

# ELEMENTOS DE ANÁLISIS PARA COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

## EXAMEN FINAL

Martín Villanueva

23 de Mayo 2016

### TAREAS

**TAREA 1.** Sean  $(X, \sigma)$  y  $(X, \sigma')$  espacios métricos y quasimétricos respectivamente. Denotemos a la topología generada/inducida por  $\sigma$  por:

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \text{ es un abierto, i.e: } \forall x \in A, \exists \delta > 0 : B_\sigma(x, \delta) \subset A\}$$

donde adicionalmente sabemos que una base para esta topología es:

$$B = \{B_\sigma(x, \sigma) : x \in X, \delta \in \mathbb{R}_0^+\}$$

y también consideremos la siguiente *posible* base para dicha topología:

$$B' = \{B_{\sigma'}(x, \delta) : x \in X, \delta \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}\}$$

se puede ver claramente que  $B \subset B'$ , pues  $B'$  contiene los mismos miembros que  $B$ , más las bolas de radio infinito (*que abarcan todo el espacio*). Además como  $B$  es una base para  $\mathcal{F}$ , cualquier abierto  $\in \mathcal{F}$  puede escribirse como una reunión de miembros de  $B$ .

Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto indexador (no necesariamente contable, ni finito), entonces cualquier reunión de bolas  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$  ( $B_\alpha \in B$ ), puede formarse también con miembros de  $B'$ , pues  $B \subset B'$ . Consideremos ahora reuniones sobre  $B'$ . Si entre los miembros no hay bolas de radio infinito, el resultado es análogo al anterior. Consideremos entonces el caso de una reunión con al menos una bola de radio infinito  $B_{\sigma'}(x_0, \infty)$ :

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha \ (B_\alpha \in B') = B_{\sigma'}(x_0, \infty)$$

tal resultado puede obtenerse por reuniones de miembros en  $B$  como sigue:

$$\bigcup_{\delta > 0} B_\sigma(x_0, \delta)$$

Luego, hemos probado que cada reunión de miembros en una base, puede formarse con los miembros de la otra (y viceversa). Por lo tanto ambas son bases de  $\mathcal{F}$ , y entonces  $\sigma$  y  $\sigma'$  generan/inducen la misma topología.

**TAREA 2.**

**TAREA 3.**

**TAREA 4.** Veamos cada punto separadamente:

1.  $\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-1,1]}(t)| dt = \int_{-1}^1 |1| dt = 2 < \infty$ , por lo tanto  $\chi_{[-1,1]} \in L^1$ .

2.  $\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \omega t} dt$ . Haciendo uso de la identidad de Euler:

$$\int_{-1}^1 e^{i(-2\pi \omega t)} dt = \int_{-1}^1 \cos(-2\pi \omega t) + i \sin(-2\pi \omega t) dt$$

tomando en cuenta la paridad de las funciones (y que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es nula):

$$\dots = \int_{-1}^1 \cos(2\pi\omega t) dt - i \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(2\pi\omega t) dt}_{=0 \text{ por imparidad}} = \frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega} \Big|_{-1}^1 = \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega}$$

3.

En

**TAREA 5.** Veamos por partes:

1. Denotemos como  $f(t) = e^{-t^2}$  y  $g(t) = (1 + t^2)^{-1}$ . En primer lugar, es fácil notar que las derivadas de  $f(t)$  son la misma función multiplicadas por un polinomio (*regla de la cadena*). Cada nueva derivada aumenta en un grado el grado del polinomio respectivo, pues la derivada del exponente es  $-2t$ . Luego se puede escribir  $f^{(n)}(t) = f(t)P_n(t)$ , con  $P_n$  el polinomio de grado  $n$  respectivo. Entonces:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p D^q f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p P_q(t) f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \hat{P}_{p+q}(t) f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\hat{P}_{p+q}(t)}{e^{t^2}} = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0,$$

lo último debido a que la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio en  $t \rightarrow \infty$ . En segundo lugar, para probar que  $g \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , basta mostrar que existe alguna combinación de  $p, q \in \mathbb{N}_0$  tales que  $t^p D^q g(t) \rightarrow 0$  no se satisface. Veamos para  $p = 3$  y  $q = 1$ :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{t^3}{1 + t^2} \rightarrow \infty,$$

lo que completa la demostración.

2.

3.

4.

**TAREA 6.**

**TAREA 7.** Se listan a continuación algunos ejemplos de funciones  $f \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  (la extensión a varias variables se muestra a continuación):

1. Un ejemplo clásico es la función *bump*, definida como:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$$

cuya grafica se ve en Figura 1. Esta puede ser fácilmente extendida a otros intervalos de compacidad:

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)^2-1}} & |x| < r \\ 0 & |x| \geq r, \end{cases}$$

que tiene soporte compacto en  $[a - r, a + r]$  con  $a, r \in \mathbb{R}$ .

2. Otra construcción interesante considera a la función  $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ , cuya “gracia” es que está en  $\mathcal{C}^\infty$  y  $f(0) = 0$ . Con esta es posible definir:

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f(x) - f(1-x)} \tag{1}$$

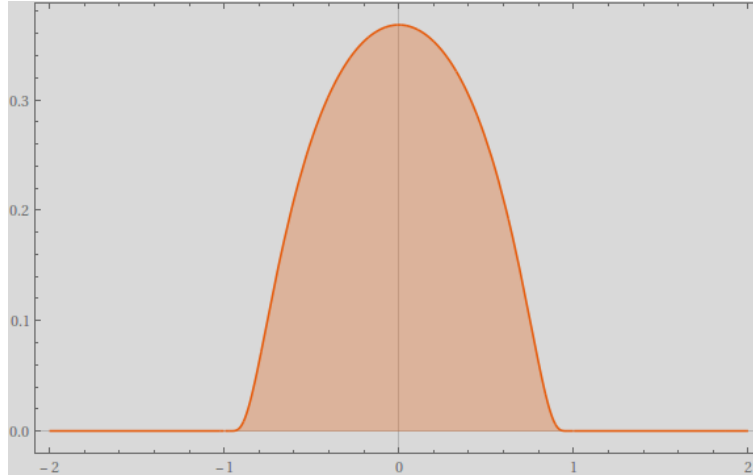


Figura 1: Gráfico de función *bump* clásica.

la cual también pertenece a  $\mathcal{C}^\infty$ , pero además  $\phi(0) = 0$  y  $\phi(1) = 1$ . Entonces una función de soporte compacto se puede construir como sigue:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \phi(x) & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq a \\ \phi(-(x - [a + 1])) & a < x < a + 1 \\ 0 & x \geq a + 1 \end{cases}$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  ( $> 1$ ). Que básicamente consiste en poner la “copia” invertida de  $\phi$  (respecto al eje  $y$ ) y trasladada a la derecha en  $a + 1$ , y definiendo el valor de la función en el intervalo intermedio  $[1, a]$  como 1 para asegurar la continuidad. En la Figura 2 se muestra esta construcción con  $a = 2$ .

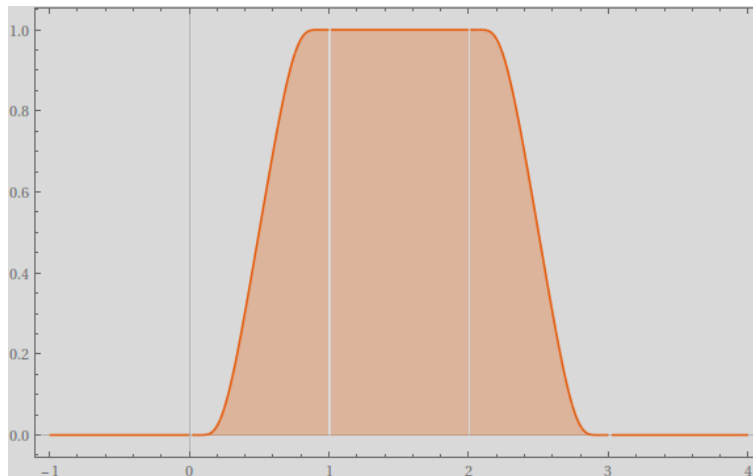


Figura 2: Construcción de función de soporte compacto.

Notar que la misma construcción puede realizarse siguiendo el mismo procedimiento y usando (1), pero con alguna otra función  $f$  que cumpla  $f \in \mathcal{C}^\infty$  y  $f(0) = 0$ .

Por último, dada una función  $\psi \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  con soporte  $[a, b]$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , esta puede ser fácilmente extendida a una función  $\in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , bajo la siguiente construcción:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_1) \psi(x_2) \cdots \psi(x_n), \quad (2)$$

cuyo soporte compacto es  $[a, b] \times \overset{n-2 \text{ veces}}{\dots} \times [a, b] = [a, b]^n$ . En la Figura 3 se muestra tal construcción para la función *bump* clásica en dos variables.

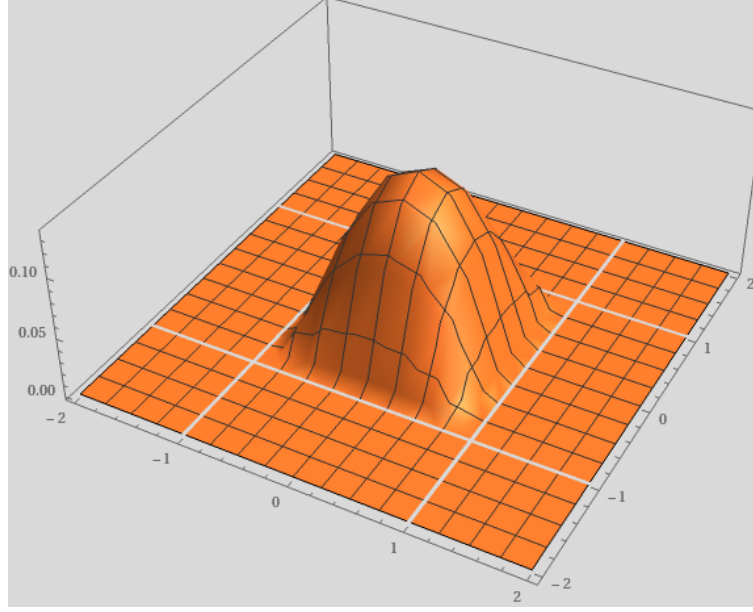


Figura 3: Gráfico de función *bump* clásica en dos variables.

**TAREA 8.** Sea  $f \in \mathcal{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  una función con soporte compacto  $\text{supp}(f) \subset [a, b] \subset [0, T]$  ( $0 < a < b < T$ ), con la respectiva prolongación periódica (de periodo  $T$ )

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - nT), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Considerando la norma uniforme  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . Como ya probamos anteriormente (Weierstrass):

$$f \in \mathcal{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow 0 \leq \|f\|_\infty < \infty.$$

Debido a la construcción de la prologación periódica (3), se sabe que no existen traslapes entre las *copias* de  $f$  en los distintos periodos. Entonces:

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - nT) \right| \stackrel{(\#)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x - nT)| \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty < \infty$$

donde (#) es posible, pues como se hizo notar, todas las copias de  $f$  son iguales y sin traslapes. Puesto que  $\|g\|_\infty < \infty$ , se comprueba entonces la convergencia de la serie.

**TAREA 9.**

## REFERENCIAS