$$k_1^2+k_2^2-k_0(k_1\cos\vartheta_1+k_2\cos\vartheta_2)+k_1k_2 z-m\varepsilon_\alpha=0$$

mit $z=\cos\varphi\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2+\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2$

## Gleichung für allgemeine Ellipse:

Standard Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- Rotation um Winkel $\alpha$: $x\to x\cos\alpha - y\sin\alpha$; $y\to x\sin\alpha+y\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2}{b^2}=1$$

$$=x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+y^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)-xy\,2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

- Translation um $(x_0,y_0)$: $x\to x-x_0$, $y\to y-y_0$

$$\Rightarrow (x-x_0)^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+(y-y_0)^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)-(x-x_0)(y-y_0)2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+y^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)-xy\,2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$-x\cdot 2\left(\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)x_0-\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)y_0\right)$$

$$-y\cdot 2\left(\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x_0+\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)y_0\right)$$

$$-x_0y_0\,2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+x_0^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+y_0^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)=1$$

## Koeffizientenvergleich ($k_x=x$, $k_y=y$)

$\boxed{k_x^2, k_y^2}$

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\Rightarrow b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha=b^2\sin^2\alpha+a^2\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow b^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=a^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$\Rightarrow a=b \lor \left(\sin\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\alpha\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}\right)$$

Für $a=b$ wird die Ellipse zum Kreis und Rotationen spielen keine Rolle. Eine Rotation um den Winkel $\pi$ ändert auch nichts an der Ellipse, daher wähle $\alpha=\pi/4 \Rightarrow \sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x^2\frac{c}{2}+y^2\frac{c}{2}-xy\,d-x(cx_0-dy_0)-y(-dx_0+cy_0)-x_0y_0d+\frac{x_0^2+y_0^2}{2}c=1$$

mit $c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ und $d=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \mp xy\,\frac{2d}{c} - x\cdot 2\left(x_0 \mp \frac{d}{c}y_0\right) - y\cdot 2\left(-\frac{d}{c}x_0+y_0\right) \mp \frac{2x_0y_0d}{c} + x_0^2+y_0^2 - \frac{2}{c} = 0$$

$$\frac{d}{c} = \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\,, \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 - x\cdot 2\left(x_0 \mp \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right) - y\cdot 2\left(-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x_0+y_0\right)$$

$$\mp xy\cdot 2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right) + x_0^2+y_0^2 \mp 2x_0y_0\left(\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right) - 2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = 0$$

Aus einem Koeffizientenvergleich erhält man nun folgende Gleichu

$\boxed{k_x}$ $2\left(x_0 \mp \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y_0\right) = k_0\cos\vartheta_1$ $\quad$ $\boxed{k_x\cdot k_y}$ $-2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right) = z$

$\boxed{k_y}$ $2\left(-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x_0 + y_0\right) = k_0\cos\vartheta_2$ $\quad$ $\boxed{\text{const.}}$ $x_0^2+y_0^2 \mp 2x_0y_0\left(\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right) - 2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = -m\varepsilon_d$

Solve with Mathematica:

$$a = \sqrt{\frac{2\varepsilon(4-z^2) + 2k_0^2(\cos^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_2 - z\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)}{z^3-2z^2-4z+8}}$$

$$b = \sqrt{\frac{2\varepsilon(z^2-4) - 2k_0^2(\cos^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_2 - z\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)}{z^3+2z^2-4z-8}}$$

$$x_0 = k_0\,\frac{z\cos\vartheta_2 - 2\cos\vartheta_1}{z^2-4}\,, \quad y_0 = k_0\,\frac{z\cos\vartheta_1 - 2\cos\vartheta_2}{z^2-4}$$

---

Parametrization: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (a\cos t + b\sin t)/\sqrt{2} + x_0 \\ (-a\cos t + b\sin t)/\sqrt{2} + y_0 \end{pmatrix}$