

# ELEMENTOS DE ANÁLISIS PARA COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

## EXAMEN FINAL

Martín Villanueva

27 de Mayo 2016

### TAREAS

**TAREA 1.** Sean  $(X, \sigma)$  y  $(X, \sigma')$  espacios métricos y *quasimétricos* respectivamente. Denotemos a la topología generada/inducida por  $\sigma$  por:

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \text{ es un abierto, i.e: } \forall x \in A, \exists \delta > 0 : B_\sigma(x, \delta) \subset A\}$$

donde adicionalmente sabemos que una base para esta topología es:

$$B = \{B_\sigma(x, \sigma) : x \in X, \delta \in \mathbb{R}_0^+\}$$

y también consideremos la siguiente *posible* base para dicha topología:

$$B' = \{B_{\sigma'}(x, \delta) : x \in X, \delta \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}\}$$

se puede ver claramente que  $B \subset B'$ , pues  $B'$  contiene los mismos miembros que  $B$ , más las bolas de radio infinito (*que abarcan todo el espacio!*). Además como  $B$  es una base para  $\mathcal{F}$ , cualquier abierto  $\in \mathcal{F}$  puede escribirse como una reunión de miembros de  $B$ .

Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto indexador (no necesariamente contable, ni finito), entonces cualquier reunión de bolas  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha$  ( $B_\alpha \in B$ ), puede formarse también con miembros de  $B'$ , pues  $B \subset B'$ . Consideremos ahora reuniones sobre  $B'$ . Si entre los miembros no hay bolas de radio infinito, el resultado es análogo al anterior. Consideremos entonces el caso de una reunión con al menos una bola de radio infinito  $B_{\sigma'}(x_0, \infty)$ :

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha \ (B_\alpha \in B') = B_{\sigma'}(x_0, \infty)$$

tal resultado puede obtenerse por reuniones de miembros en  $B$  como sigue:

$$\bigcup_{\delta > 0} B_\sigma(x_0, \delta)$$

Luego, hemos probado que cada reunión de miembros en una base, puede formarse con los miembros de la otra (y viceversa). Por lo tanto ambas son bases de  $\mathcal{F}$ , y entonces  $\sigma$  y  $\sigma'$  generan/inducen la misma topología.

**TAREA 2.** Se definen  $(S, \sigma)$  un espacio métrico, el conjunto  $E \neq \emptyset$ , el conjunto de funciones  $\mathcal{F}(E, S) = \{f : E \rightarrow S\}$ , y la aplicación:

$$\Sigma(f, g) = \sup_{t \in E} \sigma(f(t), g(t)), \quad \text{con } f, g \in \mathcal{F}(E, S),$$

donde se quiere probar que  $(\mathcal{F}(E, S), \Sigma)$  es un espacio *quasimétrico*. Ya que  $\sigma(f(t), g(t))$  ( $\forall t \in E$ ) puede no estar acotado superiormente, entonces  $\Sigma(f, g)$  puede ser infinita. Se verifica que  $\Sigma$  cumple los axiomas usuales para una métrica, para  $f, g, h \in \mathcal{F}(E, S)$ :

1.  $(\Sigma(f, g) \geq 0)$ . Se sigue directamente desde el codominio de  $\sigma : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .
2.  $(\Sigma(f, g) = 0 \leftrightarrow f = g)$ . Como  $\Sigma(f, g) = 0 \leftrightarrow \sup_{t \in E} \sigma(f(t), g(t)) = 0$ , por la definición de supremo esto es equivalente a  $\sigma(f(t), g(t)) \leq 0$ . Ya que  $\sigma$  es una métrica de  $S$ , la única posibilidad es que  $\sigma(f(t), g(t)) = 0 \leftrightarrow f(t) = g(t)$ .

3.  $(\Sigma(f, g) = \Sigma(g, f))$ . Dada la simetría de la métrica  $\sigma$ , entonces:

$$\Sigma(f, g) = \sup_{t \in E} \sigma(f(t), g(t)) = \sup_{t \in E} \sigma(g(t), f(t)) = \Sigma(g, f).$$

4.  $(\Sigma(f, g) \leq \Sigma(f, h) + \Sigma(h, g))$ . Si se fija un  $t_0 \in E$ , luego para  $f(t_0), g(t_0), h(t_0) \in S$  se cumple:

$$\sigma(f(t_0), g(t_0)) \leq \sigma(f(t_0), h(t_0)) + \sigma(h(t_0), g(t_0)), \quad (1)$$

pues  $\sigma$  es métrica. Como (1) es válida  $\forall t_0 \in E$ , entonces se verifica que:

$$\sup_{t \in E} \sigma(f(t), g(t)) \leq \sup_{t \in E} \sigma(f(t), h(t)) + \sup_{t \in E} \sigma(h(t), g(t)).$$

Dado que  $\Sigma : \mathcal{F}(E, S) \times \mathcal{F}(E, S) \rightarrow [0, \infty]$  y verifica los axiomas de métrica, entonces  $(\mathcal{F}(E, S), \Sigma)$  es un espacio *quasi-métrico*.

**TAREA 3.** Demostrar que  $Z$  es cerrado en  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ , es equivalente a demostrar que  $Y = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \setminus Z$  es abierto. Para cada  $\phi \in Y$  y  $\delta > 0$  es posible definir las bolas abiertas:

$$B(\phi, \delta) = \left\{ \psi \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) : \Sigma(\phi, \psi) = \sup_{x \in X} |\phi(x) - \psi(x)| < \delta \right\}.$$

Notar entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \sup_{x \in X} |\phi(x) - \psi(x)| < \delta &\Leftrightarrow |\phi(x) - \psi(x)| < \delta \quad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow \phi(x) - \delta < \psi(x) < \phi(x) + \delta \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Si se fija  $x$  en la última expresión, y se toma un  $y \in X$  (también fijo) tal que  $0 < d(x, y) < \phi(x) - \psi(y)$ , entonces se puede definir  $\delta := \delta_{x,y} = \phi(x) - \psi(y) - d(x, y)$  el cual claramente es positivo, pero:

$$\phi(x) - \delta = \phi(x) - (\phi(x) - \psi(y) - d(x, y)) = d(x, y) + \psi(y) < \psi(x), \quad (2)$$

donde (2) es válido para todo  $x, y \in X$  (fijos pero arbitrarios) que cumplan  $0 < d(x, y) < \phi(x) - \psi(y)$ . Dado que no se satisface  $\psi(x) - \psi(y) \leq d(x, y)$ , entonces  $\psi \notin Z$  y por tanto  $\psi \in Y$ . Además, puesto que:

$$\forall \phi \in Y, \exists \delta = \delta_{x,y} = \phi(x) - \psi(y) - d(x, y), \text{ con } 0 < d(x, y) < \phi(x) + \psi(y), \text{ tal que } B(\phi, \delta) \subset Y,$$

se concluye que  $Y$  es abierto, y por tanto  $Z$  es cerrado.

**TAREA 4.** Veamos cada punto separadamente:

1.  $\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-1,1]}(t)| dt = \int_{-1}^1 |1| dt = 2 < \infty$ , por lo tanto  $\chi_{[-1,1]} \in L^1$ .
2.  $\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \omega t} dt$ . Haciendo uso de la identidad de Euler:  

$$\int_{-1}^1 e^{i(-2\pi \omega t)} dt = \int_{-1}^1 \cos(-2\pi \omega t) + i \sin(-2\pi \omega t) dt$$

tomando en cuenta la paridad de las funciones (y que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es nula):

$$\dots = \int_{-1}^1 \cos(2\pi \omega t) dt - i \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(2\pi \omega t) dt}_{=0 \text{ por imparidad}} = \frac{\sin(2\pi \omega t)}{2\pi \omega} \Big|_{-1}^1 = \frac{\sin(2\pi \omega)}{\pi \omega}$$

3. Para probar que  $\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t) \notin L^1$ , basta probar que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t)(\omega)| d\omega$  diverge. Para ello se considera que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t)(\omega)| d\omega \geq \int_0^{+\infty} |\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t)(\omega)| d\omega.$$

Dada la continuidad de  $\widehat{\chi_{[-1,1]}}(t) = \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega}$ , es posible hacer la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \right| d\omega &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \left| \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \right| d\omega \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{|\sin(2\pi\omega)|}{\pi\omega} d\omega \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{|\sin(2\pi\omega)|}{\pi k} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underbrace{\int_{k-1}^k |\sin(2\pi\omega)| d\omega}_{= \frac{2}{\pi} (*)} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty, \end{aligned}$$

donde (\*) resulta de integrar  $|\sin(2\pi\omega)|$  sobre un periodo cualquiera de la función, y la divergencia proviene de la divergencia de la serie armónica.

**TAREA 5.** Veamos por partes:

1. Denotemos como  $f(t) = e^{-t^2}$  y  $g(t) = (1+t^2)^{-1}$ . En primer lugar, es fácil notar que las derivadas de  $f(t)$  son la misma función multiplicadas por un polinomio (*regla de la cadena*). Cada nueva derivada aumenta en un grado el grado del polinomio respectivo, pues la derivada del exponente es  $-2t$ . Luego se puede escribir  $f^{(n)}(t) = f(t)P_n(t)$ , con  $P_n$  el polinomio de grado  $n$  respectivo. Entonces:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p D^q f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p P_q(t) f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \widehat{P}_{p+q}(t) f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\widehat{P}_{p+q}(t)}{e^{t^2}} = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0,$$

lo último debido a que la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio en  $t \rightarrow \infty$ . En segundo lugar, para probar que  $g \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , basta mostrar que existe alguna combinación de  $p, q \in \mathbb{N}_0$  tales que  $t^p D^q g(t) \rightarrow 0$  no se satisface. Veamos para  $p = 3$  y  $q = 1$ :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{t^3}{1+t^2} \rightarrow \infty,$$

lo que completa la demostración.

2. Utilizando la notación de multi-índices para  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ , se quiere probar que los siguientes dos conjuntos:

$$\mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : x^\alpha D^\beta f(x) \rightarrow 0, \text{ cuando } \|x\|_2 \rightarrow 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\} \quad (3)$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\} \quad (4)$$

corresponden a definiciones equivalentes del mismo conjunto. Partamos de  $\mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Desde la definición del límite, notar que  $\forall \epsilon$  existe un  $M(\epsilon)$  tales que:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| < \epsilon, \text{ cuando } \|x\|_2 < M(\epsilon).$$

Adicionalmente puesto que  $x^\alpha D^\beta f$  es continua en  $[-M, M]$ , por el Teorema de Weierstrass [2], esta debe alcanzar su máximo en tal intervalo. Entonces:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq \max \left\{ \epsilon, \max_{x \in [-M(\epsilon), M(\epsilon)]} |x^\alpha D^\beta f(x)| \right\} < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

que es equivalente a (4). Partamos ahora de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  (el cual existe y es finito). En primer lugar, denotemos a  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = C_{\alpha, \beta}$ . Si se define  $\alpha + 1 = (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_n + 1)$ , entonces:

$$\text{Si } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha+1} D^\beta f(x)| < \infty \Rightarrow |x^{\alpha+1} D^\beta f(x)| \leq C_{\alpha+1, \beta} < \infty \Rightarrow |x^\alpha D^\beta f(x)| \leq \frac{C_{\alpha+1, \beta}}{|x_1 \cdots x_n|},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Y luego (usando el Teorema de Acotamiento [3]):

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow 0} \frac{C_{\alpha+1,\beta}}{|x_1 \cdots x_n|} = 0 \implies x^\alpha D^\beta f(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } \|x\|_2 \rightarrow 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,$$

que es la definición en (3).

3. Se quiere probar que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  es un espacio normado completo. Para ello se definen las operaciones  $(+, \cdot)$  de forma usual, dando estructura de espacio vectorial a  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), +, \cdot)$ . Se verifica en primer lugar que  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$  es una norma ( $a \in \mathbb{C}$ , y  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ):

a)  $(\|a \cdot f\|_{\alpha,\beta} = |a| \|f\|_{\alpha,\beta})$ . Sigue directamente de la definición:

$$\|a \cdot f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (a f(x))| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a x^\alpha D^\beta f(x)| = |a| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = |a| \|f\|_{\alpha,\beta}$$

b)  $(\|f + g\|_{\alpha,\beta} \leq \|f\|_{\alpha,\beta} + \|g\|_{\alpha,\beta})$ . Sigue directamente de la linealidad de la derivada  $D^\beta$ :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f(x) + g(x))| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x) + x^\alpha D^\beta g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ |x^\alpha D^\beta f(x)| + |x^\alpha D^\beta g(x)| \right\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta g(x)| = \|f\|_{\alpha,\beta} + \|g\|_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

c)  $(\|f\|_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0)$ . Esta requiere un poco más de tratamiento. Notar que  $\|f\|_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow x^\alpha D^\beta f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Luego para todo  $x \neq 0$  se debe cumplir  $D^\beta f(x) = 0$ , y dada la continuidad de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces  $D^\beta f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  y se deduce que  $f$  tiene estructura polinomial. Ya que  $f(x) \rightarrow 0$  para  $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ , la única posibilidad es que  $f \equiv 0$ .

Para la completitud, notar que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  es un espacio de funciones que mapea  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , y puesto que  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  es un espacio métrico completo (*isomorfo* a  $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ ), entonces  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  debe serlo también (**Lema 2.** de guía). Verifiquemos de todos modos. Se definen sucesiones de Cauchy  $\{f_k\}$  de funciones  $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  con respecto a la métrica inducida por  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ , i.e:

$$\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall p, q > N: \|f_p - f_q\|_{\alpha,\beta} < \epsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f_p(x) - f_q(x))| < \epsilon. \quad (5)$$

Se debe verificar que  $\{f_k\}$  converge en el mismo  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Para ello se fijan múlti-índices  $(\alpha, \beta)$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  (de forma arbitraria), y se nota lo siguiente:

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\beta (f_p(x) - f_q(x))| &< \epsilon \\ |x^\alpha D^\beta f_p(x) - x^\alpha D^\beta f_q(x)| &< \epsilon \quad \forall p, q > N. \end{aligned}$$

De lo anterior es importante observar que si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces  $x^\alpha D^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , luego  $\{x^\alpha D^\beta (f_k(x))\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{C}$ , y por lo tanto debe existir una función  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tal que:

$$x^\alpha D^\beta f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta f_k(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Lo anterior no basta para deducir la *convergencia uniforme*. Para ello se procede como sigue, haciendo uso de (5):

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\beta f_p(x) - x^\alpha D^\beta f(x)| &= \left| x^\alpha D^\beta f_p(x) - \lim_{q \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta f_q(x) \right| \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta (f_p(x) - f_q(x))| \\ &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f_p(x) - f_q(x))| \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \|f_p - f_q\|_{\alpha,\beta} \\ &= \|f_p - f\|_{\alpha,\beta} < \epsilon. \end{aligned}$$

Dado que  $\epsilon > 0$  es arbitrario, resulta que  $f_p \rightarrow f$  con respecto a  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$  para  $p \rightarrow \infty$ , que es lo que se quería probar.

4. Sean  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Verifiquemos en primer lugar que  $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Para ello se hace uso de la *regla generalizada de Leibniz* [1]:

$$D^n(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \quad (7)$$

Ocupando ahora (7), se verifica la definición (*equivalente*) de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p D^q(f(t)g(t)) &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} f^{(k)}(t) g^{(q-k)}(t) \\ &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} t^p f^{(k)}(t) g^{(q-k)}(t) \\ &\stackrel{(\#)}{=} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \lim_{|t| \rightarrow \infty} \underbrace{t^p f^{(k)}(t)}_{\rightarrow 0} \underbrace{g^{(q-k)}(t)}_{\rightarrow 0} = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

donde (#) es posible pues cada límite existe, y además son nulos pues  $f^{(k)}, g^{(q-k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Para verificar que  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , se toman en cuenta tres resultados: 1) Que el producto  $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  (recien probado), 2) Que la transformada de Fourier mapea  $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  en sí mismo (resultado de TAREA 6.), y 3) lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-2\pi i \omega x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) e^{-2\pi i \omega x} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) f(y) dy \quad (z = x-y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i \omega(z+y)} dz \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i \omega z} dz \right) f(y) e^{-2\pi i \omega y} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \omega y} dy \cdot \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i \omega z} dz = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Entonces como  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , y luego  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , se concluye lo pedido.

5. En primer lugar, notar que para que una función  $f$  (integrable) pertenezca al espacio  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , debe satisfacer:

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Se procede entonces mediante la siguiente construcción:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} ((1+x^2)|f(x)|)^p \frac{1}{(1+x^2)^p} dx.$$

Dado que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  entonces  $(1+x^2)f(x)$  está acotado, y  $\frac{1}{(1+x^2)^p} \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  para  $p \geq 1$ . Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \leq \|f\|_{2,0}^p \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty,$$

donde  $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$ . El caso  $p = \infty$  se sigue directamente de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$

Otra forma de *entender* porqué esta inclusión es verdad es el siguiente argumento: Para cada función  $f \in L^p(\mathbb{R})$  existe una función *por partes*  $h_n$ , tal que  $\|h_n(x) - f(x)\|_2 \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow \infty$  ( $\forall x$  i.e. convergencia puntual) y entonces  $\|h_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Dado que  $h_n$  puede ser *continuamente aproximada* por funciones de soporte compacto *suaves* ( $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ), y que  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  es denso en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces se concluye  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ .

**TAREA 6.** Sea  $f \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , se quiere demostrar que:

$$(2\pi i \gamma)^p D^q \hat{f}(\gamma) = [D^p (-2\pi i x)^q f(x)]^\sim \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0. \quad (8)$$

Para ello se definen las siguientes dos proposiciones:

$$\mathbf{P}_1(p) : (2\pi i \gamma)^p \hat{f}(\gamma) = [D^p f(x)]^\sim \quad \forall p \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathbf{P}_2(q) : D^q \hat{f}(\gamma) = [(-2\pi i x)^q f(x)]^\sim \quad \forall q \in \mathbb{N}_0,$$

cuyos casos bases (derivados en [4]) son respectivamente:

$$(p=1) : (2\pi i \gamma) \hat{f}(\gamma) = [Df(x)]^\sim \quad (9)$$

$$(q=1) : D\hat{f}(\gamma) = [(-2\pi i x)f(x)]^\sim \quad (10)$$

Probemos cada una por inducción. Para  $\mathbf{P}_1$  se tiene:

$$\begin{aligned} (2\pi i \gamma)^{p+1} \hat{f}(\gamma) &= (2\pi i \gamma)(2\pi i \gamma)^p \hat{f}(\gamma) \\ &= (2\pi i \gamma) [D^p f(x)]^\sim \\ &\stackrel{(\#)}{=} [D(D^p f(x))]^\sim \\ &= [D^{p+1} f(x)]^\sim, \end{aligned}$$

donde en (#) se usó la hipótesis inductiva (9). Se procede de igual modo para  $\mathbf{P}_2$ :

$$\begin{aligned} D^{q+1} \hat{f}(\gamma) &= D[D^q \hat{f}(\gamma)] \\ &= D_\gamma [(-2\pi i x)^q f(x)]^\sim \\ &\stackrel{(\#)}{=} [(-2\pi i x)(-2\pi i x)^q f(x)]^\sim \\ &= [(-2\pi i x)^{q+1} f(x)]^\sim, \end{aligned}$$

donde en (#) se usó la hipótesis inductiva (10). Como  $\mathbf{P}_1(p) \Rightarrow \mathbf{P}_1(p+1)$ , y  $\mathbf{P}_2(q) \Rightarrow \mathbf{P}_2(q+1)$ , se han demostrado entonces ambas proposiciones. Luego, se puede proceder como sigue:

$$(2\pi i \gamma)^p D^q \hat{f}(\gamma) \stackrel{\mathbf{P}_2}{=} (2\pi i \gamma)^p [(-2\pi i x)^q f(x)]^\sim \stackrel{\mathbf{P}_1}{=} [D^p (-2\pi i x)^q f(x)]^\sim,$$

lo que completa la prueba de (8).

Para la segunda parte, notar que aplicando valor absoluto a (8) se obtiene:

$$\begin{aligned} |\gamma^p D^q \hat{f}(\gamma)| &= \frac{1}{(2\pi)^p} \left| \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i)^q D_x^p x^q e^{-2\pi i \gamma x} dx \right| \\ &\leq (2\pi)^{q-p} \int_{\mathbb{R}} |D_x^p x^q f(x)| dx \\ &= (2\pi)^{q-p} \|D_x^p x^q f(x)\|_{L^1} < \infty, \end{aligned}$$

puesto que  $f \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow D^p x^q f \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  y que  $\mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Entonces como  $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  y satisface  $|\gamma^p D^q \hat{f}(\gamma)| < \infty$ , se concluye que  $\hat{f} \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , i.e. la transformada de Fourier mapea  $\mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  en sí mismo.

**TAREA 7.** Se listan a continuación algunos ejemplos de funciones  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  (la extensión a varias variables se muestra a continuación):

1. Un ejemplo clásico es la función *bump*, definida como:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$$

cuya gráfica se ve en Figura 1. Esta puede ser fácilmente extendida a otros intervalos de compacidad:

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)^2-1}} & |x-a| < r \\ 0 & |x-a| \geq r, \end{cases}$$

que tiene soporte compacto en  $[a-r, a+r]$  con  $a, r \in \mathbb{R}$ .

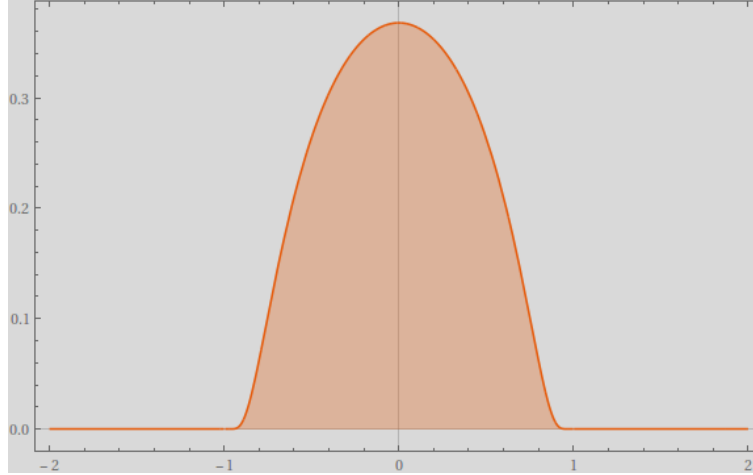


Figura 1: Gráfico de función *bump* clásica.

2. Otra construcción interesante considera a la función  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ , cuya “gracia” es que está en  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y  $f(0) = 0$ . Con esta es posible definir:

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} \quad (11)$$

la cual también pertenece a  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , pero además  $\phi(0) = 0$  y  $\phi(1) = 1$ . Entonces una función de soporte compacto se puede construir como sigue:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \phi(x) & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq a \\ \phi(-(x - [a+1])) & a < x < a+1 \\ 0 & x \geq a+1 \end{cases}$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  ( $a > 1$ ). Que básicamente consiste en poner la “copia” invertida de  $\phi$  (respecto al eje  $y$ ) y trasladada a la derecha en  $a+1$ , y definiendo el valor de la función en el intervalo intermedio  $[1, a]$  como 1 para asegurar la continuidad. En la Figura 2 se muestra esta construcción con  $a = 2$ .

Notar que la misma construcción puede realizarse siguiendo el mismo procedimiento y usando (11), pero con alguna otra función  $f$  que cumpla  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y  $f(0) = 0$ .

Por último, dada una función  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  con soporte  $[a, b]$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , esta puede ser fácilmente extendida a una función  $\in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , bajo la siguiente construcción:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_1) \psi(x_2) \cdots \psi(x_n), \quad (12)$$

cuyo soporte compacto es  $[a, b] \times \dots \times [a, b] = [a, b]^n$ . En la Figura 3 se muestra tal construcción para la función *bump* clásica en dos variables.

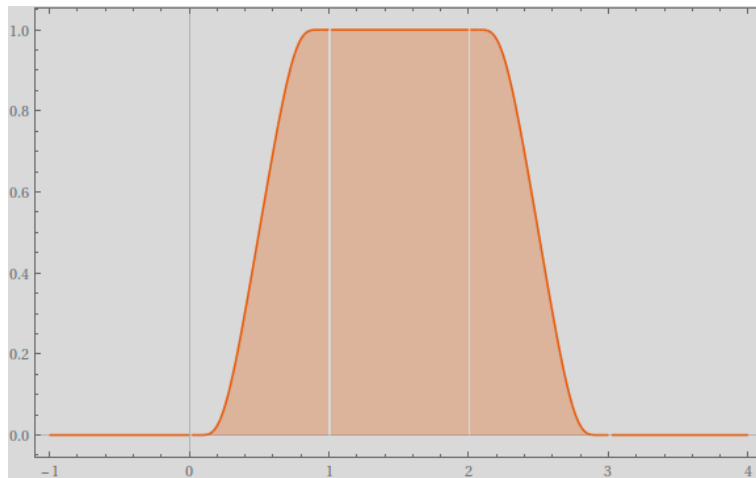


Figura 2: Construcción de función de soporte compacto.

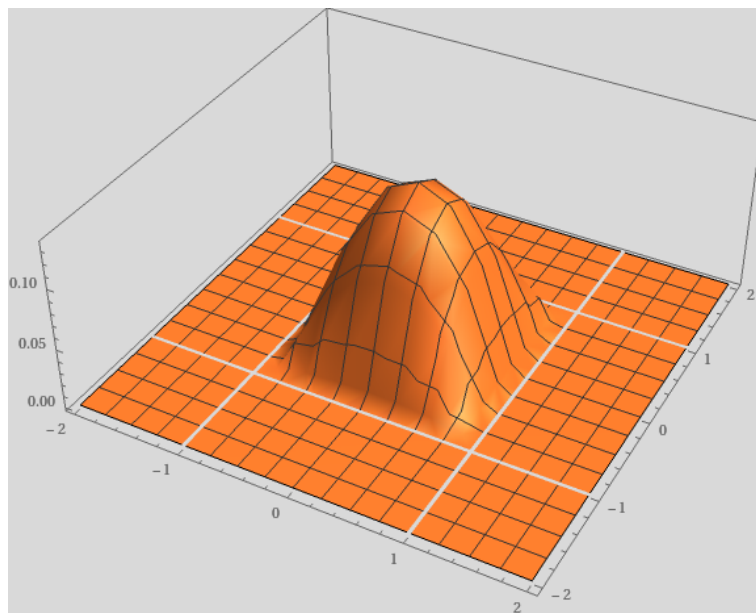


Figura 3: Gráfico de función *bump* clásica en dos variables.



**TAREA 8.** Sea  $f \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  una función con soporte compacto  $\text{supp}(f) \subset [a, b] \subset [0, T]$  ( $0 < a < b < T$ ), con la respectiva prolongación periódica (de periodo  $T$ )

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - nT), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Considerando la norma uniforme  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . Como ya probamos anteriormente (Weierstrass):

$$f \in \mathcal{C}_1^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow 0 \leq \|f\|_\infty < \infty.$$

Debido a la construcción de la prolongación periódica (13), se sabe que no existen traslapes entre las *copias* de  $f$  en los distintos periodos. Entonces:

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - nT) \right| \stackrel{(\#)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x - nT)| \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty < \infty$$

donde (#) es posible, pues como se hizo notar, todas las copias de  $f$  son iguales y sin traslapes. Puesto que  $\|g\|_\infty < \infty$ , se comprueba entonces la convergencia de la serie.

**TAREA 9.** Se analiza cada punto por parte.

a,b) Sea  $f \in L^1 \cap L^2$ , entonces  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  está bien definido. Luego, notar que aplicando la operación de conjugación se obtiene:

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt \stackrel{t \mapsto -t'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t')} e^{-i\omega t'} (-dt') = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t')} e^{-i\omega t'} dt'.$$

Sea  $g(t) = \overline{f(-t)}$  ( $g \in L^1 \cap L^2$  también), entonces  $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{g}(\omega)$ . Además, como se demostró anteriormente:

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2. \quad (14)$$

Luego haciendo uso de (14) se procede como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f * g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \Big|_{x=0} \quad (15)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f * g})(0) = (f * g)(0) \quad (16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(0 - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \quad (17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (18)$$

Esto último prueba los dos puntos:  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$  y que  $\hat{f} \in L^2$ .

## Referencias

- [1] Regla Generalizada de Leibniz. [https://en.wikipedia.org/wiki/General\\_Leibniz\\_rule](https://en.wikipedia.org/wiki/General_Leibniz_rule). Visitado: 23-05-2016.
- [2] Teorema de Weierstrass. [https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme\\_value\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem). Visitado: 23-05-2016.
- [3] Teorema del Acotamiento. [https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem). Visitado: 23-05-2016.
- [4] H. Dym and H.P McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, New York, 1972.