Floyd-Warshall algoritam
Oblikovanje i analiza algoritama

Martin Vlahović

Matematički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilište u Zagrebu

4. siječnja 2022.

- Zadan je težinski graf $G = (V, E)$ s vrhovima V. Enumerirajmo vrhove grafa: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{|V|}\}$.
- Zadane su težine $w(u, v) \geq 0$ za svaki par bridova $u, v \in V$. Ako vrhovi u i v nisu povezani u grafu, koristimo $w(u, v) = +\infty$.
- Želimo odrediti **najkraću duljinu puta između svih parova vrhova u grafu**, gdje duljinu puta od vrha u od v preko $v_{i_1}, \dots, v_{i_n} \in V$:

$$u \to v_{i_1} \to v_{i_2} \cdots \to v_{i_n} \to v,$$

definiramo kao sumu težina pripadnih bridova:

$$w(u, v_{i_1}) + w(v_{i_1}, v_{i_2}) + \cdots + w(v_{i_n}, v).$$

- Pretpostavljamo da graf G nema **negativnih ciklusa**, inače problem nema dobro definirano rješenje.

- Pretpostavimo da poznajemo najkraće duljine puteva za sve parove vrhova $u, v \in V$, ali uz ograničenje da se u putevima smiju koristiti samo vrhovi $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, gdje je $k < |V|$ neki fiksni broj. Označimo duljine tih puteva s $d_k(u, v)$.

- Pitamo se, možemo li poznavanjem $d_k(u, v)$, pronaći $d_{k+1}(u, v)$, za sve parove $u, v \in V$, tj. možemo li pronaći duljine najkraćih puteva za sve parove vrhova $u, v \in V$, gdje u putevima koristimo vrhove $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$?

- Ako riješimo taj problem, onda jednostavnim iteriranjem postupka od $k = 1$ do $k = |V|$ dolazimo do rješenja problema: poznavanje $d_{|V|}(u, v)$, za sve parove $u, v \in V$.

- Pretpostavimo da poznajemo $d_k(u,v)$, za sve parove $u,v \in V$ i $k < |V|$. Uzmimo i fiksirajmo proizvoljni par vrhova $u,v \in V$. Žeimo izračunati $d_{k+1}(u,v)$.

- Ako put najkraće duljine od u do v koristeći vrhove $v_1,\dots,v_{k+1}$ ne prolazi kroz vrh v_{k+1}, tada je očito: $d_{k+1}(u,v) = d_k(u,v)$.

- U protivnom, najkraći put od u do v prolazi kroz međuvrh v_{k+1}. Najkraći put u svojim vrhovima **samo jednom** posjećuje vrh v_{k+1}, jer bismo u protivnom imali negativan ciklus!

- Tada je očito najkraći put od u do v koji koristi vrhove $v_1,\dots,v_{k+1}$, i samo jednom prolazi kroz vrh v_{k+1} konkatenacija nakraćeg puta od u do v_{k+1} koji koristi vrhove $v_1,\dots,v_k$ i najkraćeg puta od v_{k+1} do v, koji koristi vrhove $v_1,\dots,v_k$.

- Uzimajući oba slučaja u obzir, dobivamo:

$$d_{k+1}(u,v) = \min \left\{ d_k(u,v)\ ,\ d_k(u,v_{k+1}) + d_k(v_{k+1},v) \right\}.$$

Algorithm 1 Floyd-Warshall algorithm

procedure FloydWarshall

Input: Graf s vrhovima $V = \{v_1, \ldots, v_{|V|}\}$ i bridovima s težinama $w : V \times V \to \mathbb{R}$, bez negativnih ciklusa.
Output: Duljine najkraćih puteva $\mathtt{d}(u, v)$ za sve parove vrhova $u, v \in V$.

- Inicijaliziraj $|V| \times |V|$ matricu $\mathtt{d}(u, v) = w(u, v)$, za $u \neq v$, i $\mathtt{d}(u, u) = 0$.

for $k = 1, \ldots, |V|$ **do**
  for $i = 1, \ldots, |V|$ **do**
    for $j = 1, \ldots, |V|$ **do**
      $\mathtt{d}(v_i, v_j) = \min\left\{ \mathtt{d}(v_i, v_j)\ ,\ \mathtt{d}(v_i, v_k) + \mathtt{d}(v_k, v_j)\right\}$

return d
end procedure

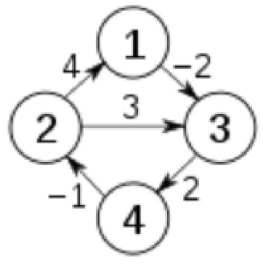
Pseudokod - jedna matrica je dovoljna

- Uočimo da u pseudokodu, iteraciju iz koraka k u $k+1$ radimo na **jednoj matrici** d.
- S obzirom na to da tokom *update-anja* matrice vrijednostima $d_{k+1}(u,v)$ istovremeno i čitamo iz nje vrijednosti $d_k(u,v)$, postavlja se pitanje, je li opravdano koristiti samo jednu matricu d?
- Ono što moramo pokazati jest da elementi u k-tom retku i k-tom stupcu: $\mathtt{d}(:,v_k)$ i $\mathtt{d}(v_k,:)$ ostaju nepromijenjeni tokom k-te iteracije vanjske petlje, jer jedino njih koristimo tokom *update*-anja.
- Ubacimo primjerice $u = v_{k+1}$ u osnovnu relaciju:

$$d_{k+1}(u,v) = \min\Big\{\ d_k(u,v)\ ,\ d_k(u,v_{k+1}) + d_k(v_{k+1},v)\ \Big\},$$

  tada dobivamo:
  $d_{k+1}(v_{k+1},v) = \min\{d_k(v_{k+1},v), \underbrace{d_k(v_{k+1},v_{k+1})}_{0} + d_k(v_{k+1},v)\} = d_k(v_{k+1},v).$

- Analogno za $v = v_{k+1}$. Dakle, tokom k-te iteracije, se k-ti redak i k-ti stupac matrice d ne mijenjanju, te je stoga dovoljno koristiti samo jednu matricu u pseudokodu.



$k = 0$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	−2	∞
	2	4	0	3	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	−1	∞	0

Primjer

$k = 0$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	-2	∞
	2	4	0	3	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	-1	∞	0

$k = 1$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	-2	∞
	2	4	0	**2**	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	-1	∞	0

$k=1$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	−2	∞
	2	4	0	**2**	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	−1	∞	0

$k=2$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	−2	∞
	2	4	0	2	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	**3**	−1	**1**	0

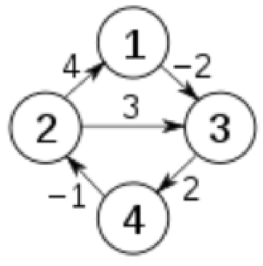
$k = 2$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	-2	∞
	2	4	0	2	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	**3**	-1	**1**	0

$k = 3$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	-2	**0**
	2	4	0	2	**4**
	3	∞	∞	0	2
	4	3	-1	1	0

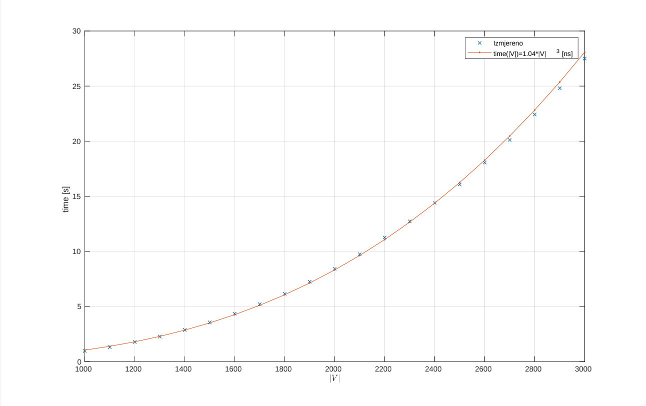
$k = 3$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	∞	−2	**0**
	2	4	0	2	**4**
	3	∞	∞	0	2
	4	3	−1	1	0

$k = 4$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	**−1**	−2	0
	2	4	0	2	4
	3	**5**	**1**	0	2
	4	3	−1	1	0

$k = 4$		j			
		1	**2**	**3**	**4**
i	**1**	0	**−1**	−2	0
	2	4	0	2	4
	3	**5**	**1**	0	2
	4	3	−1	1	0



- Algoritam očito ima $\Theta(|V|^3)$ vremensku i $\Theta(|V|^2)$ prostornu složenost, neovisno o broju netrivijalnih bridova (onih za koje je $w(u,v) < +\infty$). To sugerira da je algoritam primjeren za *guste* grafove s velikim brojem netrivijalnih bridova.
- Implementacijom algoritma u programskom jeziku C i mjerenjem vremena izvršavanja na slučajno generiranim grafovima to je potvrđeno i u praksi.



Reference

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein,
  Introduction to Algorithms (3rd ed.),
  MIT Press and McGraw-Hill (2009)
- Floyd–Warshall algorithm, Wikipedia članak, link
- Github repozitorij s implementacijom i testovima Floyd-Warshall algoritma,
  https://github.com/mavlaho/OAA