ELEMENTOS DE ANÁLISIS PARA COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA
EXAMEN FINAL

Martín Villanueva

27 de Mayo 2016

TAREAS

TAREA 1. Sean (X,σ) y (X,σ') espacios métricos y *quasimétricos* respectivamente. Denotemos a la topología generada/inducida por σ por:

$$\mathscr{F} = \{A \subset X: \ A \text{ es un abierto, i.e: } \forall x \in A, \ \exists \delta > 0: \ B_\sigma(x,\delta) \subset A\}$$

donde adicionalmente sabemos que una base para esta topología es:

$$B = \{B_\sigma(x,\sigma): \ x \in X, \ \delta \ \in \mathbb{R}_0^+\}$$

y también consideremos la siguiente *posible* base para dicha topología:

$$B' = \{B_{\sigma'}(x,\delta): \ x \in X, \ \delta \ \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}\}$$

se puede ver claramente que $B \subset B'$, pues B' contiene los mismos miembros que B, más las bolas de radio infinito (*que abarcan todo el espacio!*). Además como B es una base para $\mathscr{F}$, cualquier abierto $\in \mathscr{F}$ puede escribirse como una reunión de miembros de B.

Sea $\mathscr{A}$ un conjunto indexador (no necesariamente contable, ni finito), entonces cualquier reunión de bolas $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} B_\alpha$ $(B_\alpha \in B)$, puede formarse también con miembros de B', pues $B \subset B'$. Consideremos ahora reuniones sobre B'. Si entre los miembros no hay bolas de radio infinito, el resultado es análogo al anterior. Consideremos entonces el caso de una reunión con al menos una bola de radio infinito $B_{\sigma'}(x_0,\infty)$:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} B_\alpha \ (B_\alpha \in B') = B_{\sigma'}(x_0,\infty)$$

tal resultado puede obtenerse por reuniones de miembros en B como sigue:

$$\bigcup_{\delta > 0} B_\sigma(x_0,\delta)$$

Luego, hemos probado que cada reunión de miembros en una base, puede formarse con los miembros de la otra (y viceversa). Por lo tanto ambas son bases de $\mathscr{F}$, y entonces σ y σ' generan/inducen la misma topología.

TAREA 2. Se definen (S,σ) un espacio métrico, el conjunto $E \neq \emptyset$, el conjunto de funciones $\mathscr{F}(E,S) = \{f : E \to S\}$, y la aplicación:

$$\Sigma(f,g) = \sup_{t \in E} \sigma\left(f(t), g(t)\right), \quad \text{con } \ f,g \in \mathscr{F}(E,S),$$

donde se quiere probar que $(\mathscr{F}(E,S),\Sigma)$ es un espacio *quasimétrico*. Ya que $\sigma\left(f(t),g(t)\right)$ $(\forall\, t \in E)$ puede no estar acotado superiormente, entonces $\Sigma(f,g)$ puede ser infinita. Se verifica que Σ cumple los axiomas usuales para una métrica, para $f,g,h \in \mathscr{F}(E,S$:

1. $\left(\Sigma(f,g) \geq 0\right)$. Se sigue directamente desde el codominio de $\sigma : S \times S \to \mathbb{R}_0^+$.
2. $\left(\Sigma(f,g) = 0 \leftrightarrow f = g\right)$. Como $\Sigma(f,g) = 0 \leftrightarrow \sup_{t \in E} \sigma\left(f(t),g(t)\right) = 0$, por la definición de supremo esto es equivalente a $\sigma\left(f(t),g(t)\right) \leq 0$. Ya que σ es un métrica de S, la única posibilidad es que $\sigma\left(f(t),g(t)\right) = 0 \leftrightarrow f(t) = g(t)$.

3. $\big(\Sigma(f,g)=\Sigma(g,f)\big)$. Dada la simetría de la métrica σ, entonces:

$$\Sigma(f,g)=\sup_{t\in E}\sigma\big(f(t),g(t)\big)=\sup_{t\in E}\sigma\big(g(t),f(t)\big)=\Sigma(g,f).$$

4. $\big(\Sigma(f,g)\le\Sigma(f,h)+\Sigma(h,g)\big)$. Si se fija un $t_0\in E$, luego para $f(t_0),g(t_0),h(t_0)\in S$ se cumple:

$$\sigma\big(f(t_0),g(t_0)\big)\le\sigma\big(f(t_0),h(t_0)\big)+\sigma\big(h(t_0),g(t_0)\big), \tag{1}$$

pues σ es métrica. Como (1) es válida $\forall\, t_0\in E$, entonces se verifica que:

$$\sup_{t\in E}\sigma\big(f(t),g(t)\big)\le\sup_{t\in E}\sigma\big(f(t),h(t)\big)+\sup_{t\in E}\sigma\big(h(t),g(t)\big).$$

Dado que $\Sigma:\mathscr{F}(E,S)\times\mathscr{F}(E,S)\to[0,\infty]$ y verifica los axiomas de métrica, entonces $(\mathscr{F}(E,S),\Sigma)$ es un espacio *quasi-métrico*.

Tarea 3. Demostrar que Z es cerrado en $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$, es equivalente a demostrar que $Y=\mathscr{F}(X,\mathbb{R})\setminus Z$ es abierto. Para cada $\phi\in Y$ y $\delta>0$ es posible definir las bolas abiertas:

$$B(\phi,\delta)=\left\{\psi\in\mathscr{F}(X,\mathbb{R}):\Sigma(\phi,\psi)=\sup_{x\in X}|\phi(x)-\psi(x)|<\delta\right\}.$$

Notar entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}\text{Si }\sup_{x\in X}|\phi(x)-\psi(x)|<\delta\ &\Leftrightarrow\ |\phi(x)-\psi(x)|<\delta\quad\forall x\in X\\ &\Leftrightarrow \phi(x)-\delta<\psi(x)<\phi(x)+\delta\quad\forall x\in X.\end{aligned}$$

Si se fija x en la última expresión, y se toma un $y\in X$ (también fijo) tal que $0<d(x,y)<\phi(x)-\psi(y)$, entonces se puede definir $\delta:=\delta_{x,y}=\phi(x)-\psi(y)-d(x,y)$ el cual claramente es positivo, pero:

$$\phi(x)-\delta=\phi(x)-(\phi(x)-\psi(y)-d(x,y))=d(x,y)+\psi(y)<\psi(x), \tag{2}$$

donde (2) es válido para todo $x,y\in X$ (fijos pero arbitrarios) que cumplan $0<d(x,y)<\phi(x)-\psi(y)$. Dado que no se satisface $\psi(x)-\psi(y)\le d(x,y)$, entonces $\psi\notin Z$ y por tanto $\psi\in Y$. Ademas, puesto que:

$$\forall\phi\in Y,\ \exists\delta=\delta_{x,y}=\phi(x)-\psi(y)-d(x,y),\ \text{con } 0<d(x,y)<\phi(x)+\psi(y),\ \text{tal que } B(\phi,\delta)\in Y,$$

se concluye que Y es abierto, y por tanto Z es cerrado.

Tarea 4. Veamos cada punto separadamente:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|\chi_{[-1,1]}(t)|\,dt=\int_{-1}^{1}|1|dt=2<\infty$, por lo tanto $\chi_{[-1,1]}\in L^1$.

2. $\displaystyle\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)}=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-1,1]}(t)e^{-2\pi i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-2\pi i\omega t}dt$. Haciendo uso de la identidad de Euler:

$$\int_{-1}^{1}e^{i(-2\pi\omega t)}dt=\int_{-1}^{1}\cos(-2\pi\omega t)+i\sin(-2\pi\omega t)dt$$

tomando en cuenta la paridad de las funciones (*y que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es nula*):

$$\ldots=\int_{-1}^{1}\cos(2\pi\omega t)dt-i\underbrace{\int_{-1}^{1}\sin(2\pi\omega t)dt]}_{=0\text{ por imparidad}}=\frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega}$$

3. Para probar que $\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)}\notin L^1$, basta probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)}(\omega)\right|d\omega$ diverge. Para ello se considera que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)}(\omega)\right|d\omega\ge\int_{0}^{+\infty}\left|\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)}(\omega)\right|d\omega.$$

Dada la continuidad de $\widehat{\chi_{[-1,1]}(t)} = \dfrac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega}$, es posible hacer la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \right| d\omega &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \left| \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \right| d\omega \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{|\sin(2\pi\omega)|}{\pi\omega} d\omega \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{|\sin(2\pi\omega)|}{\pi k} d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underbrace{\int_{k-1}^{k} |\sin(2\pi\omega)|\, d\omega}_{=\frac{2}{\pi} \quad (*)} \\
&= \frac{2}{\pi^2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty,
\end{aligned}$$

donde $(*)$ resulta de integrar $|\sin(2\pi w)|$ sobre un periodo cualquiera de la función, y la divergencia proviene de la divergencia de la serie harmónica.

Tarea 5. Veamos por partes:

1. Denotemos como $f(t) = e^{-t^2}$ y $g(t) = (1+t^2)^{-1}$. En primer lugar, es fácil notar que las derivadas de $f(t)$ son la misma función multiplicadas por un polinomio (*regla de la cadena*). Cada nueva derivada aumenta en un grado el grado del polinomio respectivo, pues la derivada del exponente es $-2t$. Luego se puede escribir $f^{(n)}(t) = f(t)P_n(t)$, con P_n el polinomio de grado n respectivo. Entonces:

$$\lim_{|t|\to\infty} t^p D^q f(t) = \lim_{|t|\to\infty} t^p P_q(t) f(t) = \lim_{|t|\to\infty} \widehat{P}_{p+q}(t) f(t) = \lim_{|t|\to\infty} \frac{\widehat{P}_{p+q}(t)}{e^{t^2}} = 0 \quad \forall\ p,q \in \mathbb{N}_0,$$

lo último debido a que la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio en $t\to\infty$. En segundo lugar, para probar que $g \notin \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, basta mostrar que existe alguna combinación de $p,q\in\mathbb{N}_0$ tales que $t^p D^q g(t) \to 0$ no se satisface. Veamos para $p=3$ y $q=1$:

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{t^3}{1+t^2} \to \infty,$$

lo que completa la demostración.

2. Utilizando la notación de multi-índices para $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$, se quiere probar que los siguientes dos conjuntos:

$$\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) : x^\alpha D^\beta f(x) \to 0, \ \text{cuando} \ ||x||_2 \to 0, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n \right\} \tag{3}$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) : ||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n \right\} \tag{4}$$

corresponden a definiciones equivalentes del mismo conjunto. Partamos de $\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Desde la definición del límite, notar que $\forall\epsilon$ existe un $M(\epsilon)$ tales que:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| < \epsilon, \ \text{cuando} \ ||x||_2 < M(\epsilon).$$

Adicionalmente puesto que $x^\alpha D^\beta f$ es continua en $[-M,M]$, por el Teorema de Weierstrass [2], esta debe alcanzar su máximo en tal intervalo. Entonces:

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq \max\left\{ \epsilon, \max_{x\in[-M(\epsilon),M(\epsilon)]} x^\alpha D^\beta f(x) \right\} < \infty, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

que es equivalente a (4). Partamos ahora de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ (el cual existe y es finito). En primer lugar, denotemos a $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| = C_{\alpha,\beta}$. Si se define $\alpha+1 = (\alpha_1+1, \alpha_2+2, \cdots, \alpha_n+1)$, entonces:

$$Si \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^{\alpha+1} D^\beta f(x) \right| < \infty \Rightarrow \left| x^{\alpha+1} D^\beta f(x) \right| \leq C_{\alpha+1,\beta} < \infty \Rightarrow \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| \leq \frac{C_{\alpha+1,\beta}}{|x_1\cdots x_n|},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Y luego (usando el Teorema de Acotamiento [3]):

$$\lim_{||x||_2 \to 0} \frac{C_{\alpha+1,\beta}}{|x_1 \cdots x_n|} = 0 \Longrightarrow x^\alpha D^\beta f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad ||x||_2 \to 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,$$

que es la la definición en (3).

3. Se quiere probar que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es un espacio normado completo. Para ello se definen las operaciones $(+, \cdot)$ de forma usual, dando estructura de espacio vectorial a $\left(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), +, \cdot\right)$. Se verifica en primer lugar que $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ es una norma ($a \in \mathbb{C}$, y $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$):

   a) $\left(||a \cdot f||_{\alpha,\beta} = |a| \, ||f||_{\alpha,\beta}\right)$. Sigue directamente de la definición:

   $$||a \cdot f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta a f(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| a x^\alpha D^\beta f(x) \right| = |a| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| = |a| \, ||f||_{\alpha,\beta}$$

   b) $\left(||f+g||_{\alpha,\beta} \leq ||f||_{\alpha,\beta} + ||g||_{\alpha,\beta}\right)$. Sigue directamente de la linealidad de la derivada D^β:

   $$\begin{aligned} ||f+g||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \left(f(x) + g(x)\right) \right| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) + x^\alpha D^\beta g(x) \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| + \left| x^\alpha D^\beta g(x) \right| \right\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta g(x) \right| = ||f||_{\alpha,\beta} + ||g||_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

   c) $\left(||f||_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0\right)$. Esta requiere un poco más de tratamiento. Notar que $||f||_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow x^\alpha D^\beta f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Luego para todo $x \neq \mathbf{0}$ se debe cumplir $D^\beta f(x) = 0$, y dada la continuidad de $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $D^\beta f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y se deduce que f tiene estructura polinomial. Ya que $f(x) \to 0$ para $||x||_2 \to \infty$, la única posibilidad es que $f \equiv 0$.

   Para verificar completitud, se definen sucesiones de Cauchy $\{f_k\}$ de funciones $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, i.e:

   $$\forall \epsilon, \exists p, q \in \mathbb{N} \ \text{con} \ p, q > N : ||f_p - g_q||_{\alpha,\beta} < \epsilon.$$

   Se debe verificar que $\{f_k\}$ converge en el mismo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, respecto a la norma $||\cdot||_{\alpha,\beta}$. Si se fijan los múlti-índices (α, β), la sucesión $\left\{x^\alpha D^\beta f_k\right\}$ es Cauchy respecto a la norma uniforme, entonces debe haber una función límite $f_{\alpha,\beta}$ (con convergencia puntual) tal que:

   $$\lim_{k \to \infty} x^\alpha D^\beta f_k(x) = f_{\alpha,\beta}(x) \quad \text{puntualmente},$$

   la cual implica la convergencia $\lim_{k \to \infty} x^\alpha D^\beta f_k = f_{\alpha,\beta} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

4. Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Verifiquemos en primer lugar que $f \cdot g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Para ello se hace uso de la *regla generalizada de Leibniz* [1]:

   $$D^n \left(f(t) g(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \tag{5}$$

   Ocupando ahora (5), se verifica la definición (*equivalente*) de $\mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

   $$\begin{aligned} \lim_{|t| \to \infty} t^p D^q \left(f(t) g(t)\right) &= \lim_{|t| \to \infty} t^p \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} f^{(k)}(t) g^{(q-k)}(t) \\ &= \lim_{|t| \to \infty} \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} t^p f^{(k)}(t) g^{(q-k)}(t) \\ &\overset{(\#)}{=} \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \lim_{|t| \to \infty} \underbrace{t^p f^{(k)}(t)}_{\to 0} \underbrace{g^{(q-k)}(t)}_{\to 0} = 0 \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

   donde (#) es posible pues cada límite existe, y además son nulos pues $f^{(k)}, g^{(q-k)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Para verificar que $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, se toman en cuenta tres resultados: 1) Que el producto $f \cdot g \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (recien probado), 2) Que la transformada de Fourier mapea $\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en sí mismo (resultado de TAREA 6.), y 3) lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-2\pi i \omega x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) e^{-2\pi i \omega x} dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) f(y) dy \quad (z = x-y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i \omega (z+y)} dz \right) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i \omega z} dz \right) f(y) e^{-2\pi i \omega y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \omega y} dy \cdot \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i \omega z} dz = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega).
\end{aligned}$$

Entonces como $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow \widehat{f}, \widehat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, y luego $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, se concluye lo pedido.

5. En primer lugar, notar que para que una función f (integrable) pertenezca al espacio $L^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, debe satisfacer:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Se procede entonces mediante la siguiente construcción:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \right|^p dx = \int_{\mathbb{R}} \left((1+x^2) |f(x)| \right)^p \frac{1}{(1+x^2)^p} dx.$$

Dado que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ entonces $(1+x^2) f(x)$ está acotado, y $\dfrac{1}{(1+x^2)^p} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ para $p \geq 1$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \leq ||f||_{2,0}^p \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty,$$

donde $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$. El caso $p = \infty$ se sigue directamente de $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$||f||_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) \right| < \infty.$$

Otra forma de *entender* porqué esta inclusión es verdad es el siguiente argumento: Para cada función $f \in L^p(\mathbb{R})$ existe una función *por partes* h_n, tal que $||h_n(x) - f(x)||_2 \to 0$ con $n \to \infty$ ($\forall x$ i.e. convergencia puntual) y entonces $||h_n - f||_{L^p} \to 0$ para $n \to \infty$. Dado que h_n puede ser *continuamente aproximada* por funciones de soporte compacto *suaves* ($C_c^\infty(\mathbb{R})$), y que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces se concluye $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

TAREA 6. Sea $f \in \mathscr{C}_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, se quiere demostrar que:

$$(2\pi i \gamma)^p D^q \widehat{f}(\gamma) = \left[D^p (-2\pi i x)^q f(x) \right]^{\widehat{}} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Para ello se definen las siguientes dos proposiciones:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1(p): \ (2\pi i \gamma)^p \widehat{f}(\gamma) = \left[D^p f(x) \right]^{\widehat{}} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \\
&\mathbf{P}_2(q): \ D^q \widehat{f}(\gamma) = [(-2\pi i x)^q f(x)]^{\widehat{}} \quad \forall q \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

cuyos casos bases (derivados en [4]) son respectivamente:

$$(p=1): \ (2\pi i \gamma) \widehat{f}(\gamma) = \left[D f(x) \right]^{\widehat{}} \tag{7}$$

$$(q=1): \ D \widehat{f}(\gamma) = \left[(-2\pi i x) f(x) \right]^{\widehat{}}. \tag{8}$$

Probemos cada una por inducción. Para $\mathbf{P}_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(2\pi i\gamma)^{p+1}\widehat{f}(\gamma) &= (2\pi i\gamma)(2\pi i\gamma)^p\widehat{f}(\gamma)\\
&= (2\pi i\gamma)\left[D^p f(x)\right]^{\widehat{}}\\
&\overset{(\#)}{=} \left[D(D^p f(x))\right]^{\widehat{}}\\
&= \left[D^{p+1} f(x)\right]^{\widehat{}},
\end{aligned}$$

donde en (#) se usó la hipótesis inductiva (7). Se procede de igual modo para $\mathbf{P}_2$:

$$\begin{aligned}
D^{q+1}\widehat{f}(\gamma) &= D\left[D^q\widehat{f}(\gamma)\right]\\
&= D_\gamma\left[(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}}\\
&\overset{(\#)}{=} \left[(-2\pi i x)\,(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}}\\
&= \left[(-2\pi i x)^{q+1} f(x)\right]^{\widehat{}},
\end{aligned}$$

donde en (#) se uso la hipótesis inductiva (8). Como $\mathbf{P}_1(p) \Rightarrow \mathbf{P}_1(p+1)$, y $\mathbf{P}_2(q) \Rightarrow \mathbf{P}_2(q+1)$, se han demostrado entonces ambas proposiciones. Luego, se puede proceder como sigue:

$$(2\pi i\gamma)^p D^q\widehat{f}(\gamma) \overset{\mathbf{P}_2}{=} (2\pi i\gamma)^p\left[(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}} \overset{\mathbf{P}_1}{=} \left[D^p(-2\pi i x)^q f(x)\right]^{\widehat{}},$$

lo que completa la prueba de (6).

Para la segunda parte, notar que aplicando valor absoluto a (6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left|\gamma^p D^q\widehat{f}(\gamma)\right| &= \frac{1}{(2\pi)^p}\left|\int_{\mathbb{R}}(-2\pi i)^q D_x^p x^q e^{-2\pi i\gamma x}dx\right|\\
&\leq (2\pi)^{q-p}\int_{\mathbb{R}}\left|D_x^p x^q f(x)\right|dx\\
&= (2\pi)^{q-p}\ \|D_x^p x^q f(x)\|_{L^1} < \infty,
\end{aligned}$$

puesto que $f \in \mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow D^p x^q f \in \mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y que $\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Entonces como $\widehat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y satisface $\left|\gamma^p D^q\widehat{f}(\gamma)\right| < \infty$, se concluye que $\widehat{f} \in \mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, i.e, la transformada de Fourier mapea $\mathscr{C}_\downarrow^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en sí mismo.

TAREA 7. Se listan a continuación algunos ejemplos de funciones $f \in \mathscr{C}_C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (la extensión a varias variables se muestra a continuación):

1. Un ejemplo clásico es la función *bump*, definida como:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1\\ 0 & |x| >= 1,\end{cases}$$

cuya gráfica se ve en Figura 1. Esta puede ser fácilmente extendida a otros intervalos de compacidad:

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)^2-1}} & |x| < r\\ 0 & |x| >= r,\end{cases}$$

que tiene soporte compacto en $[a-r, a+r]$ con $a, r \in \mathbb{R}$.

2. Otra construcción interesante considera a la función $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$, cuya "gracia" es que está en $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$. Con esta es posible definir:

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{f(x) - f(1-x)} \tag{9}$$

la cual tambien pertenece a $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, pero ademas $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$. Entonces una función de soporte compacto se puede construir como sigue:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0\\ \phi(x) & 0 < x < 1\\ 1 & 1 \leq x \leq a\\ \phi(-(x-[a+1])) & a < x < a+1\\ 0 & x \geq a+1\end{cases}$$

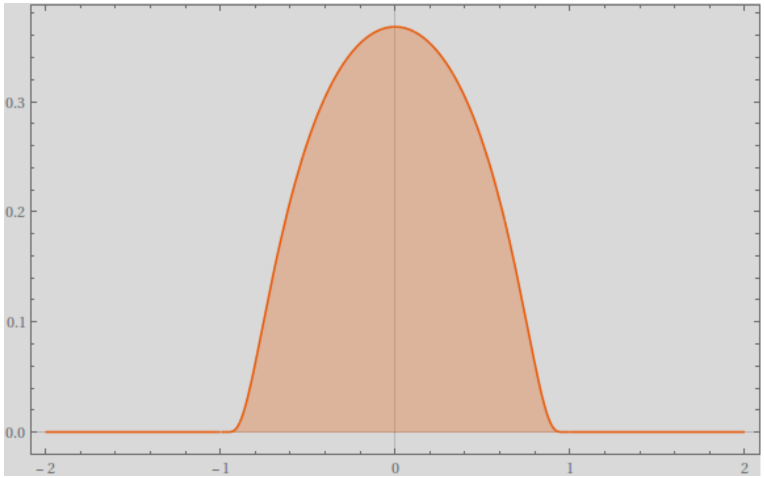

Figura 1: Gráfico de función *bump* clásica.

donde $a \in \mathbb{R}$ (>1). Que básicamente consiste en poner la "copia" invertida de ϕ (respecto al eje y) y trasladada a la derecha en $a+1$, y definiendo el valor de la función en el intervalo intermedio $[1,a]$ como 1 para asegurar la continuidad. En la Figura 2 se muestra esta construcción con $a=2$.

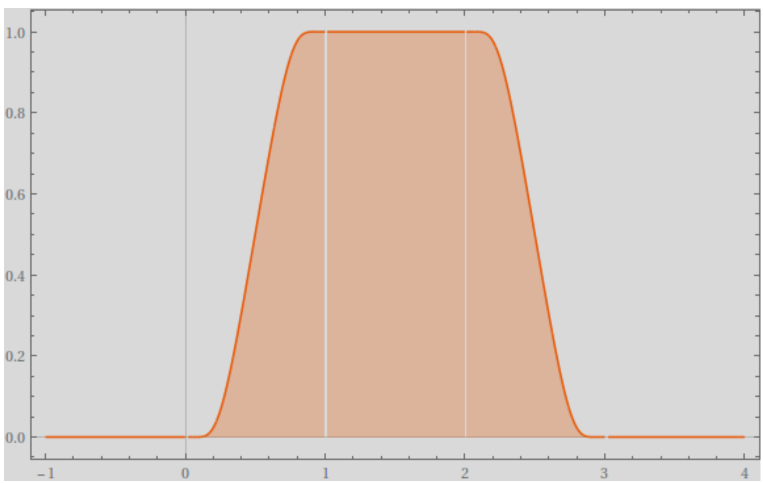

Figura 2: Construcción de función de soporte compacto.

Notar que la misma construcción puede realizarse siguiendo el mismo procedimiento y usando (9), pero con alguna otra función f que cumpla $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $f(0)=0$.

Por último, dada una función $\psi \in \mathscr{C}^\infty_C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ con soporte $[a,b]$ y $a,b \in \mathbb{R}$, esta puede ser fácilmente extendida a una función $\in \mathscr{C}^\infty_C(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, bajo la siguiente construcción:

$$\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\cdots\,\psi(x_n), \tag{10}$$

cuyo soporte compacto es $[a,b]\times \overset{n-2 \text{ veces}}{\cdots} \times[a,b] = [a,b]^n$. En la Figura 3 se muestra tal construcción para la función *bump* clásica en dos variables.

Tarea 8. Sea $f \in \mathscr{C}^\infty_\downarrow(\mathbb{R},\mathbb{C})$ una función con soporte compacto $\operatorname{supp}(f) \subset [a,b] \subset [0,T]$ $(0<a<b<T)$, con la respectiva prolongación periódica (de periodo T)

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-nT), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

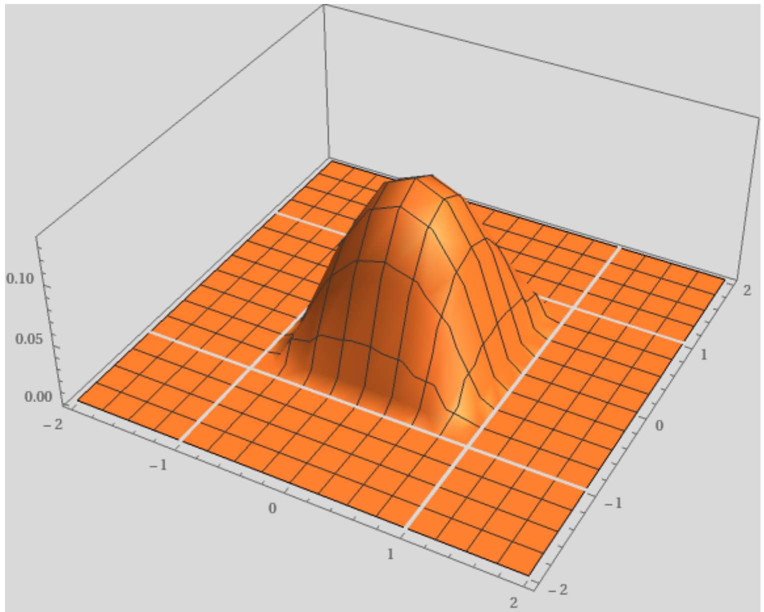

Figura 3: Gráfico de función *bump* clásica en dos variables.

Considerando la norma uniforme $||f||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Como ya probamos anteriormente (Weierstrass):

$f \in \mathscr{C}^{\infty}_{\downarrow}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow 0 \leq ||f||_\infty < \infty.$

Debido a la construcción de la prolongación periódica (11), se sabe que no existen traslapes entre las *copias* de f en los distintos periodos. Entonces:

$$||g||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-nT) \right| \overset{(\#)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x-nT)| \ \ (\forall n \in \mathbb{Z}) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = ||f||_\infty < \infty$$

donde (#) es posible, pues como se hizo notar, todas las copias de f son iguales y sin traslapes. Puesto que $||g||_\infty < \infty$, se comprueba entonces la convergencia de la serie.

TAREA 9. Se analiza cada punto por parte.

a,b) Sea $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ está bien definido. Luego, notar que aplicando la operación de conjugación se obtiene:

$$\overline{\widehat{f}(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{i\omega t}dt \overset{t\to -t'}{=} \int_{\infty}^{-\infty} \overline{f(-t')}e^{-i\omega t'}(-dt') = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t')}e^{-i\omega t'}dt'.$$

Sea $g(t) = \overline{f(-t)}$ ($g \in L^1 \cap L^2$ también), entonces $\overline{\widehat{f}(\omega)} = \widehat{g}(\omega)$. Además, como se demostró anteriormente:

$$\widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\overline{\widehat{f}(\omega)} = \left|\widehat{f}(\omega)\right|^2. \tag{12}$$

Luego haciendo uso de (12) se prodece como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f*g}(\omega)e^{i\omega x}d\omega\Big|_{x=0} & (13)\\
&= \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f*g})(0) = (f*g)(0) & (14)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(0-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}dt & (15)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. & (16)
\end{aligned}$$

Esto último prueba los dos puntos: $||f||_2 = ||\widehat{f}||_2$ y que $\widehat{f} \in L^2$.

Referencias

[1] Regla Generalizada de Leibniz. https://en.wikipedia.org/wiki/General_Leibniz_rule. Visitado: 23-05-2016.

[2] Teorema de Weierstrass. https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem. Visitado: 23-05-2016.

[3] Teorema del Acotamiento. https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem. Visitado: 23-05-2016.

[4] H. Dym and H.P McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, New York, 1972.