

DETECCIÓN AUTOMÁTICA Y CLASIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS ASTRONÓMICAS

Tesis presentada a la
Universidad Técnica Federico Santa María
en cumplimiento de los requerimientos
para obtener el grado de
Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática

Rodrigo Antonio Gregorio Lovera

November 2015

Yo certifico que he leído esta tesis y en mi opinión es adecuada en calidad para optar al grado de Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática.

Mauricio Solar - Profesor Guía

Yo certifico que he leído esta tesis y en mi opinión es adecuada en calidad para optar al grado de Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática.

Mauricio Araya - Profesor Co-referente

Yo certifico que he leído esta tesis y en mi opinión es adecuada en calidad para optar al grado de Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática.

Diego Mardones - Co-referente Externo

Yo certifico que he leído esta tesis y en mi opinión es adecuada en calidad para optar al grado de Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática.

Marcelo Mendoza - Presidente de la Comisión

Aprobado por la Escuela de Graduados.

Resumen

La detección, caracterización, y relaciones entre objetos representados por una variedad de escalas espaciales y propiedades químicas y físicas ofrece oportunidades únicas para el estudio del universo y en particular usando los datos de ALMA. Por lo tanto, el desarrollo de herramientas computacionales que automaticen estas tareas es de enorme utilidad y de suma urgencia. Además, esperamos incluir estas herramienta dentro del próximo Chilean Virtual Observatory (ChiVO).

La propuesta es desarrollar una herramienta para la detección y clasificación de estructuras a distintas escalas espaciales en imágenes astronómicas. Para ello primero usaremos filtros provenientes de transformada de wavelets para generar sub-imágenes a distintas escalas. La descomposición por medio de wavelet asegura que al volver a unir las sub-imágenes no se pierde información y se recopila toda la estructuras encontradas en cada una. La herramienta será aplicable al principio a imágenes en 2d, o bien a una serie de planos en imágenes 3d.

Luego se le aplicarán algoritmos de detección en cada sub-imagen generando un catálogo. El catálogo incluye una clasificación inicial del tipo de objeto o estructura encontrada, y permite estudiar estadísticas y relaciones espaciales entre los objetos del catálogo.

Esta herramienta se desarrollará en python, generando una para CASA y/o ChiVO. La validación consiste poner a disposición de la comunidad científica la herramienta y recibir los feedback, además, de generar conjuntos de prueba con datos reales para los algoritmos implementados.

La herramienta creada es nueva, incluye el trabajo conjunto entre la astronomía y la ingeniería informática, y proporcionará una ayuda a la investigación científica y el desarrollo de nuevas aplicaciones en el área de la astro-informática.

Prefacio

Este documento representa el reconocimiento que la Universidad Técnica Federico Santa María realiza a sus alumnos destacados. Rodrigo Gregorio, alumno del programa Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática, falleció antes de terminar este escrito. Quien suscribe, recogió los informes y borradores de tesis de Rodrigo y confeccionó este documento.

La Universidad Técnica Federico Santa María, en un gesto que la engrandece, decidió otorgar el grado de Rodrigo de forma póstuma a sus familiares y reconocer así este documento como la tesis que permite la entrega del grado.

Dedicamos este documento a sus familiares, amigos, profesores y a todos quienes tuvieron el privilegio de conocer a Rodrigo, un excelente estudiante de nuestra Universidad y una excelente persona. Estará acompañándonos en la memoria por siempre.

Marcelo Mendoza Rocha

Director del Programa - Magíster en Ciencia de la Ingeniería Informática

Noviembre de 2015.

Índice general

Resumen	III
Prefacio	IV
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Propuesta	5
1.3. Hipótesis	5
1.4. Objetivos	6
1.5. Plan de Trabajo	6
1.6. Contribuciones	7
2. Estado del Arte	8
2.1. Clasificación en Astronomía	8
2.2. Clasificación de Objetos Astronómicos	10
2.2.1. Nubes Moleculares	11
2.2.2. GaussClumps	11
2.2.3. ClumpFind	12
2.2.4. Dendrogramas	13
2.2.5. Wavelets	13
2.2.6. Wavelets en Astronomía	14
3. Detección y clasificación de estructuras	16
3.1. Diseño de la solución	16

3.2.	Transformada de Wavelets	18
3.3.	Análisis de Multiresolución	19
3.4.	Análisis multiresolución multidimensional	25
3.4.1.	Introducción	25
3.4.2.	Transformadas bidimensionales continua y discreta de wavelets. . .	27
3.5.	Algoritmos de multiresolución para procesos bidimensionales	30
3.5.1.	Algoritmo de Feauveau	30
3.5.2.	Algoritmo de à trous	30
3.5.3.	Algoritmo piramidal laplaciano	32
3.5.4.	Algoritmo piramidal con un wavelet	33
3.6.	Uso del algoritmo à trous para detección de estructuras	33
3.7.	Pruebas	35
3.8.	Construcción de un catálogo	38
4.	Epílogo	40

Índice de figuras

2.1. Un ejemplo de un modelo en 2D de gas molecular	12
2.2. Un ejemplo de clumps encontrados con el algoritmo ClumpFind	13
2.3. Un ejemplo de clumps encontrados con Dendrogramas	14
2.4. Un ejemplo de núcleos densos encontrados por medio del uso de Wavelets .	15
3.1. Proceso de creación de catálogo de estructuras a partir de una imagen FITS	17
3.2. Despliegue de subimágenes generadas por el algoritmo de Feauveau.	30
3.3. Algoritmo de Feauveau	31
3.4. Algoritmo de \grave{a} trous	32
3.5. Ramas de análisis y síntesis de los bancos de filtros asociados al algoritmo Laplaciano piramidal diádico	34
3.6. Algoritmo “ \grave{a} trous” aplicado sobre una imagen de partida I_0 e imágenes resultantes	35
3.7. Filtro B3-spline usado en esta tesis	35
3.8. Región NGC 6334	36
3.9. Región NGC 6334 a 8 niveles de multiresolución	36
3.10. Espectro con niveles de contorno	37
3.11. Imágenes de la detección en 8 niveles	38
3.12. Catálogo generado con imagen en nivel 6	39

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La propuesta consiste en el desarrollo de un algoritmo para clasificar objetos analizando el tipo de dato entregado por el proyecto ALMA y la cantidad de objetos observados hasta el momento.

En base a lo anterior se genera una propuesta que aborda temáticas que son de interés dentro de los involucrados en el proyecto de la creación de ChiVO.

El observatorio ALMA brindará datos en abundancia cuando comience su operación científica permanente, estos datos nos abrirán nuevas ventanas al estudio del universo. En parte debido a la sensibilidad a emisión de gas y polvo frío sin precedentes hasta la actualidad, y en particular debido a que los datos proveerán simultáneamente sensibilidad a:

- Estructuras espaciales a escalas desde 0.01 hasta 1000 segundos de arco simultáneamente.
- Una variedad de líneas espectrales simultáneas trazando estructuras de propiedades físicas y químicas muy diversas.

Esto permitirá estudiar la presencia de estructuras físicas sobre amplias escalas espaciales con diversas propiedades en cada tipo de objeto.

Por lo anterior, la detección, caracterización, y relaciones entre objetos representados por una variedad de escalas espaciales y propiedades ofrece oportunidades únicas para el estudio del universo con los datos de ALMA. El desarrollo de herramientas computacionales que automaticen estas tareas es de enorme utilidad y de suma urgencia.

En el contexto de la creación de un Observatorio Virtual Chileno con los datos de ALMA, se hace necesario el desarrollo de herramientas de procesamiento y análisis de imágenes que permita hacer las labores de detección y clasificación automática de estructuras astronómicas en dichas imágenes.

La minería de datos [BB10] y [Bor09] puede dar un poderoso enfoque que permita abordar la explosión de datos que se genera con los nuevos proyectos astronómicos y los que están en construcción. Dentro del área de astronomía se puede definir como el proceso de convertir los datos no procesados de una observación en información útil, es decir, buscar patrones en los datos digitales y traducirlos en información relevante para la comunidad.

Los astrónomos tienen que lidiar con el enorme desafío de realizar una eficiente minería, correcta clasificación e inteligente priorización de la gran cantidad de nuevos datos. Estos datos estarán sujetos a algoritmos de máquinas de aprendizaje para clasificación de eventos, detección de datos aislados, caracterización de objetos y nuevos descubrimientos.

Algunas de las ventajas que proporciona esta visión son: obtener cualquier tipo de dato, simplicidad, reconocimiento de patrones, enfoque complementario (incluso cuando el enfoque no produce una mejora sustancial, todavía actúa como un importante método complementario de análisis de datos).

La minería de datos astronómicos es el análisis exploratorio de datos que utiliza algoritmos de máquinas de aprendizaje para explorar datos a través de minería de datos, detección sorpresa y descubrimiento científico en datos de gran escala.

Estas Máquinas de aprendizaje se clasifican según sus usos:

- Caracterizar los Datos: Aprendizaje no supervisado, clustering, descubrimiento de clases
- Asignación de Etiquetas de Clases: Aprendizaje supervisado, clasificación.
- Descubrir lo Desconocido: Aprendizaje semi-supervisado, detección de “outlier/novelty”.

La amplia variedad de métodos disponibles se reflejan en una amplia red de técnicas de matemática aplicada que incluyen matemática discreta, álgebra lineal, combinatoria, geometría, métodos de grafos, etc. El interés de esta trabajo es en los métodos de clasificación (asignación de etiquetas de clases a nuevos datos usando los grupos y clases ya conocidos). Los algoritmos más comunes para clasificación incluyen clasificación bayesiana, árboles de decisión, redes neuronales artificiales, regresión, máquinas de soporte vectorial, modelos de Markov y K-vecinos más cercanos.

El explosivo crecimiento de los datos astronómicos en cantidad, y accesibilidad ha generado un gran interés en las tareas de análisis más comunes en astronomía como son: Visualización, Agrupamiento y Clasificación de Datos [SCDV+05].

Los algoritmos de Máquinas de Aprendizaje y Minería de Datos tienen un comportamiento similar al proceso de asignación de clases a objetos en Astronomía: descubrimiento de clases, descubrir reglas para las diferentes clases, construir muestras de entrenamiento para refinar las reglas, asignación de nuevos objetos a clases conocidas usando nuevas mediciones de datos científicos para esos objetos.

Algunos algoritmos utilizados en astronomía para detectar objetos han sido usados en nubes moleculares:

GaussClump *GaussClump*. Este algoritmo [SG90] consiste en ajustar perfiles Gaussiano a los picos más brillantes en los datos. Esto se puede realizar en dos o tres dimensiones (ángulo, frecuencia, como los cubos de datos de ALMA). Los ajustes se realizan progresivamente desde los picos mas brillantes hasta los de menor brillo. Al ajustar cada Gaussiana esta se agrega al catálogo de salida., luego se resta para ajustar la siguiente, hasta descomponer la imagen inicial en una superposición de Gaussianas en distintas posiciones, con distinta orientación, tamaño, e intensidad. La suma de las componentes Gaussianas reproduce la imagen original mas un ruido, que idealmente debe ser normal y homogéneo a lo largo de la imagen. En este algoritmo, los clumps pueden superponerse y por esta razón los píxeles de entrada no pueden ser asignados a un solo clump.

ClumpFind *ClumpFind*. Fue desarrollado por J. Williams [WdB94]. En este algoritmo se parte del pico más brillante de la imagen (primer clumnp) y todos los píxeles

se van asociando al mismo clump bajando gradualmente en intensidad hasta que aparezca un segundo pico aislado del primero. Este proceso continua asignando todos los píxeles de la imagen original al clump más cercano. Los clumps tienen así formas arbitrarias, y se encuentran separados por puntos silla en caso de estar conectados entre sí, o por el cielo si están separados. Con este algoritmo la estructura de las nubes moleculares es dividida en una serie de clumps disjuntos espacialmente, de modo que colectivamente reproducen la imagen original incluyendo el ruido del cielo. Así, el algoritmo es equivalente a tomar una maqueta de la imagen original y dividirla en la dirección perpendicular al cielo, como con un cortador de galletas donde cada galleta tiene una forma distinta y todas encajan perfectamente como piezas de un puzle para reproducir la maqueta original.

Dendrogramas Dendrogramas. Rosolowsky [RPKG08] utiliza de dendrogramas en la representación de las características esenciales de la estructura jerárquica de las “iso-superficies” para cubos de datos de línea moleculares. Si el algoritmo clumpfind divide un mapa de contornos en piezas de un puzle, la idea detrás de los dendrogramas es dividir el puzle en una colección de capas distintas que representan un objeto. Es claro que la suma de los objetos de nuevo, reproduce idénticamente la imagen original. A diferencia de los métodos anteriores, los dendrogramas ordenan las estructuras encontradas de forma jerárquica en árbol – ramas – hojas. Dicho ordenamiento define relaciones físicas entre los distintos objetos catalogados.

La identificación de objetos en el espacio de Wavelets consiste en aislar estructuras dada una escala. Las estructuras en escalas consecutivas se conectan si el máximo local de la primera está dentro de la estructura de la siguiente. En el libro de Starck y Murtagh [SM06] se hace una revisión a las distintas aplicaciones de las Wavelets en astronomía. Además, en el apéndice se entrega una descripción del algoritmo para la implementación de una transformada de Wavelets discreta conocida como A Trous.

1.2. Propuesta

Consiste en desarrollar un algoritmo que permita identificar y clasificar estructuras astronómicas a diferentes escalas, para ellos se hará uso de la transformada de Wavelets. Se busca generar un conjunto de imágenes a escalas distintas y luego aplicar algún algoritmo de detección (gaussclump, clumpfind, dendrogramas) para identificar objetos en cada imagen. Al unir todas las imágenes generadas se debiese obtener el conjunto total de estructuras que contiene la imagen que se esta analizando.

A partir de las estructuras encontradas en el paso anterior se prosigue con la aplicación de un algoritmo de clasificación que permita reconocer a que tipo de objeto pertenecen las estructuras encontradas. La contraparte astronómica determinará que criterios se considerarán para clasificar estos objetos.

Como parte final, se espera generar una aplicación que se pueda utilizar de forma “standalone” o ser incluida dentro del software CASA y/o estar dentro de ChiVO. De esta forma la herramienta generada estará al alcance de la comunidad y además debe cumplir con los requerimientos de un Observatorio Virtual.

1.3. Hipótesis

La detección de objetos en imágenes astronómicas se ha realizado con métodos como gaussclump, clumpfind, dendrogramas y se han realizado comparaciones entre ellos. Los métodos mencionados son utilizados en determinadas imágenes astronómicas. Por la escalabilidad de los datos de ALMA y otros observatorios se hace indispensable la construcción de herramientas que ayuden en la investigación de los astrónomos.

La transformada de wavelet para imágenes en 2D entrega una matriz que se utiliza para descomponer una imagen en varias a distintas escalas. La descomposición asegura que al reconstruir la imagen no hay perdida de información.

La hipótesis para este trabajo queda establecida como:

“Es posible aplicar algoritmos de detección de objetos en un conjunto de imágenes astronómicas obtenidas al aplicar una descomposición usando wavelets y obtener resultados similares a la literatura. Además, los resultados pueden extenderse a los datos de ALMA”.

1.4. Objetivos

Objetivo General.

- Generar una herramienta de detección y clasificación automática de estructuras astronómicas en imágenes sobre una variedad de escalas espaciales y su aplicabilidad en datos de ALMA.

Objetivos Específicos.

- Detectar y clasificar estructuras en un amplio rango de escalas espaciales en imágenes obtenidas con ALMA.
- Relacionar espacialmente las estructuras encontradas en cada imagen en relaciones de tipo y parentesco.
- Implementar la herramienta sobre la plataforma del Chilean Virtual Observatory.
- Diseñar algoritmos simples de minería de datos aplicables al total de los datos de ALMA (o subconjuntos) accesibles a través de ChiVO.

1.5. Plan de Trabajo

La forma de trabajo que se establece es realizar una reuniones mensuales para analizar los avances del proyecto, en ellas participarán el área informática y su contraparte astronómica. Además, se considera la realización de reuniones de corta duración para ver tópicos específicos y resolver dudas puntuales, la periodicidad de estas reuniones será variable.

La implementación de los algoritmos será usando el lenguaje de programación Python, debido a su facilidad de uso y a que otras herramientas han sido desarrolladas en este lenguaje y se pueden complementar.

Cada implementación de algoritmos debe ser validada por la parte informática y la parte de astronómica, esto determina el marco de trabajo y el alcance del proyecto.

Los resultados serán obtenidos mediante el uso de datos similares a los de ALMA y a un conjunto adecuado de datos creados de forma sintética. De esta forma se puede comprobar si la detección es correcta.

1.6. Contribuciones

Se busca crear una herramienta que se utilice para la investigación astronómica con los datos de ALMA.

Los resultados deben ser similares a la literatura y ser extensibles a los datos de ALMA.

Se creará un catálogo con los objetos encontrados.

Capítulo 2

Estado del Arte

Esta sección está basada en el estudio realizado en [Ball2010] y [Borne2009].

2.1. Clasificación en Astronomía

La minería de datos puede dar un poderoso enfoque que permita abordar la explosión de datos que se genera con los nuevos proyectos astronómicos y los que están en construcción. Dentro del área de astronomía se puede definir como el proceso de convertir los datos no procesados de una observación en información útil, es decir, buscar patrones en los datos digitales y traducirlos en información relevante para la comunidad.

Los astrónomos tienen que lidiar con el enorme desafío de realizar una eficiente minería, correcta clasificación e inteligente priorización de la gran cantidad de nuevos datos. Estos datos estarán sujetos a algoritmos de máquinas de aprendizaje para clasificación de eventos, detección de datos aislados, caracterización de objetos y nuevos descubrimientos.

Algunas de las ventajas que proporciona esta visión son: obtener cualquier tipo de dato, simplicidad, reconocimiento de patrones, enfoque complementario (incluso cuando el enfoque no produce una mejoría sustancial, todavía actúa como un importante método complementario de análisis de datos).

Para comenzar en esta área de investigación es necesario conocer los desafíos que surgen en Minería de Datos [book2013]:

1. Desarrollo de metodologías de análisis para descubrimiento y caracterización de

comportamiento emergente en sistemas complejos.

2. Desarrollo de métodos eficientes para el análisis estadístico de conjunto de datos heterogéneos y de gran escala.
3. Desarrollo riguroso, pero computacionalmente factible, de métodos para la reducción dimensional de datos.
4. Desarrollo de técnicas fiables para deducir la información de datos y fuentes de conocimiento que son de alta dimensión y heterogénea en naturaleza y calidad.
5. Re-ingeniería de máquinas de aprendizaje y algoritmos estadísticos para escalarlos con el tamaño del conjunto de datos.
6. Desarrollo de algoritmos para la detección de “Outlier”, anomalías y no estacionalidad en el flujo de datos.
7. Desarrollo de nueva matemática para la extracción de nuevas visiones de datos complejos.
8. Caracterización de áreas de interés en datos masivos variantes en el tiempo, identificación de áreas en conjunto de datos masivos los que los científicos pueden investigar en profundidad.

La minería de datos astronómicos es el análisis exploratorio de datos (EDA) ¹ que utiliza algoritmos de máquinas de aprendizaje para explorar datos a través de minería de datos, detección sorpresa y descubrimiento científico en datos de gran escala.

Estas Máquinas de aprendizaje se clasifican según sus usos:

- **Caracterizar los Datos:** Aprendizaje no supervisado, clustering, descubrimiento de clases.
- **Asignación de Etiquetas de Clases:** Aprendizaje supervisado, clasificación.
- **Descubrir lo Desconocido:** Aprendizaje semi-supervisado, detección de “outlier/novelty”

¹Exploratory Data Analysis

La amplia variedad de métodos disponibles se reflejan en una amplia red de técnicas de matemáticas aplicada; que incluyen matemática discreta, álgebra lineal, combinatoria, geometría, métodos de grafos, etc. El interés de esta trabajo es en los métodos de clasificación (asignación de etiquetas de clases a nuevos datos usando los grupos y clases ya conocidos). Los algoritmos más comunes para clasificación incluyen clasificación bayesiana, árboles de decisión, redes neuronales artificiales, regresión, máquinas de soporte vectorial, modelos de Markov y K-vecinos más cercanos.

2.2. Clasificación de Objetos Astronómicos

El explosivo crecimiento de los datos astronómicos en cantidad, y accesibilidad ha generado un gran interés en las tareas de análisis más comunes en astronomía como son: Visualización de Datos, Agrupamiento y Clasificación de Datos [Staiano2005].

Los algoritmos de Máquinas de Aprendizaje y Minería de Datos tienen un comportamiento similar al proceso de asignación de clases a objetos en Astronomía: descubrimiento de clases, descubrir reglas para las diferentes clases, construir muestras de entrenamiento para refinar las reglas, asignación de nuevos objetos a clases conocidas usando nuevas mediciones de datos científicos para esos objetos.

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) se han usado para clasificar galaxias y estrellas [Cortiglioni2001]. Se establecen dos tipos de enfoques: clasificación parametrizada, donde un conjunto de características se extraen de un objeto que será clasificado; “modo de imagen directa”, los objetos recortados de la imagen de entrada y estas micro imágenes son usadas como vector de entrada. Otro enfoque es la clasificación morfológica [Goderiya2002,Ball2003], la cual consiste en separarlas según la secuencia de Hubble [Hubble1926]. Además, las RNA se han utilizado en la determinación del “Redshift” fotométrico estimado [Oyaizu2008], el cual es usado como estimador de distancia para un gran número de galaxias.

2.2.1. Nubes Moleculares

Las nubes moleculares son las cunas de estrellas, están formadas de gas y polvo. El gas es predominantemente hidrógeno molecular H_2 , aunque contienen además CO , H_2O , y moléculas más complejas tales como alcoholes y formaldeídos. Las moléculas más abundantes después del H_2 es el monóxido de carbono (CO), que es fácilmente observable en ondas milimétricas.

El gas y polvo al interior de nubes moleculares gigantes se distribuye en una componente difusa al interior del cual hay filamentos de gas mas denso en diversas direcciones, con composición química y propiedades físicas definidas. Estos filamentos a su vez se dividen o intersectan formando núcleos de gas denso, al interior de los cuales se generan discos de acreción donde nacen las protoestrellas (ver [Bergin2007, Kennicutt2012]).

Algunos algoritmos utilizados en astronomía para identificar objetos dentro de las nubes son nombrados a continuación.

2.2.2. GaussClumps

El algoritmo GaussClumps [Stutzki1990] consiste en ajustar perfiles Gaussiano a los picos más brillantes en los datos. Esto se puede realizar en dos o tres dimensiones (ángulo, frecuencia, como los cubos de datos de ALMA). Los ajustes se realizan progresivamente desde los picos mas brillantes hasta los de menor brillo. Al ajustar cada Gaussiana esta se agrega al catálogo de salida., luego se resta para ajustar la siguiente, hasta descomponer la imagen inicial en una superposicion de Gaussianas en distintas posiciones, con distinta orientacion, tamaño, e intensidad. La suma de las componentes Gaussianas reproduce la imagen original mas un ruido, que idealmente debe ser normal y homogéneo a lo largo de la imagen (ver figura 2.1).

En este algoritmo, los clumps pueden superponerse y por esta razón los píxeles de entrada no pueden ser asignados a un solo clump.

Cualquier componente de la varianza de entrada se utiliza para escalar el peso asociado a cada píxel cuando se realiza el ajuste de Gauss. Sus principales parámetros son el tamaño mínimo de los clumps y el umbral para el criterio de término.

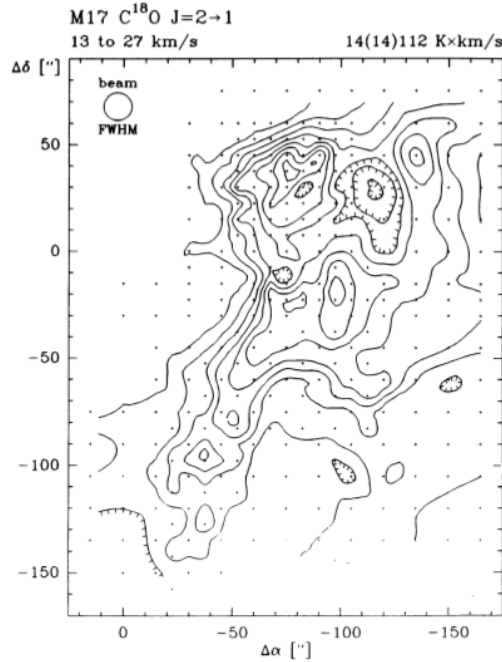


Figura 2.1: Un ejemplo de un modelo en 2D de gas molecular

2.2.3. ClumpFind

ClumpFind fue desarrollado por J. Williams [Williams1994]. En este algoritmo se parte del pico más brillante de la imagen (primer clump) y todos los píxeles se van asociando al mismo clump bajando gradualmente en intensidad hasta que aparezca un segundo pico aislado del primero. Este proceso continua asignando todos los píxeles de la imagen original al clump más cercano. Los clumps tienen así formas arbitrarias, y se encuentran separados por puntos silla en caso de estar conectados entre sí, o por el cielo si están separados (ver figura 2.2).

Con este algoritmo la estructura de las nubes es dividida en una serie de clumps disjuntos espacialmente, de modo que colectivamente reproducen la imagen original incluyendo el ruido del cielo. Así, el algoritmo es equivalente a tomar una maqueta de la imagen original y dividirla en la dirección perpendicular al cielo, como con un cortador de galletas donde cada galleta tiene una forma distinta y todas encajan perfectamente como piezas de un puzzle para reproducir la maqueta original.

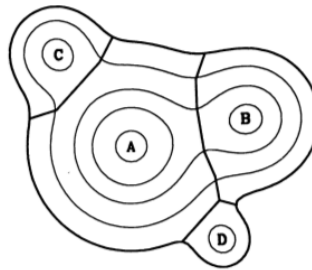


Figura 2.2: Un ejemplo de clumps encontrados con el algoritmo ClumpFind

2.2.4. Dendrogramas

Rosolowsky [Rosolowsky2008] utiliza de dendrogramas en la representación de las características esenciales de la estructura jerárquica de las “iso-superficies” para cubos de datos de línea moleculares. Si el algoritmo clumpfind divide un mapa de contornos en piezas de un puzzle, la idea detrás de los dendrogramas es dividir el puzzle en una colección de capas distintas como una masa de hoja, es decir, como si cada contorno de un mapa geológico representa un objeto distinto.

Es claro que la suma de los objetos de nuevo, reproduce idénticamente la imagen original. A diferencia de los métodos anteriores, los dendrogramas ordenan las estructuras encontradas de forma jerárquica en árbol – ramas – hojas. Dicho ordenamiento define relaciones físicas entre los distintos objetos catalogados (ver figura 2.3).

2.2.5. Wavelets

Las wavelets son un tipo especial de transformada de Fourier que representa una señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas de una wavelet madre.

Alves [Alves2007] utiliza la transformada de wavelet de una imagen para primero identificar y luego reconstruir los núcleos densos. Se menciona que los métodos tradicionales basados en umbrales no tienen buenos resultados, por eso es que se recurren a un algoritmo creado por Vandame(2006, private comm.) el cual consiste en usar la transformada de Wavelets sobre una imagen (ver figura 2.4).

La identificación de objetos en el espacio de Wavelets consiste en aislar estructuras dada un escala. Las estructuras en escalas consecutivas se conectan si el máximo local de

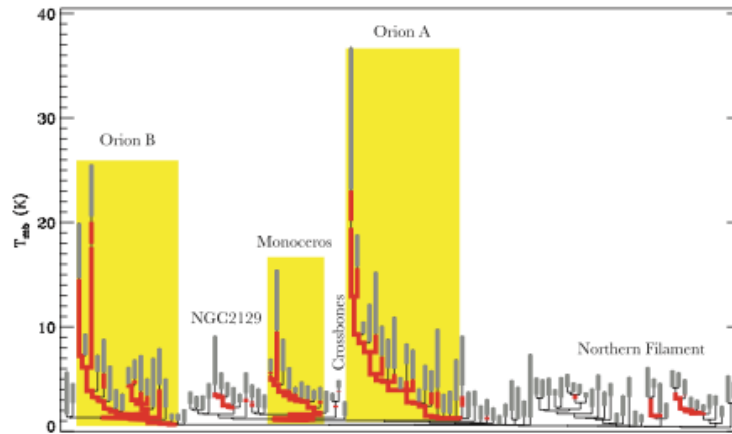


Figura 2.3: Un ejemplo de clumps encontrados con Dendrogramas

la primera esta dentro de la estructura de la siguiente. Luego se construye una distribución en 3D de las estructuras más significantes.

2.2.6. Wavelets en Astronomía

La Transformada de Wavelet se usa para el análisis local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad, y mapea la señal en una representación de tiempo-escala. El aspecto temporal de las señales es preservado. La diferencia con la Transformada de Fourier está en que la Transformada Wavelet provee análisis de multiresolución con ventanas dilatadas. El análisis de las frecuencias de mayor rango se realiza usando ventanas angostas y el análisis de las frecuencias de menor rango se hace utilizando ventanas anchas [Sheng1996].

Las Wavelets, funciones bases de la Transformada Wavelet, son generadas a partir de una función Wavelet básica, mediante traslaciones y dilataciones. Estas funciones permiten reconstruir la señal original a través de la Transformada Wavelet inversa.

La Transformada Wavelet no es solamente local en tiempo, sino también en frecuencia.

Dentro de los usos de esta poderosa herramienta podemos nombrar, además del análisis local de señales no estacionarias, el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, así como también es utilizada para la compresión y procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones. En [Jaffard2001] se dan ejemplos de aplicaciones

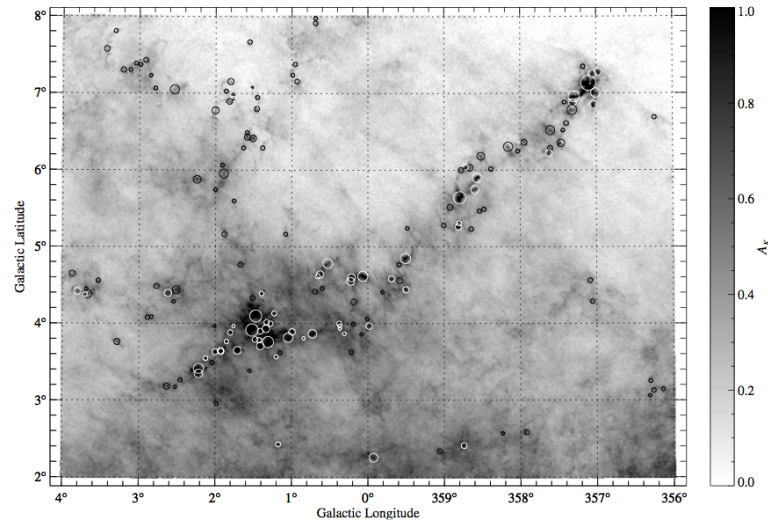


Figura 2.4: Un ejemplo de núcleos densos encontrados por medio del uso de Wavelets

de las Wavelets en astronomía.

En el libro de Starck y Murtagh [Starck2006] se hace una revisión a las distintas aplicaciones de las Wavelets en astronomía. Además, en el apéndice se entrega una descripción del algoritmo para la implementación de una transformada de Wavelets discreta conocida como A Trous.

Capítulo 3

Detección y clasificación de estructuras

El estudio de las estructuras en es importante para la comunidad astronómica porque en ellas se pueden encontrar diversos objetos, los cuales requieren ser identificados y clasificados. Por este motivo, se propone el desarrollo de una aplicación automática que permita analizar imágenes y obtener una clasificación de estructuras astronómicas.

La propuesta consiste en usar algoritmos de detección de estructuras (CLUMPFIND, Dendogramas, Wavelets) y luego aplicar algoritmos de clasificación. La finalidad es construir una herramienta que quede a disposición de la comunidad y cumpla con los requerimientos de un observatorio virtual.

3.1. Diseño de la solución

La solución propuesta consiste en aplicar distintos algoritmos de detección y clasificación. La figura 3.1 muestra el esquema de la propuesta. La propuesta consiste en desarrollar un algoritmo que permita identificar y clasificar estructuras astronómicas a diferentes escalas, usando la transformada Wavelets. Se busca generar un subconjunto de imágenes a escalas distintas y luego aplicar algún algoritmo de detección (Gaussclump, Clumpfind, Dendogramas) para identificar objetos en cada imagen. Al unir todas las imágenes generadas se debiese obtener el conjunto total de estructuras que contiene la imagen que se está analizando (en formato FITS).

A partir de las estructuras encontradas en el paso anterior se prosigue con la aplicación

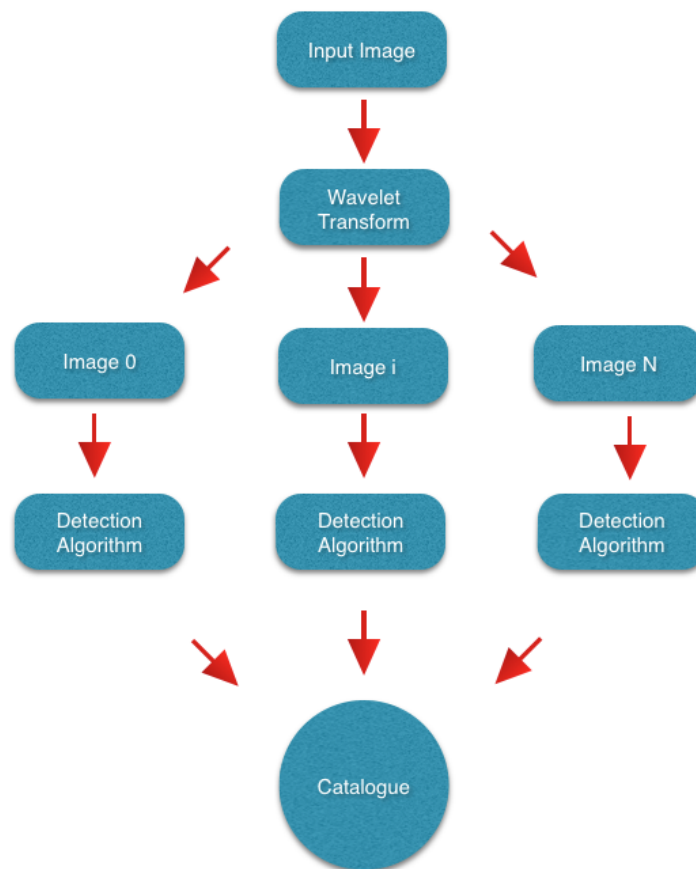


Figura 3.1: Proceso de creación de catálogo de estructuras a partir de una imagen FITS

de un algoritmo de clasificación que permita reconocer a que tipo de objeto pertenecen las estructuras encontradas. El usuario (astrónomo) determinará que criterios se considerarán para clasificar estos objetos.

Como parte final, se espera generar una aplicación que se pueda utilizar de forma “standalone” o pueda ser incluida dentro del software CASA(Common Astronomy Software Application) y/o estar dentro de ChiVO. De esta forma la herramienta generada estará al alcance de la comunidad y además debe cumplir con los requerimientos de un Observatorio Virtual.

3.2. Transformada de Wavelets

En el libro de Starck y Murtagh [SM06] se hace una revisión de las distintas aplicaciones de las Wavelets en astronomía. Además, se entrega una descripción del algoritmo para la implementación de una transformada de Wavelet discreta conocida como A Trous. En [JMR01] se dan ejemplos de aplicaciones de las Wavelets en astronomía.

Las funciones wavelet son la base para poder aplicar su transformada, la cual permite descomponer señales jerárquicamente y su posterior reconstrucción, además de extraer ciertos tipos de información de ellas. Las wavelet son herramientas para la descomposición de señales, tales como imágenes en una jerarquía de resoluciones crecientes de tal manera que al considerar niveles de mayor resolución, se obtengan más detalles de la imagen.

Una cualidad muy importante de las funciones wavelet es poder analizar una señal a diversas escalas. En el análisis wavelet, la escala juega un papel muy importante, ya que los diversos algoritmos procesan los datos en diferentes escalas y resoluciones espaciales. Si se observa una señal a una escala pequeña (poca resolución) se apreciarán únicamente aquellas entidades de mayores dimensiones. De igual manera, si se observa la misma señal a una escala grande (alta resolución) se podrán distinguir pequeños elementos o partes de la señal. Por ello, analizar una señal $f(t)$ consiste en descomponer en una serie de versiones escaladas y trasladadas con el objetivo de representarla como la superposición de un conjunto de funciones base o wavelet escaladas y trasladadas.

En la práctica se aplica una función wavelet prototipo llamada “wavelet madre” a partir de la cual se deriva toda una familia de versiones trasladadas y escaladas. El análisis de una señal en función del tiempo $f(t)$ se realiza desde dos puntos de vista: el análisis temporal, mediante una versión de la función madre contraída y de alta frecuencia; mientras que el análisis de frecuencias se desarrolla con una versión dilatada y de baja frecuencia. Como la citada señal original $f(t)$ puede ser representada en términos de una expansión wavelet, “las operaciones sobre los datos pueden ser realizadas empleando solo los correspondientes coeficientes wavelet”.

La forma más sencilla y frecuente de poner en práctica las propiedades que las funciones wavelet poseen para el estudio imágenes consiste en aplicar convoluciones sobre ellas mediante filtros cuyos coeficientes son derivados de las funciones wavelet. Ese conjunto de

filtros, tanto de descomposición como de reconstrucción o síntesis, se denomina banco de filtros.

3.3. Análisis de Multiresolución

La idea del análisis de multiresolución (MRA) es poder descomponer una señal $f(t) \in \mathcal{L}^2$ en distintos subespacios de funciones mediante sus proyecciones en los espacios generados por las mallas o grillas de escalamiento, generando niveles de detalle o resolución asociados a las escalas. Esto permite observar niveles resolución fina y gruesa que están implícitos en la señal original. La construcción de este análisis puede implementarse a través de bancos de filtros, lo que en la práctica reduce el problema de diseño de Wavelets a uno de diseño de filtros.

Consideremos los espacios V_j generados por el escalamiento j -ésimo de una función $\phi(t)$ de orden 2^j . El espacio Wavelets W_j está dado por:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}. \quad (3.1)$$

Cada V_j está contenido en el siguiente subespacio V_{j+1} siendo la base de V_j la función $\phi(2^j t - k)$, i.e.:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \quad (3.2)$$

Una función $f(t) \in \mathcal{L}^2$ muestra características relacionadas con el nivel de resolución en cada subespacio V_j , que denominaremos $f_j(t)$. La información completa (y superpuesta) se presenta en $f(t)$ y el MRA debe satisfacer el requerimiento de completitud:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(t) \longrightarrow f(t) \quad (3.3)$$

Cada f_j muestra la información contenida en una expansión del tipo:

$$f_j(t) = \sum_{|k| \leq j} c_k e^{jkt} \quad \text{en } V_j, \quad (3.4)$$

que no es más que una serie de Fourier (resolución gruesa). Sin embargo, existe información que no está contenida en las expresiones anteriores. Los espacios W_j formados a partir de la diferencia $\Delta f_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t)$ contienen nueva información acerca de los detalles del nivel j . El siguiente nivel es formado a partir de:

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \quad (3.5)$$

y la nueva información se puede expresar como:

$$\Delta f_j(t) = c_{j+1}e^{i(j+1)t} + c_{-j-1}e^{-i(j+1)t}, \quad (3.6)$$

que corresponden a los términos contenidos en W_j , los cuales son ortogonales a los de V_j ($gr \leq j$).

$$\begin{aligned} V_0 \oplus W_0 &= V_1 & \& & V_1 \oplus W_1 &= V_2 \\ V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 &= V_2 \\ &\vdots \\ V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j &= V_{j+1} \\ f_0 + (F_1 - F_0) + (F_2 - f_1) + \dots + (f_{j+1} - f_j) &= f_{j+1} \end{aligned}$$

Lo anterior nos permite construir los V_j y tomar diferencias o construir los W_j y tomar sumas. En la práctica, la construcción de los W_j es muy difícil y se comienza con la función de escalamiento $\phi(t)$ y mediante sus dilataciones se construye V_j . Reescalando se construye V_{j+1} y W_j se toma a partir de la diferencia entre V_{j+1} y V_j . Para la reconstrucción se debe considerar la condición de completitud:

$$V_0 \oplus \sum_{j=0}^{\infty} W_j = \mathcal{L}^2. \quad (3.7)$$

De acuerdo a lo anterior, los espacios V_j deben satisfacer los siguientes requerimientos:

$$V_j \subset V_{j+1}, \cap V_j = \{0\}, \cup V_j = \mathcal{L}^2 \quad (3.8)$$

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \text{ (dilatación)} \quad (3.9)$$

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - k) \in V_j \text{ (traslación)} \quad (3.10)$$

$$V_0 \text{ tiene una base ortonormal } \{\phi(t - k)\}. \quad (3.11)$$

El espacio V_j tiene la base:

$$\phi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \text{ y} \quad (3.12)$$

$$f_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jk} \phi_{jk}(t) \quad (\text{detalle } j\text{-ésimo}) \quad (3.13)$$

Otra forma de realizar una análisis multiresolución es a partir de la resolución de la ecuación de dilatación:

$$\phi(t) = \sum 2h(k)\phi(2t - k) \quad (3.14)$$

con:

$$\sum h(k) = 1 \quad \& \quad \sum (-1)^k h(k) = 0 \quad (3.15)$$

A partir de los coeficientes $h(k)$ se construyen bancos de filtros asociados para la descomposición y para la reconstrucción.

De acuerdo a lo anterior, podemos enumerar tres formas de construir un análisis multiresolución:

1. A partir de los espacios V_j .
2. A partir de la función de escalamiento $\phi(t)$.
3. A partir de los coeficientes de la ecuación de dilatación.

Si $V_0 \subset V_1$, entonces $\phi(t)$ también está contenida en V_1 , lo que quiere decir que se puede escribir como una combinación de las funciones generadoras de V_1 de la forma:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k c_k \phi(2t - k). \quad (3.16)$$

El factor $\sqrt{2}$ permite normalizar los coeficientes. Esta ecuación asegura que $\phi(t)$ es una función de escala pero esto no es un requerimiento extra. Se deduce a partir de $V_0 \subset V_1$.

Ella es conocida como una ecuación de refinamiento ya que despliega a $\phi(t)$ en un espacio más fino V_1 . A partir de la ecuación de dilatación es posible encontrar la secuencia de escala de $2 \{c_k\}$:

$$c(k) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (3.17)$$

Los espacios W_j se pueden generar a partir de los subespacios V_j considerando la relación $V_0 \oplus W_0 = V_1$. Sin embargo también es posible generar estos subespacios a partir de los wavelets $w(t)$. Estos wavelets son ortogonales a los reescalamientos de sí mismo y a las traslaciones de estos reescalamientos. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) w(2^j t - k) dt = 0, \quad \text{excepto cuando } j = k = 0. \quad (3.18)$$

Las traslaciones de $w(2^j t)$ generan w_j . También es posible generar estos subespacios a través de los coeficientes de la ecuación de dilatación. La condición de ortogonalidad entre $\phi(t)$ y $w(t)$ obliga a que los coeficientes asociados cumplan la siguiente relación:

$$d(k) = (1)^k c(1 - k). \quad (3.19)$$

Estos coeficientes pueden ser reemplazados en la ecuación:

$$w(t) = \sqrt{2} \sum_k d(k) \phi(2t - k), \quad (3.20)$$

que es conocida como ecuación wavelet, produciendo entonces un wavelet a partir de la función de escalamiento.

Los coeficientes $c(k)$ y $d(k)$ permiten implementar filtros asociados de reconstrucción. Los coeficientes $c(k)$ reconstruyen la información gruesa de la señal y los $d(k)$ apartan los detalles de cada nivel de resolución que permiten satisfacer la condición de reconstrucción completa:

$$V_0 \oplus \sum_{j=0}^{\infty} W_j = \mathcal{L}^2. \quad (3.21)$$

Para análisis, la descomposición ortogonal $V_1 = V_0 \oplus W_0$ genera la relación de descomposición:

$$\phi(2t - l) = \sum_k \left\{ \frac{1}{2} c_{l-2k} \phi(t - k) + \frac{1}{2} (-1)^l c_{2k-l+1} w(t - k) \right\}. \quad (3.22)$$

A partir de los coeficientes de la ecuación de dilatación se pueden encontrar las secuencias de escala de 2 de descomposición de la siguiente forma:

$$a_k = c(-k) = c_{-k}, \quad (3.23)$$

$$b_k = (-1)^k c(1 + k). \quad (3.24)$$

Como $d_k = (-1)^k c(1 - k)$ entonces $b_k = d_{-k}$. O sea que a partir de las secuencias de reconstrucción se deducen las secuencias de descomposición mediante la inversión de las primeras.

Teorema. Consideremos una función $\eta(t) \in \mathcal{L}^2$. Consideremos además la siguiente condición de normalidad:

$$\langle \eta(t - k), \eta(t - l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t - k) \overline{\eta(t - l)} dt = \delta_{k,l}, \quad k, l \in \mathcal{Z}. \quad (3.25)$$

sujeto a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta(w + 2\pi n)|^2 = 1$. Consideremos una función de escala $\phi^\perp(t)$ cuya Transformada de Fourier está dada por:

$$\phi^\perp(w) = \frac{\phi(w)}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(w + 2k\pi)|}}. \quad (3.26)$$

De acuerdo al teorema de ortonormalidad la familia $\{\phi^\perp(t - k) : k = 0, \pm 1, \dots\}$ es ortonormal. Entonces $\phi^\perp(t)$ representa la ortonormalidad de $\phi(t)$ y también genera un MRA de \mathcal{L}^2 (en rigor el mismo).

Teorema. Sea $\phi(t)$ una función de escalamiento que genera un MRA $\{V_n\}$ de \mathcal{L}^2 , y sea $\phi^\perp(t)$ su ortonormalización. Sea $\{c_k\}$ la secuencia de escala de 2 de la ecuación de dilatación. Si generamos una función $w(t)$ de la siguiente forma:

$$w(t) = \sum_k d_k \phi^{perp}(2t - k), \quad (3.27)$$

donde $d_k = (-1)^k c(1 - k)$, entonces $w(t)$ genera los subespacios complementarios ortogonales W_n , relativos al MRA $\{V_n\}$ de acuerdo a:

$$W_n = \text{clos}_{\mathcal{L}^2} \langle w(2^n t - k) \rangle; \quad k, n \in \mathcal{Z} \quad (3.28)$$

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}. \quad (3.29)$$

Además la familia $w_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} w(2^j t - k)$, $j, k \in \mathcal{Z}$ es una base ortonormal de \mathcal{L}^2 . La normalización $2^{\frac{j}{2}}$ asegura que:

$$\|w_{j,k}\| = \|w\| \quad \forall j, k \in \mathcal{Z}. \quad (3.30)$$

De acuerdo a lo anterior, diremos que un wavelet $w(t)$ es un wavelet ortonormal si las funciones $w_{j,k}(t)$ generan una base ortonormal de \mathcal{L}^2 . Entonces una función $f(t) \in \mathcal{L}^2$ tiene una representación en serie de la forma:

$$f(t) = \sum_{j,k} \hat{d}_{j,k} w_{j,k}(t). \quad (3.31)$$

Los coeficientes $\hat{d}_{j,k}$ tienen información con localización tiempo-frecuencia de la señal $f(t)$. Los coeficientes $\hat{d}_{j,k}$ pueden ser obtenidos mediante la CWT:

$$\hat{d}_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{w_{j,k}(t)} dt, \quad (3.32)$$

donde:

$$\hat{d}_{j,k} = (W_w f)(a, b)|_{(a,b)=(2^{-j}, k2^{-j})} = (W_w f)\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right), \quad (3.33)$$

entonces:

$$\hat{d}_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w\left(\frac{t - \frac{k}{2^j}}{\frac{1}{2^j}}\right) dt. \quad (3.34)$$

La secuencia $\{\hat{d}_{j,k}\}$ es conocida como la transformada discreta unidimensional de Wavelets (1DWT o bien DWT).

3.4. Análisis multiresolución multidimensional

3.4.1. Introducción

En esta sección introduciremos algunos conceptos útiles para desarrollar aplicaciones en n dimensiones. A partir de estos desarrollos el caso bidimensional que constituye nuestro interés central se presenta como un caso particular del n -dimensional.

Un análisis de multiresolución n -dimensional consisite en la sucesión:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{j+1} \subset \dots, \quad (3.35)$$

de manera que se cumplan las siguientes relaciones:

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad \& \quad \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}. \quad (3.36)$$

Además:

$$f(x) \in V_m \iff f(Ax) \in V_{m-1}, \quad (3.37)$$

por lo tanto:

$$\phi_{m,k}(x) = |\det(A)|^{-\frac{m}{2}} \dot{\phi}(A^m x - k), \quad \text{donde } A \text{ es una matriz regular, } x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.38)$$

Observaciones:

1. La matriz A debe tener valores propios con módulo mayor estricto que 1. (A produce dilatación en todas las direcciones de \mathbb{R}^n).
2. Para que $A\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$ se satisfaga, A debe tener coeficientes enteros.

Teorema de Meyer. Sea $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ un MRA de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces existen:

$$w_1, w_2, \dots, w_{|\det(A)|-1} \in V_{-1}, \quad (3.39)$$

que corresponden a funciones wavelets que constituyen una base ortonormal de $V_1 \ominus V_0$,

i.e.:

$$\{w_{j,m,k} = |det(A)|^{-\frac{m}{2}} w_j(A^{-m}x - k) : j = 1, 2, \dots, |det(A)| - 1; m \in Z, k \in Z^n\}, \quad (3.40)$$

es base ortonormal de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Para su demostración ver [?].

El teorema de Meyer determina una descomposición de V_{-1} en $|det(A)|$ subespacios:

$$V_{-1} = V_0 \bigoplus_{j=1}^{|det(A)|-1} W_{0,j}. \quad (3.41)$$

En dos dimensiones la matriz de dilatación A está dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

y de acuerdo al teorema de Meyer, el MRA bidimensional tiene $|det(A)| - 1$ wavelets asociados (o sea 3). Además, cada subespacio V_m se descompone en 4 subespacios:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1,1} \oplus W_{m+1,2} \oplus W_{m+1,3}. \quad (3.43)$$

Consideremos el producto tensorial entre dos funciones. A partir de él se generan los tres wavelets bidimensionales asociados:

$$\begin{aligned} \phi(x)\dot{w}(y) \\ w(x)\dot{\phi}(y) \\ w(x)\dot{w}(y) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Estos wavelets obtenidos a través del producto tensorial se llaman separables ya que pueden ser obtenidos a partir de wavelets unidimensionales. Además son anisotrópicos ya que enfatizan algunas orientaciones. En el caso bidimensional el énfasis es el siguiente:

$$\begin{aligned} \phi(x)\dot{w}(y) & LH & \text{énfasis vertical} \\ w(x)\dot{\phi}(y) & HL & \text{énfasis horizontal} \\ w(x)\dot{w}(y) & HH & \text{énfasis diagonal} \end{aligned} \quad (3.45)$$

A continuación se realizará un MRA bidimensional considerando los coeficientes de la expansión de una señal $f(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ en series wavelets, deduciendo la 2DWT a partir de la 2CWT, tal como en el caso unidimensional.

3.4.2. Transformadas bidimensionales continua y discreta de wavelets.

En esta sección se introducirán los conceptos de 2CWT y 2DWT. Pueden ser vistos algunos algoritmos clásicos de descomposición de imágenes con wavelets bidimensionales en el apéndice B.

La transformada bidimensional continua de wavelet (2CWT) se puede definir como una generalización del caso unidimensional de la siguiente forma:

$$(W_w f)(a_1, a_2; b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) w\left(\frac{x - b_1}{a_1}\right) w\left(\frac{y - b_2}{a_2}\right) dx dy, \quad (3.46)$$

que es un caso particular de una transformación de wavelet continua multidimensional con $w_1(t) = w_2(t) = w(t)$. Además se considera que $f(x, y)$ tiene energía finita en las dos dimensiones. Tal como en el caso unidimensional, la transformada bidimensional discreta de wavelet (2DWT) se puede definir a partir de la 2CWT evaluándola en bifrecuencias específicas, generando los coeficientes $\hat{d}_{j_1, j_2, k_1, k_2}$ de la 2DWT a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{d}_{j_1, j_2, k_1, k_2} = (W_w f)\left(\frac{1}{2^{j_1}}, \frac{1}{2^{j_2}}, \frac{k_1}{2^{j_1}}, \frac{k_2}{2^{j_2}}\right), \quad j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \quad (3.47)$$

A partir de estos coeficientes es posible expandir una función bidimensional $f(x, y)$ de energía finita en una serie de wavelets de la forma:

$$f(x, y) = \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \hat{d}_{j_1, j_2, k_1, k_2} \Psi_{j_1, j_2, k_1, k_2}(x, y), \quad (3.48)$$

donde:

$$\Psi_{j_1, j_2, k_1, k_2}(x, y) = 2^{\frac{(j_1 + j_2)}{2}} \Psi(2^{j_1}x - k_1, 2^{j_2}y - k_2) \quad (3.49)$$

con $\Psi(x, y)$ dado por el producto tensorial:

$$\Psi(x, y) = w(x)w(y). \quad (3.50)$$

Una consecuencia inmediata del producto tensorial es la reformulación de la expansión en series wavelets:

$$f(x, y) = \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \hat{d}_{j_1, j_2, k_1, k_2} w_{j_1, k_1}(x) w_{j_2, k_2}(y) \quad (3.51)$$

Como ya sabemos, una imagen puede ser aproximada digitalmente por un arreglo bi-dimensional de números reales, por lo que se considera como una señal de banda limitada y energía finita, resultando entonces su expansión en series una suma parcial de términos finitos de la forma:

$$f_{n_1, n_2}(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{n_1-1} \sum_{j_2=-\infty}^{n_2-1} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \hat{d}_{j_1, j_2, k_1, k_2} w_{j_1, k_1}(x) w_{j_2, k_2}(y). \quad (3.52)$$

Consideremos el caso $n_1 = n_2 = n$ y sea:

$$f_n(x, y) = f_{n,n}(x, y), \quad (3.53)$$

entonces por MRA $V_{n-1} = W_{n-2} + W_{n-3} + \dots$ implica que:

$$f_n(x, y) = f_{n-1}(x, y) + g_{n-1}(x, y), \quad (3.54)$$

donde:

$$g_{n-1}(x, y) = g_{LH, n-1}(x, y) + g_{HL, n-1}(x, y) + g_{HH, n-1}(x, y), \quad (3.55)$$

es la descomposición de detalles de la señal a partir de los 3 wavelets:

$$w_1(x, y) = \phi(x) \cdot w(y) \quad \text{detalle vertical}, \quad (3.56)$$

$$w_2(x, y) = w(x) \cdot \phi(y) \quad \text{detalle horizontal ,} \quad (3.57)$$

$$w_3(x, y) = w(x) \cdot w(y) \quad \text{detalle diagonal .} \quad (3.58)$$

Considerando lo anterior, las funciones de detalle están dadas por:

$$w_1(x, y) : g_{LH, n-1}(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in Z} d_{LH, k_1, k_2}^{n-1} \phi(2^{n-1}x - k_1) w(2^{n-1}y - k_2) , \quad (3.59)$$

$$w_2(x, y) : g_{HL, n-1}(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in Z} d_{HL, k_1, k_2}^{n-1} w(2^{n-1}x - k_1) \phi(2^{n-1}y - k_2) , \quad (3.60)$$

$$w_3(x, y) : g_{HH, n-1}(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in Z} d_{HH, k_1, k_2}^{n-1} w(2^{n-1}x - k_1) w(2^{n-1}y - k_2) , \quad (3.61)$$

$$\phi(x, y) : f_{n-1}(x, y) = \sum_{k_1, k_2 \in Z} c_{LL, k_1, k_2}^{n-1} \phi(2^{n-1}x - k_1) \phi(2^{n-1}y - k_2) . \quad (3.62)$$

Tal como en el caso unidimensional, existen algoritmos de descomposición y reconstrucción a partir de los filtros asociados al MRA. El de descomposición es:

$$c_{LL, k_1, k_2}^{n-1} = \sum_{l_1, l_2} a_{l_1-2k_1} a_{l_2-2k_2} c_{LL, l_1, l_2}^n , \quad (3.63)$$

$$d_{LH, k_1, k_2}^{n-1} = \sum_{l_1, l_2} a_{l_1-2k_1} b_{l_2-2k_2} c_{LL, l_1, l_2}^n , \quad (3.64)$$

$$d_{HL, k_1, k_2}^{n-1} = \sum_{l_1, l_2} b_{l_1-2k_1} a_{l_2-2k_2} c_{LL, l_1, l_2}^n , \quad (3.65)$$

$$c_{HH, k_1, k_2}^{n-1} = \sum_{l_1, l_2} b_{l_1-2k_1} b_{l_2-2k_2} c_{LL, l_1, l_2}^n , \quad (3.66)$$

El de reconstrucción es:

$$\begin{aligned} c_{LL, k_1, k_2}^n &= \sum_{l_1, l_2} \{ c_{k_1-2l_1} c_{k_2-2l_2} c_{LL, l_1, l_2}^{n-1} + c_{k_1-2l_1} d_{k_2-2l_2} d_{LH, l_1, l_2}^{n-1} \\ &+ d_{k_1-2l_1} c_{k_2-2l_2} d_{HL, l_1, l_2}^{n-1} d_{k_1-2l_1} d_{k_2-2l_2} d_{HH, l_1, l_2}^{n-1} \} \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.5. Algoritmos de multiresolución para procesos bidimensionales

3.5.1. Algoritmo de Feauveau

Feauveau [SM06] introdujo el análisis quincunx, el cual no es diádico y entrega la descomposición de las imágenes con un factor de resolución de $\sqrt{2}$. Para implementarlo se necesita un solo wavelet. Tras cada paso la imagen es submuestreada tanto en dirección x como en y . La figura 3.2 muestra la representación de una imagen a través de este algoritmo.

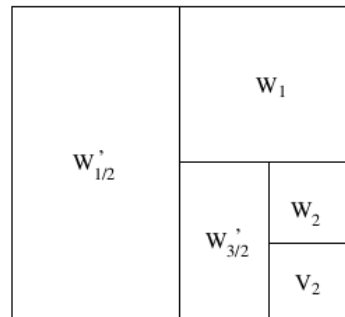


Figura 3.2: Despliegue de subimágenes generadas por el algoritmo de Feauveau.

Las subimágenes son obtenidas a través de filtraje asociado. El filtraje es selectivo y está relacionado con la operación de submuestreo. Feauveau concibe a la imagen como una superposición de grillas. A partir de ellas, filtra y obtiene las subimágenes. Esto se muestra en la figura 3.3, en la cual los pixels marcados con 'x' son filtrados pasabajos y los marcados con 'o' son filtrados pasaaltos, obteniendo los coeficientes wavelets simbolizados por '+'.

3.5.2. Algoritmo de à trous

El algoritmo de à trous [SM06] obtiene las subimágenes de descomposición wavelets a través de las diferencias de las subimágenes de baja resolución correspondientes a los

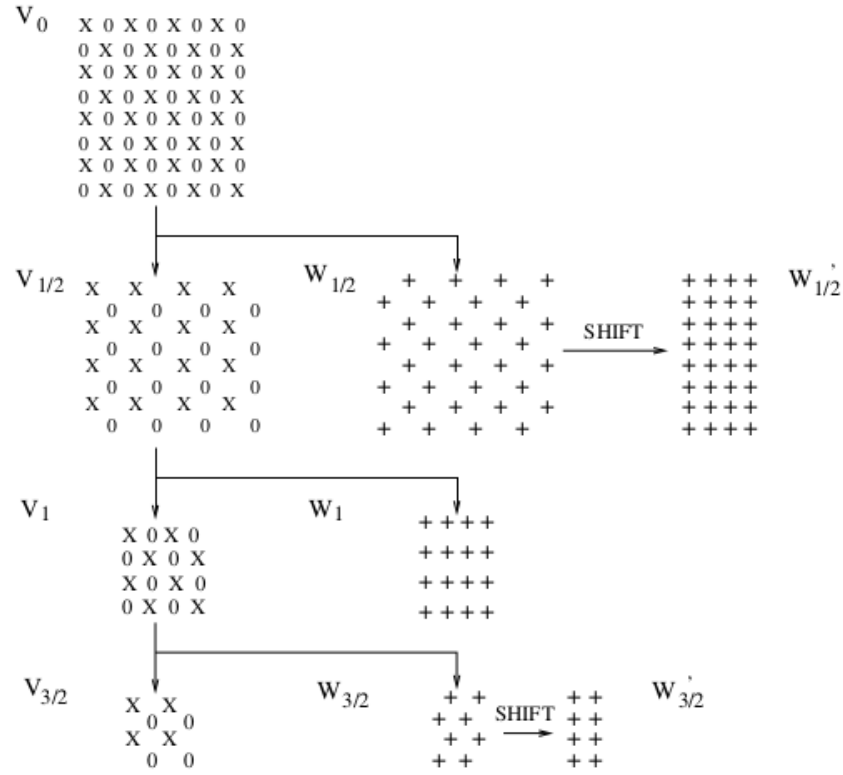


Figura 3.3: Algoritmo de Feauveau

niveles consecutivos de la forma:

$$W_j(k) = V_{j-1}(k) - V_j(k). \quad (3.68)$$

Por efecto del submuestreo, la distancia entre muestras consecutivas se incrementa en 2 a partir de la escala $j - 1$ hasta la siguiente:

$$V_j(k) = \sum_l c_l v_{j-1}(k + 2^{j-1}l). \quad (3.69)$$

Los coeficientes c_l están dados por la ecuación de dilatación:

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sum_l c_l \phi(x - l). \quad (3.70)$$

El nivel de resolución inicial se descompone de acuerdo a:

$$V_0(k) = V_n(k) + \sum_{j=1}^n W_j(k). \quad (3.71)$$

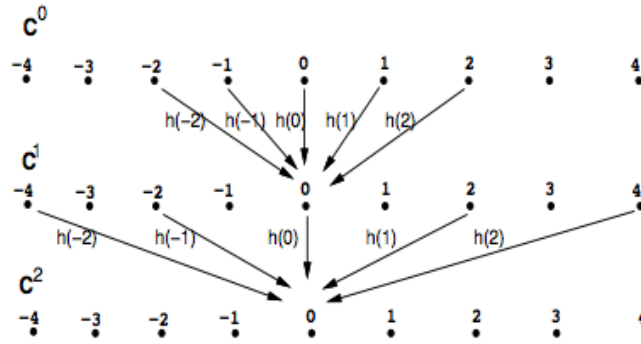


Figura 3.4: Algoritmo de à trous

La arquitectura del algoritmo de à trous se muestra en la figura 3.4.

3.5.3. Algoritmo piramidal laplaciano

La descomposición y reconstrucción MRA es implementada mediante filtros bidimensionales generados a partir del producto tensorial de wavelets unidimensionales. Después de filtrar, solo una muestra de cada dos se mantiene, reduciéndose el número de pixels en un factor de 2 para cada escala. Esta operación recibe el nombre de submuestreo diádico. La generación de los pixels a través de la convolución con los coeficientes de la respuesta

a impulso del filtro asociado, obedece a:

$$V_{j+1}(k) = \sum_l c(l - 2k)V_j(l), \quad (3.72)$$

y:

$$W_{j+1}(k) = V_j(k) = -\tilde{V}_j(k), \quad (3.73)$$

donde:

$$\tilde{V}_j(n, m) = 2 \sum_{k,l} c(n - 2l, m - 2l)V_j(k, l). \quad (3.74)$$

Las ramas de análisis y síntesis de los bancos de filtros asociados al algoritmo piramidal Laplaciano con submuestreo diádico se muestran en la figura 3.5. Este algoritmo es conocido como algoritmo de Mallat [Mallat89].

3.5.4. Algoritmo piramidal con un wavelet

El algoritmo anterior puede ser modificado para obtener una transformación wavelet isotrópica, cambiando la obtención de $\tilde{V}_{j+1}(n, m)$ sin reducción de muestras:

$$\tilde{V}_j(n, m) = \sum_{k,l} c(n - l, m - l)V_j(k, l), \quad (3.75)$$

y:

$$V_{j+1}(k) = \sum_l c(l - 2k)V_j(l). \quad (3.76)$$

El algoritmo de reconstrucción es idéntico a la pirámide laplaciana, pero esta no es exacta.

3.6. Uso del algoritmo à trous para detección de estructuras

La solución implementada en esta tesis consiете en lo siguiente. Utilizando el algoritmo à trous de multiresolución, se realiza una convolución con los filtros básicos pasa

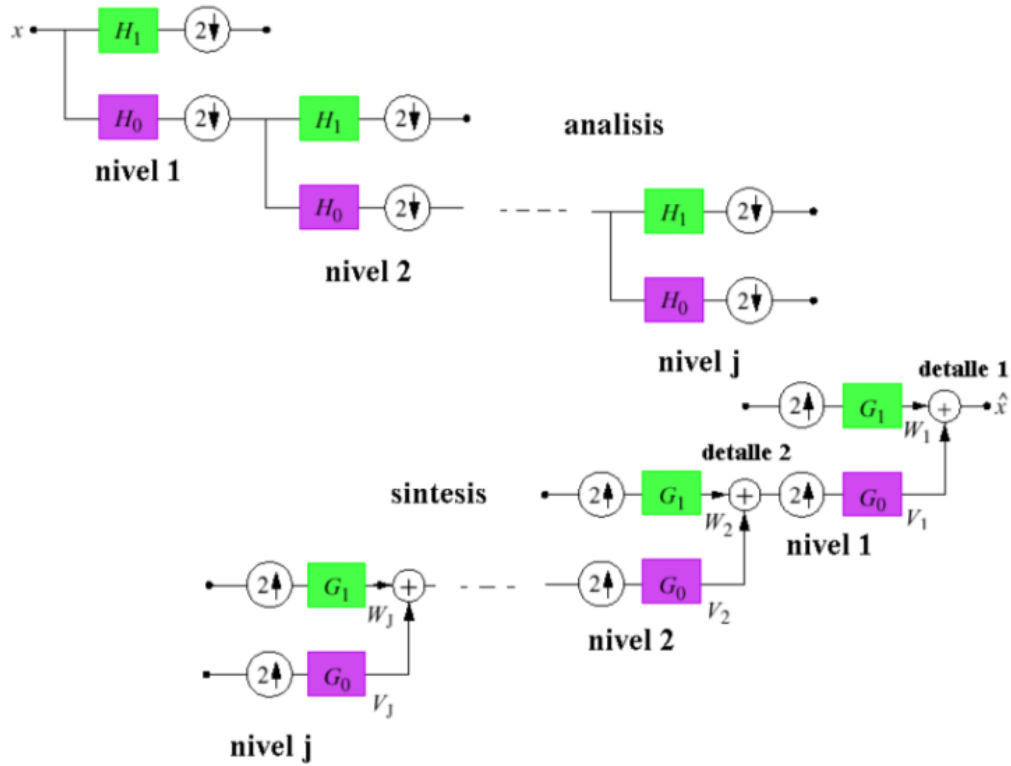


Figura 3.5: Ramas de análisis y síntesis de los bancos de filtros asociados al algoritmo Laplaciano piramidal diádico

bajo H y paso alto G que son expandidos insertando un número apropiado de ceros entre los coeficientes. De forma práctica se descompone la imagen convolucionándola mediante un filtro pasa bajo bidimensional, obteniendo de esta manera una imagen de aproximaciones, mientras que los coeficientes de detalles resultan de la diferencia entre dos imágenes consecutivas filtradas con el citado filtro paso bajo. De forma inversa se procede para la reconstrucción.

El filtro bidimensional de paso bajo generalmente consiste en un filtro spline bi-cúbico, asociado a la función scaling, si bien se pueden aplicar otros filtros cuyos coeficientes sean los correspondientes a los aplicados en la descomposición wavelet discreta. En la figura 3.6 se muestra la rutina de cálculos para obtener las imágenes de aproximaciones y detalles a diferentes niveles, con un filtro genérico pasa bajo de 5×5 .

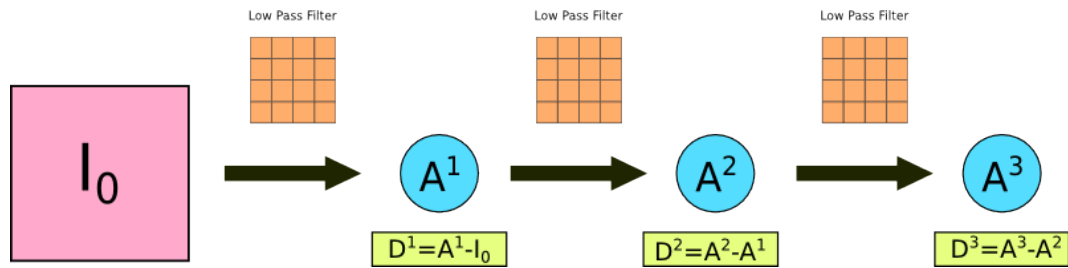


Figura 3.6: Algoritmo “a trous” aplicado sobre una imagen de partida I_0 e imágenes resultantes

El algoritmo “a trous” empleó un filtro B3-spline discreto de tamaño 5x5 en el que los coeficientes quedan definidos según la figura 3.7, con todos sus coeficientes multiplicados por 1/256 para normalizar.

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Figura 3.7: Filtro B3-spline usado en esta tesis

La distancia entre los valores del filtro en cada nivel se incrementa con un factor de 2.

3.7. Pruebas

Una prueba se realiza sobre la región NGC 6334 (ver figura 3.8). En la figura 3.9 se ven 8 niveles de descomposición.

Clumpfind es un algoritmo automático para el análisis de la estructura en una línea espectral de cubo de datos. El algoritmo funciona mediante la construcción de contornos,

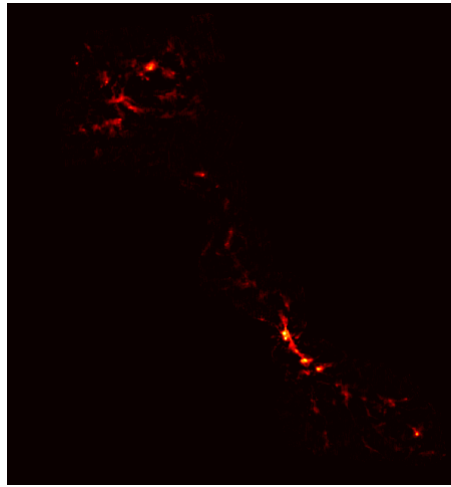


Figura 3.8: Región NGC 6334

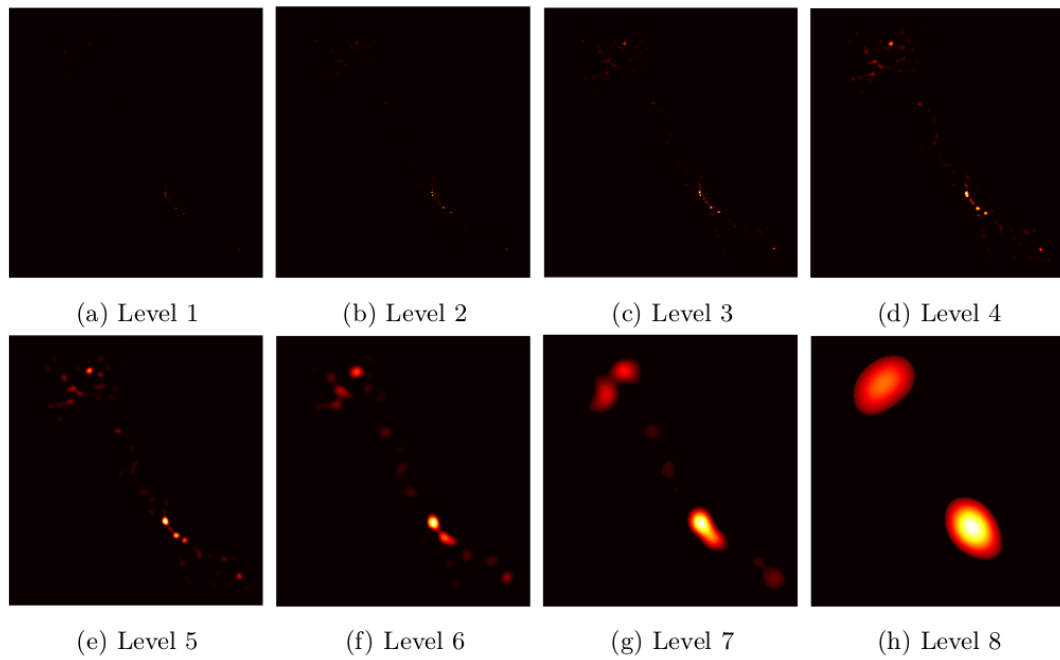


Figura 3.9: Región NGC 6334 a 8 niveles de multiresolución

siendo múltiplos del ruido RMS (Root Mean Square) de las observaciones, a continuación, se buscan los picos de emisión como nuevos clumps. A cada emisión se le asigna un clump,

se sigue así hasta la menor intensidad. Fue propuesto por Williams et al. (1994) [WdB94], y está basado en como el ojo analizaría los mapas: se contornea el conjunto de datos, buscando picos, y se continua con los niveles de contornos más bajos de forma secuencial.

Los problemas fundamentales son: como establecer los niveles de contornos para los datos y como manejar el caso de cuando dos o más clumps se mezclan.

Los contornos deben ser espaciados, $T = \Delta T, 2\Delta T, 3\Delta T \dots$, ya que el ruido se agrega linealmente en cada nivel. Si ΔT es muy pequeño, el mapa de contornos aparecerá lleno de estructuras dificultando la diferenciación entre características reales y picos de ruido. Por otro lado, cuando ΔT es muy grande, el mapa de contornos carecerá de contraste y características sutiles se perderán. En las pruebas realizadas por Williams et al. (1994) [WdB94] establecieron un valor adecuado para $\Delta T = 2T_{rms}$, donde $2T_{rms}$ es el ruido rms en la imagen.

El algoritmo define como un clump a la colección de píxeles en el cual su más alto contorno está aislado de cualquier otro clump, es decir, no están conectados. Los clump deben ser aislados en un mismo nivel de contorno, sin embargo, se mezclarán en niveles menores (ver figura 3.10). Se crea un vector que contiene en cada item la colección de píxeles del clump i , cada nuevo clump es un nuevo item en el vector. Los resultados sobre la región NGC 6334 se ven en la figura 3.11.

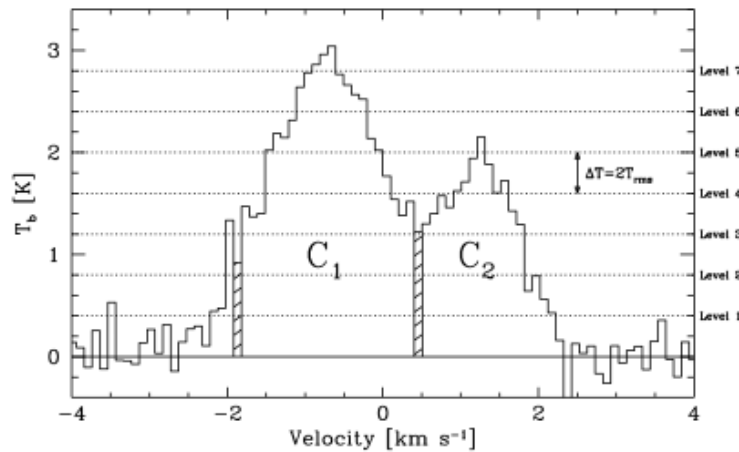


Figura 3.10: Espectro con niveles de contorno

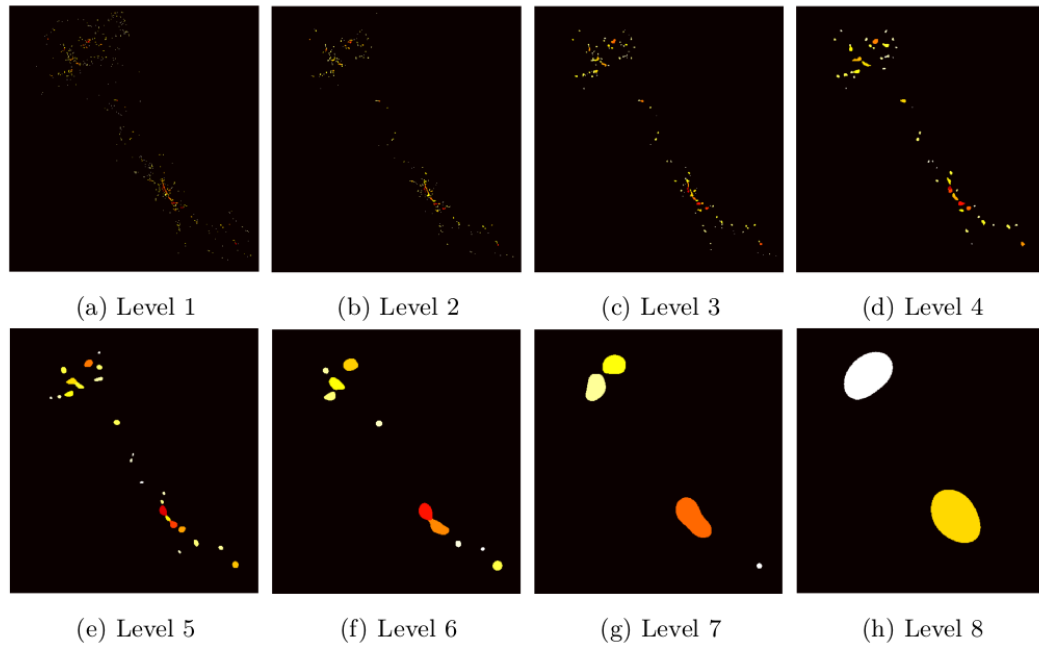


Figura 3.11: Imágenes de la detección en 8 niveles

Para ver las relaciones entre las distintas estructuras encontradas en cada nivel se hace uso de estructuras jerárquicas tipo árbol. A partir del algoritmo clumpfind implementado se obtienen la posición de los picos más altos en cada clump y también la posición de su centroide. Con los datos anteriores se puede construir un dendrograma por cada nivel. Para encontrar relaciones entre los niveles se necesitan estructuras jerárquicas que consideren solo la ubicación de los picos o centroide y no su valor, de esta forma se relacionan las estructuras entre niveles. Se determina que clumps están dentro de otro entre cada nivel, esto es similar a los dendrogramas pero solo se considera la pertenencia para establecer las hojas.

3.8. Construcción de un catálogo

Por cada imagen FITS que se desea examinar se genera un catálogo de estructuras encontradas. Este catálogo contiene los datos de posición y pico mas alto (centroide). Un ejemplo de catálogo puede verse en la Figura 3.12.

ID	area[px]	x_{peak}	y_{peak}	$valor_{peak}$	$x_{centroide}$	$y_{centroide}$	$valor_{centroide}$
n6_0	4367	400	744	0.564	400	746	0.562
n6_1	4646	330	797	0.268	324	808	0.240
n6_2	3411	1114	381	0.240	1114	380	0.239
n6_3	3221	1025	307	0.126	1020	311	0.122
n6_4	1816	139	1094	0.098	139	1094	0.098
n6_5	1774	961	285	0.078	960	283	0.077
n6_6	697	1085	261	0.055	1085	260	0.055
n6_7	745	829	518	0.053	829	518	0.053
n6_8	737	245	904	0.052	245	904	0.052
n6_9	273	220	1022	0.041	220	1022	0.041

Figura 3.12: Catálogo generado con imagen en nivel 6

Capítulo 4

Epílogo

Los trabajos pendientes e inconclusos debidos al fallecimiento de Rodrigo fueron los siguientes (lista recuperada de workshop Fondef, presentación de Rodrigo, 1 de Agosto 2014):

- Implementar un mecanismo de visualización para las estructuras jerárquicas.
- Terminar la implementación del algoritmo propuesto en una aplicación standalone.
- Defender la Tesis asociada al proyecto

Bibliografía

[ALL07] J. Alves, M. Lombardi, and C. J. Lada. The mass function of dense molecular cores and the origin of the IMF. *Astronomy & Astrophysics*, 462:L17-L21, January 2007.

[BB10] N. M. Ball and R. J. Brunner. Data Mining and Machine Learning in Astronomy. *International Journal of Modern Physics D*, 19:1049–1106, 2010.

[BLF + 03] N. M. Ball, J. Loveday, M. Fukugita, O. Nakamura, S. Okamura, J. Brinkmann, and R. J. Brunner. Galaxy types in the sloan digital sky survey using supervised artificial neural networks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 348(astro-ph/0306390):1038. 9 p, Jun 2003.

[Bor09] K. Borne. Scientific Data Mining in Astronomy. ArXiv e-prints, November 2009.

[Bor13] K. Borne. Virtual observatories, data mining, and astroinformatics. In TerryD. Oswalt and HowardE. Bond, editors, *Planets, Stars and Stellar Systems*, pages 403–443. Springer Netherlands, 2013.

[BT07] E. A. Bergin and M. Tafalla. Cold Dark Clouds: The Initial Conditions for Star Formation. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 45:339–396, September 2007.

[CMHF01] F. Cortiglioni, P. Mahonen, P. Hakala, and T. Frantti. Automated star-galaxy discrimination for large surveys. *The Astrophysical Journal*, 556(2):937, 2001.

[GL02] Shaukat N. Goderya and ShawnM. Lolling. Morphological classification of galaxies using computer vision and artificial neural networks: A computational scheme. *Astrophysics and Space Science*, 279(4):377–387, 2002.

[Hub26] E. P. Hubble. Extragalactic nebulae. *apj*, 64:321–369, December 1926.

[JMR01] S. Jaffard, Y. Meyer, and R. D. Ryan. 12. Wavelets and Astronomy, chapter 12, pages 187–201. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[KE12] R. C. Kennicutt and N. J. Evans. Star Formation in the Milky Way and Nearby Galaxies. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 50:531–608, September 2012.

[Mallat89] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 1989.

[OLC + 08] H. Oyaizu, M. Lima, C. E. Cunha, H. Lin, J. Frieman, and E. S. Sheldon. A Galaxy Photometric Redshift Catalog for the Sloan Digital Sky Survey Data Release 6. *apj*, 674:768–783, February 2008.

[RPKG08] E. W. Rosolowsky, J. E. Pineda, J. Kauffmann, and A. A. Goodman. Structural Analysis of Molecular Clouds: Dendrograms. *The Astrophysical Journal*, 679:1338–1351, June 2008.

[SCDV + 05] A. Staiano, A. Ciaramella, L. De Vinco, C. Donalek, G. Longo, G. Raiconi, R. Tagliaferri, R. Amato, C. Del Mondo, G. Mangano, and G. Miele. Visualization, clustering and classification of multidimensional astronomical data. In *Computer Architecture for Machine Perception, 2005. CAMP 2005. Proceedings. Seventh International Workshop on*, pages 141–146, 2005.

[SG90] J. Stutzki and R. Guesten. High spatial resolution isotopic CO and CS observations of M17 SW - The clumpy structure of the molecular cloud core. *The Astrophysical Journal*, Part 1, 356:513–533, June 1990.

[She96] Y. Sheng. Wavelet transform. *The transforms and applications handbook*, pages 747–827, 1996.

[SM06] J.-L. Starck and F. Murtagh. *Astronomical Image and Data Analysis*. Springer, 2nd edition, 2006.

[WdB94] J. P. Williams, E. J. de Geus, and L. Blitz. Determining structure in molecular clouds. *The Astrophysical Journal*, 428:693–712, June 1994