Elementos de Análisis para Computación e Informática
Problemas de Métricas, Normas, y Sucesiones

Martín Villanueva

5 de abril 2016

1. Definiciones

Se listan a continuación algunas de las definiciones más importantes, utilizadas en la resolución de los problemas.

- **Densidad:** Un subconjunto $\mathbb{A}$ de un espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ es *denso* (en $\mathbb{X}$), si para cada $x \in \mathbb{X}$, cualquier vecindad de x contiene al menos un elemento de A. Más formalmente:

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{A} : \rho(x, a) < \epsilon \tag{1}$$

- **Separable:** Un espacio métrico $(\mathbb{X}, \rho)$ es *separable*, si existe un subconjunto numerable $\mathbb{D} \subset \mathbb{X}$ denso en $\mathbb{X}$.

2. Problemas

1. Se procede a verificar que ρ es una métrica sobre $S(\mathbb{N})$:

   - *(no negatividad)* Por definición, $\rho : S(\mathbb{N}) \times S(\mathbb{N}) \to \{0, \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\}$.
   - *(indiscernibles)* Por definición $\rho(\{a_n\}, \{b_n\}) = 0 \leftrightarrow \{a_n\} = \{b_n\}$.
   - *(simetría)* Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \in S(\mathbb{N})$ dos sucesiones distintas. Luego:

   $$\rho(\{a_n\}, \{b_n\}) = (\text{mín}\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\})^{-1} = (\text{mín}\{k \in \mathbb{N} : b_k \neq a_k\})^{-1} = \rho(\{b_n\}, \{a_n\}).$$

   - *(desigualdad triangular)* Sean $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S(\mathbb{N})$, y consideremos k_1 como el primer índice donde las sucesiones $(\{a_n\}, \{b_n\})$ difieren, y k_2 el análogo para $(\{b_n\}, \{c_n\})$. Luego se tienen dos casos:
     1. $(k_2 > k_1)$. Esto implíca que $a_{k_1} \neq b_{k_1} = c_{k_1}$. Entonces $\rho(\{a_n\}, \{c_n\}) = \frac{1}{k_1} > \frac{1}{k_2}$.
     2. $(k_1 > k_2)$. De modo análogo $a_{k_2} = b_{k_2} \neq c_{k_2}$. Entonces $\rho(\{a_n\}, \{c_n\}) = \frac{1}{k_2} > \frac{1}{k_1}$.

     Se concluye de ambos casos que $\rho(\{a_n\}, \{c_n\}) = \text{máx}(\rho(\{a_n\}, \{b_n\}),\ \rho(\{b_n\}, \{c_n\})) \leq \rho(\{a_n\}, \{b_n\}) + \rho(\{b_n\}, \{c_n\})$.

   Denotemos la sucesión nula por $\bar{\mathbf{0}}$, entonces la bola unitaria centrada en $\bar{\mathbf{0}}$ queda descrita por:

   $$B_u = \{\{a_n\} \in S(\mathbb{N}) :\ \rho(\{a_n\}, \bar{\mathbf{0}}) \leq 1\} \tag{2}$$

   sabemos por definición que $\rho(\{a_n\}, \bar{\mathbf{0}}) \leq 1,\ \forall \{a_n\} \in S(\mathbb{N})$ y por lo tanto $B_u \equiv S(\mathbb{N})$. Definamos $B'_u = B_u \setminus \{\bar{\mathbf{0}}\}$, claramente $B'_u \subset S(\mathbb{N})$ es un subconjunto numerable ($S(\mathbb{N})$ es numerable, y cualquier subconjunto de un conjunto numerable, también lo es). Como B'_u y $S(\mathbb{N})$ coinciden en todos sus elementos excepto en $\bar{\mathbf{0}}$, basta con probar que:

   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists \{a_n\} \in B'_u :\ \rho(\{a_n\}, \bar{\mathbf{0}}) < \epsilon \tag{3}$$

   tal sucesión puede construirse como sigue:

   $$a_n = \begin{cases} 1 & n = n_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

   con $n_1 (\in \mathbb{N}) \to \infty$ se satisface (3).

5. Requerimos entonces probar que, dada una función $f \in PC[a,b]$, $\exists g \in S[a,b]$ tal que $d(f,g) < \epsilon$, con ϵ arbitrariamente pequeño. Considerando un subconjunto $S'[a,b] \subset S[a,b]$ que cumple lo siguiente:

   1. Opera sobre particiones $\mathfrak{B}$ regulares, i.e, con espaciado constante e igual a Δt.
   2. Se cumple que $\alpha_i = f(t_{i-1} + \frac{\Delta t}{2})$

   luego, considerando las funciones $g \in S'[a,b]$:

$$
\begin{aligned}
d(f,g) &= \sup_{t\in[a,b]} \left| f(t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i(t) \right| \\
&= \text{máx}\left(\sup_{t\in[t_0,t_1)} |f(t)-\alpha_1|,\ \sup_{t\in[t_1,t_2)} |f(t)-\alpha_2|,\ \dots\ \sup_{t\in[t_{n-1},t_n)} |f(t)-\alpha_n| \right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

   y como f es continua en $[a,b]$, entonces:

$$
\lim_{\Delta t\to 0} \left| f(t) - f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \right| = 0; \quad t \in [t_{i-1}, t_i),\ \forall i = 1:n \tag{5}
$$

   implica directamente que $\lim\limits_{\Delta t\to 0} d(f,g) = 0$. Dicho de otro modo, es posible hacer la partición de $\mathfrak{B}$ lo suficientemente fina, de modo que se cumpla $d(f,g) < \epsilon$. $\square$