

Trabajo de Fin de Grado en Física

Introducción a la holografía digital en eje

Septiembre 2023

Alumna: María Victoria Gómez Bifante

Tutor (1): Genaro Saavedra Tortosa
Tutor (2): Juan Carlos Barreiro Hervás

Resumen

La holografía es una técnica de formación de imágenes tridimensionales que permite reconstruir el campo electromagnético transmitido por un objeto a partir de registrar la intensidad de una interferencia. Sin embargo, en la técnica convencional, existe una pérdida de información al recrear la imagen del objeto en ciertas configuraciones dado que existe una superposición entre las componentes que forman el patrón de intensidad. Ante la necesidad de solucionar las limitaciones de la técnica clásica y de extender así su funcionalidad a todos los tipos de configuración, nace el concepto de holografía digital. En este Trabajo de Fin de Grado se ha realizado un estudio teórico de la técnica holográfica, en particular, se ha verificado la solidez del modelo teórico de la holografía digital en eje. En primer lugar, se ha expuesto el mecanismo completo de la holografía clásica para explicar así el efecto de la imagen gemela y el solapamiento entre las componentes de la irradiancia en configuraciones en eje. A continuación, se ha presentado la técnica holográfica digital y se ha desarrollado el procedimiento necesario tanto para eliminar el efecto de la imagen gemela como para dar solución a la problemática de la superposición entre las componentes de la intensidad. Por último, se ha llevado a cabo la simulación digital del mecanismo completo de la holografía en eje para recrear la imagen de dos objetos puros de fase que son invisibles con las técnicas de imagen convencionales.

Abstract

Holography is a three-dimensional imaging technique that allows the reconstruction of the electromagnetic field transmitted by an object after recording the intensity of an interference. However, there is a loss of information when the image is reconstructed in some setups because there is an overlap between the components that form the intensity pattern. Digital holography is created to solve the problem of overlapping and to extend its functionality to all configurations. In this bachelor's project a study of the holographic technique, in particular, the solidity of the theoretical model of on-axis digital holography is verified. First, the complete mechanism of classical holography has been exposed. The reason of this is to explain the twin image effect and expose the problem of overlap between the irradiance components in on-axis setups. Next, the digital holographic technique has been presented and has been developed to eliminate the twin image effect and to solve the problem of overlapping between the intensity components. To finish, the on-axis digital holography mechanism has been simulated to recreate the image of two pure phase objects that are invisible with conventional imaging technique.

Índice

1. Introducción	3
2. Holografía clásica	4
3. Holografía digital	12
4. Verificación de la técnica	19
5. Conclusiones	25
Referencias	27

1. Introducción

La técnica holográfica es un proceso que permite almacenar la información sobre la distribución del campo electromagnético resultante de una interferencia, para posteriormente reconstruir a partir de ella, la distribución del campo transmitido por un objeto concreto. Tras recrear el campo luminoso que emerge del mismo, el observador puede visualizar la imagen tridimensional del objeto.

A diferencia de las técnicas convencionales de formación de imágenes que únicamente permiten extraer la amplitud de la distribución del campo emitido por el objeto, como es el caso de la fotografía, la holografía permite obtener tanto la amplitud como fase. Dicha información se puede almacenar mediante la interferencia entre una onda emergente del objeto con otra onda utilizada de referencia, y a partir de ella, se puede extraer la amplitud y la fase de la onda transmitida por el objeto. Dado que esta amplitud y esta fase se replican exactamente como si emergieran del propio objeto, otorgan tridimensionalidad a la imagen.

El concepto de la holografía surge con las pioneras investigaciones de Dennis Gabor [1] en el año 1948. Su primer montaje, conocido como configuración en eje, resultó sufrir una pérdida de información al registrar el patrón de intensidad de la interferencia. Posteriormente, en el año 1964, Emmett Leith y Juris Upatnieks [2] fueron quienes idearon un nuevo montaje conocido como configuración fuera de eje. En ambos casos se requería de una fuente espacialmente coherente y monocromática para desarrollarse experimentalmente. Por ese motivo no fue hasta la aparición del láser, en la década de los 60, que pudieron llevarse a la práctica.

Del refinamiento de las técnicas holográficas convencionales y ante la necesidad de solucionar la pérdida de información en las configuraciones en eje, nace el concepto actual de la holografía digital. Dicha evolución es el resultado de aplicar sobre el concepto clásico de holografía, tanto los métodos actuales para el tratamiento de datos como las técnicas computacionales más avanzadas. A diferencia de la técnica holográfica convencional, la holografía digital permite extraer la información de la distribución del campo electromagnético emergente del objeto de una manera más directa. Por lo que las diferenciamos en el método de registro, en la capacidad de modificar, de extraer y también de reconstruir, la información de la interferencia. Además, esta técnica permite tomar medidas cuantitativas como la profundidad del objeto, dado que los mapas reconstruidos están digitalizados. Por lo tanto, la holografía digital es un mecanismo válido para todos los tipos de configuración ya que no tiene las restricciones que sí presentaba la holografía clásica.

En primer lugar, clasificaremos el mecanismo de la holografía en la etapa de registro y en la etapa de reconstrucción. La etapa de registro corresponde a la captura del patrón de intensidad de una interferencia, mientras que la etapa de reconstrucción regenera la distribución de amplitud del campo transmitido por el objeto a partir de la intensidad registrada. A continuación, expondremos los fundamentos teóricos de la holografía clásica para posteriormente, registrar e interpretar la información del patrón intensidad para el

caso de una interferencia entre dos ondas planas. Después, detallaremos el proceso para recrear la imagen tridimensional del objeto e interpretaremos todos los campos luminosos que se reconstruyen junto a ella y por ende, explicaremos el efecto visual de la imagen gemela. Dado que en los montajes en eje existe un solapamiento entre las componentes del patrón de intensidad, estas se reconstruirán ópticamente sobre el mismo eje y por consiguiente, perderemos información al recrear la imagen del objeto.

Después, expondremos los fundamentos de la holografía digital y explicaremos tanto el proceso de registro como los cálculos digitales empleados para generar el campo luminoso tridimensional emergente del objeto. Además, utilizaremos la holografía digital para suprimir la reconstrucción de las componentes que puedan perturbar la visualización de la imagen, de modo que también eliminaremos el efecto de la imagen gemela. Por lo tanto, la técnica holográfica digital permite mejorar la calidad de la imagen reconstruida.

Desde la holografía digital, presentaremos la técnica de filtrado y el método de variación de fase como los procesos más comunes para recrear la imagen del objeto sin perturbaciones visuales. Por un lado, transformaremos el patrón de intensidad al espacio de Fourier con el objetivo de separar sus componentes inicialmente solapadas para después, volver al dominio espacial y filtrar la componente que queremos reconstruir. Por otro lado, recrearemos únicamente la imagen tridimensional del objeto a partir de estudiar la dependencia del patrón de intensidad con la variación de fase de la onda transmitida por el objeto.

Para finalizar nuestro estudio, verificaremos la eficacia del método de variación de fase en configuraciones en eje a partir de simular digitalmente el proceso para reconstruir la distribución de amplitud del campo emitido por un objeto. Concretamente, simularemos la reconstrucción de dos objetos de fase: uno de fase constante sobre un fondo uniforme y otro con variación lineal de fase desde el centro hasta el borde.

2. Holografía clásica

La holografía clásica es una técnica de formación de imágenes que consiste en reconstruir la distribución de onda electromagnética asociada al campo luminoso emergente de un objeto a partir del registro de una interferencia. Al añadir una onda como referencia y provocar su incidencia con otra de las mismas características pero transmitida por el objeto sobre una placa fotográfica, llamada holograma analógico, se consigue grabar la información cifrada de la interacción en amplitud y en fase.

Un holograma analógico¹ es un elemento óptico de transmitancia en amplitud definida $t(\vec{x})$ que permite capturar o grabar el patrón de intensidad de una interferencia entre dos frentes de onda. El patrón de intensidad almacenado en la $t(\vec{x})$ del holograma, contiene la información codificada de la interferencia en un instante determinado. Al descodificarla, se puede extraer tanto la amplitud como la fase del frente de ondas que se quiere reconstruir. Si después, se ilumina $t(\vec{x})$ con una fuente de características similares a la onda usada como referencia, se puede reconstruir el campo luminoso transmitido por el objeto. Por lo

¹En esta sección del trabajo, se hará referencia al holograma analógico únicamente como holograma.

tanto, es posible recrear la imagen tridimensional del objeto a partir de grabar el patrón de intensidades en la $t(\vec{x})$ del holograma. Es conveniente destacar que existen diferentes tipos de hologramas y montajes para capturar la interferencia en $t(\vec{x})$, pero centraremos nuestro estudio en el registro del holograma por transmisión².

Para entender el concepto de la holografía [4], comenzamos clasificando el proceso en la etapa de registro y en la etapa de reconstrucción según se almacene o se analice la información capturada en el holograma.

Veamos con más detalle la etapa de registro. Definimos el eje OZ como el eje óptico transversal al plano XY . A una distancia axial z del origen de OZ , registramos un holograma descrito en $\vec{x} = (x, y)$. De la misma manera, colocamos el objeto en $z = 0$ desplazado transversalmente e iluminado con una onda plana propagante en un ángulo θ del eje OZ respecto al plano XZ . Después, iluminamos el sistema con una fuente de luz \mathbb{F} de la que emerge una onda plana con longitud de onda definida λ coherente con el haz objeto. En la práctica, ambos haces provienen en realidad de la misma fuente \mathbb{F} . Así, provocamos la interacción del frente de ondas de \mathbb{F} con otro de la misma procedencia pero transmitido por el objeto. Si guiamos la superposición entre estos dos frentes de onda coherentes para que ocurra sobre el plano del holograma³, transferiremos la información de la interacción como intensidad a su transmitancia $t(\vec{x})$. Entendemos como intensidad o irradiancia al flujo del campo electromagnético por unidad de superficie del plano transversal sobre el que se describe. Por tanto, $t(\vec{x})$ contendrá la información codificada, en amplitud y en fase, de las distribuciones de onda capturadas sobre el plano del holograma.

A cada uno de los frentes de onda partícipes en la interferencia, le asignamos una distribución de amplitud compleja del campo electromagnético. Previamente a definir las, buscamos que tengan una representación en todo el dominio espacial y para ello, limitamos su difracción⁴ a distancias cercanas al eje óptico OZ con la aproximación paraxial. De esta manera, la distancia axial desde un punto inicial $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ del objeto hasta un punto $\vec{r} = (x, y, z)$ sobre el holograma, será mucho mayor a la suma cuadrática de las distancias transversales, es decir, las distribuciones de onda deben verificar $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ll (z - z_0)^2$. Simplificaremos también, el comportamiento de la propagación de las distribuciones de onda con la teoría escalar de la difracción, ya que dicha simplificación nos permite omitir el carácter vectorial de las ondas electromagnéticas cuando la distancia de observación es lo suficientemente grande. Podemos encontrar la demostración de ambas consideraciones en [5]. Además, se trata de un sistema lineal por lo que la propagación libre de la luz es invariante ante desplazamientos transversales en el espacio libre. Por lo que si interpretamos la integral de la difracción como la convolución⁵

²Los hologramas por transmisión capturan el patrón de intensidad de una interferencia cuando la interacción entre ondas cae directamente sobre el lado de emulsión de la placa fotográfica. Se puede ampliar su descripción junto con la de otros tipos de hologramas en [3].

³El plano del holograma es el plano bidimensional sobre el que se coloca el holograma. Dicho plano se sitúa a una distancia axial z sobre el eje óptico OZ y se describe espacialmente en \vec{x} .

⁴En este caso, la difracción se entiende como la propagación de la distribución de amplitud compleja del campo electromagnético. Se utilizarán los conceptos de propagación y difracción de forma indistinta.

⁵El operador convolución \otimes se define como $f(\vec{x}) \otimes g(\vec{x}) = \int \int f(\vec{\alpha})g(\vec{x} - \vec{\alpha})d^2\vec{\alpha}$. Es el resultado de la superposición de $f(\vec{\alpha})$ sobre una versión de $g(\vec{\alpha})$ trasladada e invertida $g(\vec{x} - \vec{\alpha})$, de modo que transforma

entre una distribución de amplitud del campo transversal en la posición inicial y la respuesta impulsional $h(\vec{x}, z)$ asociada a la propagación libre, podemos regenerar el mismo campo a una distancia axial z sobre el eje OZ . Dicho de otro modo, podemos reconstruir la distribución de amplitud del campo difractado en todos y cada uno de los planos transversales XY a lo largo del eje OZ . A su vez, entendemos como respuesta impulsional⁶ a la función $h(\vec{x}, z)$ que representa la distribución del campo electromagnético en un plano XY situado sobre el eje óptico a una distancia z de una fuente puntual sobre el eje óptico.

Comenzamos definiendo al frente de ondas difractado por el objeto desde $z = 0$ hasta z sobre el plano del holograma como la distribución de amplitud compleja $U_O(\vec{x}, z)$ de intensidad $I_O(\vec{x}, z) = |U_O(\vec{x}, z)|^2$. Tal y como hemos visto, determinamos la distribución de onda $U_O(\vec{x}, z)$ aplicando la convolución entre la distribución de amplitud del campo inicial y la respuesta impulsional $h(\vec{x}, z)$. Si concretamos la respuesta impulsional para $h(\vec{x}, z) = e^{i\frac{\pi}{2\lambda}|\vec{x}|^2}$, la descripción de $U_O(\vec{x}, z)$ en el plano de la interferencia es

$$U_O(\vec{x}, z) = U_O(\vec{x}, 0) \otimes e^{i\frac{\pi|\vec{x}|^2}{2\lambda}}, \quad (1)$$

donde $U_O(\vec{x}, 0)$ es la distribución de amplitud del campo inicial descrito en el origen de OZ y \otimes representa la operación de convolución.

El frente de onda del objeto se genera al iluminar dicho objeto con una onda plana procedente de la fuente \mathbb{F} . Si suponemos que iluminamos el objeto con una onda plana inclinada un ángulo θ respecto el eje óptico y escogemos los ejes de referencia de forma que la dirección de propagación de esta onda plana sea $\hat{s}_O \equiv (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, podemos factorizar el frente de onda del objeto como

$$U_O(\vec{x}, 0) = A_O(\vec{x}, 0) e^{ikx \sin \theta}, \quad (2)$$

siendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ el número de ondas de la iluminación procedente de \mathbb{F} y $A_O(\vec{x}, 0)$ la transmitancia en amplitud del objeto.

Si propagamos esta distribución de amplitud hasta el plano del holograma, describiremos el frente de onda del objeto como

$$U_O(\vec{x}, z) = A_O(\vec{x}, z) e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}, \quad (3)$$

donde $A_O(\vec{x}, z)$ corresponde al patrón de difracción del objeto a una distancia z respecto al origen de OZ .

A su vez, definimos al frente de ondas plano emergente de \mathbb{F} como la distribución de amplitud compleja $U_R(\vec{x}, z)$ de intensidad constante $I_R(\vec{x}, z) = |U_R(\vec{x}, z)|^2$. Describimos la propagación axial de $U_R(\vec{x}, z)$ con el vector de propagación $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(0, 0, \hat{z})$. Por tanto,

dos funciones bidimensionales en una tercera. Se detalla el producto de la convolución para la óptica paraxial propia de la difracción de Fresnel en [6].

⁶Se puede comprobar en [7] que la propagación libre es invariante ante desplazamientos transversales, de manera que la respuesta impulsional $h(\vec{x}, z)$ queda simplemente desplazada $h(\vec{x} - \vec{x}_0, z - z_0)$.

la distribución de amplitud asociada a la propagación del haz de referencia, en el plano del holograma, viene dada por

$$U_R(\vec{x}, z) = e^{ikz}. \quad (4)$$

Por simplicidad, hemos considerado la amplitud como la unidad, por lo que $I_R(\vec{x}, z) = 1$.

Después de definir las ondas sobre el plano del holograma, representamos su propagación en el espacio libre como haces perpendiculares a las superficies de sus respectivos frentes de onda. Por ello, nos referimos a la propagación de la distribución de amplitud transmitida por el objeto como **haz objeto** y de la misma manera, llamamos **haz de referencia** a la propagación la distribución de amplitud emergente de \mathbb{F} . La interacción entre ambos haces ocurre en el holograma y por ello, la información de la interferencia entre $U_O(\vec{x}, z)$ y $U_R(\vec{x}, z)$ queda almacenada en la transmitancia $t(\vec{x})$ del holograma.

Suponemos que nuestro holograma es una placa fotosensible ideal, por lo que su transmitancia en amplitud registrará la información de la intensidad sin perder información en el revelado, de modo que consideramos $t(\vec{x}) \sim I(\vec{x}, z)$. Como la intensidad es proporcional al módulo al cuadrado de la distribución de amplitud resultante de la superposición $U_O(\vec{x}, z) + U_R(\vec{x}, z)$, tras el registro, la irradiancia de la interferencia queda almacenada en la transmitancia en amplitud como

$$I(\vec{x}, z) = |U_O(\vec{x}, z) + U_R(\vec{x}, z)|^2. \quad (5)$$

Por consiguiente, la forma extendida de la intensidad de la Ec.(5) viene dada por

$$I(\vec{x}, z) = |U_O(\vec{x}, z)|^2 + |U_R(\vec{x}, z)|^2 + U_O(\vec{x}, z)U_R^*(\vec{x}, z) + U_R(\vec{x}, z)U_O^*(\vec{x}, z), \quad (6)$$

cuyo símbolo $*$ representa las distribuciones de amplitud complejas conjugadas $U_R^*(\vec{x}, z)$ y $U_O^*(\vec{x}, z)$ asociadas al haz de referencia y al haz objeto, respectivamente.

Después, sustituimos en la Ec.(6) las definiciones de la Ec.(3) y de la Ec.(4) y obtenemos

$$\begin{aligned} I(\vec{x}, z) = & |A_O(\vec{x}, z)|^2 + 1 + A_O(\vec{x}, z)e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}e^{-ikz} \\ & + A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}e^{ikz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Por un lado, la primera componente representa la intensidad $I_O(\vec{x}, z)$ de la distribución de amplitud del campo emitido por el objeto, mientras que por otro, interpretamos al segundo término como la irradiancia $I_R(\vec{x}, z)$ de la distribución de amplitud asociada a la propagación del haz de referencia. Al resto, lo definimos como término cruzado y expone la relación entre $U_O(\vec{x}, z)$ y $U_R(\vec{x}, z)$. Además, el factor de fase $e^{\pm ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}$ muestra una relación entre la interferencia con el ángulo interferencial θ .

Esquemizamos la etapa de registro de nuestro sistema en la Fig.1. Observamos como el frente de ondas procedente de la fuente incide sobre una lámina semiespejada. Dicha lámina está orientada de tal manera que divide el frente en dos, formando un ángulo $\pi/2$ entre sí. A continuación, cada uno de los frentes se propaga hasta incidir sobre un espejo para cambiar su dirección. Por un lado, generamos el frente de ondas objeto al iluminar

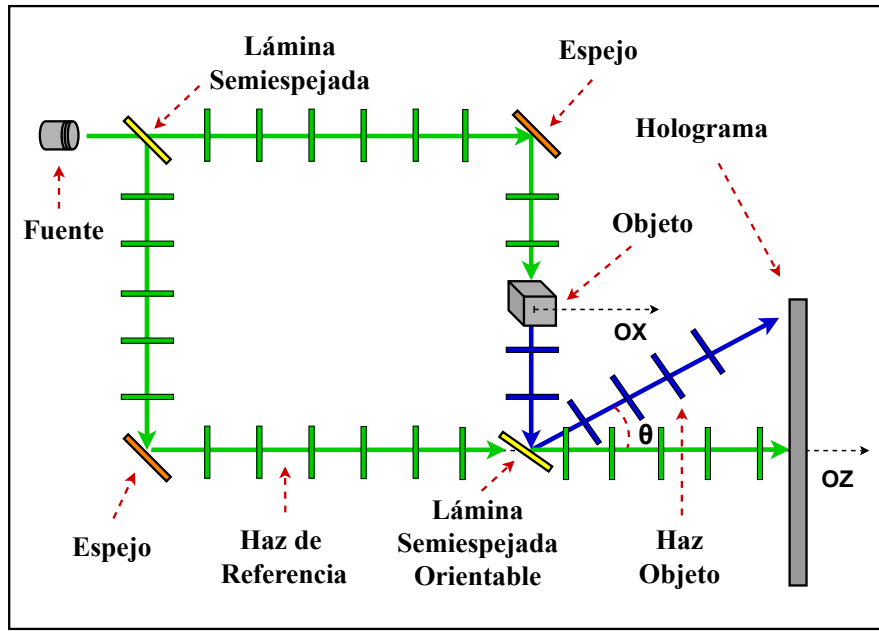


Figura 1: Etapa de registro para una configuración fuera de eje.

nuestro objeto, colocado en $z = 0$ sobre el plano XZ , con uno de los frentes de ondas plano y lo propagamos hasta una lámina semiespejada orientable. Por otro lado, vemos que el haz restante incide sobre la misma lámina semiespejada orientable. La orientación de la lámina provoca que el haz de referencia continúe su propagación sin desviarse hasta caer sobre la superficie del holograma, mientras que el haz objeto caerá sobre el holograma con un ángulo θ respecto OZ en el plano XZ . A este tipo de montaje lo conocemos como configuración fuera de eje y corresponde al ideado por Emmett Leith y Juris Upatnieks.

Si ajustamos la orientación de la última lámina semiespejada para que el frente de ondas objeto y el frente de ondas de referencia se propaguen de forma cuasi paralela hasta incidir sobre el holograma, estamos ante la configuración en eje de Gabor. En la Fig.2, esquematizamos la etapa de registro cuando $\theta \sim 0$. Una vez hemos codificado la información de la interferencia en la $t(\vec{x})$ del holograma, damos por finalizada la etapa de registro.

Veamos ahora la etapa de reconstrucción. Nuestro objetivo es analizar el patrón de interferencia previamente registrado en el holograma para extraer de él, la información necesaria para recrear la imagen tridimensional del objeto. Por ese motivo, buscamos aislar la distribución de amplitud $U_O(\vec{x}, z)$ en un término independiente a partir de la Ec.(7) inicialmente mezclada.

En primer lugar, volvemos a iluminar el holograma con un haz emergente de la fuente \mathbb{F} con distribución de amplitud compleja de características similares al haz de referencia. Por comodidad, en esta etapa, nos referimos a este nuevo frente de ondas como **haz de referencia**.

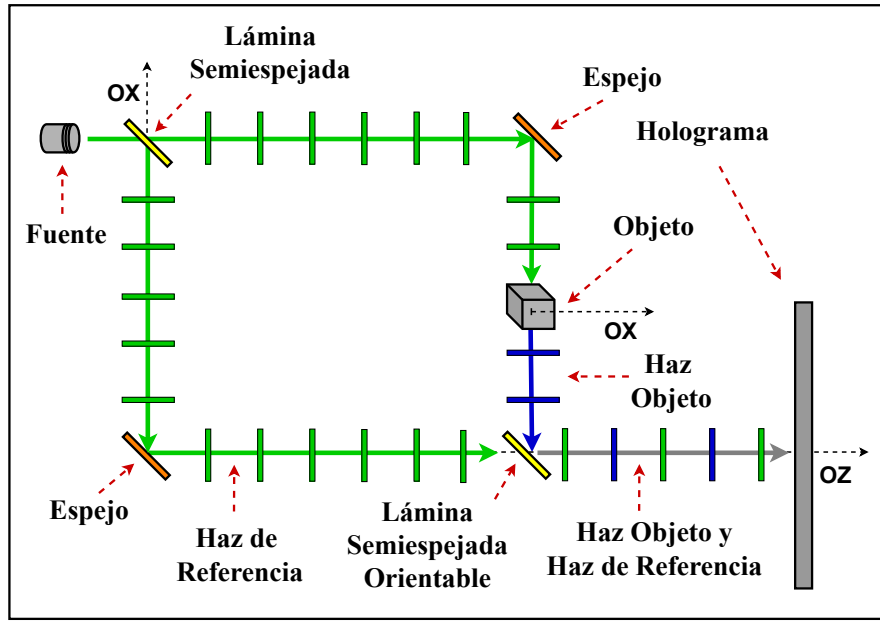


Figura 2: Etapa de registro para una configuración en eje.

Después de reiluminar $t(\vec{x})$, la distribución de amplitud difractada a través del holograma viene dada por

$$U(\vec{x}, z) = e^{ikz}t(\vec{x}). \quad (8)$$

Dado que $t(\vec{x}) \sim I(\vec{x}, z)$, sustituimos la intensidad de la Ec.(7) en la Ec.(8). Así, obtenemos la distribución de amplitud de la Ec.(8) como

$$U(\vec{x}, z) = e^{ikz} (|A_O(\vec{x}, z)|^2 + 1) + A_O(\vec{x}, z)e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)} + A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}e^{2ikz}. \quad (9)$$

Los dos primeros términos representan el haz incidente sobre $t(\vec{x})$ modulado por la suma de las irradiancias del haz objeto y del haz de referencia respectivamente, es decir, simbolizan $e^{ikz}I_O(\vec{x}, z) + e^{ikz}I_R(\vec{x}, z)$ para $I_O(\vec{x}, z) = |A_O(\vec{x}, z)|^2$ y $I_R(\vec{x}, z) = 1$. A su vez, las dos últimas componentes corresponden a la modulación del término cruzado con el nuevo haz de referencia. Por simplicidad, ignoraremos en adelante los factores que únicamente dependen de z , ya que son constantes en el plano del holograma y no afectan al razonamiento posterior.

Finalmente, la distribución de amplitud $U(\vec{x}, z)$ resultante de la reiluminación del holograma viene dada por

$$U(\vec{x}, z) = I_O(\vec{x}, z) + 1 + A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta} + A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ikx \sin \theta}. \quad (10)$$

La primera componente de $U(\vec{x}, z)$ corresponde la onda difractada por un objeto de transmitancia $I_O(\vec{x}, z)$ sin desviarse. El segundo término describe la propagación axial de la onda plana emergente de \mathbb{F} sin desviar, es decir, representa la propagación axial positiva de una onda plana uniforme en OZ . La tercera componente es una réplica de $U_O(\vec{x}, z)$

propagada a través del holograma con una dirección θ respecto al eje OZ en el plano XZ . La presencia del factor de fase $e^{-ikx \sin \theta}$ en el último término, representa la propagación de $U_O(\vec{x}, z)$ a través del holograma con dirección $-\theta$ respecto al eje OZ en XZ . Dicho de otro modo, la última componente representa la distribución de amplitud compleja conjugada $U_O^*(\vec{x}, z)$. Debido a la presencia de los dos primeros términos en $U(\vec{x}, z)$, el observador visualizará un halo de luz propagándose en la dirección del eje óptico, mientras que las dos últimas componentes formarán dos imágenes ópticas del objeto alrededor del mismo.

Tras la reiluminación del holograma, conseguimos decodificar la información inicialmente codificada sobre la interferencia, es decir, conseguimos separar las componentes que describen la irradiancia en términos independientes. Al aislar las distribuciones de amplitud $U_O(\vec{x}, z)$ y $U_O^*(\vec{x}, z)$, podemos reconstruir sus correspondientes campos luminosos y formar así, sus respectivas imágenes. Ambas son equivalentes entre sí y están posicionadas de forma simétrica en el sistema, por lo que producen un resultado visual conocido como **el efecto de la imagen gemela**. Para diferenciarlas, hacemos referencia a la imagen asociada a la reconstrucción de $U_O(\vec{x}, z)$ como la imagen real, mientras que nos referimos a la reconstrucción de $U_O^*(\vec{x}, z)$ como la imagen virtual.

Esquematizamos la etapa de reconstrucción para configuraciones fuera de eje en la Fig.3. Un frente de ondas plano de las mismas características que el emitido por la fuente \mathbb{F} incide con dirección normal sobre el holograma previamente registrado. Desde el holograma, podemos ver como se difractan tres frentes de onda en direcciones distintas. Un frente se propaga axialmente sobre el eje óptico sin desviarse, el cual interpretamos como la difracción de la componente $I_O(\vec{x}, z) + 1$ de la Ec.(10), mientras que los otros dos se desvían simétricamente un ángulo $\pm\theta$ respecto al anterior. Los dos frentes de onda simétricos replican la amplitud y la fase del objeto como si emergieran de él, de modo que los interpretamos como la reconstrucción de la imagen real y de la imagen virtual del objeto.

Si concretamos la etapa de reconstrucción para $\theta \sim 0$, podemos simplificar el factor de fase $e^{\pm ikx \sin \theta}$ de la Ec.(10) a la unidad. Consecuentemente, las componentes reconstruidas se difractarán en la misma dirección sobre el eje óptico OZ .

Esquematizamos la etapa de reconstrucción para montajes tipo en eje en la Fig.4. Al igual que antes, el haz naranja representa la propagación de la componente $I_O(\vec{x}, z) + 1$ de la Ec.(10), mientras que los haces azules corresponden a la propagación de las ondas asociadas a la reconstrucción de la imagen real y a la imagen virtual del objeto. Por lo tanto, dada la existencia de un solapamiento en la propagación de los tres haces, finalmente el observador visualizará una imagen borrosa cuando $\theta \sim 0$.

A pesar de que la técnica holográfica es un buen mecanismo de formación de imágenes, finalmente la holografía clásica recrea tanto la imagen del objeto como las otras componentes que forman el patrón de intensidad. Por lo tanto, la visualización de la imagen se ve limitada tanto por la reconstrucción de las intensidades sin modular del haz objeto y del haz de referencia, como por el efecto de la imagen gemela. Además, la calidad de

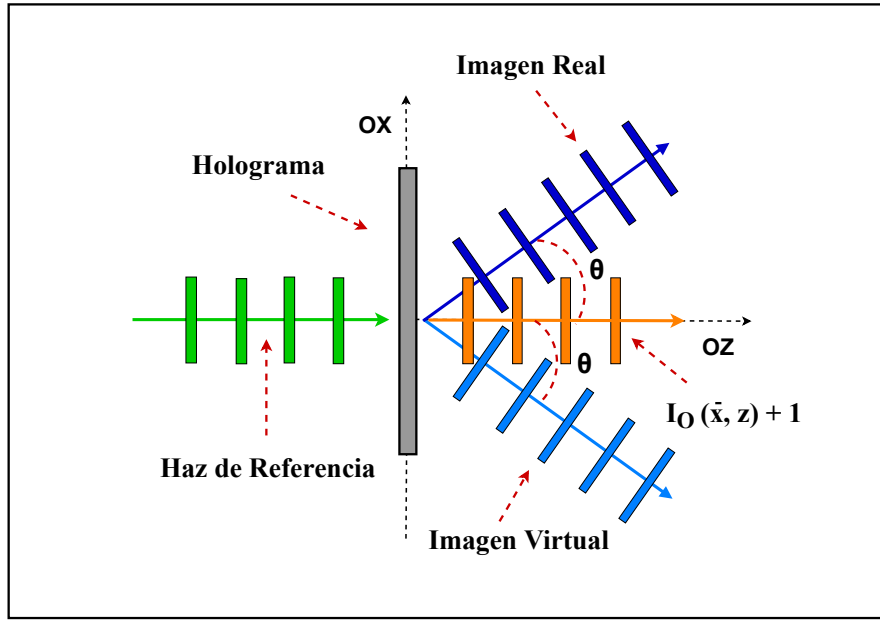


Figura 3: Etapa de reconstrucción para una configuración fuera de eje.

imagen dependerá de si se trata de una configuración fuera de eje o en eje, ya que la reconstrucción de las componentes que forman el patrón de intensidad se solapan entre sí para ángulos significativamente pequeños.

Podemos concluir que el concepto de holografía es la combinación del principio de interferencias y del modelo de propagación en el espacio libre asociado a difracción de las

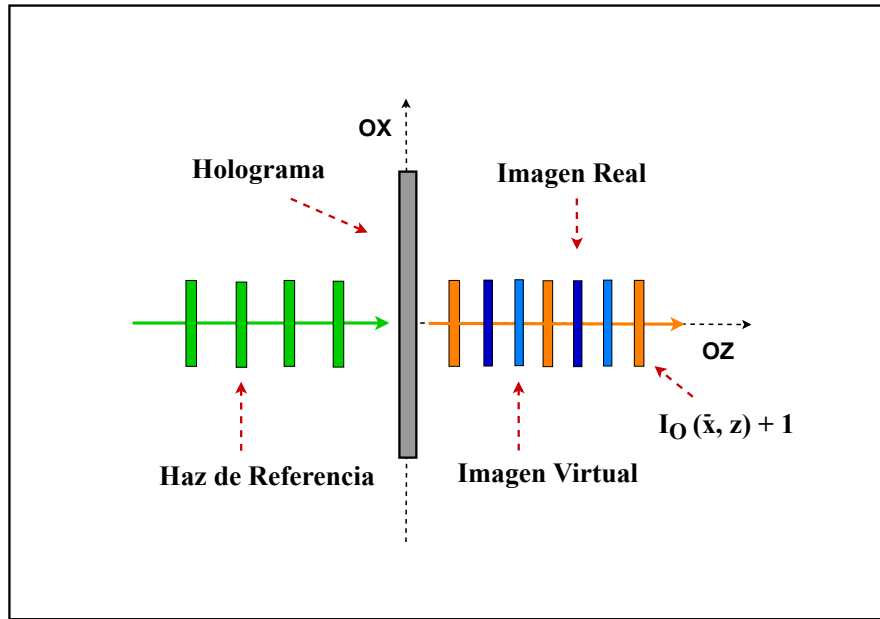


Figura 4: Etapa de reconstrucción para una configuración en eje.

distribuciones de amplitud del campo electromagnético. Como ya hemos visto, ambos conceptos son necesarios para desarrollar tanto la etapa de registro como la etapa de reconstrucción. Por un lado, el principio de interferencias permite codificar la información sobre el contorno y la profundidad de la imagen del objeto a partir de hacer interferir dos haces entre sí. Por otro lado, la difracción permite descodificar dicha información y trasladarla desde un plano transversal XY a otro cualquiera. El mecanismo de la holografía consiste por tanto, en redirigir los haces correspondientes a cada punto del objeto a otro punto concreto. Por ese motivo, tras conseguir aislar la forma del campo luminoso emergente de un objeto, podemos recrear su imagen en cualquier otro punto aunque el objeto no éste presencialmente en el sistema.

Con el fin de recrear una imagen nítida y clara del objeto para todos los tipos de configuración, la holografía clásica se complementa con las técnicas digitales más actuales.

3. Holografía digital

La holografía digital es una técnica de formación de imágenes que usa elementos digitales en el proceso, los cuales permiten aplicar métodos computacionales sobre el concepto clásico de la holografía [8]. Nace ante la necesidad de solucionar la limitación de la técnica convencional para ciertos montajes, de modo que permite recrear la imagen del objeto con claridad en todos los tipos de configuración. Aunque la base de la técnica es la misma que en la holografía clásica, se diferencia en el uso de un dispositivo digital para registrar numéricamente la intensidad resultante de la interacción entre el haz objeto y el haz de referencia. Además, la tecnología actual permite aplicar cálculos digitales sobre los datos recogidos en el registro, manipular la información computacionalmente para buscar las frecuencias espaciales deseadas, propagar la distribución de amplitud del campo para llevar a cabo un reenfoque digital, tomar medidas cuantitativas del objeto y simular tanto la etapa de registro como la etapa de reconstrucción en el ordenador. En este último caso, el objeto no existirá físicamente por lo que se debe simular la etapa de registro con un objeto sintético⁷.

Un holograma digital⁸ es el registro electrónico del patrón de intensidad de una interferencia cuya señal puede ser procesada y/o transmitida a la transmitancia en amplitud $t(\vec{x})$ de un modulador espacial de luz, como puede ser una pantalla de cristal líquido. La monitorización de esta intensidad facilita la descodificación de la estructura tridimensional del objeto dado que permite aplicar métodos numéricos complejos en el análisis de la transmitancia $t(\vec{x})$.

Al igual que en la holografía clásica, el mecanismo de la holografía digital consta de dos partes diferenciadas. En la etapa de registro, se almacena la intensidad de la interferencia entre el frente de ondas objeto y el frente de ondas de referencia mediante el uso de un

⁷Un objeto sintético es aquel que se crea digitalmente de forma que reproduce las propiedades y las dimensiones de uno real.

⁸En adelante, se hace referencia al holograma digital como holograma, mientras que se hace referencia al holograma convencional de la holografía clásica como holograma analógico.

sensor electrónico pixelado⁹, mientras que en la etapa de reconstrucción, se reconstruye la distribución de amplitud emergente del objeto a partir de manipular y reproducir la información del registro electrónico previo. Los procesos necesarios para descodificar dicha información dependerán de si existe o no un solapamiento en el dominio de frecuencias espaciales de los haces mezclados en el registro. Por un lado, se expondrá la técnica de filtrado [9] como un método típicamente utilizado para reconstruir el frente de ondas objeto cuando el ángulo interferencial es lo suficientemente grande para no solapar los haces entre sí. Por otro lado, se presentará el método de variación de fase [10] como alternativa a la técnica de filtrado, es decir, cuando los haces se solapen en el dominio de Fourier.

La técnica de filtrado es un método que permite recrear la imagen tridimensional de un objeto sin reconstruir las contribuciones del holograma que puedan entorpecer la observación de su imagen. Esta técnica consiste en transformar la irradiancia espacial al dominio de frecuencias espaciales con el fin de separar las componentes que forman el patrón de intensidad en términos disjuntos. Una vez se separan las componentes entre sí, se aplica un filtro pasabanda de frecuencias espaciales para extraer el término deseado por lo que, tras aplicar el filtro, las componentes restantes quedan suprimidas del sistema. Así, se consigue recrear una única imagen del objeto y por consiguiente, se elimina el efecto visual de la imagen gemela y del halo.

En la etapa de registro de la técnica de filtrado, sustituimos el holograma analógico de la Fig.1, o de la Fig.2, por un sensor pixelado de una cámara electrónica conectada directamente al ordenador. Así, la interferencia entre ambos frentes de onda ocurre sobre este sensor en el plano del holograma, por lo que si suponemos que la cámara esta formada por un sensor ideal que no pierde información en el procesado de la señal, lograremos registrar la intensidad de la interferencia $I(\vec{x}, z)$ sin pérdidas.

En la etapa de reconstrucción, comenzamos analizando espectralmente el patrón de intensidad de la Ec.(7). Para ello, aplicamos la transformada de Fourier¹⁰ sobre cada uno de los términos que la constituyen, de manera que obtenemos

$$\mathcal{F}\{|A_O(\vec{x}, z)|^2; \vec{u}\} + \mathcal{F}\{1; \vec{u}\} = \tilde{A}_O(\vec{u}, z) \otimes \tilde{A}_O^*(-\vec{u}, z) + \delta(\vec{u}) = \tilde{A}_O(\vec{u}, z) \otimes \tilde{A}_O(\vec{u}, z) + \delta(\vec{u}). \quad (11)$$

$$\mathcal{F}\{A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta}; \vec{u}\} = \tilde{A}_O(\vec{u}, z) \otimes \delta(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y). \quad (12)$$

$$\mathcal{F}\{A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ikx \sin \theta}; \vec{u}\} = \tilde{A}_O^*(\vec{u}, z) \otimes \delta(u_x + \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y). \quad (13)$$

Por simplicidad, hemos ignorado los factores que dependen únicamente de z dado que son constantes en el plano de registro y no afectan al razonamiento posterior. Cabe destacar que hemos denotado con el símbolo \otimes a la operación de correlación y que, en la Ec.(11),

⁹Un sensor electrónico pixelado es un elemento óptico que forma parte de una cámara digital. Dicho sensor es una matriz compuesta por elementos fotosensibles que convierte la luz recibida en señales eléctricas, las cuales pueden ser transformadas, manipuladas, analizadas y representadas como un patrón.

¹⁰La transformada de Fourier bidimensional de una función $f(\vec{x})$, se define como $\tilde{f}(\vec{u}) = \tilde{f}(u_x, u_y) = \int \int f(\vec{x})e^{-i2\pi\vec{u}\vec{x}}d^2\vec{x}$. Su aplicación sobre $f(\vec{x})$ se denota como $\mathcal{F}\{f(\vec{x}); \vec{u}\}$, mientras que se asigna el símbolo \sim a la función resultante.

hemos utilizado la relación que existe entre las operaciones de correlación y convolución¹¹. Como indica la Ec.(11), la transformada de Fourier de la intensidad de la onda objeto en el plano del holograma es la autocorrelación del espectro de frecuencias de la distribución de amplitud del objeto. Por otro lado, el factor $\delta(\vec{u}) = \delta(u_x, u_y)$ corresponde a una delta de Dirac centrada en el origen de frecuencias espaciales, mientras que el factor $\delta(u_x \mp \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y)$, es una delta de Dirac desplazada una distancia $\pm \sin \theta / \lambda$ en u_x respecto al origen.

De esta manera, el espectro de la irradiancia es una composición de las transformadas de Fourier de las Ecs.(11)-(13), por lo que la intensidad en el espacio de Fourier es

$$\tilde{I}(\vec{u}, z) = \tilde{DC}(\vec{u}, z) + \tilde{A}_O(\vec{u}, z) \otimes \delta(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y) + \tilde{A}_O^*(\vec{u}, z) \otimes \delta(u_x + \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y), \quad (14)$$

siendo $\tilde{DC}(\vec{u}, z) = \tilde{A}_O(\vec{u}, z) \otimes \tilde{A}_O(\vec{u}, z) + \delta(\vec{u})$. La convolución en la Ec.(14) entre la transformada de Fourier de la onda objeto y el factor $\delta(u_x \mp \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y)$ es una versión de esta función centrada en una posición $(\pm \frac{\sin \theta}{\lambda}, 0)$, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_O(\vec{u}, z) \otimes \delta(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y) &= \tilde{A}_O(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z), \\ \tilde{A}_O^*(\vec{u}, z) \otimes \delta(u_x + \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y) &= \tilde{A}_O^*(u_x + \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z). \end{aligned} \quad (15)$$

Identificamos por tanto, tres términos independientes y separados frecuencialmente entre sí, por lo que el espectro frecuencial de la intensidad viene dada por

$$\tilde{I}(\vec{u}, z) = \tilde{DC}(\vec{u}, z) + \tilde{A}_O(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z) + \tilde{A}_O^*(u_x + \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z). \quad (16)$$

El primer término corresponde a la transformada de Fourier de la suma de las intensidades de la onda objeto y de la onda de referencia en el plano del holograma. Al localizarse en torno al origen de frecuencias lo identificamos como el orden cero de difracción. La segunda componente describe el espectro de Fourier de la onda objeto en el plano del holograma desplazado una distancia $\sin \theta / \lambda$ en la coordenada u_x respecto al origen de frecuencias espaciales. A su vez, identificamos la tercera componente como el espectro de Fourier de la onda objeto complejo conjugada en una posición $-\sin \theta / \lambda$ del origen. Por lo tanto, al igual que en la holografía clásica, los dos últimos términos corresponden a la reconstrucción de la imagen real y de la imagen virtual del objeto, respectivamente. Como ambas imágenes se encuentran desviadas simétricamente alrededor de $\tilde{DC}(\vec{u}, z)$, las identificamos como el primer orden de difracción y, para diferenciarlas, asignamos el orden $+1$ de difracción a la segunda componente y el orden -1 a la tercera. Ahora, vamos a considerar que estos tres órdenes de difracción tienen extensiones finitas en el dominio de Fourier¹². Es sencillo probar que la extensión de la banda de frecuencias del patrón de difracción del objeto $A_O(\vec{x}, z)$ se mantiene para cualquier z dado que la función de transferencia para la propagación libre sólo modifica la fase de las diferentes frecuencias

¹¹Se expone la relación entre la convolución, la correlación y las transformadas de Fourier en [11].

¹²Esta restricción se cumple en la práctica dado que todo sistema real de formación de imágenes transmite una banda de frecuencias limitada en el dominio de Fourier [12].

espaciales. Por ello, si consideramos que el objeto tiene la banda frecuencial limitada y centrada alrededor de $\vec{u} = 0$ que se extiende simétricamente con un tamaño Δ en la dirección u_x , podemos suponer que la banda del patrón de difracción de $\tilde{A}_O(u_x - \frac{\sin\theta}{\lambda}, u_y, z)$ y $\tilde{A}_O^*(u_x + \frac{\sin\theta}{\lambda}, u_y, z)$ se extenderá simétricamente con la misma extensión. Dado que el orden 0 de difracción es básicamente la autocorrelación de $\tilde{A}_O(\vec{u}, z)$ en el dominio de frecuencias espaciales, su banda tendrá una extensión doble que la de los órdenes ± 1 .

En la Fig.5, esquematizamos los tres términos que constituyen la intensidad de la Ec.(16). Por un lado, en el centro del sistema bidimensional de frecuencias espaciales, representamos el orden 0 de difracción como un círculo de color naranja. Por otro lado, representamos los órdenes ± 1 de difracción como dos círculos azules desplazados, respectivamente, una distancia $\pm \sin\theta/\lambda$ en u_x del orden 0 de difracción, por lo que están simétricamente posicionados respecto al origen del sistema. Como ya sabemos, el orden 0 está formado por la autocorrelación de la transformada de Fourier de la distribución de amplitud del haz objeto en el plano del holograma, por lo que el tamaño de su banda espectral será dos veces mayor que el tamaño de las bandas de los órdenes ± 1 individualmente. Por ese motivo, representamos al círculo naranja con un radio dos veces mayor que los círculos de color azul. Cabe destacar que, en el esquema, hacemos referencia al tamaño de la banda del objeto como Δ y al tamaño del orden 0 de difracción como 2Δ . De acuerdo con la Fig.5, siempre que

$$\frac{3\Delta}{2} \leq \frac{\sin\theta}{\lambda}, \quad (17)$$

el contenido frecuencial de cada orden quedará separado entre sí. Por lo tanto, la banda de frecuencias del patrón de difracción del objeto en el plano del holograma no solapará con el resto de las bandas. Esta condición es un requisito necesario para que este método nos proporcione una reconstrucción fidedigna del objeto original, de modo que si se cumple

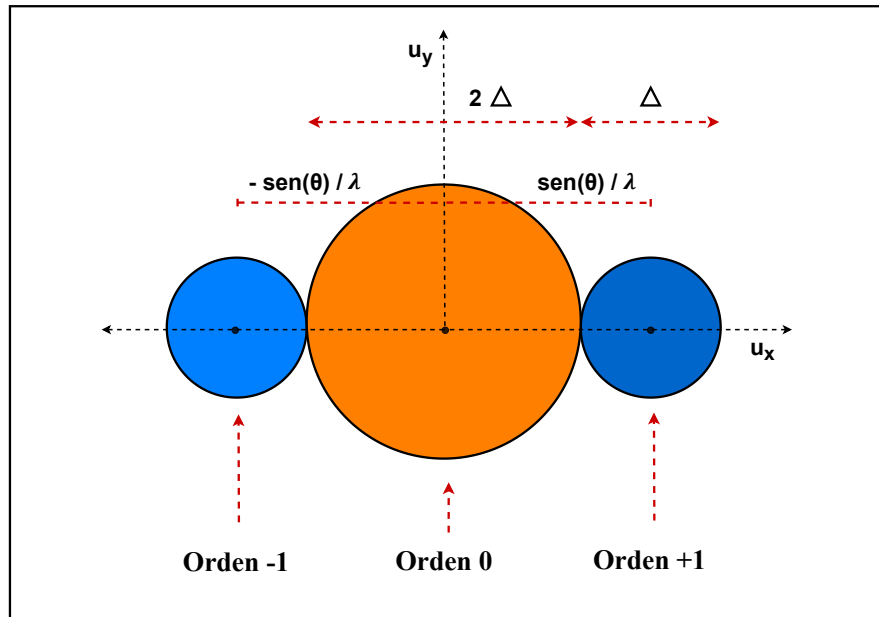


Figura 5: Esquema del espectro de Fourier de la irradiancia del holograma.

la condición de la Ec.(17), se podrá llevar a cabo la técnica de filtrado como método de reconstrucción.

Si la Ec.(17) se cumple, para reconstruir la imagen real del objeto haciendo uso de la técnica de filtrado, bastará con aplicar un filtro pasabanda de frecuencias espaciales al holograma registrado que permita extraer exclusivamente el ancho de banda espectral del orden +1 de difracción correspondiente a la reconstrucción de la imagen real. Tras aplicarlo, obtenemos

$$\tilde{I}'(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z) = \mathcal{H}_1(\vec{u}) \tilde{I}(\vec{u}, z) = \tilde{A}_O(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z), \quad (18)$$

siendo $\mathcal{H}_1(\vec{u})$ la función de transferencia del filtro para el orden +1 de difracción y $\tilde{I}'(u_x - \frac{\sin \theta}{\lambda}, u_y, z)$ la componente ya filtrada.

Si a continuación, desplazamos el término filtrado de la Ec.(18) desde la posición $-\sin \theta/\lambda$ hasta el origen de frecuencias espaciales y luego le aplicamos la transformada de Fourier inversa¹³, finalmente, conseguimos reconstruir la distribución de amplitud del haz objeto en el plano del holograma como

$$U(\vec{x}, z) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{I}'(\vec{u}, z); \vec{x}\} = A_O(\vec{x}, z). \quad (19)$$

La distribución de amplitud de la Ec.(19) es la onda objeto en el plano del holograma, por lo que hemos conseguido suprimir el resto de las componentes de la intensidad con la técnica de filtrado. Consecuentemente, hemos conseguido eliminar tanto el efecto de la imagen gemela como la reconstrucción del halo de luz central.

Dado que la distancia de separación entre las componentes depende directamente del ángulo interferencial, si suponemos que el ángulo es considerablemente pequeño, las componentes que forman el patrón de intensidad no se desacoplarán, es decir, no se cumplirá la condición de la Ec.(17). Por lo tanto, en configuraciones con $\theta \sim 0$, los tres órdenes de difracción se solaparán entre sí, por lo que no lograremos extraer suficiente información del orden +1 de difracción. Tampoco podremos utilizar esta técnica si el ancho de banda espectral del objeto es muy grande dado que las componentes seguirán solapadas aún estando frecuencialmente separadas entre sí. Consecuentemente, no podremos formar una imagen fidedigna del objeto.

Podemos concluir que la técnica de filtrado es un método de formación de imágenes rápido y eficaz dado que nos permite recrear la imagen tridimensional del objeto a partir de registrar una única captura de la irradiancia. Sin embargo, su principal desventaja reside en que no puede llevarse a cabo cuando el ángulo de la interferencia entre haces es significativamente pequeño o cuando el ancho de banda espectral del objeto es muy grande, ya que las componentes no se desacoplarán completamente entre sí y por ende, perdemos información de la onda objeto en la reconstrucción de su imagen.

¹³La transformada de Fourier inversa de una función bidimensional $\tilde{f}(\vec{u})$, se define como $f(\vec{x}) = f(x, y) = \int \int \tilde{f}(\vec{u}) e^{j2\pi \vec{u} \cdot \vec{x}} d^2 \vec{u}$. Se hace referencia a la aplicación de la transformada de Fourier inversa sobre $\tilde{f}(\vec{u})$ como $\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\vec{u}); \vec{x}\}$.

Ante la necesidad de suprimir la reconstrucción de la imagen virtual y la intensidad luminosa del orden cero de difracción cuando la técnica de filtrado no lo permite, sin perder información en el proceso, nace una técnica alternativa conocida como el método de variación de fase [10]. Esta técnica consiste en extraer la distribución de amplitud del campo emitido por el objeto, inicialmente desconocida, a partir de realizar tres capturas distintas del patrón de intensidad en el plano del holograma. Para llevar a cabo estas capturas, en la etapa de registro, se debe incorporar un modulador de fase que permita añadir una fase constante controlable al haz de referencia. De esta manera, se obtiene un sistema de tres ecuaciones formado por tres irradiancias. Si se resuelve este sistema de ecuaciones de forma que se consiga aislar la componente asociada a la reconstrucción de la imagen real del objeto, se puede reconstruir dicha imagen sin el resto de las contribuciones. Por lo tanto, es una técnica que también elimina el efecto visual de la imagen gemela y el halo de luz central que se recrea junto a la imagen del objeto.

El montaje de la etapa de registro para el método de variación de fase es similar al expuesto en la Fig.2 pero añadiendo un modulador de fase en la trayectoria del haz de referencia, de modo que cuando se propaga a través de él, se añade una fase constante ϕ_p a la propagación de dicho frente. Así, conseguimos registrar tres patrones de intensidad con una fase diferente en cada distribución de amplitud asociada al haz de referencia.

Por lo tanto, tras añadir el modulador de fase en el montaje, el patrón de intensidad en el plano de la interferencia es

$$I_p(\vec{x}, z) = |U_O(\vec{x}, z) + U_R(\vec{x}, z)e^{i\phi_p}|^2, \quad (20)$$

donde el subíndice p indica el número de la captura de la irradiancia.

Siguiendo los mismos pasos que nos llevaron a obtener la intensidad de la Ec.(7) y omitiendo los factores constantes dependientes de z , la forma extendida de la Ec.(20) se puede expresar como

$$I_p(\vec{x}, z) = DC(\vec{x}, z) + e^{-i\phi_p} A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta} + e^{i\phi_p} A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ikx \sin \theta}, \quad (21)$$

siendo $DC(\vec{x}, z) = |A_O(\vec{x}, z)|^2 + 1$.

Por lo tanto, el sistema de tres ecuaciones formado por tres irradiancias viene dado por

$$\begin{aligned} I_1(\vec{x}, z) &= DC(\vec{x}, z) + e^{-i\phi_1} A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta} + e^{i\phi_1} A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ikx \sin \theta} \\ I_2(\vec{x}, z) &= DC(\vec{x}, z) + e^{-i\phi_2} A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta} + e^{i\phi_2} A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ikx \sin \theta} \\ I_3(\vec{x}, z) &= DC(\vec{x}, z) + e^{-i\phi_3} A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta} + e^{i\phi_3} A_O^*(\vec{x}, z)e^{-ikx \sin \theta}. \end{aligned} \quad (22)$$

A continuación, debemos operar las irradiancias que componen la Ec.(22) entre sí hasta conseguir aislar la distribución de amplitud del haz objeto $A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta}$. La regla de Cramer nos proporciona la solución del sistema de ecuaciones como

$$A_O(\vec{x}, z)e^{ikx \sin \theta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_1(\vec{x}, z) & e^{i\phi_1} \\ 1 & I_2(\vec{x}, z) & e^{i\phi_2} \\ 1 & I_3(\vec{x}, z) & e^{i\phi_3} \end{vmatrix}}{D}, \quad (23)$$

de modo que el sistema de ecuaciones lineales de la Ec.(23) tendrá solución única siempre y cuando se satisfaga la condición

$$D = \begin{vmatrix} 1 & e^{-i\phi_1} & e^{i\phi_1} \\ 1 & e^{-i\phi_2} & e^{i\phi_2} \\ 1 & e^{-i\phi_3} & e^{i\phi_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (24)$$

Una elección usual para los tres valores de la fase constante es: $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ y $\phi_3 = \pi$. Con estos valores para los que, claro está, se cumple la condición de la Ec.(24), obtenemos, a partir de la Ec.(23), la distribución de amplitud del objeto en el plano del holograma como

$$A_O(\vec{x}, z)e^{ik \sin \theta} = \frac{(1+i)I_1(\vec{x}, z) - 2I_2(\vec{x}, z) + (1-i)I_3(\vec{x}, z)}{4i}. \quad (25)$$

Por lo tanto, podemos concluir que la distribución de amplitud de la Ec.(25) corresponde a la onda objeto en el plano del holograma, por lo que conseguimos reconstruir la imagen real del objeto sin recrear el resto de las componentes junto a ella. Por consiguiente, con este método, conseguimos eliminar el efecto de la imagen gemela y el halo de luz central recreado junto a las imágenes.

El método de variación de fase de la holografía digital es por tanto, una técnica de formación de imágenes tridimensionales que da solución al problema del solapamiento de las configuraciones en eje. Su mayor ventaja es que no requiere de análisis numéricos complicados y que elimina la reconstrucción de las construcciones que dificultan la visualización de la imagen sin perder información en el proceso, de modo que elimina el orden 0 y -1 de la reconstrucción. Por el contrario, su mayor desventaja reside en su falta de rapidez debido a que, en el método de variación de fase, la etapa de registro se debe de repetir un mínimo de tres veces para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver. Además, cabe destacar que este método se utiliza únicamente cuando las componentes del espectro frecuencial de la intensidad no cumplen la Ec.(17) y por ende, las bandas de frecuencias se superponen entre sí. Dicho de otro modo, su uso está limitado a interferencias con $\theta \sim 0$ o en configuraciones en las que la banda espectral del objeto sea muy grande.

Hasta ahora, hemos reconstruido la onda objeto en el plano del holograma. Para recrear la distribución de amplitud emergente del objeto sobre el plano del objeto, debemos llevar a cabo un reenfoque de la onda, es decir, debemos propagarla desde el plano del holograma hasta el propio plano sobre el que se encuentra el objeto. Este reenfoque se puede llevar a cabo de forma óptica o digital.

Por un lado, si queremos recrear ópticamente la imagen del objeto, debemos transferir la información de la onda objeto de la Ec.(19) o de la Ec.(25) a la transmitancia $t(\vec{x})$ de un modulador espacial de luz. Si a continuación, provocamos la incidencia normal del haz de referencia sobre la transmitancia $t(\vec{x})$, emergerá del modulador un frente de ondas que reproducirá la amplitud y la fase de la onda objeto a lo largo de su propagación. Dicho de otro modo, la amplitud y la fase de la onda objeto se replicará en cada uno de los planos transversales al eje óptico sobre el que se difracta, por lo que el observador podrá visualizar todo el campo tridimensional difractado por el objeto.

Por otro lado, si queremos llevar a cabo un reenfoque digital de la onda objeto, debemos realizar la convolución entre la onda objeto en el plano del holograma y la respuesta impulsional conjugada de la propagación libre correspondiente a la distancia z desde el objeto hasta el sensor. De esta manera, conseguimos difractar la onda hasta el plano donde se encuentra el objeto y, una vez la describimos sobre él, representamos la imagen del objeto en el ordenador. Por lo tanto, si propagamos la Ec.(19) o la Ec.(25) hasta el plano objeto, la distribución de amplitud emergente del objeto viene dada por

$$U(\vec{x}, 0) = U(\vec{x}, z) \circledast h^*(\vec{x}, z), \quad (26)$$

siendo $h^*(\vec{x}, z) = e^{-i\frac{\pi|\vec{x}|^2}{z\lambda}}$ la respuesta impulsional conjugada.

A continuación, con el fin de verificar el método de variación de fase en configuraciones en eje, simularemos computacionalmente las etapas de la holografía hasta reconstruir la distribución de amplitud compleja de un objeto sintético.

4. Verificación de la técnica

Se puede comprobar la solidez del modelo teórico del método de variación de fase para montajes en eje a partir de simular los pasos que nos llevaron a obtener las Ecs.(25) y (26). Como ya sabemos, a diferencia de la fotografía que nos permite extraer únicamente la amplitud de la distribución de amplitud compleja emergente de un objeto, el mecanismo de la holografía nos permite obtener su amplitud y su fase. Por ese motivo, particularizaremos para una onda objeto con distribución de amplitud compleja pura de fase, de modo que si conseguimos reconstruir fielmente la fase del objeto original, demostraremos la eficacia del método de variación de fase.

El diagrama de flujo de la Fig.6 expone las pautas que deben seguirse para verificar dicha técnica en el ordenador. Además, cabe destacar que para simular el modelo teórico se ha hecho uso de Python 3.9, ya que es una de las plataformas digitales más utilizadas para simular el mecanismo de la holografía dado que es un lenguaje completo de código abierto¹⁴.

En primer lugar, supongamos que la fase de la distribución de amplitud compleja de la onda objeto, en el propio plano sobre el que se encuentra, es un disco de radio r_{max} de fase constante $\pi/2$ sobre un fondo uniforme de fase 0 y que, además, dicho plano corresponde al plano del holograma. A continuación, damos un valor fijo a la λ de la fuente \mathbb{F} de 500 nm. Después, definimos los puntos de muestreo N en la coordenada horizontal y en la coordenada vertical, respectivamente, y creamos las gradillas bidimensionales $N \times N$ a partir de ambas coordenadas. Estas gradillas describen el plano bidimensional XY sobre el que se encuentra el objeto, por lo que si consideramos que el objeto se encuentra en $z = 0$ sobre el eje óptico OZ , el plano del holograma estará también sobre $z = 0$. De modo que si particularizamos para $N = 550$ puntos de muestreo, tanto el plano del holograma como el plano del objeto estarán descritos por 550×550 puntos.

¹⁴Se puede acceder al código fuente que he desarrollado para verificar la validez de la técnica en <https://www.dropbox.com/s/44kot4h21nzz1p7/VictoriaGomezBifante-AnexoTFG.pdf?dl=0>.

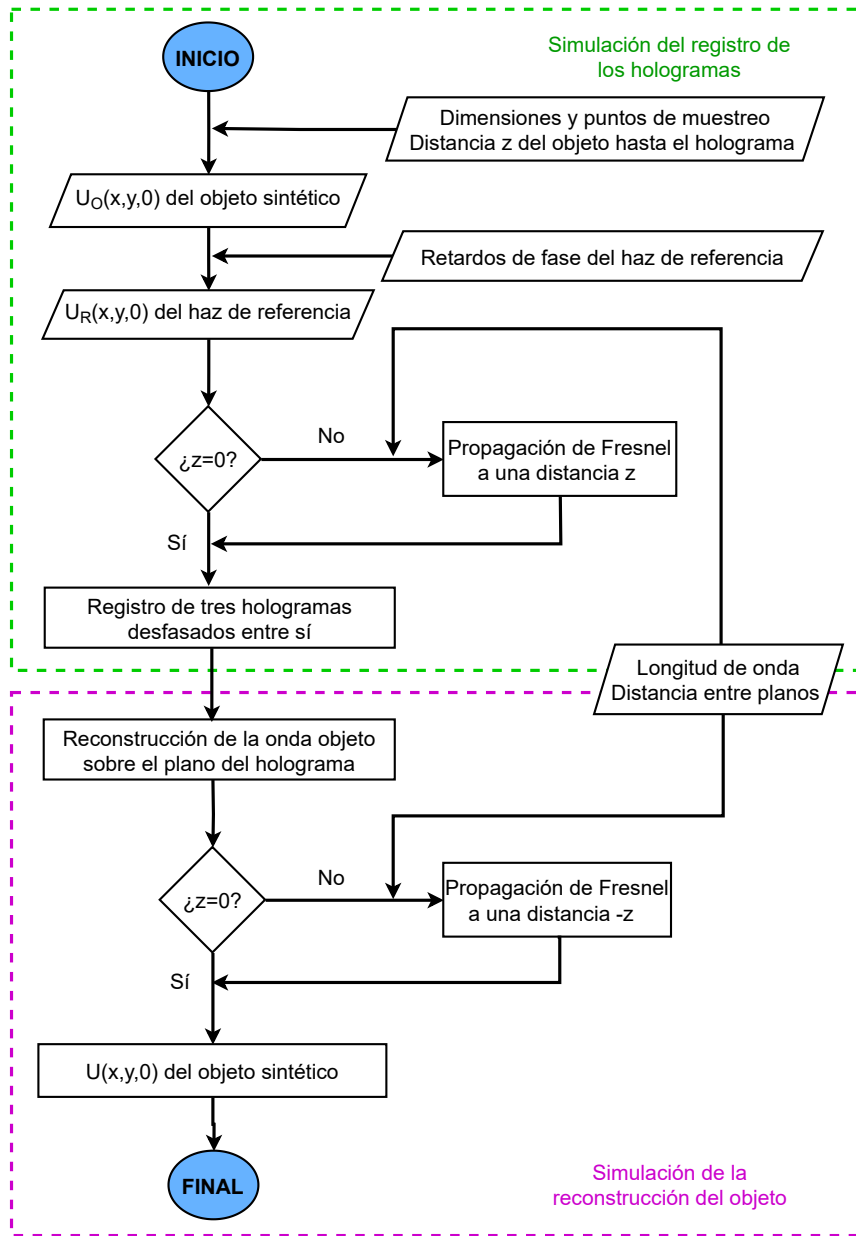


Figura 6: Diagrama de flujo para simular el método de variación de fase.

El método de variación de fase necesita registrar un mínimo de tres intensidades diferentes de la interferencia entre la onda objeto con el haz de referencia cuando $\theta = 0$. Por ello, consideraremos que la distribución de amplitud de la onda de referencia es constante y le añadiremos una fase constante ϕ_p en cada registro de la interferencia. Así obtendremos tres intensidades como las de la Fig.7. Estos tres hologramas corresponden a las funciones $I_1(\vec{x}, z)$, $I_2(\vec{x}, z)$ e $I_3(\vec{x}, z)$ del sistema de ecuaciones de la Ec.(22), de modo que si lo resolvemos con la Ec.(23), finalmente lograremos reconstruir la distribución de amplitud de la Ec.(25).

Al coincidir la posición del plano del holograma con la del plano objeto en $z = 0$, obten-

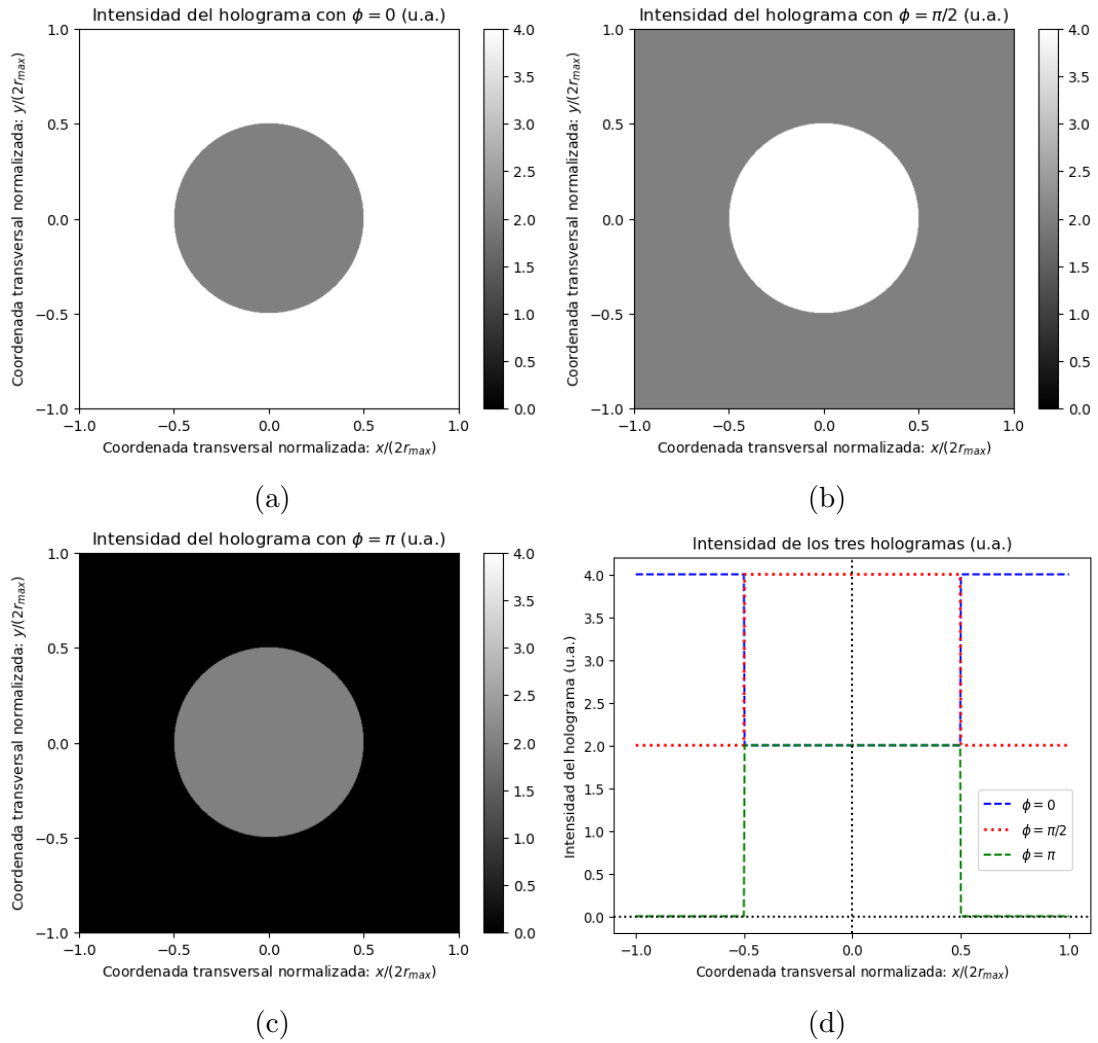


Figura 7: Intensidad del holograma (u.a.) en eje registrado en el plano objeto ($z=0$) de un disco de radio $r_{max} = 0,5$ de salto de fase $\pi/2$: (a) con $\phi_1 = 0$; (b) con $\phi_2 = \pi/2$; (c) con $\phi_3 = \pi$; y (d) perfil de los tres hologramas para $y = 0$.

dremos la fase de la onda objeto en este mismo plano. En la Fig.8, comparamos la fase de la distribución de amplitud reconstruida con la original y vemos como la fase reconstruida de la onda objeto en $z = 0$ es una reconstrucción fidedigna de la fase original del objeto.

Ahora, supongamos que la distribución de amplitud del objeto original es un disco de radio máximo r_{max} con una variación lineal de fase desde el centro de fase $\pi/2$ hasta el borde de fase 0 sobre un fondo uniforme de fase 0 y que, al igual que antes, el plano del holograma coincide con el plano objeto. Si seguimos el mismo procedimiento que con el disco de fase constante, tal y como podemos ver en la Fig.9, conseguiremos reconstruir fielmente la fase original del objeto. Con los resultados obtenidos, podemos verificar que el método de variación de fase es una técnica que consigue reconstruir de forma fidedigna la fase de la distribución de amplitud compleja transmitida por un objeto cuando el propio plano sobre el que está coincide con el plano de registro del holograma.

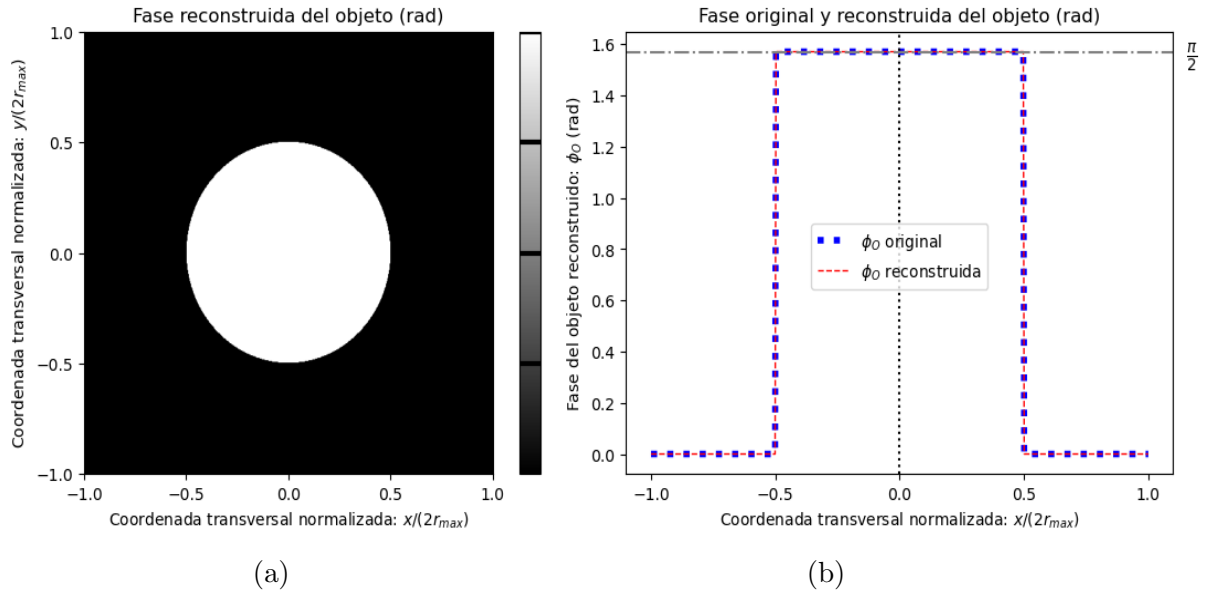


Figura 8: (a) Disco de fase constante (rad) de $r_{max} = 0,5$ sobre un fondo uniforme en el plano del objeto ($z = 0$); y (b) perfiles de la fase reconstruida y de la original para $y = 0$.

En el caso de que el plano del holograma se encuentre a una determinada distancia axial respecto al plano objeto, será necesario propagar la onda emergente del objeto desde el propio plano sobre el que se encuentra hasta el plano del holograma para llevar a cabo

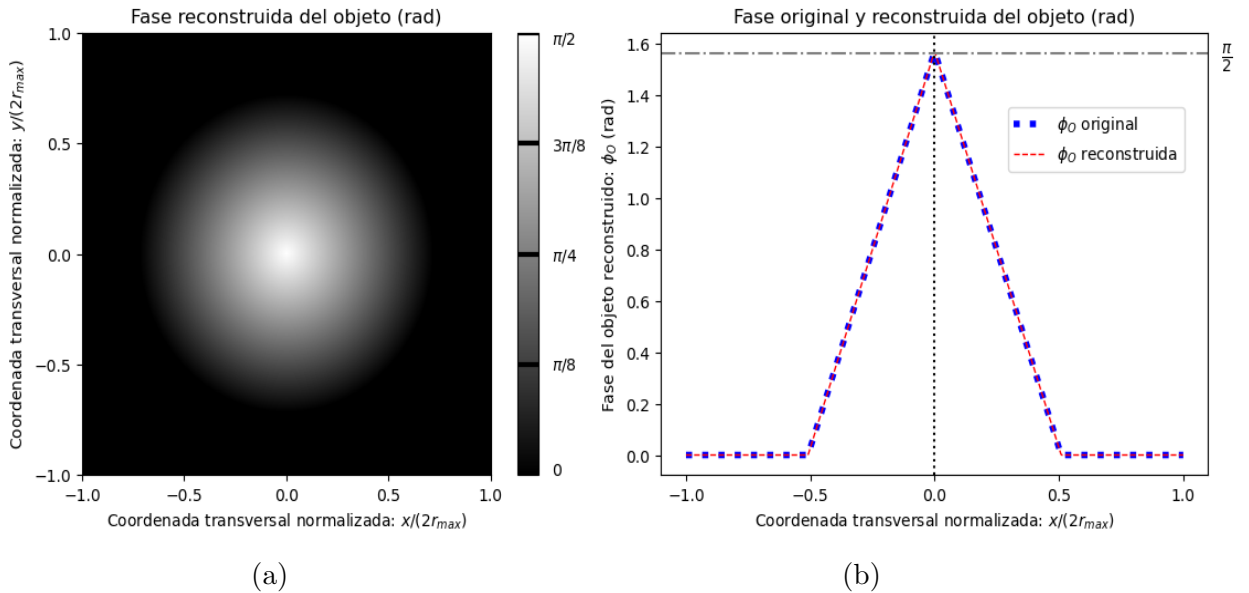


Figura 9: (a) Variación lineal de un disco de fase (rad) de $r_{max} = 0,5$ sobre un fondo uniforme en el plano del objeto ($z = 0$); y (b) perfiles de la fase reconstruida y de la original para $y = 0$.

el registro de las intensidades. Tras reconstruir la distribución de amplitud compleja del patrón de difracción del objeto, también será necesario difractar la onda reconstruida desde el plano del holograma hasta el plano objeto.

Al igual que antes, vamos a suponer que la fase de la distribución de amplitud compleja emergente del objeto es un disco de r_{max} de fase constante $\pi/2$ sobre un fondo de fase 0. Además, supondremos que el plano bidimensional XY sobre el que se encuentra el objeto está a una distancia $z = 500$ mm del plano del holograma. Para registrar los tres hologramas, primero debemos difractar la onda transmitida por el objeto hasta el plano del holograma. Después de propagarla hasta $z = 500$ mm, llevaremos a cabo la etapa de registro del método de variación de fase sobre el patrón de difracción. Si particularizamos para $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/2$ y $\phi_3 = \pi$, registraremos los hologramas de la Fig.10a, la

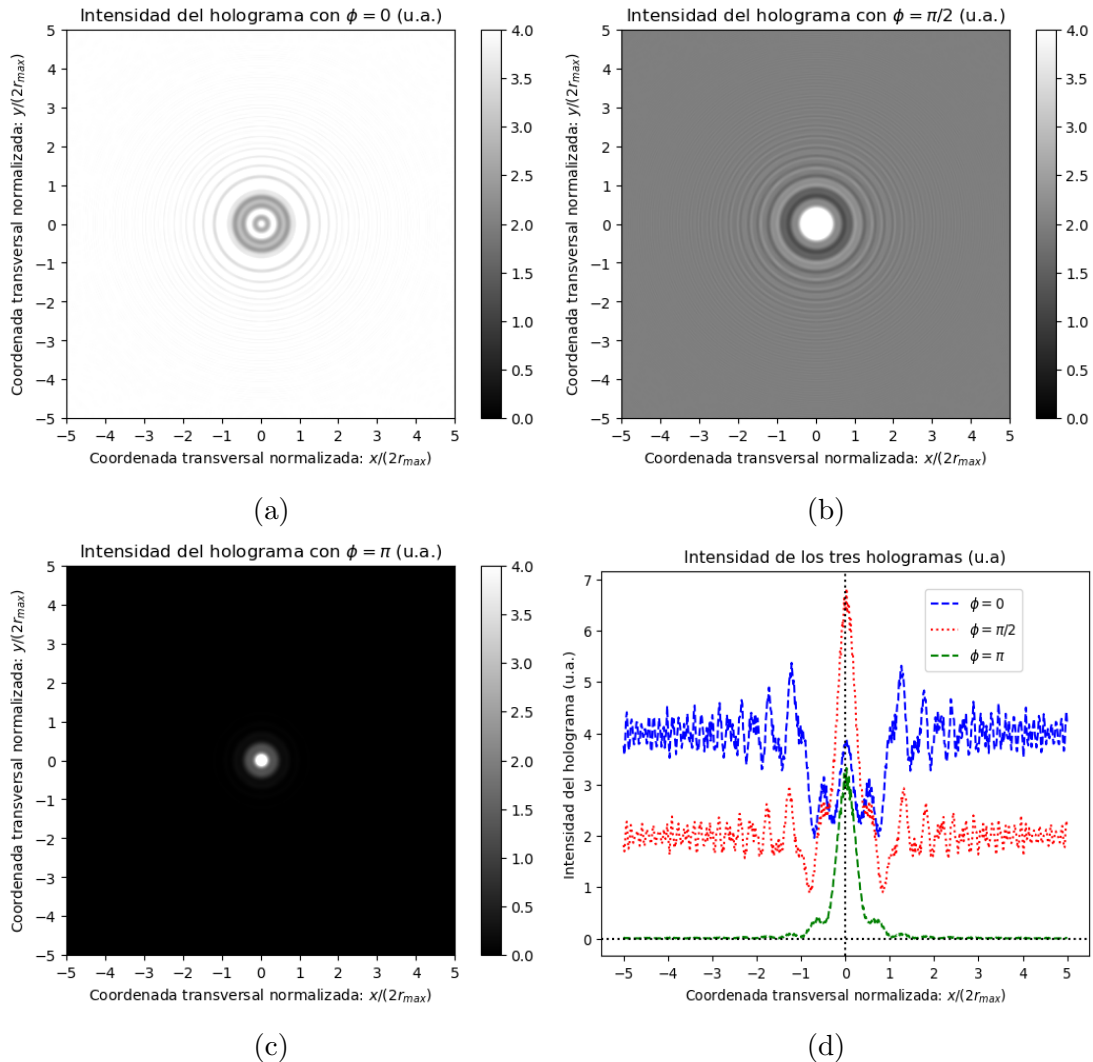


Figura 10: Intensidad del holograma (u.a.) en eje registrado a una distancia $z = 500$ mm del plano objeto de un disco con $r_{max} = 0,5$ de salto de fase $\pi/2$: (a) con $\phi_1 = 0$; (b) con $\phi_2 = \pi/2$; (c) con $\phi_3 = \pi$; y (d) perfil de los tres hologramas para $y = 0$.

Fig.10b y la Fig.10c, respectivamente. Al comparar las imágenes de la Fig.7 con las de la Fig.10, podemos ver en estas últimas, las franjas interferenciales propias de la difracción.

Una vez hemos registrado las tres intensidades, obtenemos la distribución de amplitud compleja de la Ec.(25) para el patrón de difracción en $z = 500$ mm. Para reconstruir el objeto, debemos llevar a cabo la propagación de Fresnel inversa, es decir, difractaremos el resultado anterior una distancia $z = -500$ mm desde el plano del holograma hasta el plano propio del objeto. Así, podremos comparar la fase original de la onda transmitida por el objeto en el propio plano del objeto con la fase reconstruida en este mismo plano. En la Fig.11, las comparamos y comprobamos que el método de variación de fase es una técnica que reconstruye de manera fidedigna la fase original de la distribución de amplitud compleja emergente del objeto.

Por último, volvemos a considerar que la fase original de la distribución de amplitud compleja emergente del objeto es un disco de radio máximo r_{max} con variación lineal de fase desde el centro $\pi/2$ hasta el borde 0 sobre un fondo uniforme de fase 0. Si el objeto se encuentra a una distancia $z = 500$ mm del plano del holograma, al igual que antes, debemos llevar a cabo los pasos que nos llevaron a obtener la Ec.(26).

De nuevo, en la Fig.12, verificamos que el método de variación de fase es una técnica que permite reconstruir con precisión la fase original de la onda objeto cuando existe una distancia z entre el plano del holograma y el plano del objeto.

Por lo tanto, podemos concluir que el método de variación de fase es un modelo válido que permite recrear fielmente la fase de la distribución de amplitud del objeto en

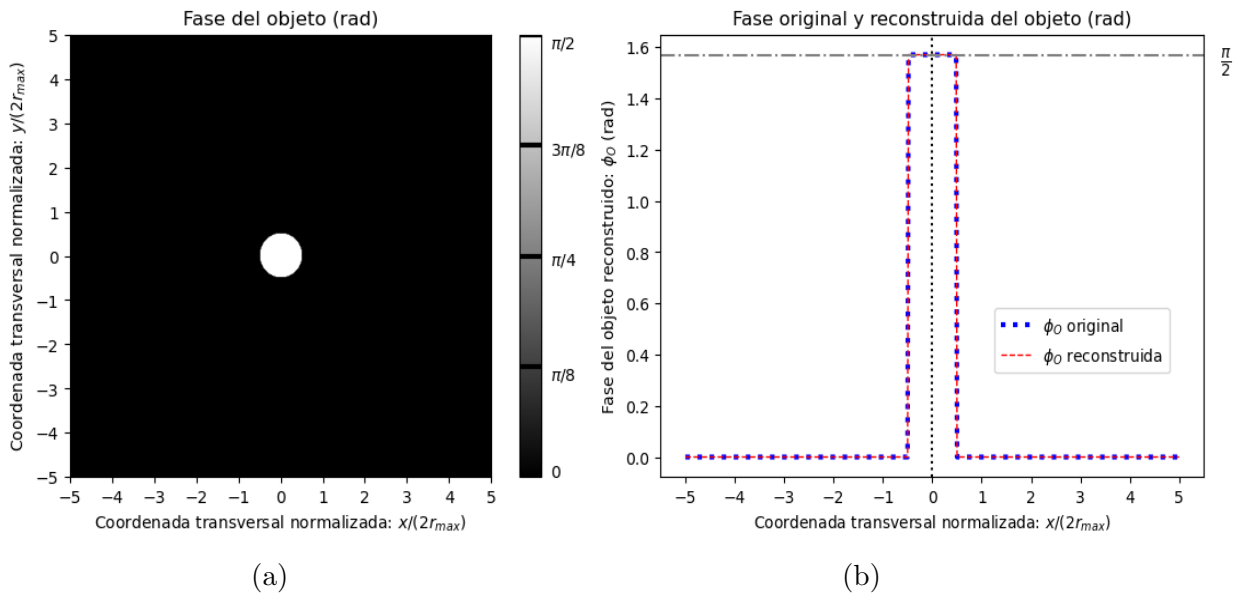


Figura 11: (a) Disco de fase constante (rad) de $r_{max} = 0,5$ sobre un fondo uniforme en el plano del objeto ($z = 0$); y (b) perfiles de la fase reconstruida y de la original para $y = 0$.

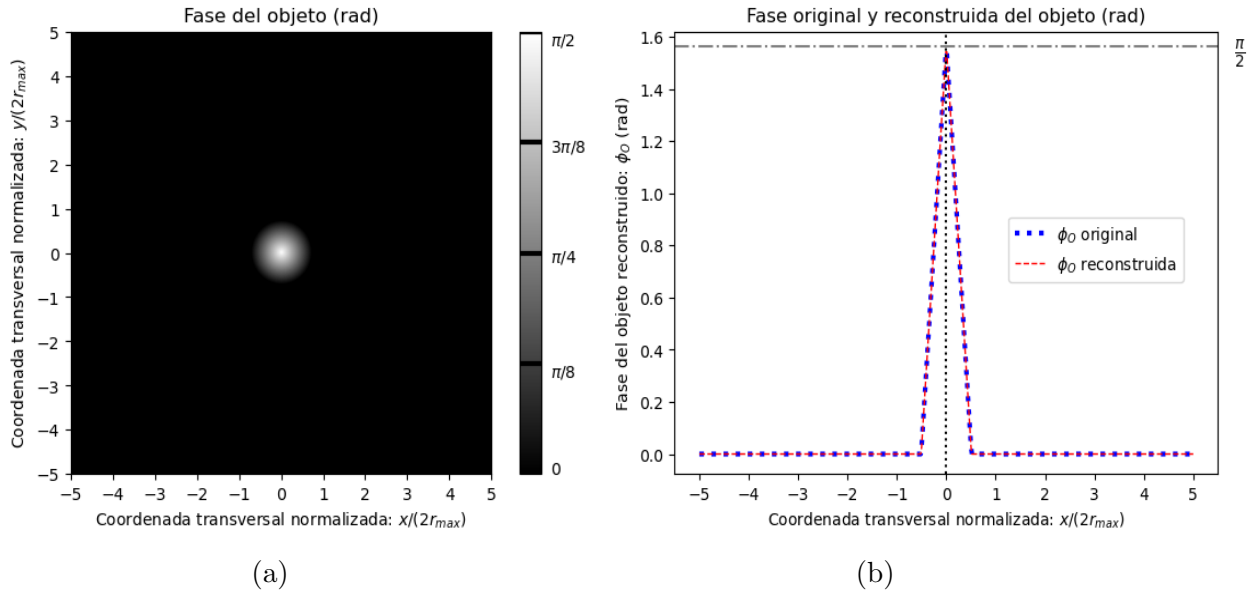


Figura 12: (a) Variación lineal de un disco de fase (rad) de $r_{max} = 0,5$ sobre un fondo uniforme en el plano del objeto ($z = 0$); y (b) perfiles de la fase reconstruida y de la original para $y = 0$.

configuraciones en eje, tanto cuando el holograma se registra sobre el plano objeto como si se graba sobre un patrón de difracción.

5. Conclusiones

Con este trabajo se ha introducido el concepto de la holografía digital. En particular, ha servido para profundizar y entender el proceso de reconstrucción del campo electromagnético emergente de un objeto, inicialmente desconocido, a partir de provocar su interferencia con un haz de referencia en configuraciones en eje.

En primer lugar, se han presentado y comprendido los principios teóricos en los que se fundamenta el concepto clásico de la holografía. Después, se ha demostrado que, en la reconstrucción, se forma un halo de luz junto a dos imágenes del objeto, lo que dificulta al observador la visualización de la imagen reconstruida. Además, se ha comprobado que existe un solapamiento en la reconstrucción de las imágenes del objeto en configuraciones en eje. Para solucionar el problema del solapamiento, se ha comprendido el porqué es necesario complementar el concepto clásico de holografía con la tecnología más actual. Por ese motivo, a continuación, se ha estudiado el concepto de holografía digital y, a partir de él, se han expuesto y desarrollado las dos técnicas más utilizadas para reconstruir la distribución de amplitud emitida por un objeto. Por un lado, se ha presentado la técnica de filtrado para montajes fuera de eje y por consiguiente, se han expuesto sus limitaciones cuando la banda espectral del objeto es suficientemente grande o cuando el ángulo interferencial es significativamente pequeño. Por otro lado, se ha expuesto el método de variación de fase como una técnica efectiva de formación de imágenes cuando la técnica

de filtrado no lo es. En concreto, se ha desarrollado para el caso en el que la onda objeto y la onda de referencia interactúan entre sí de forma cuasi paralela. Además, con la aplicación de estas técnicas, no solo se ha conseguido solucionar las limitaciones de la holografía clásica, si no que también se mejora la calidad y la resolución de la imagen reconstruida. Dicho de otro modo, en la reconstrucción de la holografía digital, se consigue eliminar tanto el efecto de la imagen gemela como el halo de luz. Por consiguiente, en este trabajo, se ha comprendido que la holografía digital es una técnica de formación de imágenes que permite recrear una imagen limpia del objeto independientemente del tipo de configuración. Para finalizar, y con el fin de comprobar la validez del método de variación de fase en configuraciones en eje, se ha llevado a cabo la simulación del método para dos objetos de fase diferentes: uno de fase constante sobre un fondo uniforme y otro con variación lineal de fase desde el centro hasta el borde.

Se puede concluir que la holografía digital es una técnica que complementa el mecanismo de la holografía clásica con los métodos digitales más avanzados para el tratamiento de datos. La digitalización de la holografía permite monitorizar los datos extraídos del holograma, facilita la aplicación de métodos numéricos complejos y permite simular computacionalmente tanto la etapa de registro como la etapa de reconstrucción en el ordenador. Por lo tanto, la holografía digital no sufre las restricciones que sí limitaban a la holografía clásica y, además, permite solucionar la pérdida de información en montajes en eje.

Conclusions

This work has introduced the concept of digital holography. In particular, it has served to deepen and understand the process of reconstructing the emerging electromagnetic field of an object, initially unknown, by causing its interference with a reference beam in on-axis configurations.

First, the theoretical principles underlying the classical concept of holography were presented and understood. Then, it has been shown that, in the reconstruction, a halo of light is formed next to two images of the object. This makes it difficult for the observer to see the reconstructed image. Next, it has been verified that there is an overlap in the reconstruction of the images of the object in configurations on axis. To solve the problem of overlapping, it has been understood why it is necessary to complement the classical concept of holography with the latest technology. For this reason, the concept of digital holography has been studied in the following. The two techniques usually used to reconstruct the amplitude distribution emitted by an object have been presented and developed in this work. On one hand, the filtering technique for off-axis setups has been presented. Consequently, its limitations have been exposed when the spectral band of the object is sufficiently large or when the interference angle is significantly small. On the other hand, the phase-shifting method has been exposed as an effective imaging technique when the filtering technique is not effective. In particular, it has been developed for the case in which the object wave and the reference wave interact in quasi-parallel directions. Moreover, these techniques solve the limitations of classical holography and improves the quality and resolution of the reconstructed image. This is a consequence of eliminate the twin

image effect and the light halo that hinders the observation of the image. Therefore, in this work, it has been realised that digital holography is an imaging technique that makes it possible to recreate a good image of the object independently of the type of configuration. Finally, to check the validity of the phase variation method in axis configurations, it has been simulated for two different phase objects: a constant phase disc and a linear variation from centre to edge.

In conclusion, digital holography is a technique that complements the mechanism of classical holography with the most advanced digital methods for data processing. Consequently, digital holography allows the monitoring of data extracted from the hologram, facilitates the application of complex numerical methods and can be used to simulate the registration and reconstruction of an image on the computer. Therefore, it is not limited by the restrictions of the classic holography and allows to solve the loss of information in on-axis configurations.

Referencias

- [1] D. Gabor. Holography, 1948-1971. *Proceedings of the IEEE*, 60(6):655–668, 1972.
- [2] E.N. Leith and J. Upatnieks. Wavefront reconstruction with continuous-tone objects. *Journal of the Optical Society of America*, 53(12):1377–1381, 1963.
- [3] P. Hariharan. *Optical Holography: Principles, Techniques and Applications*. Cambridge University Press, 1996.
- [4] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, 2019.
- [5] O.K. Ersoy. *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*. John Wiley & Sons, 2006.
- [6] R.P Williams. A convolution and fourier-transform approach to paraxial optics. *Contemporary Physics*, 15(6):537–552, 1974.
- [7] T.C Poon. *Optical scanning holography with MATLAB*. Springer, 2007.
- [8] G. Nehmetallah, R. Aylo, and L. Williams. *Analog and digital holography with MATLAB*. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Press, 2015.
- [9] T.C. Poon and J.P. Liu. *Introduction to Modern Digital Holography: with MATLAB*. Cambridge University Press, 2014.
- [10] Y. Awatsuji, A. Fujii, T. Kubota, and O. Matoba. Parallel three-step phase-shifting digital holography. *Applied Optics*, 45(13):2995–3002, 2006.
- [11] J.D Gaskill. *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*. John Wiley & Sons, 1978.
- [12] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.