Presentación de Avance - Proyecto SWE
ILI384: Taller de Modelos y Métodos Cuantitativos

Rodrigo Naranjo Martín Villanueva

11 de noviembre 2015

1. Descripción del Problema

El problema consiste en modelar el sistema de *Shallow Water Equations* en $1D$ y $2D$, de tal modo que se pueda determinar la evolución del sistema, dadas las ecuaciones diferenciales que modelan el problema, las condiciones iniciales y las condiciones de borde. Las SWE corresponden a un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes, que se obtiene al hacer la suposición de que el fluido es incompresible, sin viscosidad y que la profundidad del agua es baja en relación al área en que se extiende. En el caso general (2D) las ecuaciones pueden escribirse como a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(h-b)) + \frac{\partial}{\partial y}(v(h-b)) = 0 \tag{3}$$

donde las variables de interés (a modelar) son $h(x, y, t)$ (nivel de agua), $u(x, y, t)$ (componente de velocidad de una columna de agua en x), $v(x, y, t)$ (componente de velocidad de una columna de agua en y).

2. La Implementación

Para la resolución del problema se plantea un enfoque del tipo partículas, donde la superficie del agua se modela por medio de un conjunto de partículas y por la forma en que se distribuyen. Para ser más precisos, cada una de las variables de interés (h, u y v) se aproximan como una combinación lineal de funciones RBF. Para h, por ejemplo, se tiene:

$$h(x, y, t) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i(t)\Phi(||\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i(t)||, \epsilon_i(t))$$

donde la función RBF a ocupar es de preferencia una función de soporte compacto, de modo que se acote el radio de influencia de cada función.

Lo que se quiere lograr sigue el enfoque *Evolutive RBF*, donde se obtienen ecuaciones de evolución (ODE's) para los parámetros dependientes del tiempo en cada RBF ($\gamma(t)$, $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ y $\epsilon_i(t)$). En dicho caso, para obtener el estado del sistema en un $t + \triangle t$, sería tan sólo computar las ecuaciones de evolución para cada RBF (de cada variable) y luego sumar los resultados respectivos en el espacio.

Inicialmente, se propone resolver las *Burger's Equations* en 1D sin viscosidad, definidas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

Se puede observar que esta es una versión simplificada de las SWE, en las cuales no se considera la ecuación de continuidad.

El siguiente paso, consiste en resolver las SWE en 1D (solo se considerará el movimiento en el eje X), a modo de obtener una aproximación para estudiar el comportamiento de las ecuaciones antes de avanzar al problema en 2D.

Finalmente, se implementarán las SWE en 2D.

3. Dificultades

Se presentan aquí algunas de las dificultades que se conocen, y otras que eventualmente podrían aparecer en la implementación del proyecto.

- La batimetría $b(x, y, t)$ es, en general, una función discontinua (o que se conoce parcialmente), y por lo tanto debe hallarse una manera de aproximar su derivada.

- En simulaciones ocupando otros métodos (SPH *Smoothed Particle Hidrodynamics*) se ha notado que no tomar en cuenta la viscosidad, puede llevar a problemas de estabilidad numérica en las simulaciones.
- Probablemente en las simulaciones sea necesario ocupar una gran cantidad de partículas para modelar la superficie del agua, lo cual lleva a una gran cantidad de computación para determinar los estados siguientes del sistema. Por ello, quizas sea necesario paralelizar la ejecución, o buscar métodos más eficientes de computación (FMM Fast Multipole Method).

4. Desarrollo

4.1. Burger's Equation

Para realizar una prueba preliminar antes de modelar las SWE, se procedió a resolver la Burger's Equation, una ecuación que permite modelar de manera simplificada el comportamiento de un fluido incompresible.

Para realizar esto, se procedió a modelar el comportamiento de la función $u(x,t)$ mediante el uso de *Evolutive RBF* de la siguiente forma:

$$\Phi_u(x,t) = \sum_i \gamma_i(t)\phi_i(x-\xi(t),\epsilon_i)$$

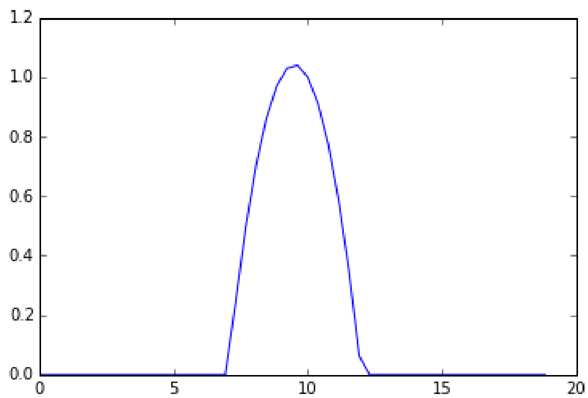
Donde Φ_u es una aproximación de $u(x,t)$ mediante la suma de funciones *RBF*. Para casos de prueba iniciales, se usará la función ϕ definida como:

$$\phi(x,\epsilon) = e^{-(\epsilon x)^2}$$

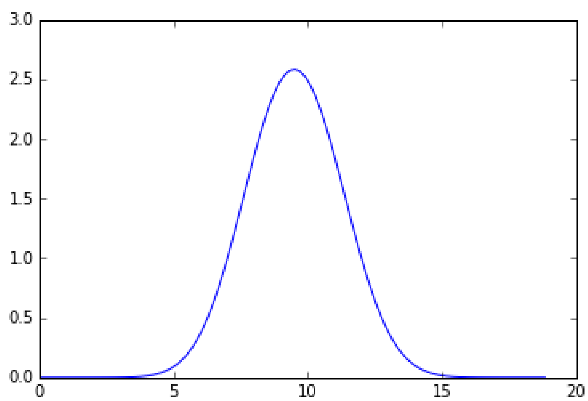
Donde ϵ corresponde al inverso del *shape parameter* de la *RBF*. En el futuro, se pretende reemplazar esta función por funciones de soporte compacto, con el fin de generar sistemas *sparse*.

Se realizó un experimento modelando el comportamiento de la ecuación para el estado inicial:

$$u(x) = I_{x\in[7,12]}\frac{(7-x)(x-12)}{12}$$



La aproximación inicial utilizando *RBF* fue la siguiente:

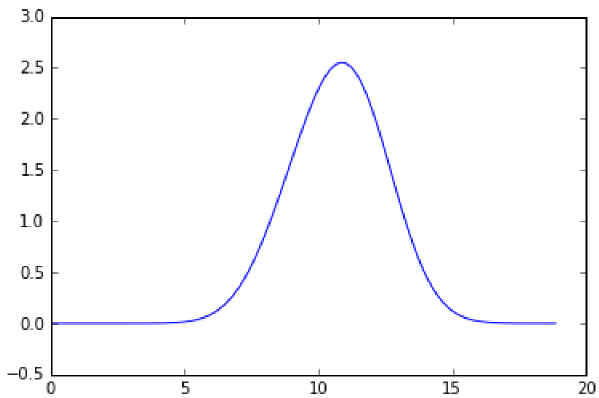


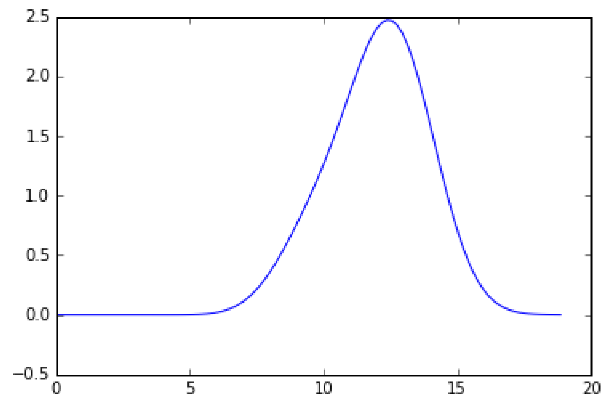
Resolviendo el sistema de ecuaciones, se hallaron las ecuaciones de evolución de los parámetros de la *RBF* de la forma:

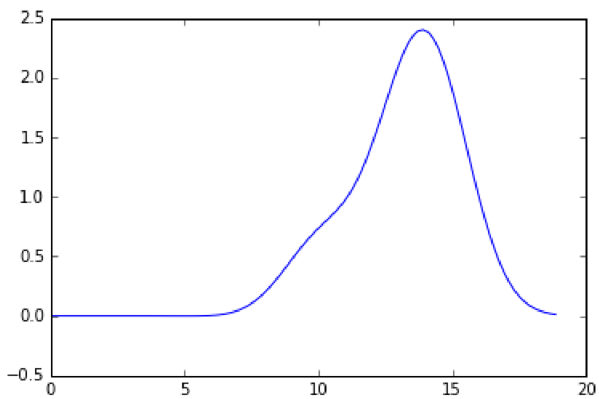
$$\gamma'(t) = 0$$
$$\epsilon'(t) = 0$$
$$\xi'(t) = u$$

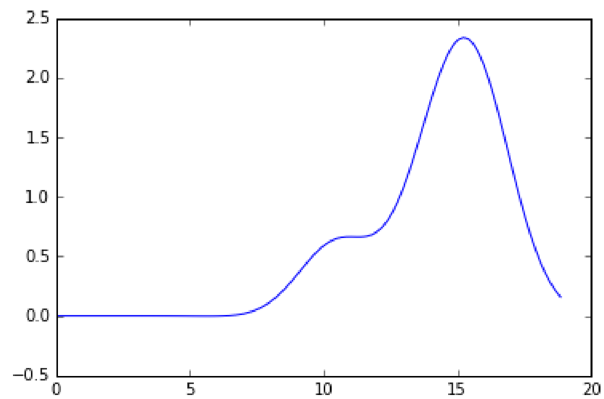
Estas ecuaciones indican que las *RBF* mantendrán su forma ($\gamma'(t) = \epsilon'(t) = 0$). Los cambios de forma en el fluido ocurrirán debido a la superposición de las *RBF* a medida que estas se muevan acorde a la última ecuación.

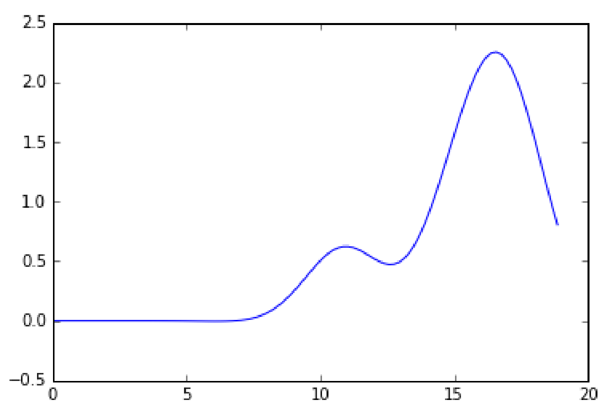
Algunos resultados obtenidos para la evolución de la ecuación en el tiempo son los siguientes:











Como se puede observar, el comportamiento modelado por la *Burger's Equation* es bastante simple, consistiendo en un movimiento de la perturbación inicial $u(x,0)$ acorde a su posición anterior. Algunos de los detalles que pudieron observarse en la simulación son la aparición de una perturbación más pequeña que parece moverse a menor velocidad que el resto del sistema.