

Presentación de Avance - Proyecto SWE

ILI384: Taller de Modelos y Métodos Cuantitativos

Rodrigo Naranjo

Martín Villanueva

11 de noviembre 2015

1. Descripción del Problema

El problema consiste en modelar el sistema de *Shallow Water Equations* en 1D y 2D, de tal modo que se pueda determinar la evolución del sistema, dadas las ecuaciones diferenciales que modelan el problema, las condiciones iniciales y las condiciones de borde. Las SWE corresponden a un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes, que se obtienen al hacer la suposición de que el fluido es incompresible y que no existe viscosidad, aunque esta última puede relajarse para obtener un sistema más realista. En el caso general (2D) las ecuaciones pueden escribirse como a continuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(h-b)) + \frac{\partial}{\partial y}(v(h-b)) = 0 \quad (3)$$

donde las variables de interés (a modelar) son $h(x, y, t)$ (nivel de agua), $u(x, y, t)$ (componente de velocidad de una columna de agua en x), $v(x, y, t)$ (componente de velocidad de una columna de agua en y). Adicionalmente deben ser conocidos $b(x, y)$ que corresponde a la *batimetría* que describe la forma del fondo marino y las condiciones de borde e iniciales del sistema.

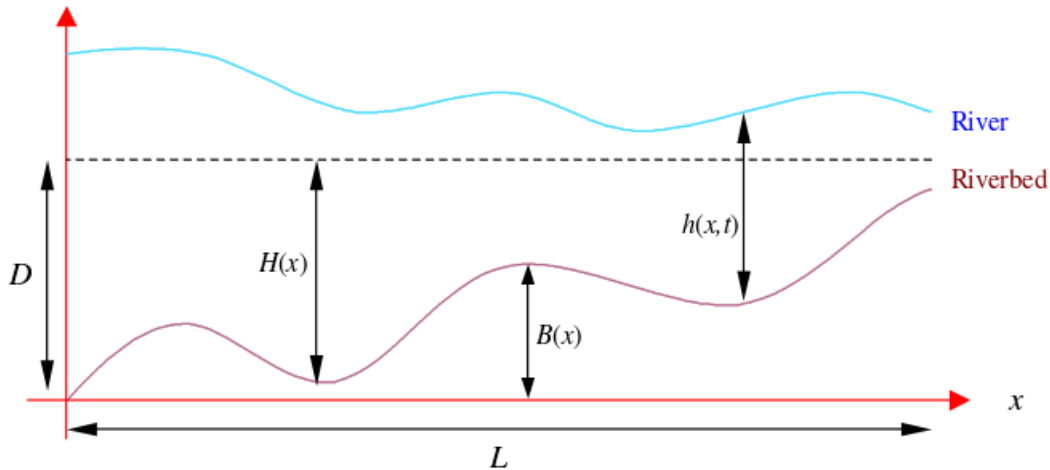


Figura 1: Esquema de SWE en una dimensión.

2. La Implementación

Para la resolución del problema se plantea un enfoque del tipo partículas, donde la superficie del agua se modela por medio de un conjunto de partículas y por la forma en que se distribuyen. Para ser más precisos, cada una de las variables de interés (h , u y v) se aproximan como una combinación lineal de funciones *RBF*. Para h , por ejemplo, se tiene:

$$h(x, y, t) = \sum_{i=0}^N \gamma_i(t) \Phi(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i(t)\|, \epsilon_i(t))$$

donde la función RBF a ocupar es de preferencia una función de soporte compacto, de modo que se acote el radio de influencia de cada función, y se generen de este modo sistemas *sparse*.

Lo que se quiere lograr sigue el enfoque *Evolutive RBF*, donde se obtienen ecuaciones de evolución (ODE's) para los parámetros dependientes del tiempo en cada RBF ($\gamma(t)$, $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ y $\epsilon_i(t)$). En dicho caso, para obtener el estado del sistema en un tiempo $t + \Delta t$, sería tan sólo computar las ecuaciones de evolución para cada RBF (de cada variable) y luego sumar los resultados respectivos en el espacio.

La implementación de la solución espera ser incremental, abordando la complejidad del problema paso por paso. En base a esto, se planea seguir el siguiente orden.

1. Inicialmente se propone resolver las *Burgers' Equations* en 1D sin viscosidad, definidas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

que es de interés pues es no lineal y que se deriva de un modelo de convección-difusión, por lo tanto muy similar a las SWE.

2. El siguiente paso, consiste en resolver las SWE en 1D (solo se considerará el movimiento en el eje X), a modo de obtener una idea de las propiedades y comportamiento de la solución propuesta antes de avanzar a más dimensiones. Para este paso se pretende ocupar en primer lugar funciones RFB gaussianas, para luego dar con alguna implementación con funciones de soporte compacto.
3. Implementar la solución anterior al problema en 2D, considerando movimiento en el eje X e Y.
4. Implementar condiciones de borde, iniciales y batimetría utilizadas (por otros métodos de simulación) y probarlos con esta solución para establecer comparaciones, y verificar si se están obteniendo resultados correctos.
5. Posiblemente también será necesario agregar los términos de viscosidad al sistema, para analizar sus efectos y para hacerlo más realista.
6. Buscar métodos para optimizar la ejecución de la solución encontrada: Paralelización/Implementación en GPU, Fast multipole method, aprovechar propiedades del sistema sparse, entre otras.

3. Dificultades

Se presentan aquí algunas de las dificultades que se conocen, y otras que eventualmente podrían aparecer en la implementación del proyecto.

- La batimetría $b(x, y, t)$ es, en general, una función discontinua (o que se conoce parcialmente), y por lo tanto debe hallarse una manera de aproximar su derivada.
- En simulaciones ocupando otros métodos (SPH *Smoothed Particle Hidrodynamics*) se ha notado que no tomar en cuenta la viscosidad, puede llevar a problemas de estabilidad numérica en las simulaciones.
- Probablemente en las simulaciones sea necesario ocupar una gran cantidad de partículas para modelar la superficie del agua, lo cual lleva a una gran cantidad de computación para determinar los estados siguientes del sistema. Por ello, quizás sea necesario paralelizar la ejecución, o buscar métodos más eficientes de computación (FMM Fast Multipole Method).

4. Desarrollo

4.1. Burgers' Equation

4.1.1. Análisis Teórico

Para realizar una prueba preliminar antes de modelar las SWE, se procedió a resolver la Burgers' Equation (4), una ecuación que permite modelar de manera simplificada el comportamiento de un fluido incompresible, por medio de las leyes de la conservación. Para realizar esto se define una solución $u(x, t)$ como una combinación lineal de RBF's, del siguiente modo

$$u(x, t) = \sum_i \Phi_i(x, t) = \sum_i \gamma_i(t) \phi_i(x - \xi_i(t), \epsilon_i) \quad (5)$$

Para realizar las pruebas iniciales se ocupa $\phi(x, \epsilon) = e^{-(\epsilon x)^2}$. Siguiendo el enfoque *evolutivo* se propone $\Phi(x, t)$ (se omite subíndice por simplicidad) como solución a (4), sin embargo para abordar el problema de la no linealidad, debe hacer una modificación al problema inicial. En vista de que se propone a $\Phi(x, t)$ como una solución a la PDE, es razonable aproximar $u(x, t)$ como una expansión de Taylor en torno a $(\xi(t), t)$ obteniendo

$$u(x, t) = u(\xi(t), t) + \frac{u_x(\xi(t), t)}{1!} (x - \xi(t)) + \dots \quad (6)$$

si tomamos sólo el primer término de esta expansión (de orden cero) entonces se obtiene la ecuación de burger simplificada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u(\xi(t), t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Luego si se reemplaza la solución propuesta $\Phi(x, t)$ en (7) se obtienen las siguientes ecuaciones de evolución para cada una de las RBF

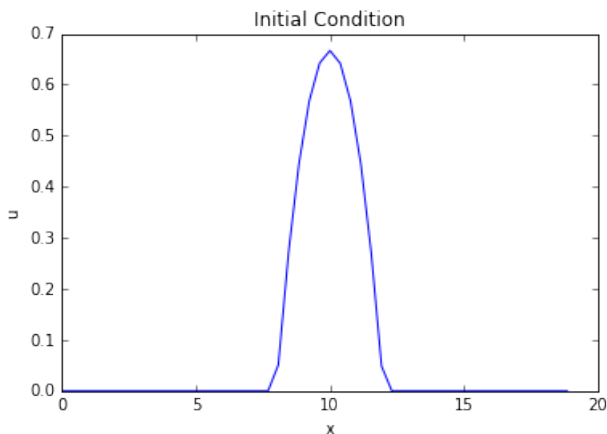
$$\begin{aligned} \epsilon'(t) &= 0 \\ \gamma'(t) &= 0 \\ \xi'(t) &= u(\xi(t), t) \end{aligned}$$

lo cual nos dice que cada una de las partículas mantendrá su forma y peso, pero que sin embargo pueden cambiar su posición el tiempo, y por lo tanto la altura de la columna de agua en cada punto estará determinada sólo por la distribución de las partículas.

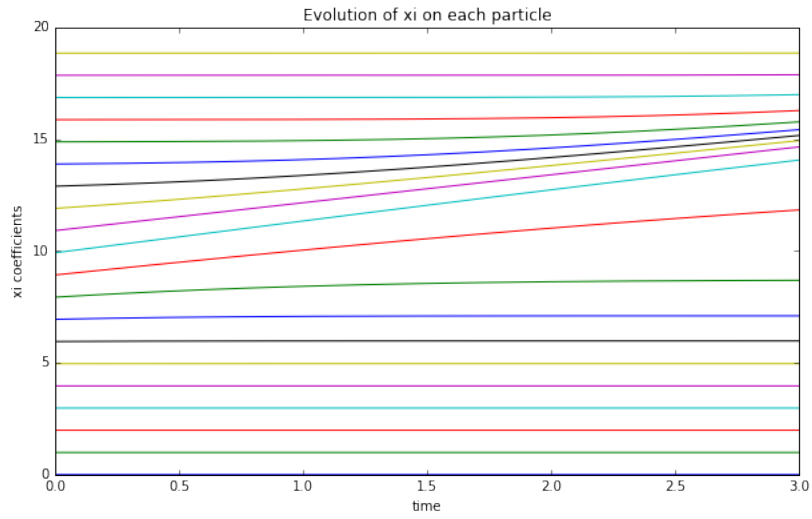
4.1.2. Análisis experimental

Se realizó un experimento modelando el comportamiento de la ecuación para el estado inicial:

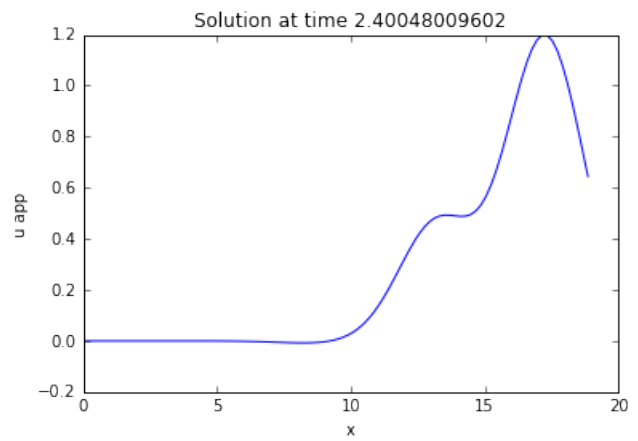
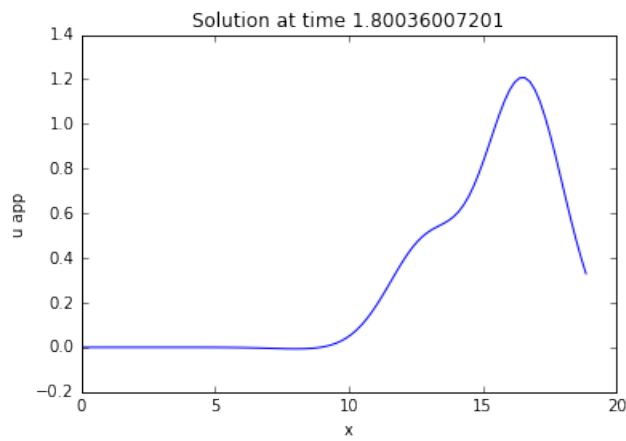
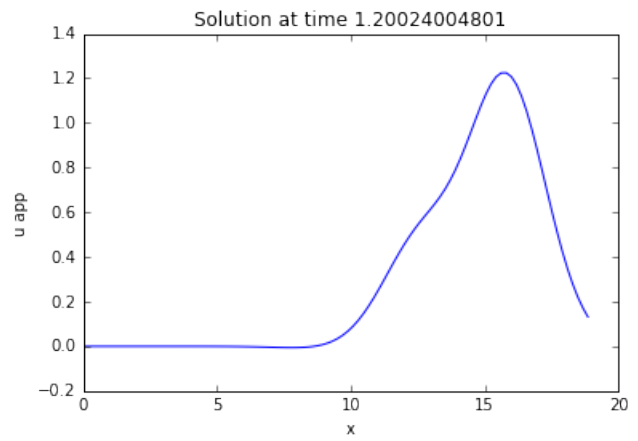
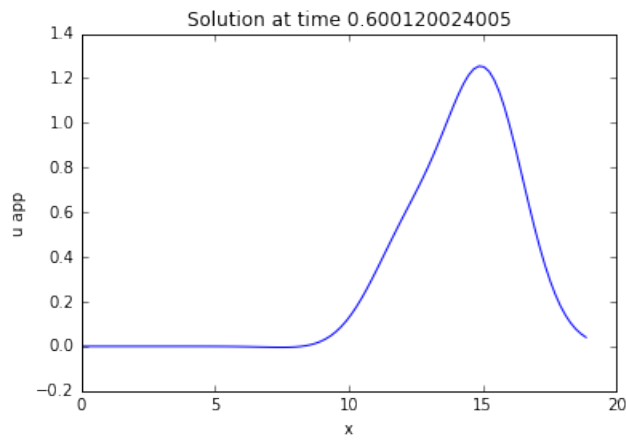
$$u(x) = I_{x \in [7, 12]} \frac{(8 - x)(x - 12)}{12}$$

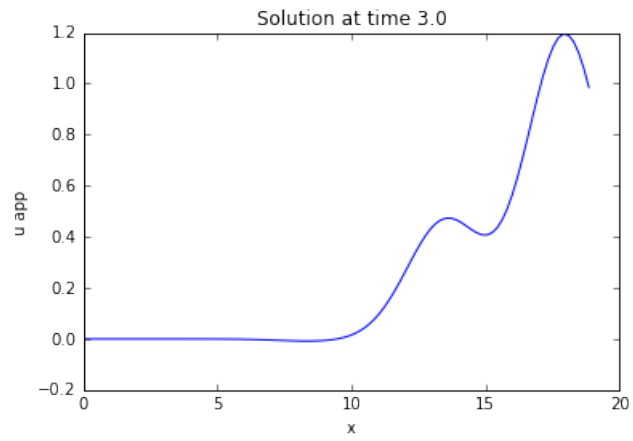


Computando simultaneamente las ecuaciones de evolución para cada una de las RBF que componen la aproximación de la solución, y luego sumando la combinación lineal en cada time step, se obtiene entonces la solución de la ecuación



(7) en el tiempo. Como se vio anteriormente el único parámetro que varía en el tiempo es $\xi(t)$, que es la posición del centro de cada partícula. A continuación se muestra la evolución de cada uno de estos centros para un sistema de 20 partículas. Algunos resultados obtenidos para la evolución de la ecuación en el tiempo son los que se muestran a continuación:





Como se puede observar, el comportamiento modelado por la *Burgers' Equation* es bastante simple, consistiendo en un movimiento de la perturbación inicial $u(x, 0)$ acorde a su posición anterior. Algunos de los detalles que pudieron observarse en la simulación son la aparición de una perturbación más pequeña que parece moverse a menor velocidad que el resto del sistema.