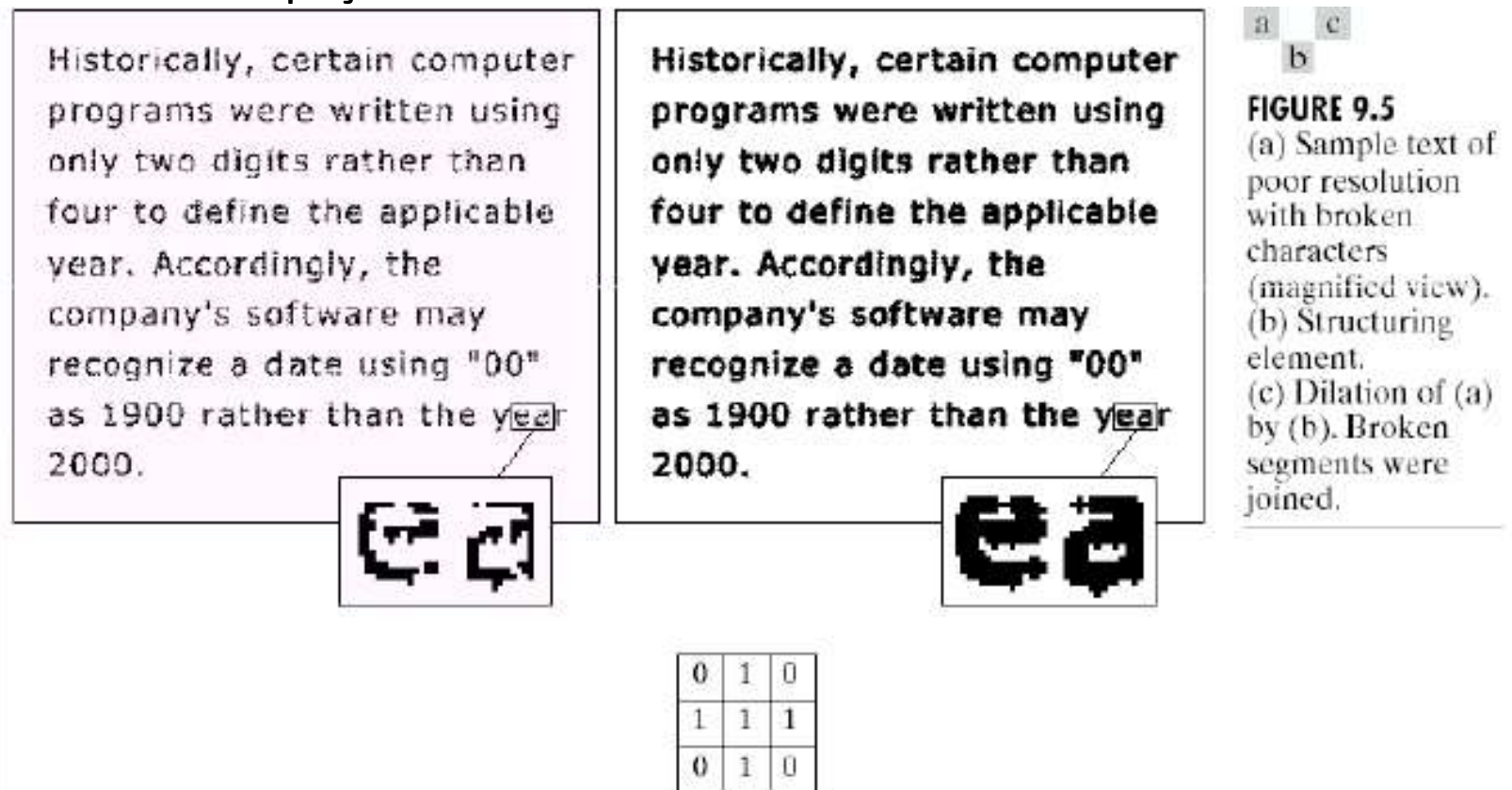
Operadores Morfológicos – Dilatação

- Efeitos da dilatação:
 - Aumentar partículas
 - Preencher buracos
 - Conectar componentes próximos



Operadores Morfológicos – Dilatação

- Aplicação:
 - Preenchimento de espaços



Considerações sobre Erosão e Dilatação

- A **Dilatação** expande uma imagem e a **Erosão** reduz
- A **Erosão** não é o inverso da **Dilatação**
- **Erosão** e **Dilatação** são operações duais:

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

- O complemento de uma **Erosão** é o mesmo que uma **Dilatação** do complemento da imagem pelo elemento estruturante refletido

Operadores Morfológicos - Erosão

- Aplicação:
 - Remoção de Componentes

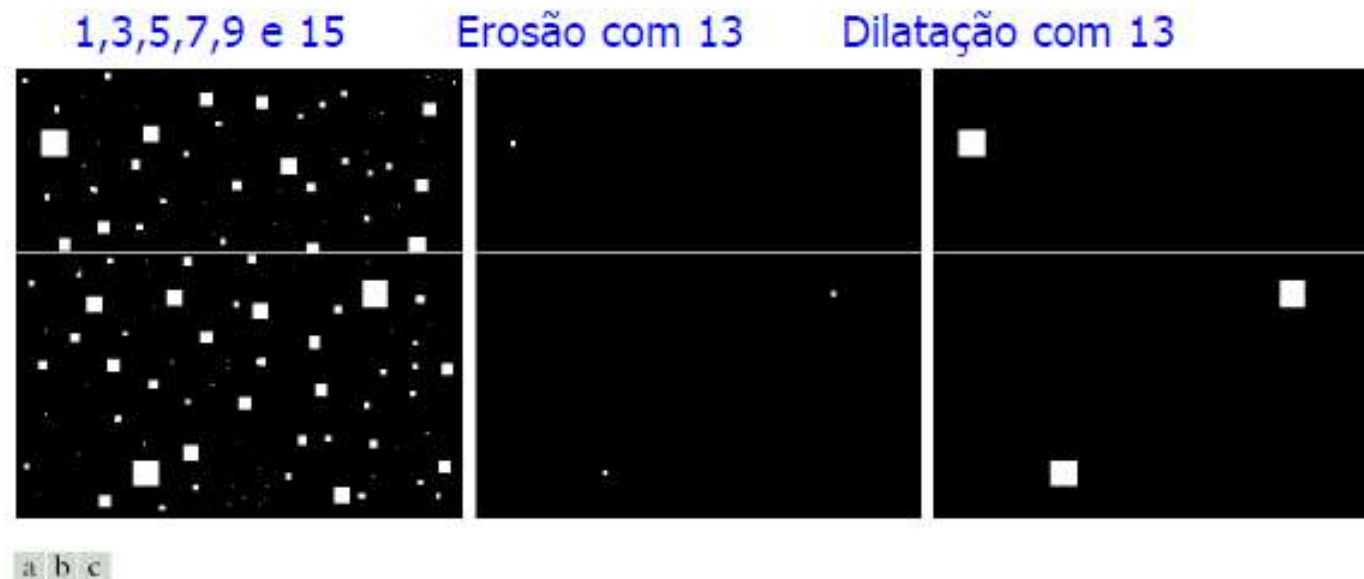


FIGURE 9.7 (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

Combinando Operações Morfológicas

Combinando Operações Morfológicas

- Operações morfológicas mais interessantes podem ser obtidas combinando operações de erosão e dilatação
- As operações compostas mais utilizadas são:
 - Abertura
 - Fechamento

Abertura

Abertura

- A abertura elimina pequenos componentes e suaviza o contorno
- A abertura de uma imagem A pelo elemento estruturante B , representada por $A \circ B$ é definida como:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- Desse modo, a abertura de A por B consiste na erosão de A por B seguida da dilatação do resultado por B .



Abertura

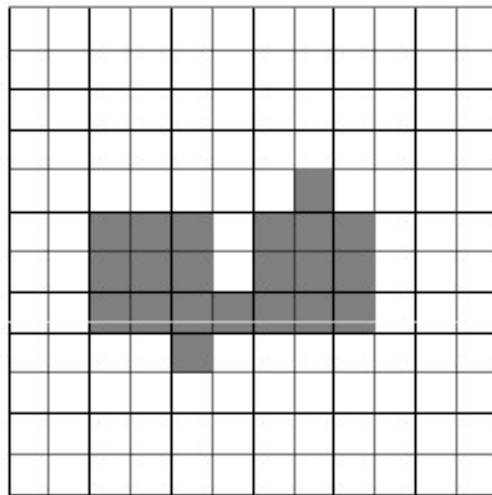
- No OpenCV, a abertura está implementada na função `cv2.morphologyEx`.
- O parâmetro `cv2.MORPH_OPEN` indica a operação de abertura.

```
opening = cv2.morphologyEx(img, cv2.MORPH_OPEN, kernel)
```

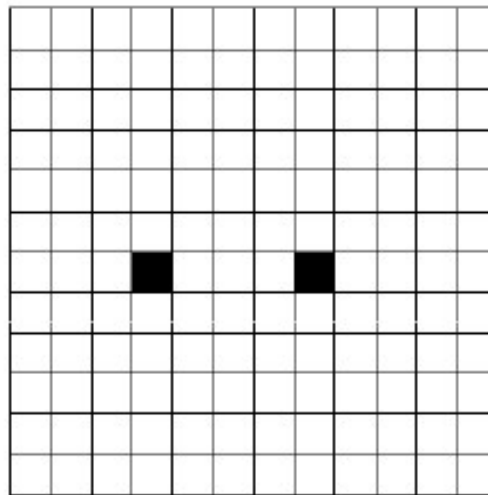
- Efeitos da abertura
 - ▶ Não devolve, de forma geral, o conjunto inicial.
 - ▶ Separa componentes.
 - ▶ Elimina pequenos componentes.
 - ▶ O conjunto aberto é mais regular que o conjunto inicial.
 - ▶ O conjunto aberto é menos rico em detalhes que o conjunto inicial.

Abertura

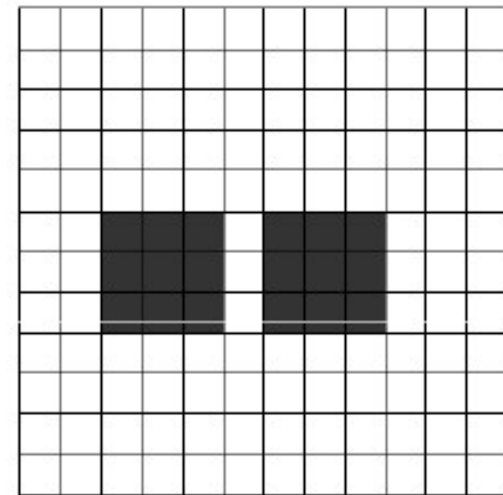
- Exemplo:



F



$F \ominus H$



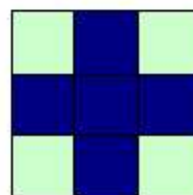
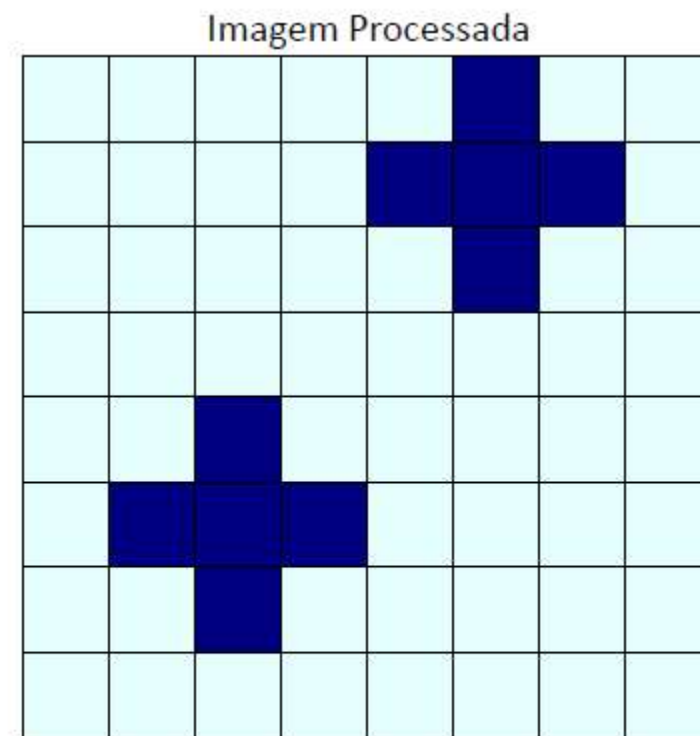
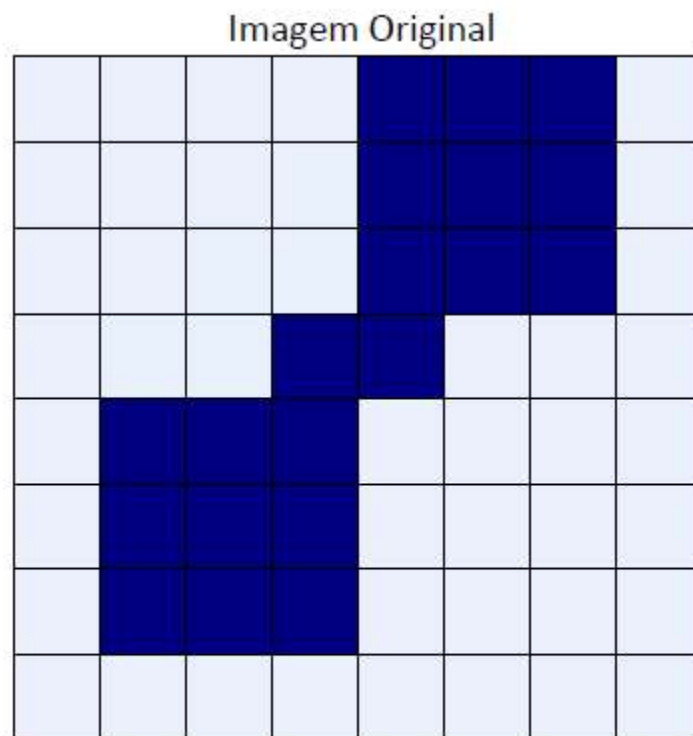
$(F \ominus H) \oplus H$



H, 3x3, origin at the center

Abertura

- Exemplo:



Elementos estruturantes

Abertura

- Considerações:
 - A abertura tende a abrir pequenos vazios ou espaços entre objetos próximos
 - Também é usada para remover ruídos da imagem
 - Pontos pretos aleatórios e isolados podem ser removidos e a forma dos objetos é recuperada pela dilatação sem restaurar o ruído.

Fechamento

Fechamento

- O fechamento fecha pequenos buracos e conecta componentes
- O fechamento de uma imagem **A** pelo elemento estruturante **B**, representado por **$A \bullet B$** é definido como:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- Desse modo, o fechamento de **A** por **B** consiste na dilatação de **A** por **B** seguida da erosão do resultado por **B**



Fechamento

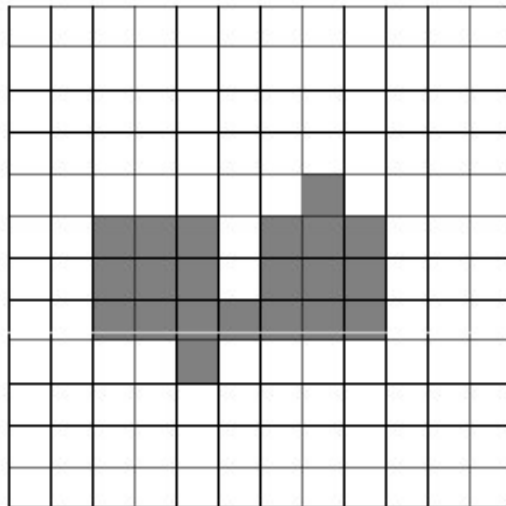
- No OpenCV, o fechamento está implementado na função **cv2.morphologyEx**.
- O parâmetro **cv2.MORPH_CLOSE** indica a operação de abertura.

```
opening = cv2.morphologyEx(img, cv2.MORPH_OPEN, kernel)
```

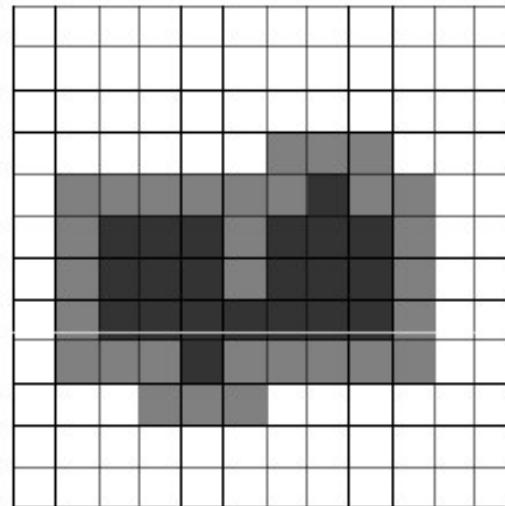
- Efeitos do fechamento:
 - ▶ Preenche buracos no interior dos componentes, inferior em tamanho em relação ao elemento estruturante.
 - ▶ Conecta componentes próximos.
 - ▶ O conjunto fechado é mais regular que o conjunto inicial.
 - ▶ O conjunto fechado é menos rico em detalhes que o conjunto inicial.

Fechamento

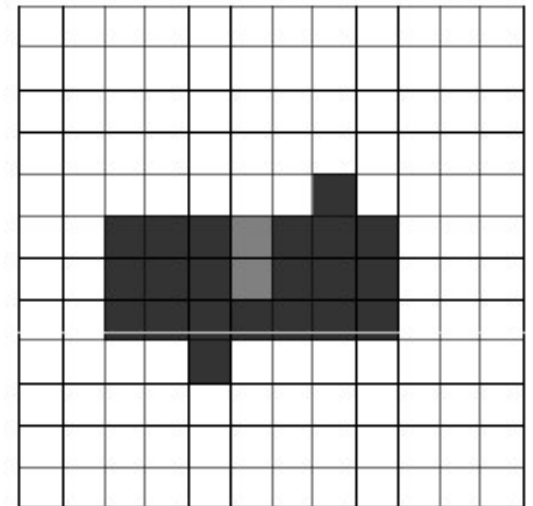
- Exemplo:



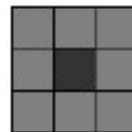
F



$F \oplus H$



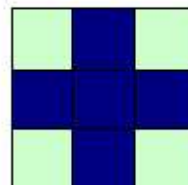
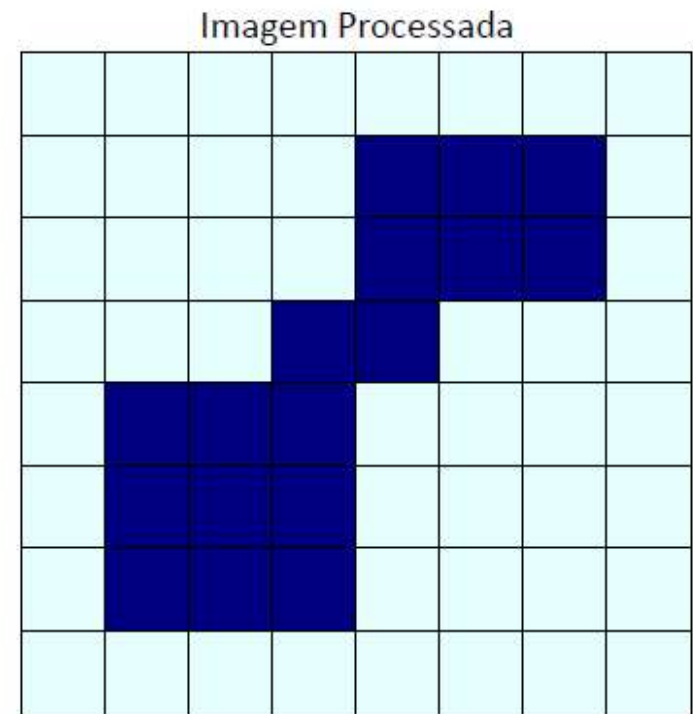
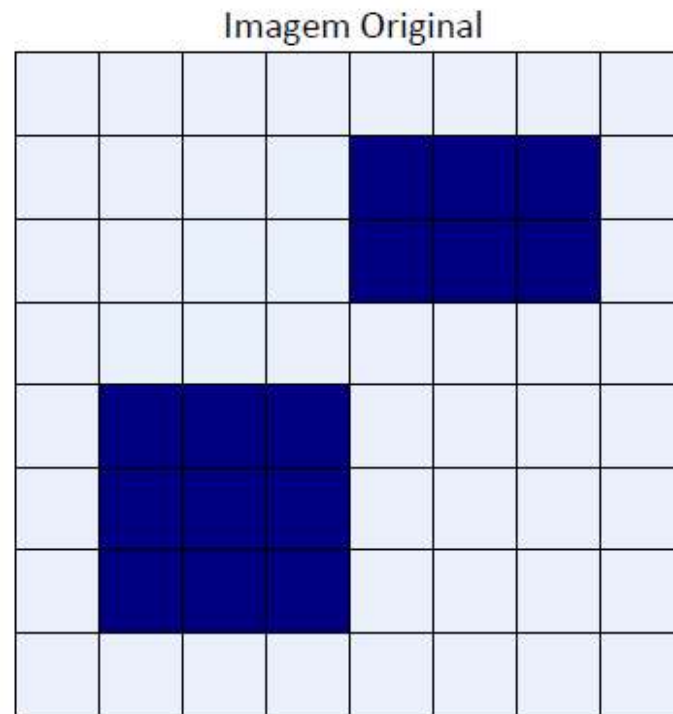
$(F \oplus H) \ominus H$



H, 3x3, origin at the center

Fechamento

- Exemplo:



Elemento Estruturante

Fechamento

- Considerações:

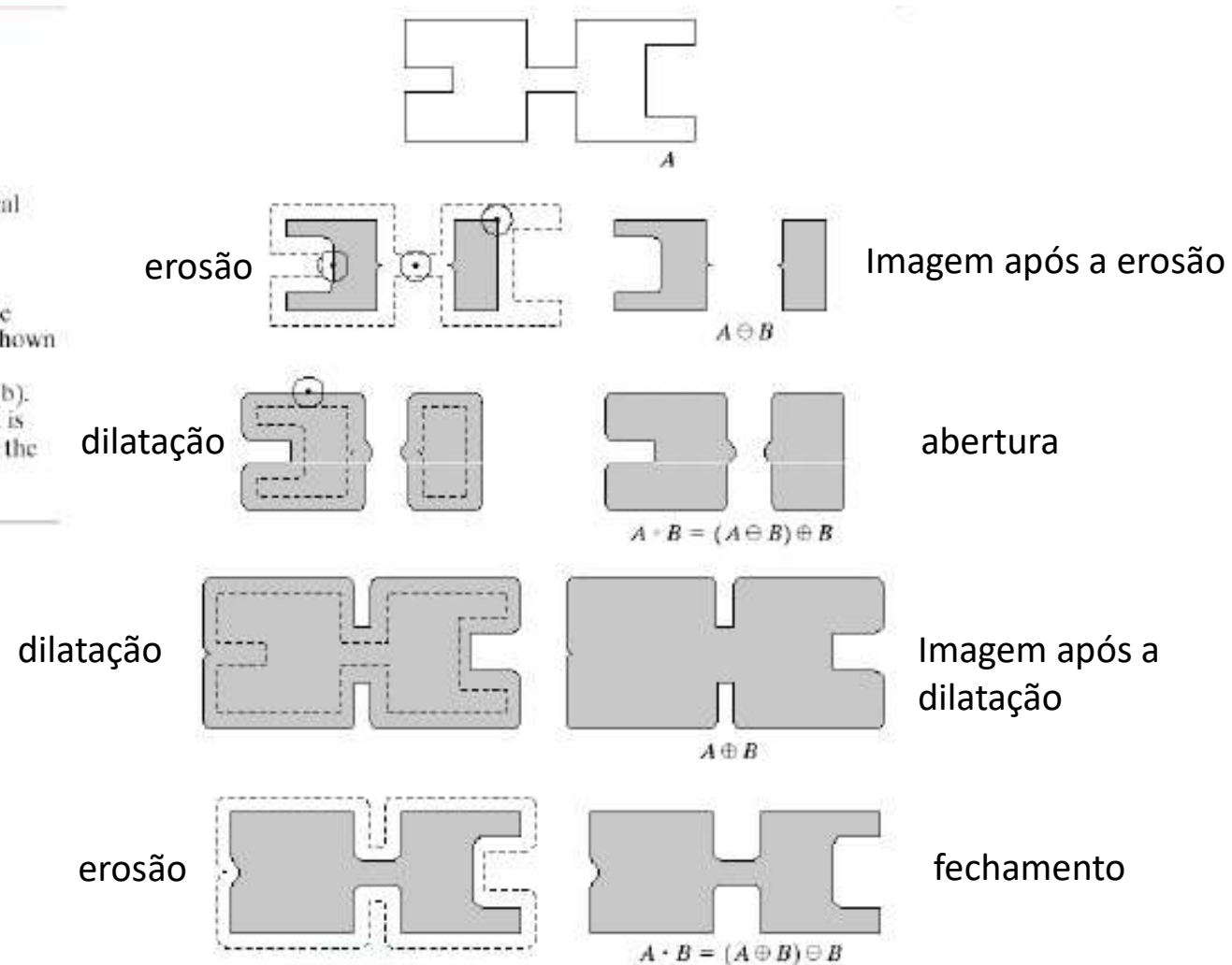
- O fechamento irá preencher ou fechar os vazios
- Pode remover muitos dos pixels brancos de ruído
- A abertura e o fechamento são operações duais relativamente à complementação e reflexão de conjuntos

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

Operadores Morfológicos – Abertura e Fechamento

- Exemplo:

FIGURE 9.10
Morphological opening and closing. The structuring element is the small circle shown in various positions in (b). The dark dot is the center of the structuring element.



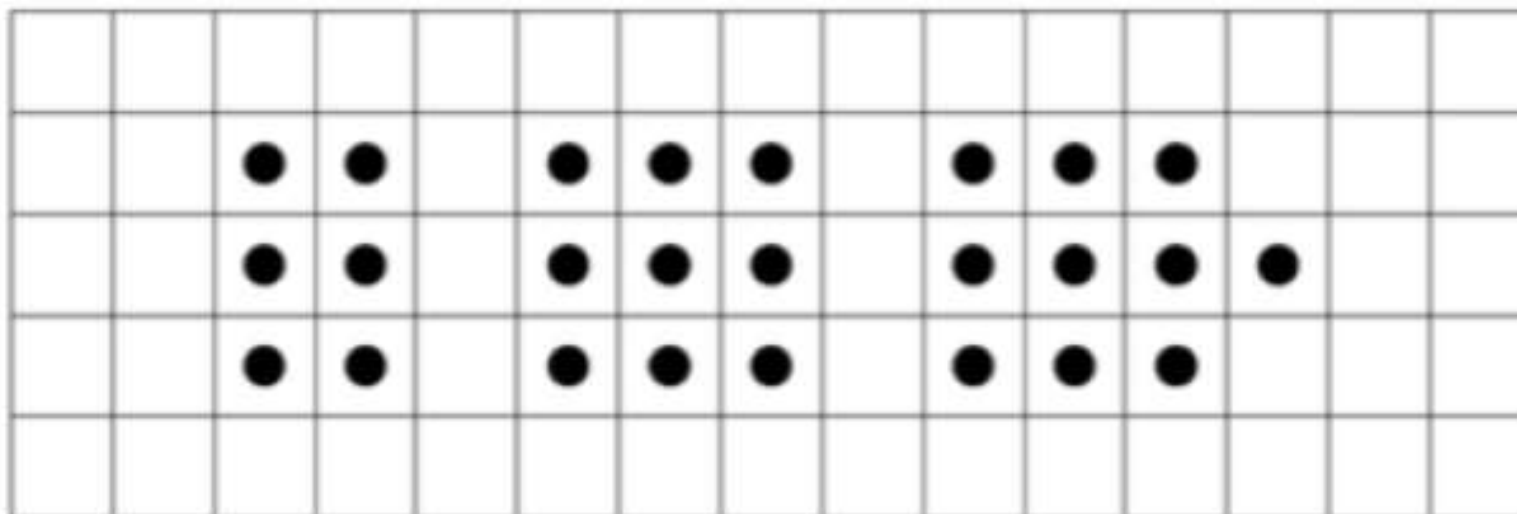
Operadores Morfológicos – Abertura e Fechamento

Aplicação de redução de ruído



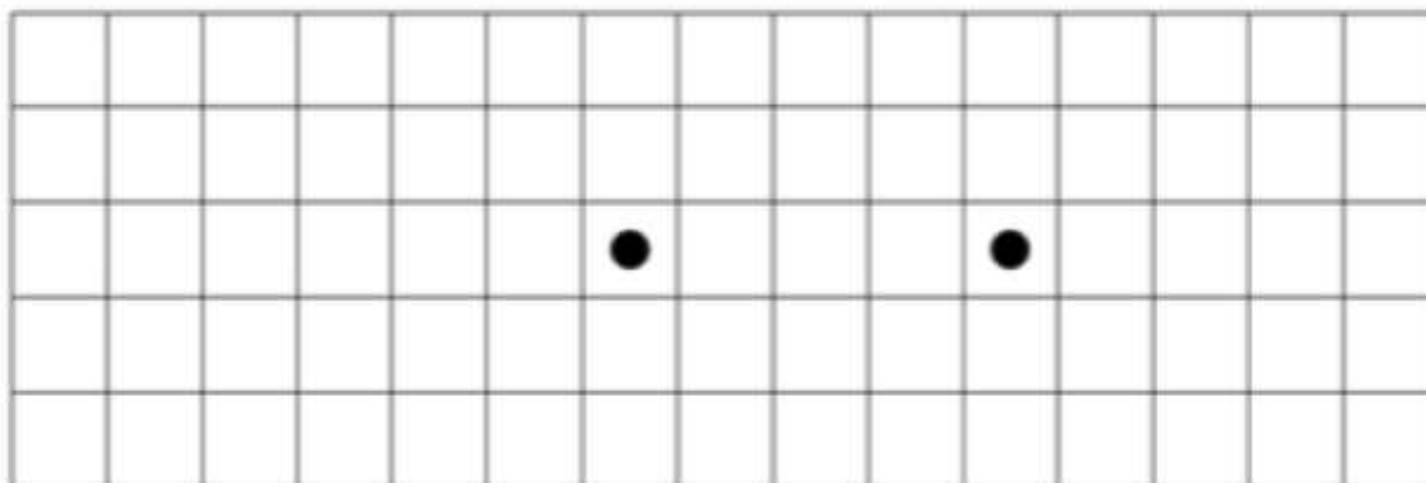
Transformada hit-or-miss

- Técnica utilizada para encontrar padrões em imagens
- Pode ser definida em termos de erosão
- Suponha que o objetivo seja encontrar padrões quadrados de tamanho 3x3 na imagem **A** abaixo



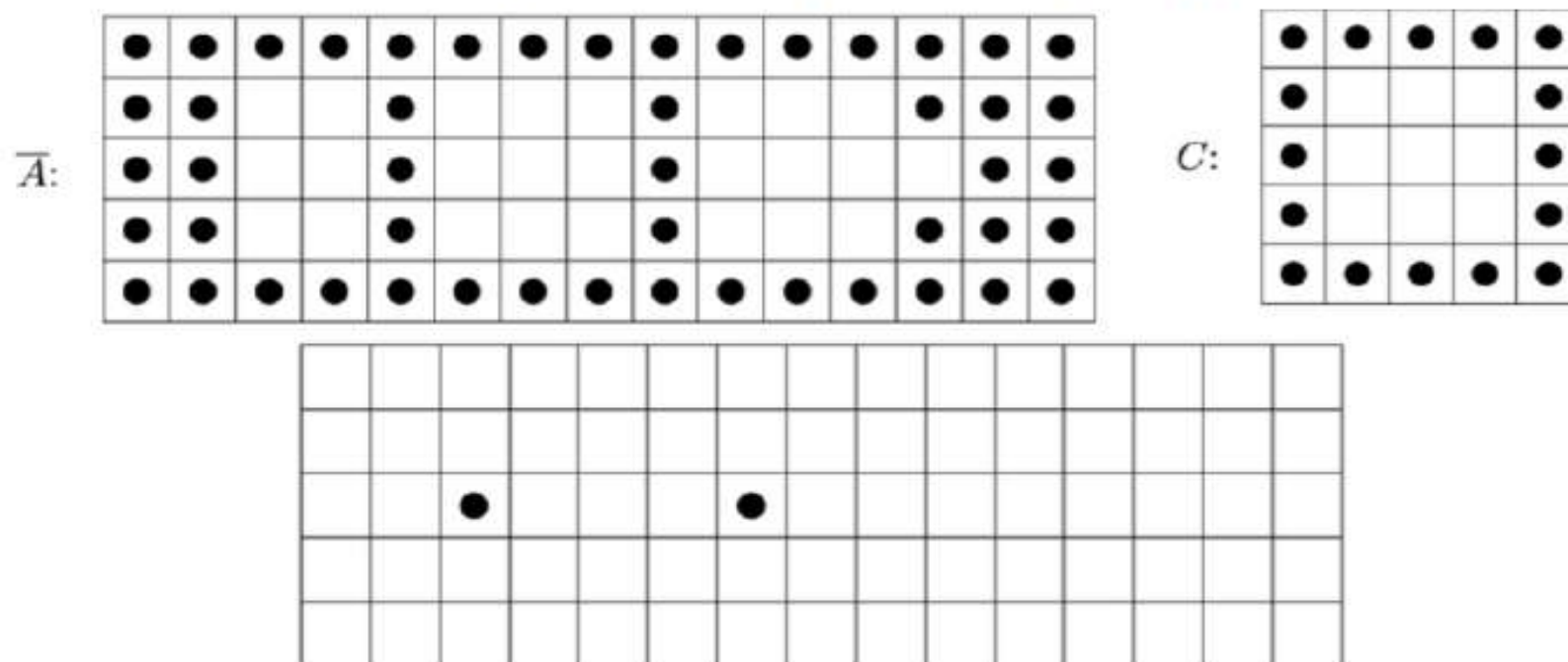
Transformada hit-or-miss

- Primeiramente, realizamos erosão ($A \ominus B$), em que B é o elemento estruturante de tamanho 3x3
- Temos como resultado a imagem a seguir:



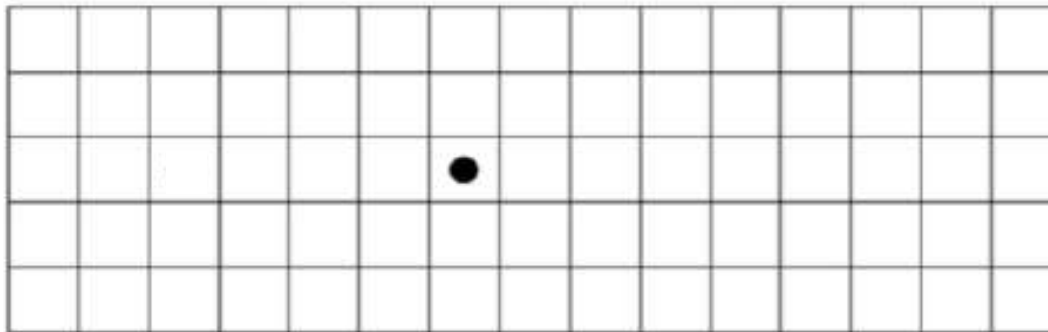
Transformada hit-or-miss

- Fazendo a erosão do complemento de A , com um elemento estruturante C ($\bar{A} \ominus C$) que englobe B , temos o seguinte

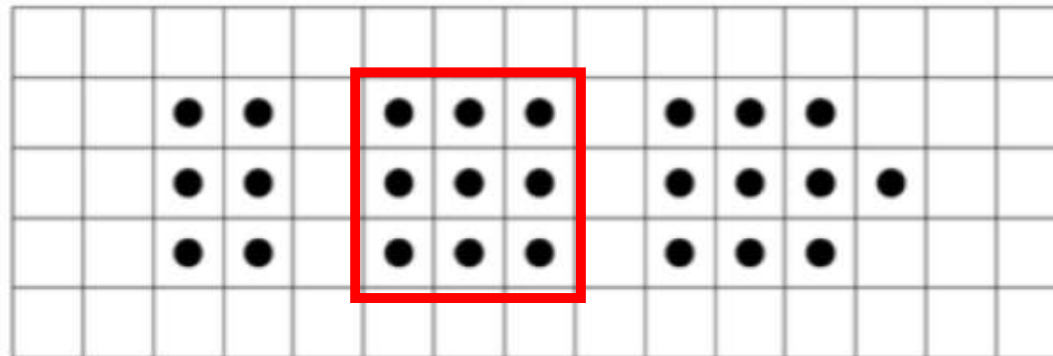


Transformada hit-or-miss

- A interseção entre os resultados das duas erosões produz 1 pixel no centro do quadrado 3×3 .



Ponto do centro de
gravidade do
quadrado 3x3



Transformada hit-or-miss

Generalização

- Quando procuramos um padrão em particular em uma imagem, devemos definir dois elementos estruturantes
 - ▶ B_1 tem a forma do padrão que se busca
 - ▶ B_2 deve englobar B_1
 - ▶ Desta forma, $B = (B_1, B_2)$
- A transformação Hit-or-Miss pode ser escrita como

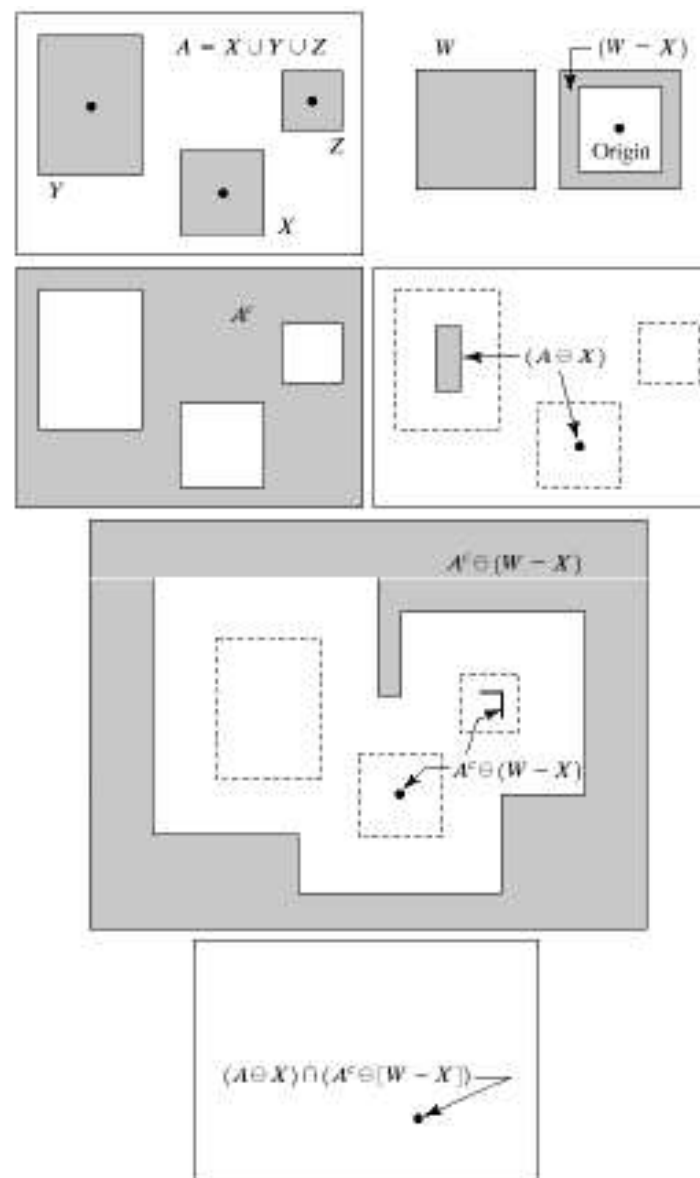
$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (\bar{A} \ominus B_2)$$

Transformada hit-or-miss

Generalização

- Quando procuramos um padrão em particular em uma imagem, devemos definir dois elementos estruturantes
 - B_1 tem a forma do padrão que se busca
 - B_2 deve englobar B_1
- Desta forma, $B = (B_1, B_2)$
- A transformação Hit-or-Miss pode ser escrita como

$$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (\bar{A} \ominus B_2)$$

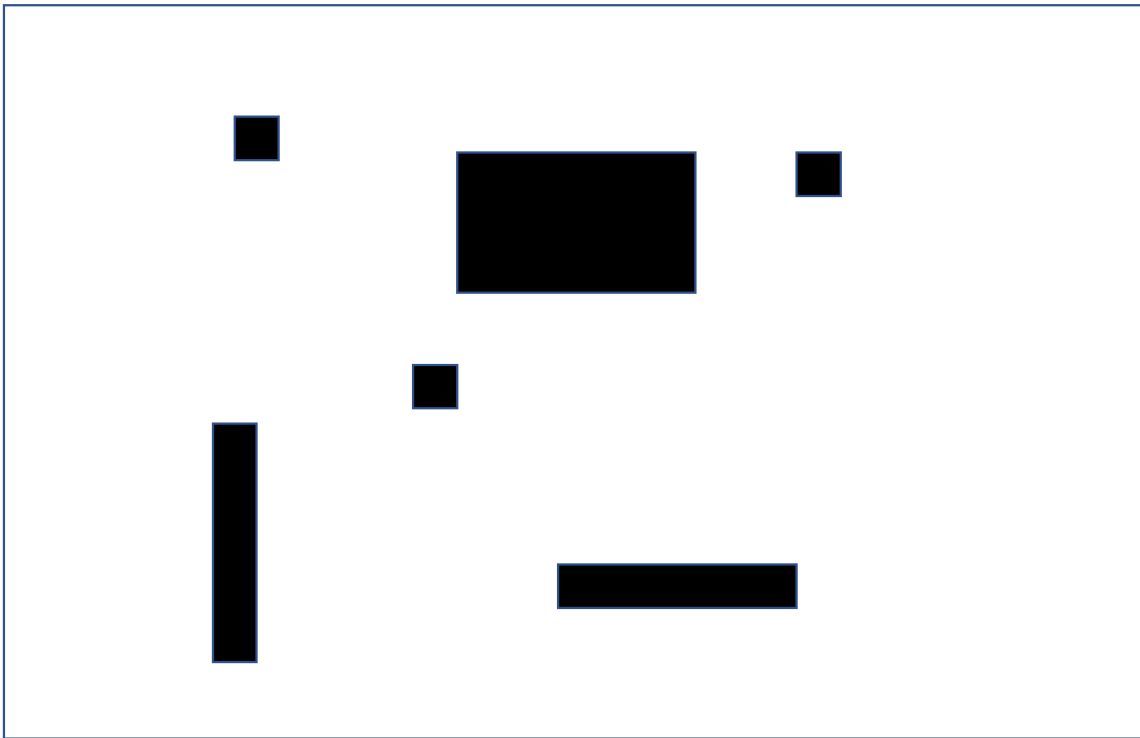


a b
c d
e
f

FIGURE 9.12
 (a) Set A . (b) A window, W , and the local background of X with respect to W , $(W - X)$.
 (c) Complement of A . (d) Erosion of A by X .
 (e) Erosion of \bar{A} by $(W - X)$.
 (f) Intersection of (d) and (e), showing the location of the origin of X , as desired.

Exercício:

- Em uma imagem binária qualquer, busque por formas predefinidas.



Algoritmos Morfológicos Básicos

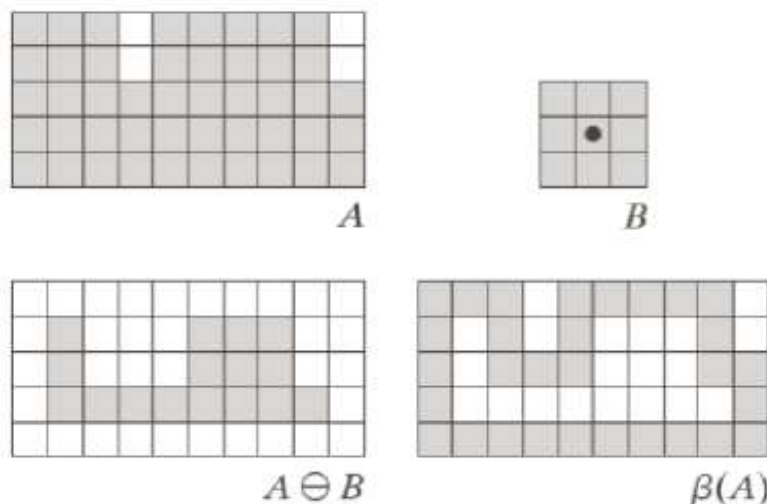
Extração de Fronteiras (Detecção de Contornos)

Extração de Fronteiras (Detecção de Contornos)

- O contorno de uma imagem A , representado por $\beta(A)$, pode ser obtido através da morfologia matemática da seguinte forma:

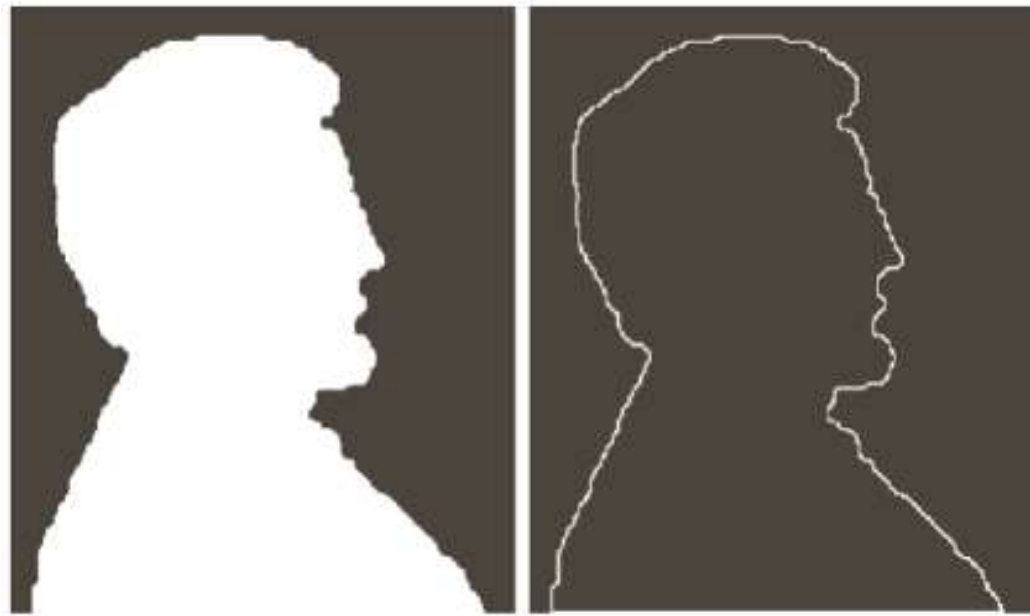
$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

- Em que B é o elemento estruturante (em geral, um quadrado ou cruz 3x3).



Extração de Fronteiras (Detecção de Contornos)

- Exercício:
 - Implemente a detecção de contorno da imagem abaixo. O programa deve receber a imagem da esquerda e retornar a imagem da direita.



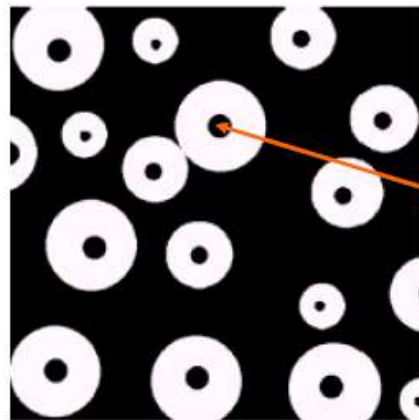
Preenchimento de Buracos

Preenchimento de Buracos

- A partir de um pixel dentro de uma região definida por uma borda, a técnica de “preenchimento de buraco” procura preencher com pixels ligados até o limite da borda

Preenchimento de Buracos

- A partir de um pixel dentro de uma região definida por uma borda, a técnica de “preenchimento de buraco” procura preencher com pixels ligados até o limite da borda

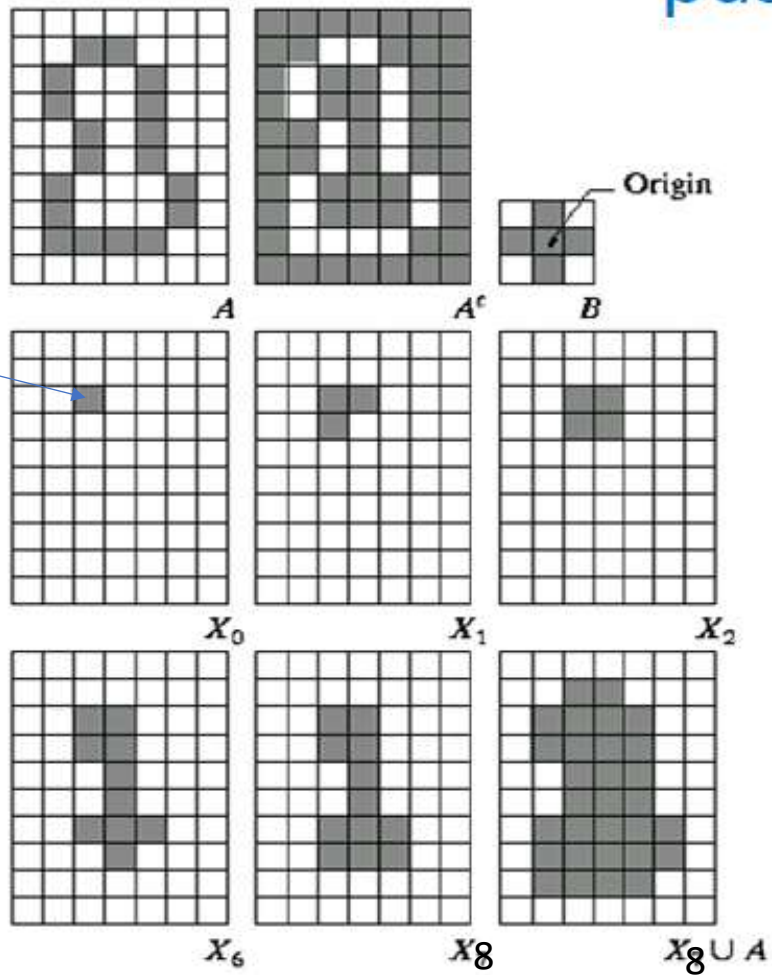


A partir de uma ponto
podemos preencher o
círculo?

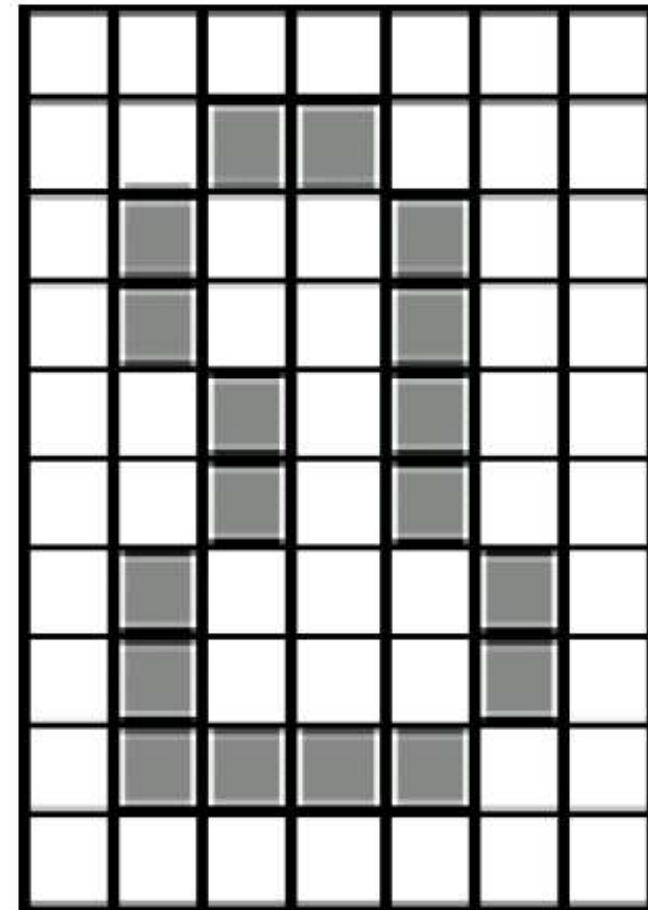
Preenchimento de Buracos

- A equação chave para essa operação é
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, 3, \dots$$
- Onde X_0 é simplesmente um ponto dentro da fronteira, B é o elemento estruturante e A^c é o complemento de A
- Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}
- Por fim, o resultado é unido com a fronteira original

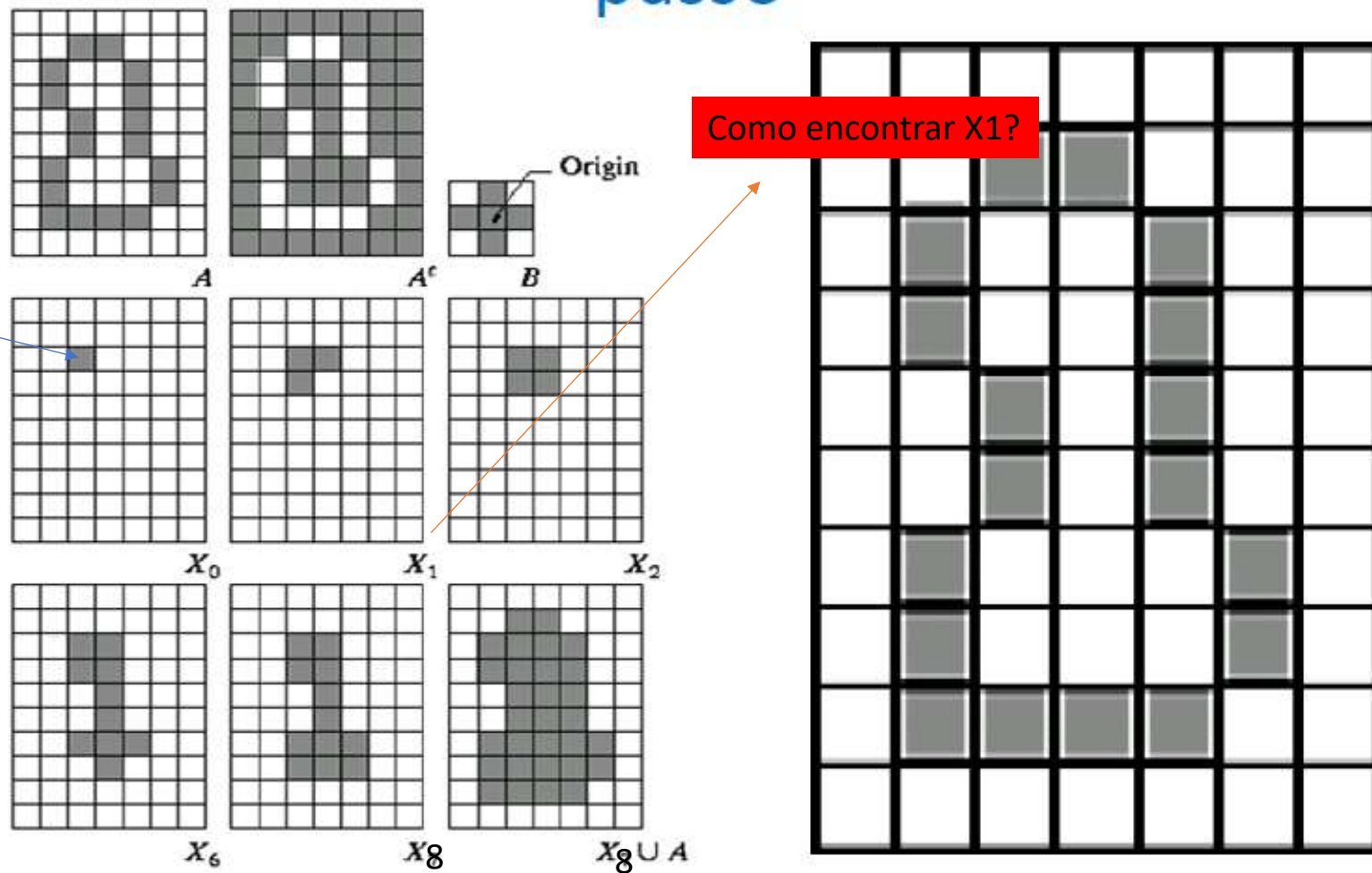
Preenchimento de Região: Passo a passo



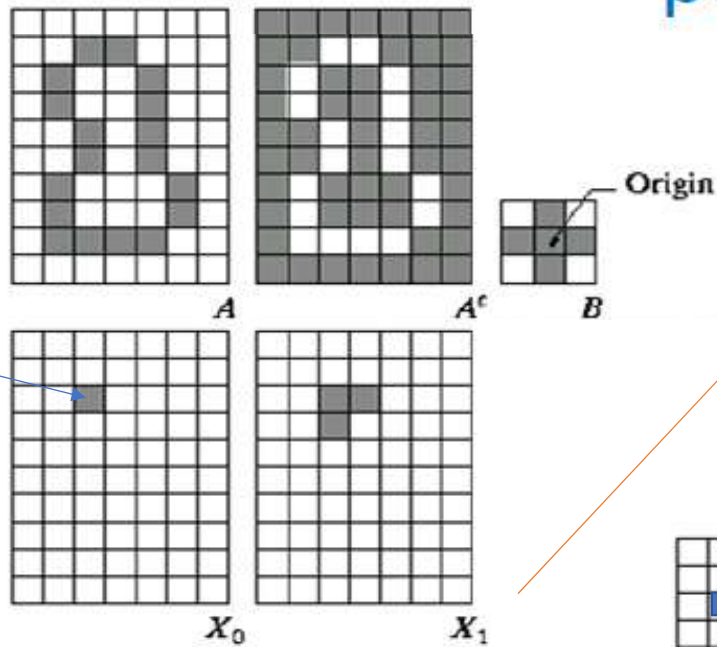
Definindo um ponto no buraco



Preenchimento de Região: Passo a passo

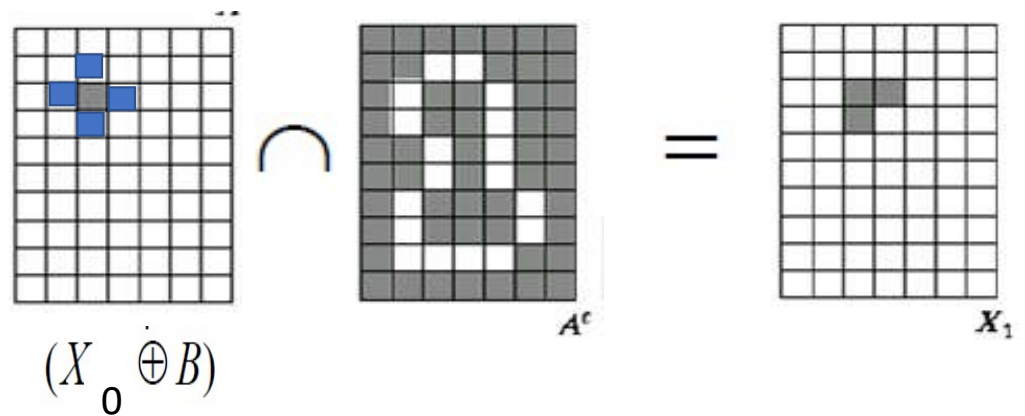


Preenchimento de Região: Passo a passo



Como encontrar X1?

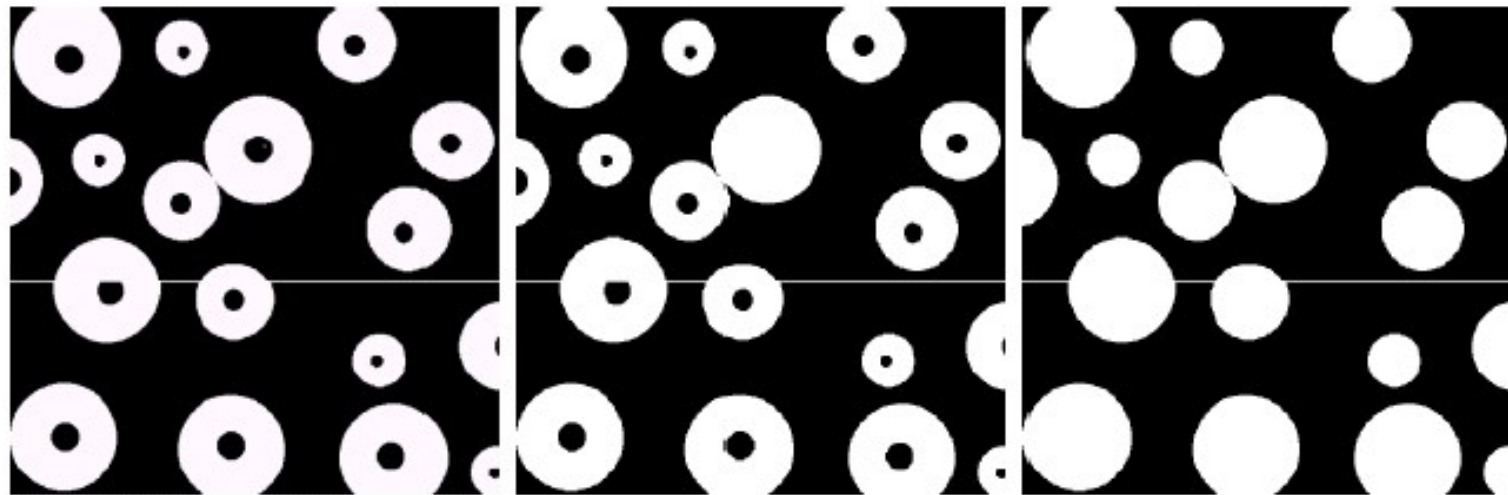
$$X_1 = (X_0 \oplus B) \cap A^c$$



Preenchimento de Buracos

- Para encontrar os outros X_k arranjos matriciais, o processo é repetido para os arranjos matriciais X_2 , X_3 , X_4 , até que não haja mais mudança no arranjo matricial, ou seja, $X_k = X_{k-1}$

Preenchimento de Buracos

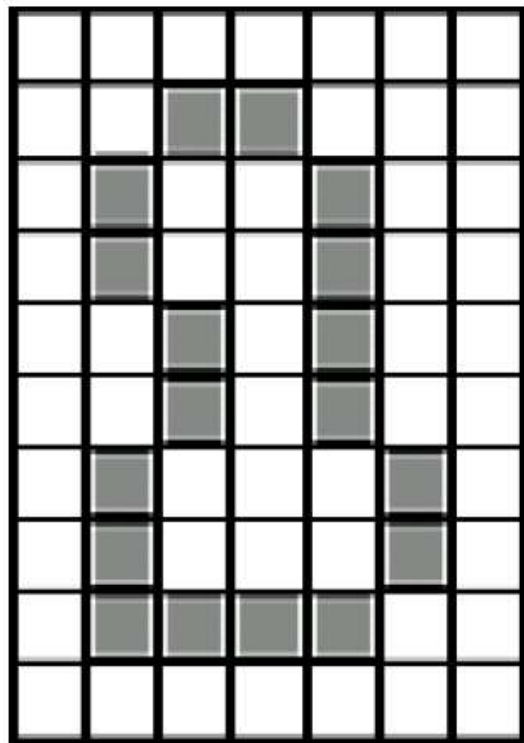


a b c

FIGURE 9.16 (a) Binary image (the white dot inside one of the regions is the starting point for the region-filling algorithm). (b) Result of filling that region (c) Result of filling all regions.

Exercício:

- Crie a imagem abaixo e preencha o seu interior:



Extração de Componentes Conectados

Extração de Componentes Conectados

- Usado quando se deseja encontrar elementos conectados em uma imagem.
- A equação chave para essa operação é
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1, 2, 3, \dots$$
- Onde X_0 é simplesmente um ponto conectado da imagem, B é o elemento estruturante
- Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}

Extração de Componentes Conectados

$$X_0 = p$$

$$X_k = X_{k-1}$$

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k=1,2,3,\dots$$

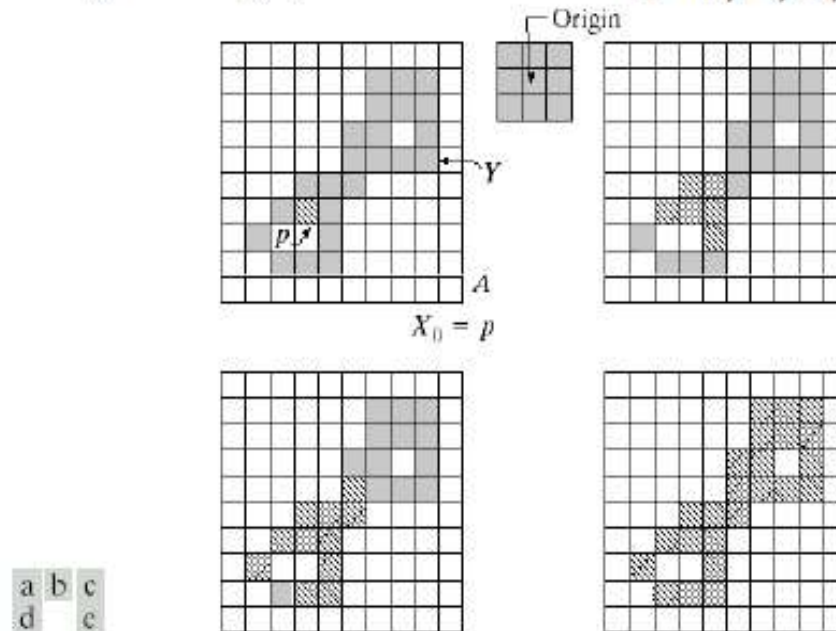


FIGURE 9.17 (a) Set A showing initial point p (all shaded points are valued 1, but are shown different from p to indicate that they have not yet been found by the algorithm). (b) Structuring element. (c) Result of first iterative step. (d) Result of second step. (e) Final result.

Extração de Componentes Conectados

a
b
c d

FIGURE 9.18

(a) X-ray image of chicken filet with bone fragments.

(b) Thresholded image. (c) Image eroded with a 5×5 structuring element of 1's.

(d) Number of pixels in the connected components of (c). (Image courtesy of NTB Elektronische Geraete GmbH, Diepholz, Germany, www.ntbxray.com.)



Connected component	No. of pixels in connected comp
01	11
02	9
03	9
04	39
05	133
06	1
07	1
08	743
09	7
10	11
11	11
12	9
13	9
14	674
15	85

Esqueletização

- O esqueleto de uma imagem é uma versão afinada da mesma
- Equidistante das bordas
- Algumas características são mais fáceis de serem encontradas no esqueleto, como direção, pontos de curvatura, etc.



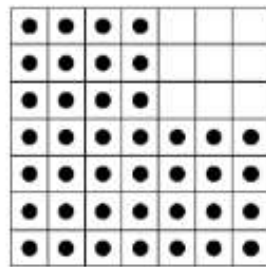
Esqueletização

- Tabela de operações usada na construção do esqueleto.

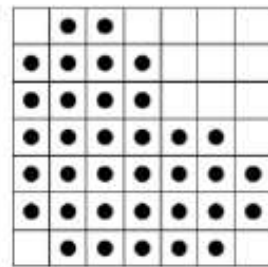
Erosão	Abertura	Diferenças
A	$A \circ B$	$A - (A \circ B)$
$A \ominus B$	$(A \ominus B) \circ B$	$(A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$
$A \ominus 2B$	$(A \ominus 2B) \circ B$	$(A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$
$A \ominus 3B$	$(A \ominus 3B) \circ B$	$(A \ominus 3B) - ((A \ominus 3B) \circ B)$
\vdots	\vdots	\vdots
$A \ominus kB$	$(A \ominus kB) \circ B$	$(A \ominus kB) - ((A \ominus kB) \circ B)$

- Sequência de k erosões com o mesmo elemento estruturante: $A \ominus kB$
- O processo acaba quando $(A \ominus kB) \circ B = \emptyset$
- O esqueleto é a união de todas as diferenças

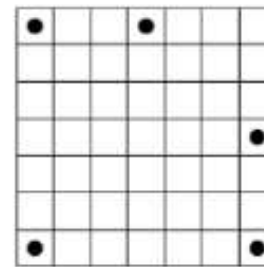
Esqueletização



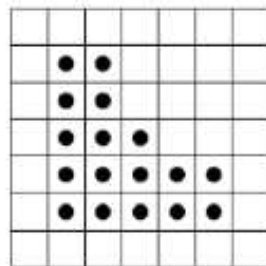
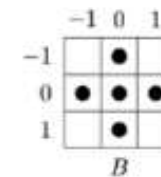
A



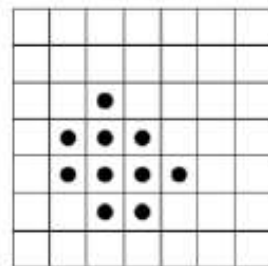
$A \circ B$



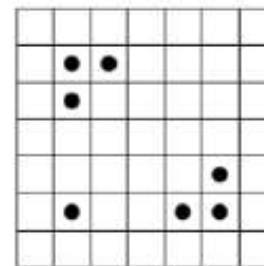
$A - (A \circ B)$



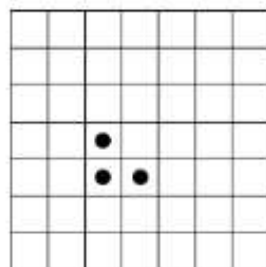
$A \ominus B$



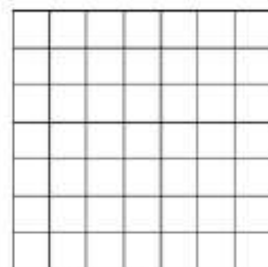
$(A \ominus B) \circ B$



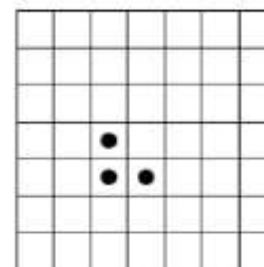
$(A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$



$A \ominus 2B$

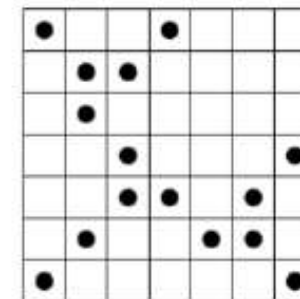


$(A \ominus 2B) \circ B$



$(A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$

Esqueleto



Método de Lantuéjoul

Esqueletização

Exercício

- Usando a tabela de operações apresentada anteriormente, implemente o método de esqueletização de Lantuéjoul.
- Apresente a imagem do esqueleto sobreposta a imagem de entrada.



Morfologia em Níveis de Cinza

Morfologia em Níveis de Cinza

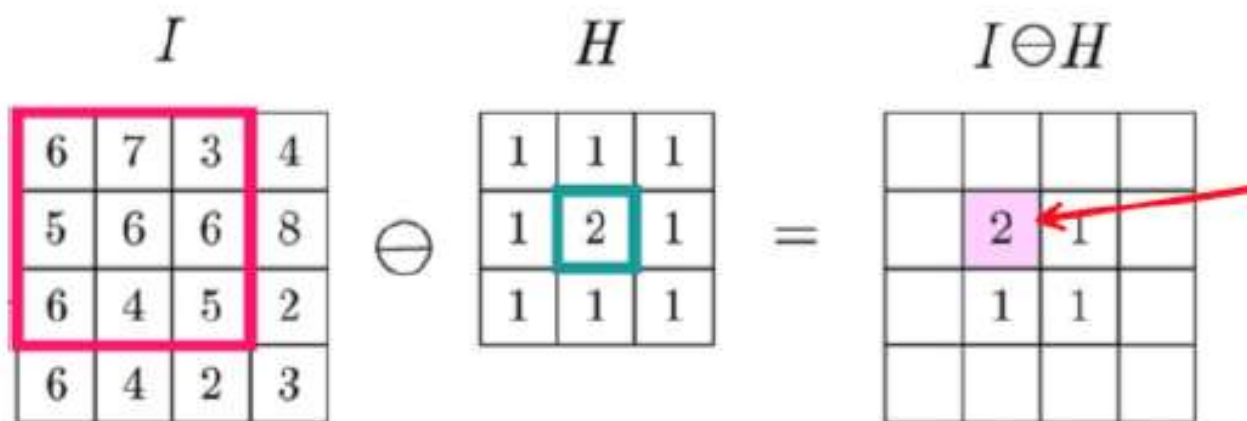
- Operações morfológicas podem ser também aplicadas em imagens em níveis de cinza
- Operadores MAX e MIN
- Para imagens coloridas, a operação deve ser aplicada em cada canal (RGB)
- Para imagens em nível de cinza, o elemento estruturante contém valores inteiros. (Elemento estruturante é uma subimagem - função)

Morfologia em Níveis de Cinza - Erosão

Erosão

- Selecionar o valor mínimo após sobreposição do elemento estruturante

$$(I \ominus H)(v, u) = \min_{(i,j) \in H} \{I(u + i, v + j) - H(i, j)\}$$



Morfologia em Níveis de Cinza - Erosão

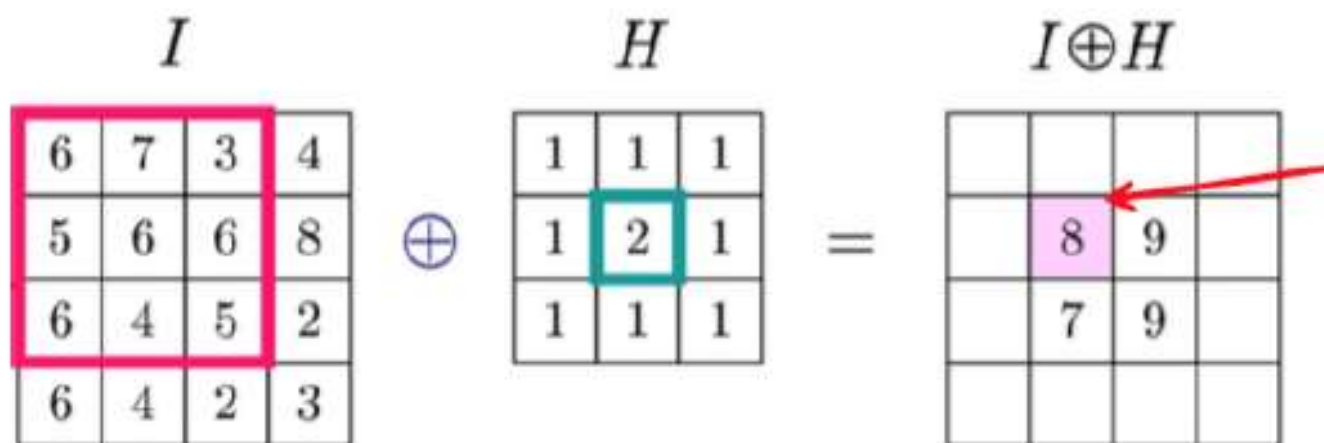
- Efeito geral na imagem:
 - Se todos os valores do elemento estruturante forem positivos, a imagem de saída tende a ser mais escura que a imagem de entrada.
 - O efeito de detalhes claros na imagem de entrada que forem menor em "área" que o elemento estruturante é reduzido, sendo que o grau dessa redução é determinado pelos valores dos níveis de cinza em torno do detalhe claro e pela forma e valores de amplitude do próprio elemento estruturante.

Morfologia em Níveis de Cinza - Dilatação

Dilatação

- Selecionar o valor máximo após sobreposição do elemento estruturante

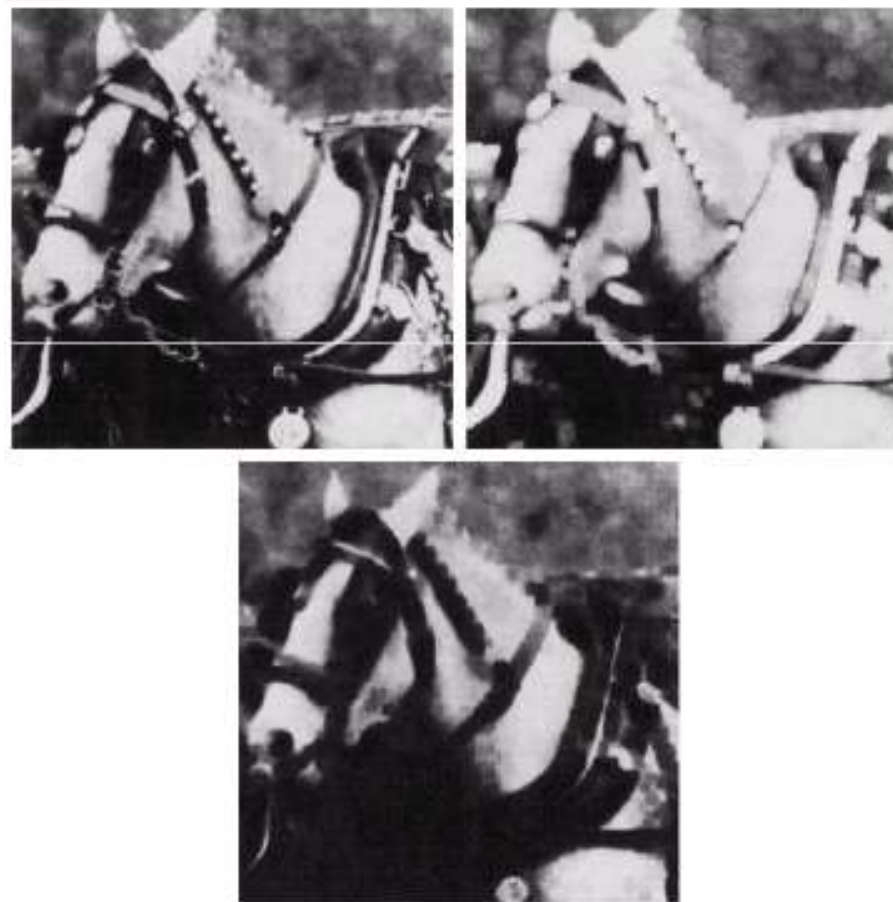
$$(I \oplus H)(v, u) = \max_{(i,j) \in H} \{I(u + i, v + j) + H(i, j)\}$$



Morfologia em Níveis de Cinza - Dilatação

- A operação max substitui as somas da convolução e a adição os produtos da convolução
- Efeito geral na imagem:
 - Se todos os valores do elemento estruturante forem positivos, a imagem resultante tende a ser mais clara que a de entrada.
 - Detalhes escuros são reduzidos ou eliminados, dependendo de como seus valores e formatos estejam relacionados com o elemento estruturante usado para a dilatação

Dilatação e Erosão em Níveis de Cinza



a b
c

FIGURE 9.29

(a) Original image. (b) Result of dilation. (c) Result of erosion.

(Courtesy of Mr. A. Morris, Leica Cambridge, Ltd.)