RADIX SORT
Oblikovanje i analiza algoritama

Martin Vlahović

Matematički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilište u Zagrebu

17. siječnja 2021.

Definicija (Stabilno sortiranje)

*Za algoritam sortiranja početnog polja $A[1, 2, \ldots, n]$ u polje $A[p(1), p(2), \ldots p(n)]$ po ključu key, gdje je $p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ permutacija, kažemo da je **stabilan** ako za svaka dva $i < j = 1, \ldots, n$ takva da je $A[i].key = A[j].key$, vrijedi $A[p(i)].key < A[p(j)].key$. Drugim riječima, dva elementa početnog polja koja imaju jednak ključ očuvaju svoj prvobitni poredak u sortiranom polju.*

- **Primjer:** Pretpostavimo da sortiramo polje $A[1, 2, 3, 4]$ riječi:

$$A[1, 2, 3, 4] = \{"oblikovanje", "i", "analiza", "algoritama"\},$$

po ključu:

$$key = \text{prvo slovo riječi.}$$

- Tada je sortirano polje:

$$A[p(1), p(2), p(3), p(4)] = \{"analiza", "algoritama", "i", "oblikovanje"\}.$$

Counting sort - primjer stabilnog algoritma

- Osnovni sastojak potreban za implementaciju **Radix sorta** je **neki stabilni sort** na **potpuno uređenom** skupu ključeva $Keys$, koji je predefiniran i konačan s $\mathrm{card}(Keys) = k$ elemenata. Radi jednostavnosti stavljamo $Keys = \{1, 2, \ldots, k\}$.

- Kao primjer jednog takvog algoritma kojeg ćemo koristiti je tzv. **Counting sort**.

- Pretpostavimo da imamo polje $A[1, 2, \ldots, n] \subseteq Keys$. Definiramo pomoćno polje $C[1, 2, \ldots, k] \subseteq \mathbb{N}_0$ početno inicijalizirano na nulu, te polje $B[1, 2, \ldots, n] \subseteq Keys$ u koje ćemo spremiti sotrirano polje.

- Ideja je "prošetati" se koroz polje A, te u polje C unijeti podatke tako da vrijedi: $C[i] \in \mathbb{N}_0$ sadrži broj elemenata polja A koji su manji ili jednaki od $i \in Keys$. Koristeći tu informaciju, u polje B ćemo konstruirati sortirano polje A.

Counting sort - opis algoritma

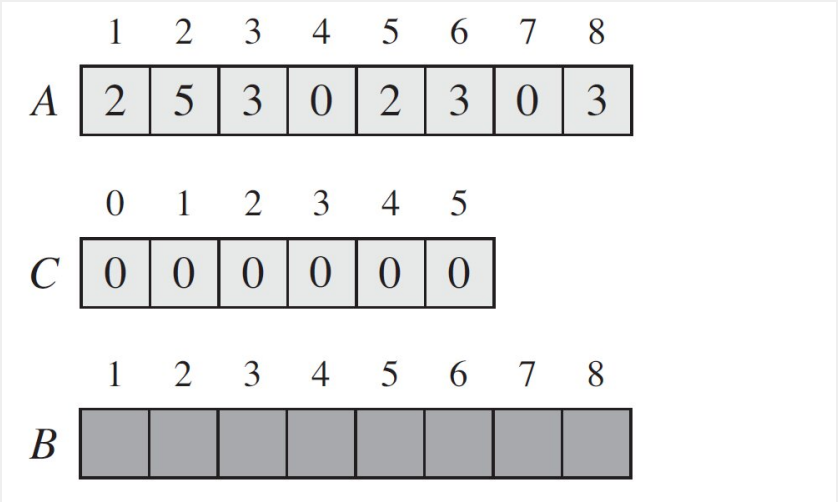
Algoritam radi u tri koraka:

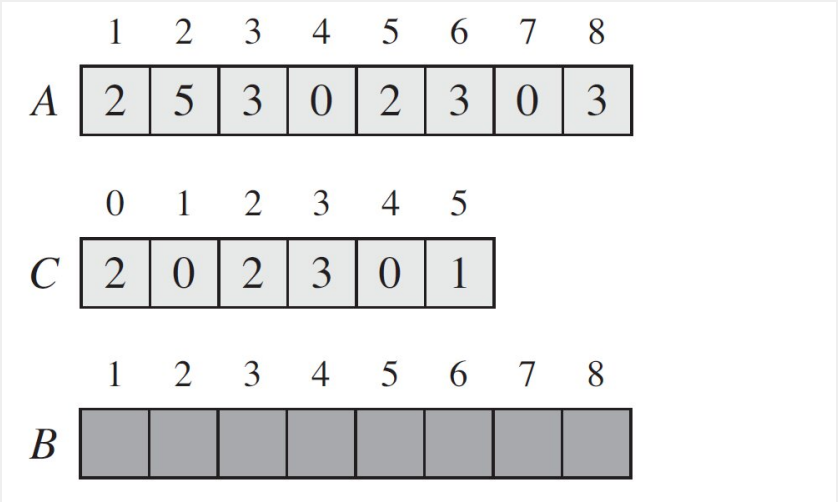
1. Prolaskom $j = 1, \ldots, n$, kroz polje A popuniti polje C tako da za svaku incidenciju ključa $A[j] \in Keys$, inkrementiramo $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$, koji je u početku nula.
2. Prolaskom $j = \mathbf{2}, \ldots, k$ kroz polje C izvršavajući: $C[i] = C[i] + C[i-1]$, očito će biti ispunjeno: $C[i] \in \mathbb{N}_0$ sadrži broj elemenata polja A koji su manji ili jednaki od $i \in Keys$.
3. Prolaskom **unazad** $j = n, \ldots, 1$, kroz polje A, koristeći polje C popuniti polje B. Za svaki ključ $A[j]$ mi znamo da se u sortiranom polju B mora nalaziti na mjestu $C[A[j]]$ kada ne bismo u polju A imali duplikate ključeva. Tada stavljamo $B[C[A[j]]] = A[j]$. Ako ipak imamo duplikata u originalnom polju A, tada dekrementiranjem: $C[A[j]] = C[A[j]] - 1$, osiguravamo novo mjesto u polju B gdje će biti spremljen ponovljeni ključ.

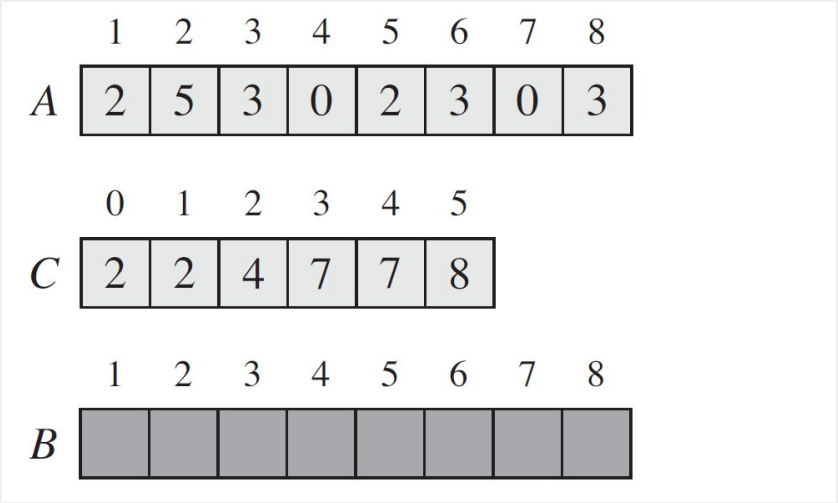
Algoritam će na kraju u polje B spremiti sortirane ključeve iz polja A. Upravo zbog prolaska **unazad** u trećem koraku, te zbog **dekrementiranja** $C[A[j]]$ će dva **jednaka ključa** iz polja A biti spremljena **u originalnom poretku** u polje B. Dakle, Counting sort je stabilan!
Pitanje: Što ako bismo išli **unaprijed**?

Lako vidimo da su vremenska i memorijska složenost algoritma: $\Theta(n + k)$.

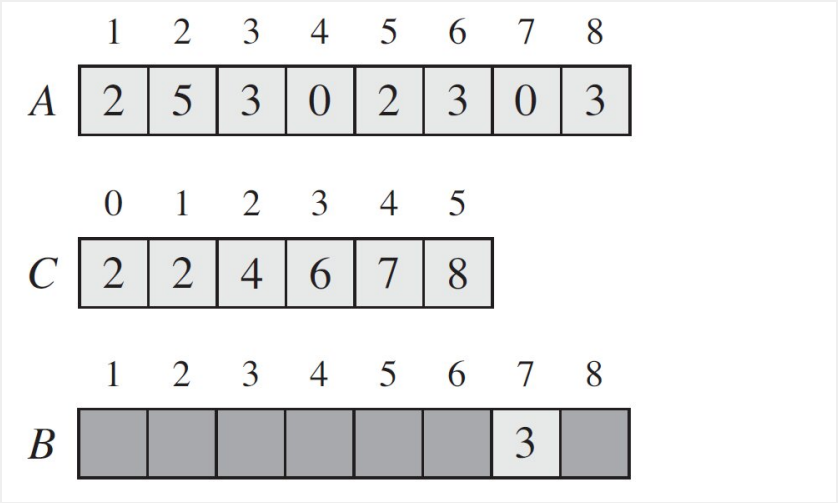
Counting sort - ilustracija algoritma 1/11

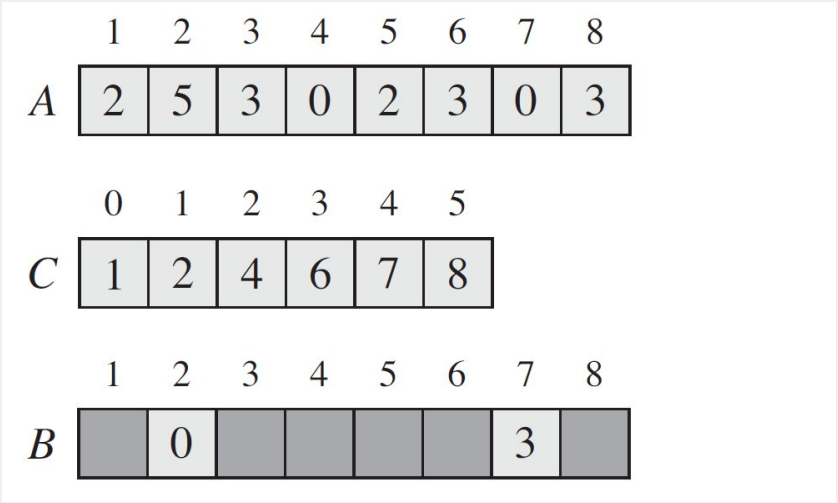


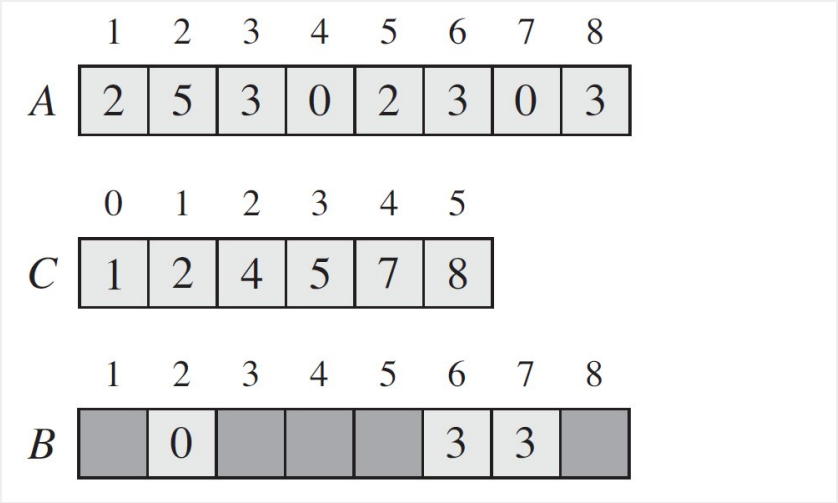

1 2 3 4 5 6 7 8
A
2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C
2 0 2 3 0 1
1 2 3 4 5 6 7 8
B

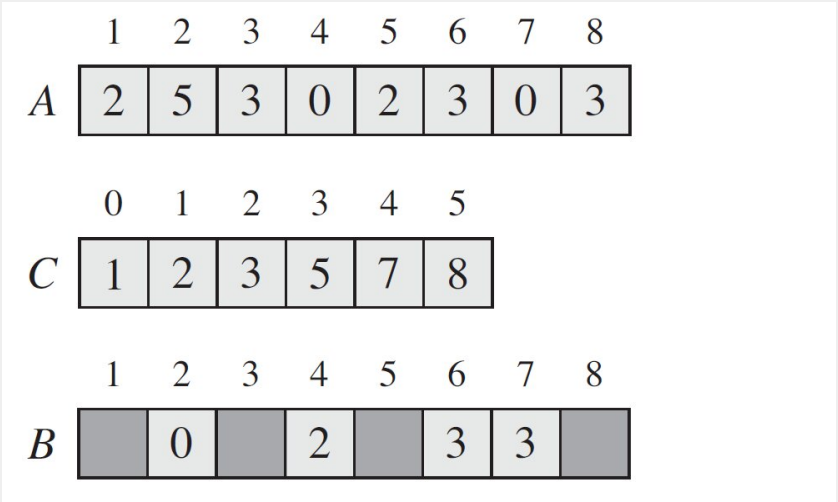

1 2 3 4 5 6 7 8
A
2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C
2 2 4 7 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
B

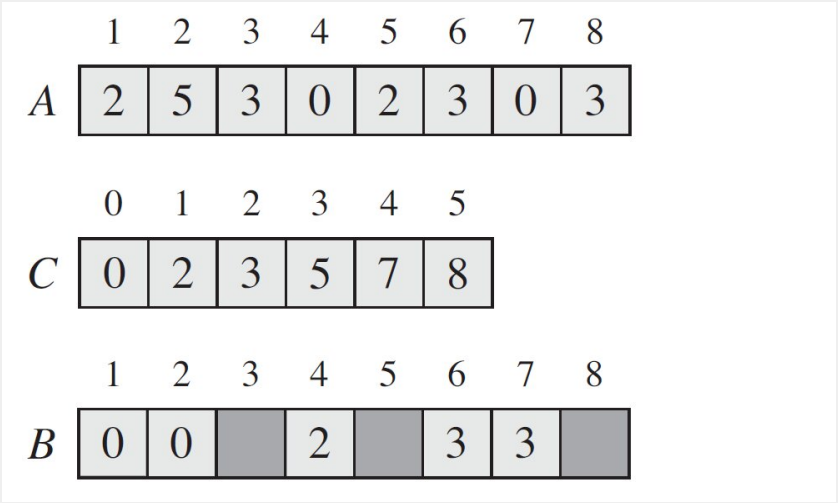
Counting sort - ilustracija algoritma 4/11

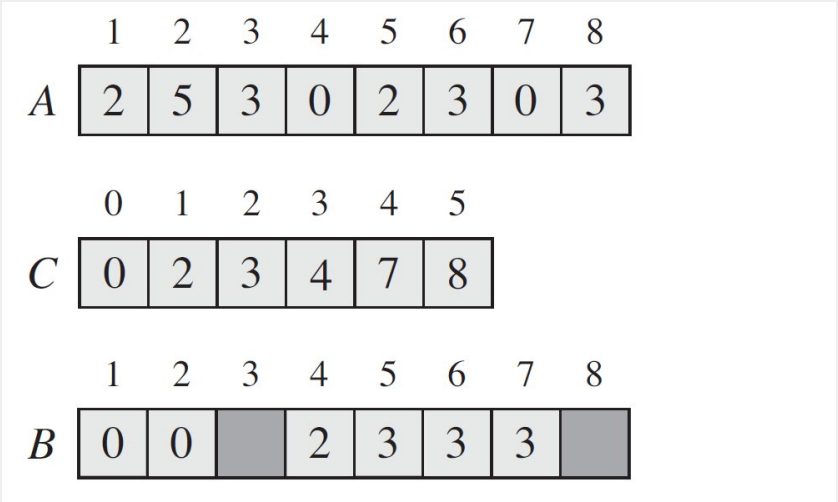


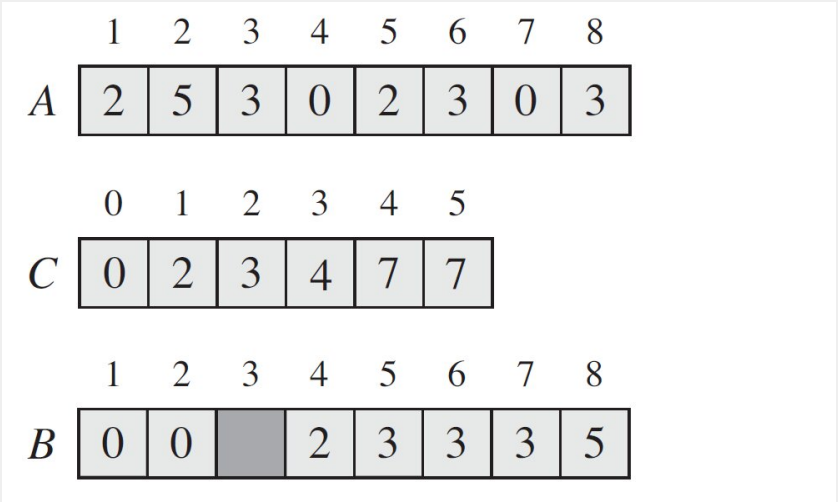

1 2 3 4 5 6 7 8
A
2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C
1 2 4 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
B
0
3


1 2 3 4 5 6 7 8
A
2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C
1 2 4 5 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
B
0 3 3

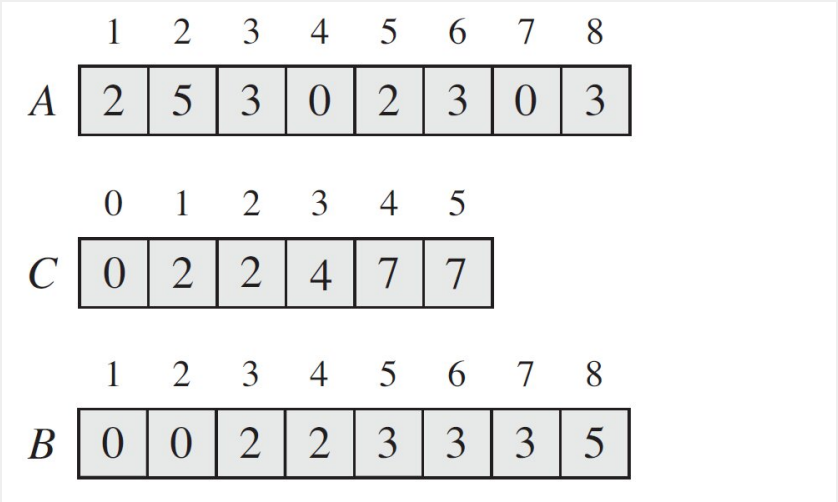

1 2 3 4 5 6 7 8
A
2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C
1 2 3 5 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
B
0 2 3 3


1 2 3 4 5 6 7 8
A 2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C 0 2 3 5 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
B 0 0 2 3 3


1 2 3 4 5 6 7 8
A 2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C 0 2 3 4 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
B 0 0 2 3 3 3


1 2 3 4 5 6 7 8
A 2 5 3 0 2 3 0 3
0 1 2 3 4 5
C 0 2 3 4 7 7
1 2 3 4 5 6 7 8
B 0 0 2 3 3 3 5

Counting sort - ilustracija algoritma 11/11



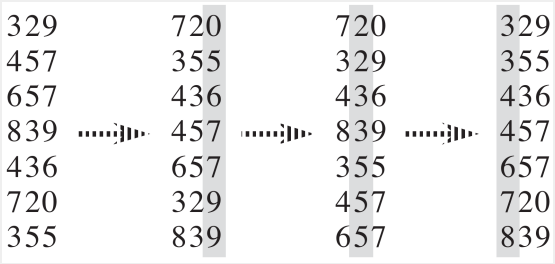
Radix sort

- Pretostavimo da imamo polje $A[1, \ldots, n]$ i želimo ga sortirati po ključu $key \in K$.
- Pretpostavimo da skup ključeva K možemo zapisati kao:

$$K = \underbrace{Keys \times Keys \times \cdots \times Keys}_{d},$$

  dakle svaki ključ možemo shvatiti kao $d-$znamenkasti broj, gdje je svaka znamenka iz skupa $Keys = \{1, 2, \ldots, k\}$.
- Naivna ideja bi bila rekurzivno sortirati polje A počevši od **prve znamenke**. Nažalost taj pristup stvori velik broj privremenih polja.
- Bolji pristup je kontraintuitivno sortirati stabilnim sortom, počevši od **zadnje znamenke**.
- Obično se koristi kada polje A nosi tzv. **satelitske podatke** koje želimo stabilno sortirati po ključu (npr. trojka (godina, mjesec, dan)).

- Primjer:



- Koristeći Counting sort koji je stabilan, očito je vremenska složenosti: $\Theta(d(n+k))$.
- Treba pokazati korektnost algoritma koristeći činjenicu da je Counting sort stabilan.
- Dokaz provodimo **indukcijom** po broju znamenki $d \in \mathbb{N}$ t.d. $K = (Keys)^d$.

Dokaz:

- **Baza indukcije**: ako je $d = 1$, tada očito Radix sort radi korektno i stabilan je zbog toga što je Counting sort korektan i stabilan.
- **Pretpostavka indukcije**: Pretpostavimo da je Radix sort korektan za $K = (Keys)^{d-1}$.
- **Korak indukcije:** Radix sort d znamenki ekvivalentan je Radix sortiranju najnižih $d-1$ znamenki, nakon čeka sotrira po prvoj znamenci koristeći zadan stabilan sort. Po pretpostavci, nakon Radix sortiranja po najnižih $d-1$ znamenki, elementi polja $A[1, \ldots, n]$ su korektno i stabilno sortirani po zadnjih $d-1$ znamenki. Nakon toga će stabilan sort korektno i stabilno sortirati polje $A[1, \ldots, n]$ po prvoj znamenci. Uzmimo tada dva proizvoljna elementa $a, b \in A[1, \ldots, n] \subseteq (Keys)^d$ i označimo s $a_1, b_1 \in Keys$, njihove prve namenke. Tada ako je:
  - $a_1 \neq b_1$, na kraju Radix sorta će se a i b nalaziti na korektnoj relativnoj poziciji neovisno o poretku nižih znamenki jer će stabilan sort u zanjem koraku obaviti korektno svoj dio posla.
  - $a_1 = b_1$, tada će stabilan sort u zadnjem koraku ostaviti a i b u jednakoj relativnoj poziciji. Ali obzirom da je taj relativan položaj već korektan (jer je korektan relativan položaj u sortiranom polju elemenata a i b zadan zadnjim $d-1$ znamenakama), po pretpostavci indukcije slijedi korektnost i stabilnost Radix sorta na d znamenkastim elementima.

Radix sort - primjer sa stringovima

COW	SEA	TAB	BAR
DOG	TEA	BAR	BIG
SEA	MOB	EAR	BOX
RUG	TAB	TAR	COW
ROW	DOG	SEA	DIG
MOB	RUG	TEA	DOG
BOX	DIG	DIG	EAR
TAB	BIG	BIG	FOX
BAR	BAR	MOB	MOB
EAR	EAR	DOG	NOW
TAR	TAR	COW	ROW
DIG	COW	ROW	RUG
BIG	ROW	NOW	SEA
TEA	NOW	BOX	TAB
NOW	BOX	FOX	TAR
FOX	FOX	RUG	TEA

Radix sort - realan primjer 1/3

- Pretpostavimo da imamo polje $A[1, \ldots, n]$ od n elemenata tako da je $A[i] \in \{0, 1, \ldots, n^3 - 1\}$. Želimo pronaći algoritam vremenske složenosti $O(n)$.
- Primjerice, tip: `unsigned long long int`, na uobičajenim modernim računalima zauzima 8 byte-a, što odgovara rasponu brojeva:

$$0, 1, 2, \ldots, 2^{8\times 8} - 1 = 18446744073709551615 \approx 1.84 \times 10^{19}.$$

- U stvarnim primjenama nerijetko imamo posla s poljima primjerice veličine $n = 2 \times 10^6$.
- Ako su elementi polja $A[1, \ldots, n]$ tipa `unsigned long long int`, tada doista vrijedi da je: $A[i] \in \{0, 1, 2, \ldots, n^3 - 1\}$, jer je:

$$n^3 - 1 = \left(2 \times 10^6\right)^3 - 1 \approx 8 \times 10^{18} < 1.84 \times 10^{19}.$$

Radix sort - realan primjer 2/3

- Iskoristimo ideju Radix sorta. Zapišimo svaki $a \in A[1, \ldots, n] \subseteq \{0, 1, \ldots, n^3 - 1\}$ element polja u na jedinstven način bazi n:

$$a = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2,$$

  gdje su $a_0, a_1, a_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Za to nam je potrebno očito $\Theta(n)$ vremena. Nakon toga, uzastopnim Counting sortiranjem prvo po znamenci a_0, zatim a_1 te onda a_2, ćemo Radix sortirati cijelo polje $A[1, \ldots, n]$.

- Za Counting sortiranje svake od tri znamenke potrebno je $\Theta(n)$ vremena i $\Theta(n)$ dodatne memorije.

- To je u praksi prihvatljivo jer je, kao što smo rekli, pretpostavljamo: $n \approx 2 \times 10^6$.

- *Zaključak*: Ako imamo polje $A[1, 2, \ldots, n]$ nenegativnih cijelih brojeva 8 byte-nog tipa:

`unsigned long long int`,

  t.d. je $n \leq 2 \times 10^6$, moguće ga je sortirati u vremenskoj i memorijskoj složenosti $\Theta(n)$.

Radix sort - realan primjer 3/3

- Implementacija opisanog algoritma se nalazi na *GitHub* repozitoriju [2].
- Rezultati usporedbe vremena izvršavanja opisanog algoritma i STL `std::sort` funkcije:

n	time(`std::sort`) / time(Radix sort)
100	1.154
1000	1.692
10000	1.173
100000	1.133
100000	0.323

- Dakle, vidimo da je Radix sort na realnim primjerima može biti brži od izuzetno optimizirane `std::sort` funkcije, iako za dovoljno velik n, Radix sort algoritam postane *cache-unfriendly*.

Radix sort - prednosti i nedostaci

- Znamo da sortiranje uspoređivanjem **nije moguće** napraviti bolje od $\Omega(n \lg n)$.
- Ipak, Counting i Radix sort su **asimptotski brži** jer oni ne koriste uspoređivanje nego koriste činjenicu o jako **pravilnoj strukturi** totalno uređenog skupa $Keys$ koji je izomorfan skupu $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- U praktičnim implementacijama na tipičnim arhitekturama računala, Quicksort ponekad može biti ipak bolji iako mu je (prosječna) složenosti $O(n \lg n)$ jer efikasnije koristi *cache*-iranje od primjerice Radix sorta [1].
- Također, Counting i Radix sort traže **dodatnu memoriju** za privremena polja, dok je Quicksort *in-place* algoritam.

Reference

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein,
  Introduction to Algorithms (3rd ed.),
  MIT Press and McGraw-Hill (2009)
- Github repozitorij s implementacijom i testovima Radix sort algoritma,
  https://github.com/mavlaho/OAA