Elementos de Análisis para Computación e Informática
Examen Final

Martín Villanueva

23 de Mayo 2016

Tareas

Tarea 1. Sean (X,σ) y (X,σ') espacios métricos y quasimétricos respectivamente. Denotemos a la topología generada/inducida por σ por:

$$\mathscr{F} = \{A \subset X : \ A \text{ es un abierto, i.e: } \forall x \in A, \ \exists \delta > 0 : \ B_\sigma(x,\delta) \subset A\}$$

donde adicionalmente sabemos que una base para esta topología es:

$$B = \{B_\sigma(x,\sigma) : \ x \in X, \ \delta \ \in \mathbb{R}_0^+\}$$

y también consideremos la siguiente *posible* base para dicha topología:

$$B' = \{B_{\sigma'}(x,\delta) : \ x \in X, \ \delta \ \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}\}$$

se puede ver claramente que $B \subset B'$, pues B' contiene los mismos miembros que B, más las bolas de radio infinito (*que abarcan todo el espacio!*). Además como B es una base para $\mathscr{F}$, cualquier abierto $\in \mathscr{F}$ puede escribirse como una reunión de miembros de B.

Sea $\mathscr{A}$ un conjunto indexador (no necesariamente contable, ni finito), entonces cualquier reunión de bolas $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} B_\alpha$ $(B_\alpha \in B)$, puede formarse también con miembros de B', pues $B \subset B'$. Consideremos ahora reuniones sobre B'. Si entre los miembros no hay bolas de radio infinito, el resultado es análogo al anterior. Consideremos entonces el caso de una reunión con al menos una bola de radio infinito $B_{\sigma'}(x_0,\infty)$:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} B_\alpha \ (B_\alpha \in B') = B_{\sigma'}(x_0,\infty)$$

tal resultado puede obtenerse por reuniones de miembros en B como sigue:

$$\bigcup_{\delta > 0} B_\sigma(x_0,\delta)$$

Luego, hemos probado que cada reunión de miembros en una base, puede formarse con los miembros de la otra (y viceversa). Por lo tanto ambas son bases de $\mathscr{F}$, y entonces σ y σ' generan/inducen la misma topología.

Tarea 2.

Tarea 3.

Tarea 4. Veamos cada punto separadamente:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-1,1]}(t)| \, dt = \int_{-1}^{1} |1| dt = 2 < \infty$, por lo tanto $\chi_{[-1,1]} \in L^1$.
2. $\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i \omega t} dt$. Haciendo uso de la identidad de Euler:

$$\int_{-1}^{1} e^{i(-2\pi\omega t)} dt = \int_{-1}^{1} \cos(-2\pi\omega t) + i \sin(-2\pi\omega t) dt$$

tomando en cuenta la paridad de las funciones (*y que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es nula*):

$$\dots = \int_{-1}^{1} \cos(2\pi\omega t)dt - i \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin(2\pi\omega t)dt]}_{=0 \text{ por imparidad}} = \frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega}$$

3.

TAREA 5. Veamos por partes:

1. Denotemos como $f(t) = e^{-t^2}$ y $g(t) = (1+t^2)^{-1}$. En primer lugar, es fácil notar que las derivadas de $f(t)$ son la misma función multiplicadas por un polinomio (*regla de la cadena*). Cada nueva derivada aumenta en un grado el grado del polinomio respectivo, pues la derivada del exponente es $-2t$. Luego se puede escribir $f^{(n)}(t) = f(t)P_n(t)$, con P_n el polinomio de grado n respectivo. Entonces:

$$\lim_{|t|\to\infty} t^p D^q f(t) = \lim_{|t|\to\infty} t^p P_q(t) f(t) = \lim_{|t|\to\infty} \widehat{P}_{p+q}(t) f(t) = \lim_{|t|\to\infty} \frac{\widehat{P}_{p+q}(t)}{e^{t^2}} = 0 \quad \forall\ p,q \in \mathbb{N}_0,$$

lo último debido a que la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio en $t \to \infty$. En segundo lugar, para probar que $g \notin \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, basta mostrar que existe alguna combinación de $p,q \in \mathbb{N}_0$ tales que $t^p D^q g(t) \to 0$ no se satisface. Veamos para $p=3$ y $q=1$:

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{t^3}{1+t^2} \to \infty,$$

lo que completa la demostración.

2. Utilizando la notación de multi-índices para $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$, se quiere probar que los siguientes dos conjuntos:

$$\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) : x^\alpha D^\beta f(x) \to 0, \ \text{cuando} \ ||x||_2 \to 0, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n \right\} \tag{1}$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) : ||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n \right\} \tag{2}$$

corresponden a definiciones equivalentes del mismo conjunto. Partamos de $\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Desde la definición del límite, notar que $\forall\epsilon$ existe un $M(\epsilon)$ tales que:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| < \epsilon, \ \text{cuando} \ ||x||_2 < M(\epsilon).$$

Adicionalmente puesto que $x^\alpha D^\beta f$ es continua en $[-M,M]$, por el Teorema de Weierstrass [1], esta debe alcanzar su máximo en tal intervalo. Entonces:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq \max\left\{\epsilon, \max_{x\in[-M(\epsilon),M(\epsilon)]} x^\alpha D^\beta f(x)\right\} < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

que es equivalente a (2). Partamos ahora de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ (el cual existe y es finito). En primer lugar, denotemos a $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| = C_{\alpha,\beta}$. Si se define $\alpha+1 = (\alpha_1+1, \alpha_2+2, \cdots, \alpha_n+1)$, entonces:

$$Si \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^{\alpha+1} D^\beta f(x) \right| < \infty \Rightarrow \left| x^{\alpha+1} D^\beta f(x) \right| \leq C_{\alpha+1,\beta} < \infty \Rightarrow \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| \leq \frac{C_{\alpha+1,\beta}}{|x_1 \cdots x_n|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Y luego (usando el Teorema de Acotamiento [2]):

$$\lim_{||x||_2\to 0} \frac{C_{\alpha+1,\beta}}{|x_1\cdots x_n|} = 0 \Longrightarrow x^\alpha D^\beta f(x) \to 0 \ \text{cuando} \ ||x||_2 \to 0, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n,$$

que es la la definición en (1).

3.

4.

Tarea 6. Sea $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, se quiere demostrar que:

$$(2\pi i\gamma)^p D^q \widehat{f}(\gamma) = \left[D^p(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}} \quad \forall p,q \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Para ello se definen las siguientes dos proposiciones:

$$\mathbf{P}_1(p): \;\; (2\pi i\gamma)^p \widehat{f}(\gamma) = \left[D^p f(x)\right]^{\widehat{}} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0$$
$$\mathbf{P}_2(q): \;\; D^q \widehat{f}(\gamma) = [(-2\pi i x)^q f(x)]^{\widehat{}} \quad \forall q \in \mathbb{N}_0,$$

cuyos casos bases (derivados en [3]) son respectivamente:

$$(p=1): \;\; (2\pi i\gamma)\widehat{f}(\gamma) = \left[Df(x)\right]^{\widehat{}} \tag{4}$$
$$(q=1): \;\; D\widehat{f}(\gamma) = \left[(-2\pi i x) f(x)\right]^{\widehat{}}. \tag{5}$$

Probemos cada una por inducción. Para $\mathbf{P}_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(2\pi i\gamma)^{p+1}\widehat{f}(\gamma) &= (2\pi i\gamma)(2\pi i\gamma)^p \widehat{f}(\gamma) \\
&= (2\pi i\gamma)\left[D^p f(x)\right]^{\widehat{}} \\
&\overset{(\#)}{=} \left[D(D^p f(x))\right]^{\widehat{}} \\
&= \left[D^{p+1} f(x)\right]^{\widehat{}},
\end{aligned}$$

donde en (#) se uso al hipótesis inductiva (4). Se procede de igual modo para $\mathbf{P}_2$:

$$\begin{aligned}
D^{q+1}\widehat{f}(\gamma) &= D\left[D^q \widehat{f}(\gamma)\right] \\
&= D_\gamma\left[(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}} \\
&\overset{(\#)}{=} \left[(-2\pi i x)\,(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}} \\
&= \left[(-2\pi i x)^{q+1} f(x)\right]^{\widehat{}},
\end{aligned}$$

donde en (#) se uso la hipótesis inductiva (5). Como $\mathbf{P}_1(p) \Rightarrow \mathbf{P}_1(p+1)$, y $\mathbf{P}_2(q) \Rightarrow \mathbf{P}_2(q+1)$, se han demostrado entonces ambas proposiciones. Luego, se puede proceder como sigue:

$$(2\pi i\gamma)^p D^q \widehat{f}(\gamma) \overset{\mathbf{P}_2}{=} (2\pi i\gamma)^p \left[(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}} \overset{\mathbf{P}_1}{=} \left[D^p(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}},$$

lo que completa la prueba de (3).

Para la segunda parte, notar que aplicando valor absoluto a (3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left|\gamma^p D^q \widehat{f}(\gamma)\right| &= \frac{1}{(2\pi)^p}\left|\int_{\mathbb{R}} (-2\pi i)^q D^p_x x^q e^{-2\pi i\gamma x} dx\right| \\
&\leq (2\pi)^{q-p}\int_{\mathbb{R}} \left|D^p_x x^q f(x)\right| dx \\
&= (2\pi)^{q-p}\;\; ||D^p_x x^q f(x)||_{L^1} < \infty,
\end{aligned}$$

puesto que $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow D^p x^q f \in \mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y que $\mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Entonces como $\widehat{f} \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y satisface $\left|\gamma^p D^q \widehat{f}(\gamma)\right| < \infty$, se concluye que $\widehat{f} \in \mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, i.e, la transformada de Fourier mapea $\mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en sí mismo.

Tarea 7. Se listan a continuación algunos ejemplos de funciones $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (la extensión a varias variables se muestra a continuación):

1. Un ejemplo clásico es la función *bump*, definida como:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| >= 1, \end{cases}$$

cuya grafica se ve en Figura 1. Esta puede ser fácilmente extendida a otros invervalos de compacidad:

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)^2-1}} & |x| < r \\ 0 & |x| >= r, \end{cases}$$

que tiene soporte compacto en $[a-r, a+r]$ con $a, r \in \mathbb{R}$.

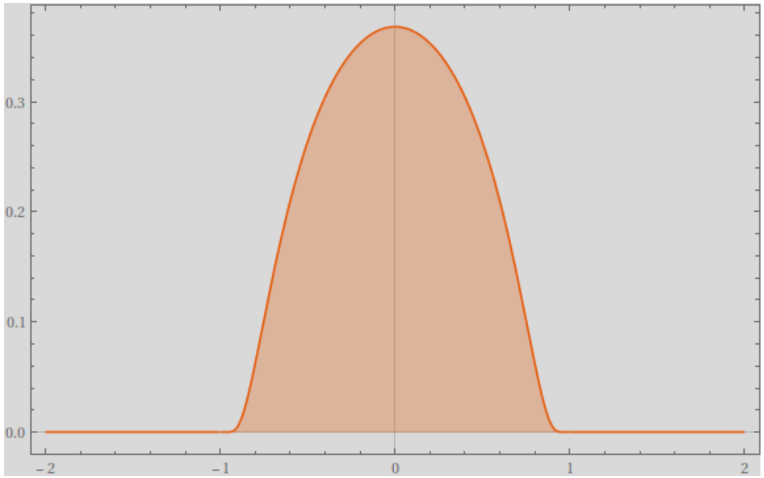

Figura 1: Gráfico de función *bump* clásica.

2. Otra construcción interesante considera a la función $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$, cuya "gracia" es que está en $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$. Con esta es posible definir:

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f(x) - f(1-x)} \tag{6}$$

la cual tambien pertenece a $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, pero ademas $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$. Entonces una función de soporte compacto se puede construir como sigue:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \phi(x) & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq a \\ \phi(-(x - [a+1])) & a < x < a+1 \\ 0 & x \geq a+1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}\ (> 1)$. Que básicamente consiste en poner la "copia" invertida de ϕ (respecto al eje y) y trasladada a la derecha en $a+1$, y definiendo el valor de la función en el intervalo intermedio $[1, a]$ como 1 para asegurar la continuidad. En la Figura 2 se muestra esta contrucción con $a = 2$.

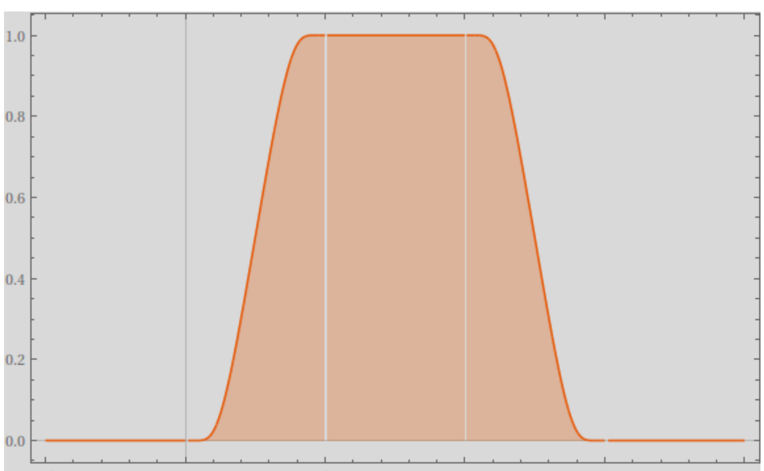

Figura 2: Construcción de función de soporte compacto.

Notar que la misma construcción puede realizarse siguiendo el mismo procedimiento y usando (6), pero con alguna otra función f que cumpla $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$.

Por último, dada una función $\psi \in \mathscr{C}_C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ con soporte $[a,b]$ y $a,b\in\mathbb{R}$, esta puede ser fácilmente extendida a una función $\in \mathscr{C}_C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, bajo la siguiente construcción:

$$\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\cdots\,\psi(x_n), \tag{7}$$

cuyo soporte compacto es $[a,b]\times \overset{n-2\text{ veces}}{\cdots} \times [a,b] = [a,b]^n$. En la Figura 3 se muestra tal construcción para la función *bump* clásica en dos variables.

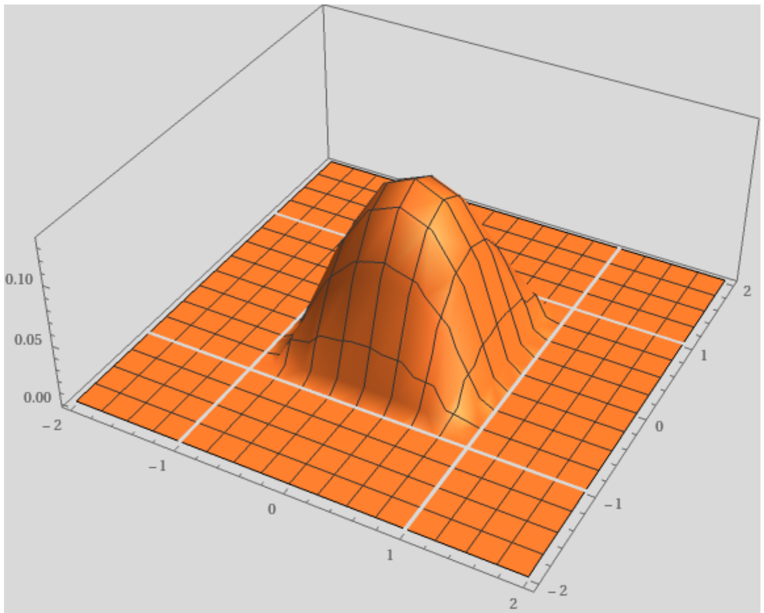

Figura 3: Gráfico de función *bump* clásica en dos variables.

Tarea 8. Sea $f \in \mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ una función con soporte compacto $\mathrm{supp}(f)\subset[a,b]\subset[0,T]$ $(0<a<b<T)$, con la respectiva prolongación periódica (de periodo T)

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-nT), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Considerando la norma uniforme $||f||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Como ya probamos anteriormente (Weierstrass):

$$f\in\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow 0\le ||f||_\infty < \infty.$$

Debido a la construcción de la prologación periódica (8), se sabe que no existen traslapes entre las *copias* de f en los distintos periodos. Entonces:

$$||g||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-nT)\right| \overset{(\#)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x-nT)| \;\; (\forall n\in\mathbb{Z}) = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = ||f||_\infty < \infty$$

donde (#) es posible, pues como se hizo notar, todas las copias de f son iguales y sin traslapes. Puesto que $||g||_\infty<\infty$, se comprueba entonces la convergencie de la serie.

Tarea 9.

Referencias

[1] Teorema de Weierstrass. https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem. Visitado: 23-05-2016.

[2] Teorema del Acotamiento. https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem. Visitado: 23-05-2016.

[3] H. Dym and H.P McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, New York, 1972.