

# ЛЕКЦИЯ 1. ЦВЕТОВЫЕ МОДЕЛИ. ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИЯ РАСТРА

Демидов Д.В.

Обработка аудиовизуальной информации  
Бакалавры, 6 семестр. Магистры, 9 семестр

# План лекции

2

- Области применения цифровой обработки изображений
- Цветовые модели
- Технические средства ввода и обработки изображений
- Передискретизация
- Форматы файлов изображений

# Области применения цифровой обработки изображений

3

1. Улучшений фотографий
2. Оптическое распознавание текста
3. Распознавание образов
4. Компьютерное зрение
5. Информационный поиск по изображениям
6. Оценка качества изображений и звукозаписей
7. Обработка биометрической информации
8. Извлечение структурированной информации из сканов документов

## Цветовые модели

RGB

CIE XYZ, CIE LAB

HSL, HSI, HSV, HSB

YUV

CMYK

YCbCr, Y'CbCr, YPbPr

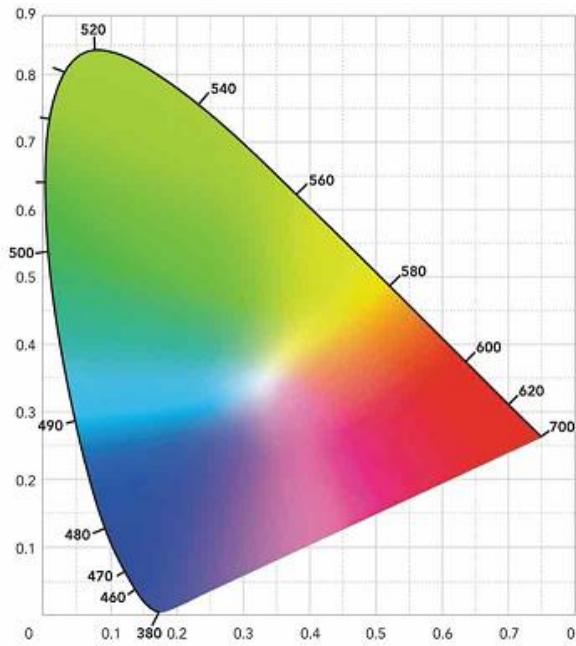
# Основные понятия и определения

5

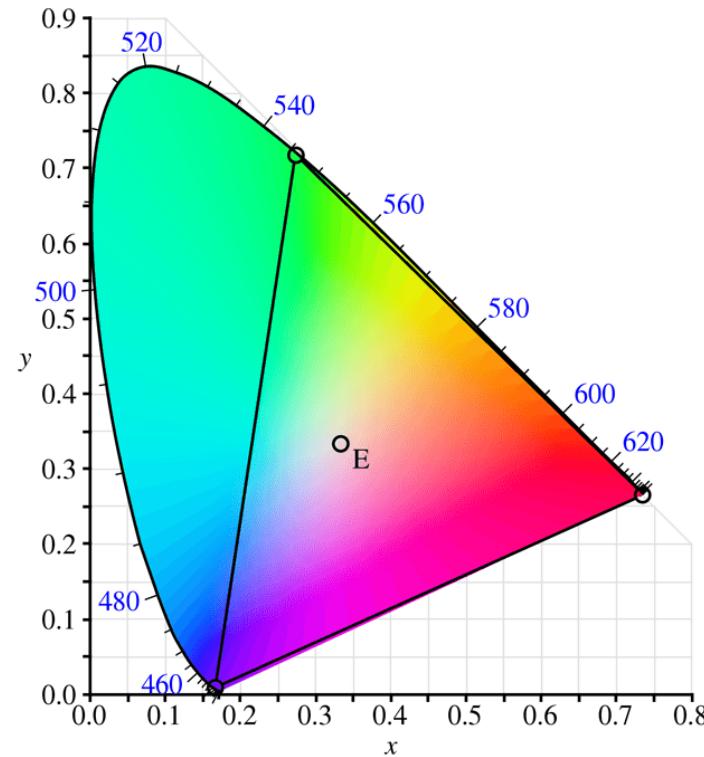
- **Цветовая модель** — математическая модель описания представления цветов в виде кортежей чисел, называемых *цветовыми компонентами* или *цветовыми координатами*.
- Обычно в кортеже 3, реже 4 значения.
- Все возможные значения цветов, задаваемые моделью, определяют цветовое пространство.

# Хроматическая диаграмма (диаграмма цветности)

6



CIE 1931 XYZ color space —  
то, что видит глаз

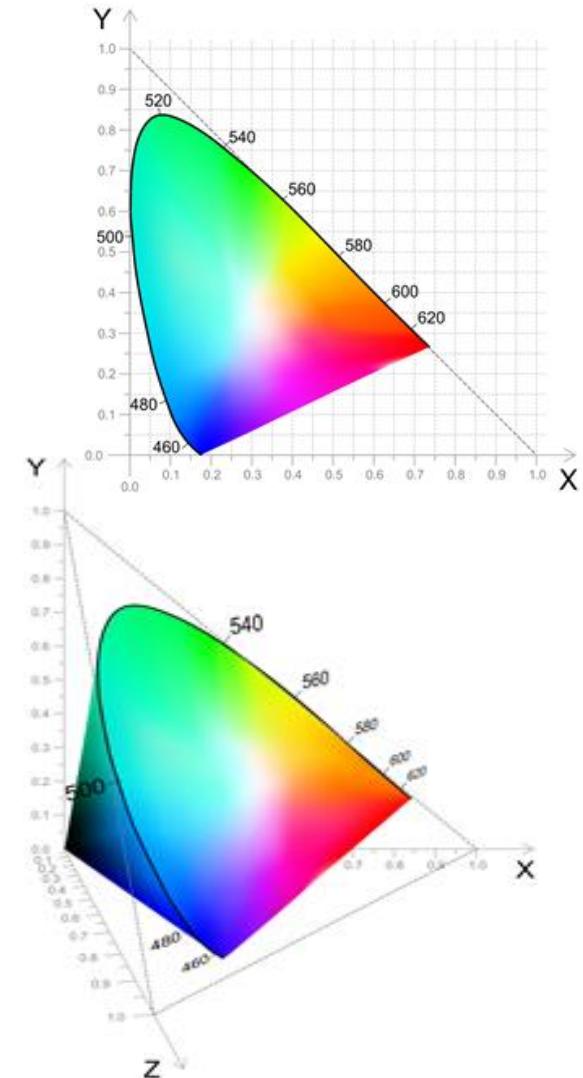


CIE RGB color space (в  
треугольнике) — то, что  
показывают мониторы

# Цветовая модель CIE XYZ 1931

7

- Разработана Международной комиссией по освещению (Commission Internationale de l'Eclairage, CIE)
- Для того, чтобы разработанная модель могла отражать все видимые человеком цвета пришлось ввести отрицательное количество базовых цветов. Чтобы уйти от отрицательных значений CIE, ввела т.н. нереальные или мнимые основные цвета: X, Y, Z
- Для относительных координат  $x+y+z=1$ , что позволяет задавать любой цвет по двум составляющим, а третью вычислять.
- Тогда цветовое пространство можно отобразить на плоскости. Треугольник CIE задаёт все цветовые тона.
- Для описания яркости вводят дополнительную ось, проходящую через точку белого с координатами  $(1/3; 1/3)$ . Получают цветовое тело CIE.



# Цветовая модель CIE XYZ 1931

8

- Цвет XYZ задаётся следующим образом:

$$X = \int_{380}^{780} I(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$$

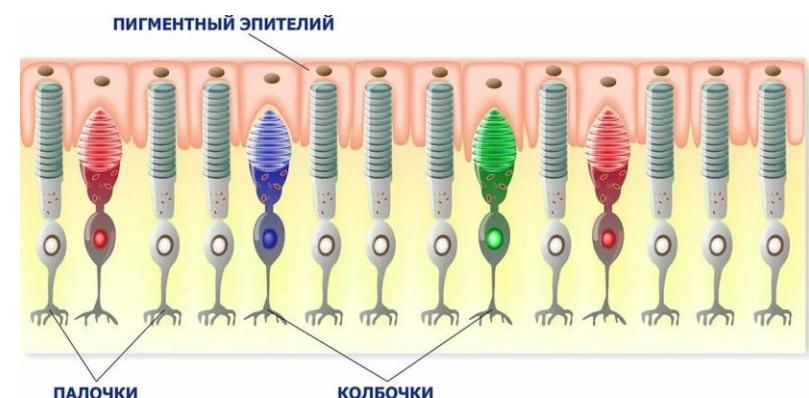
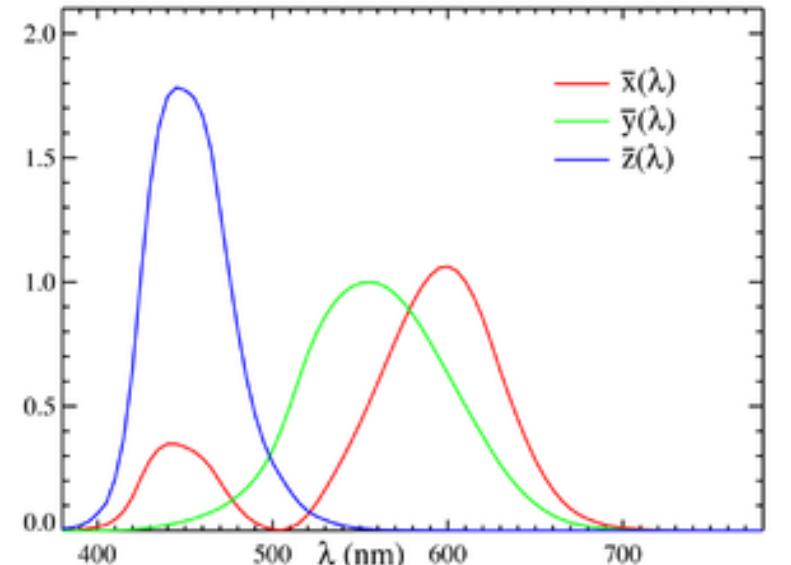
$$Y = \int_{380}^{780} I(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$$

$$Z = \int_{380}^{780} I(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

- где

- $I$  — спектральная плотность какой-либо энергетической фотометрической величины.
  - $Y$  — визуальная яркость сигнала,
  - $Z$  — отклик «синих» колбочек,
  - $X$  — смесь откликов, всегда неотрицательная величина.

- Кривые отклика нормируются таким образом, чтобы площадь под всеми тремя кривыми была одинаковой.



# Переход от RGB к XYZ

9

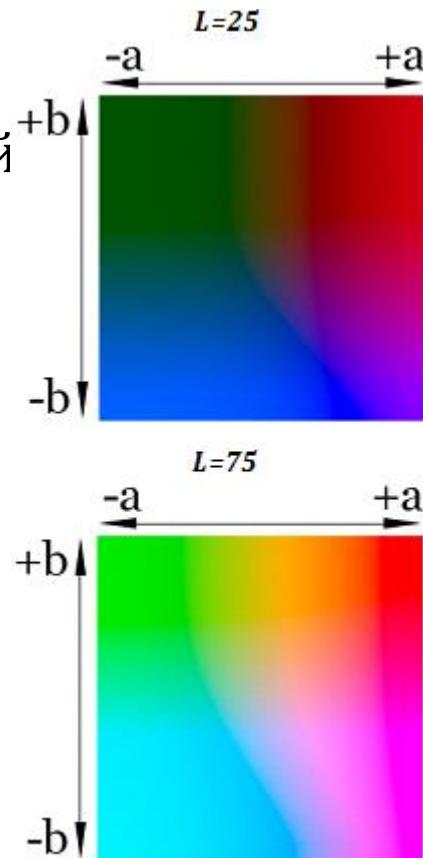
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,49000 & 0,31000 & 0,20000 \\ 0,17697 & 0,81240 & 0,01063 \\ 0,00000 & 0,01000 & 0,99000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

- И далее к xy:
  - $x = X / (X+Y+Z)$
  - $y = Y / (X+Y+Z)$
  - $z = 1 - x + y$

# Цветовая модель CIE LAB 1976

10

- LAB (CIE LAB, CIE  $L^*a^*b^*$ ) — последователь цветовой модели CIE XYZ и однозначно вычисляется на её основе.
- Значение светлоты отделено от значения хроматической составляющей цвета.
- Светлота (Luminance) изменяется от 0 до 100, то есть от самого темного до самого светлого
- Хроматическая составляющая определяется двумя координатами:
  - **a** — положение цвета в диапазоне от зеленого к пурпурному,
  - **b** — положение цвета в диапазоне от синего к жёлтому.
- Однозначно определяет цвет, в отличие от CMYK и RGB, зависящих от аппаратуры (принтера, экрана)



# Связь LAB с XYZ

11

- Вариант Фисенко В.Т., Фисенко Т.Ю., Компьютерная обработка и распознавание изображений, ИТМО, 2008:

$$L^* = \begin{cases} 116\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\frac{1}{3}} - 16, & \frac{Y}{Y_0} > 0,008856 \\ 903,3\frac{Y}{Y_0}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a^* = 250 \left( f\left(\frac{X}{X_0}\right)^{\frac{1}{3}} - f\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$b^* = 100 \left( f\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\frac{1}{3}} - f\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

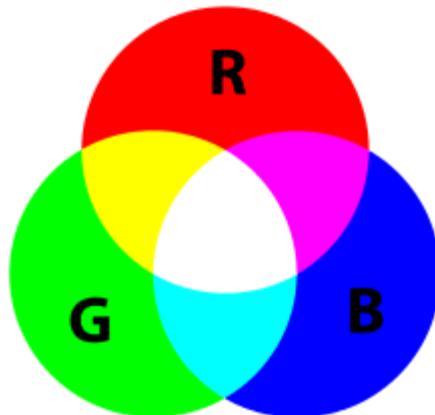
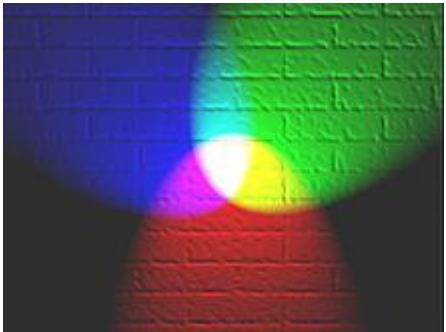
$$f\left(t^{\frac{1}{3}}\right) = \begin{cases} t^{\frac{1}{3}}, & t > 0,008856 \\ 7,787t + \frac{16}{116}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X_0, Y_0, Z_0 - white$

# Цветовая модель RGB

12

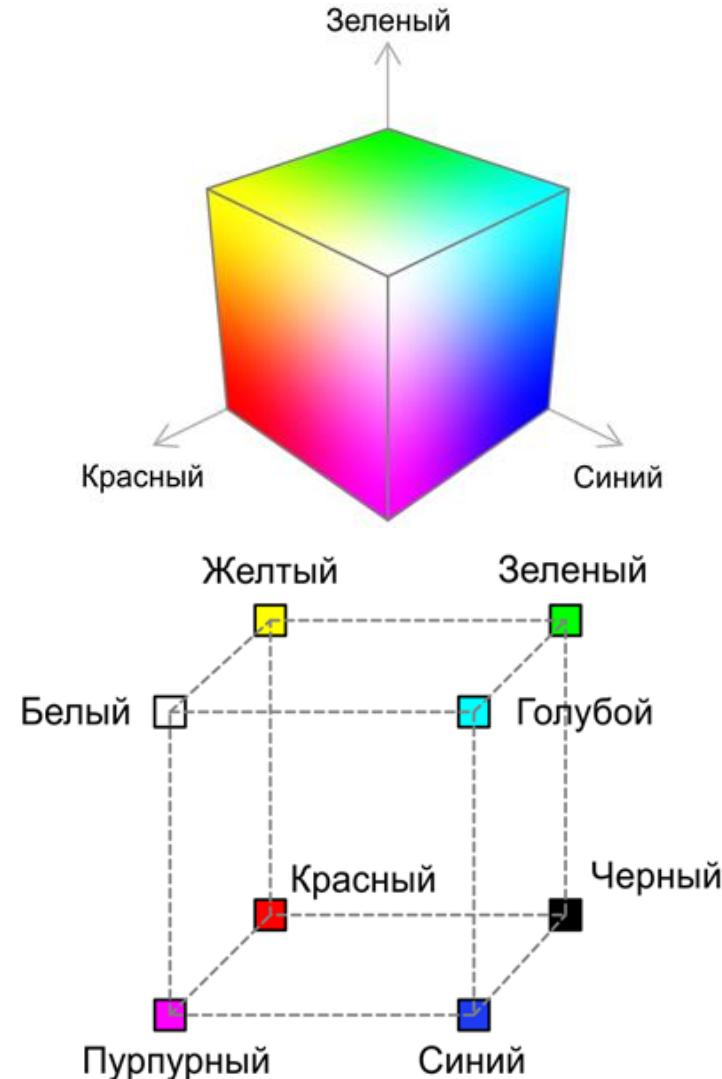
- RGB — red, green, blue — цветовая модель, определяющая способ кодирования изображения с помощью трёх основных каналов.
- Цвета получаются путём добавления к чёрному.
- Смешение всех основных цветов даёт белый цвет.



# Базовые цвета в кубе RGB

13

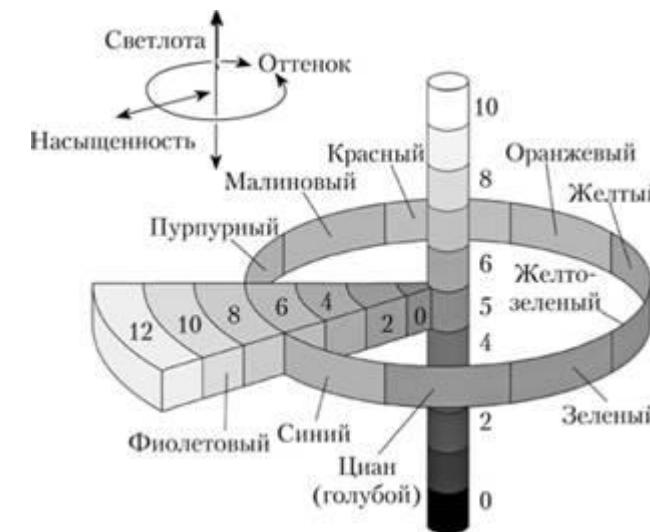
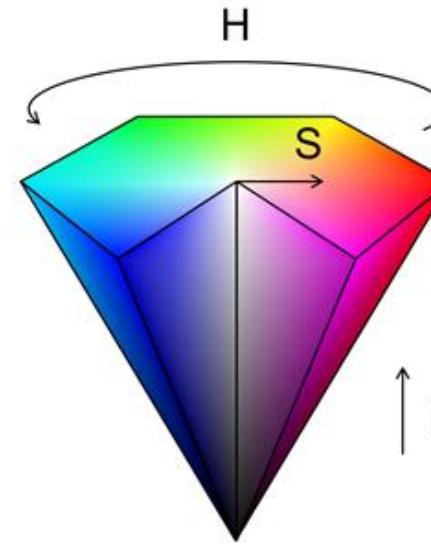
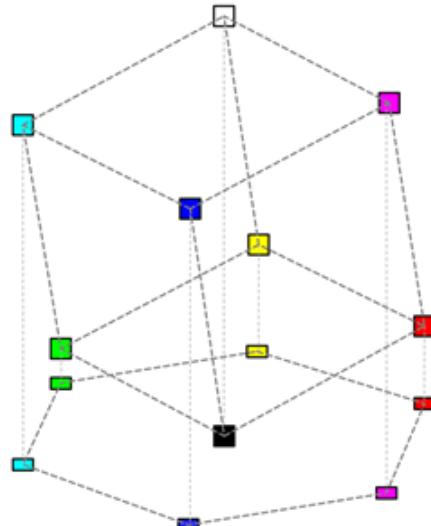
- Базовые цвета расположены по углам куба:
  - $(0, 0, 0)$  — Чёрный
  - $(1, 1, 1)$  — Белый
  - $(1, 0, 0)$  — Красный
  - $(0, 1, 0)$  — Зелёный
  - $(0, 0, 1)$  — Синий
  - $(1, 1, 0)$  — Жёлтый
  - $(1, 0, 1)$  — Пурпурный
  - $(0, 1, 1)$  — Голубой
- На диагонали от чёрного к белому лежат оттенки серого



# Цветовая модель HSI (HSL)

14

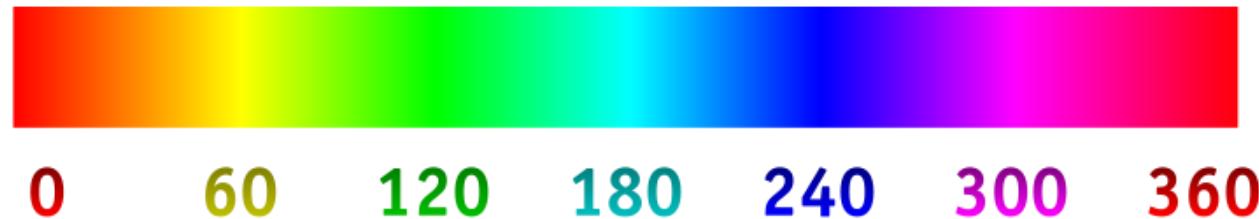
- Сориентируем RGB-куб так, чтобы главная диагональ была направлена вверх.
- Рассмотрим проекцию вершин куба на плоскость.
- Введём цилиндрическую систему координат  $H, S, I$ :
  - $H \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,
  - $S_{HSI} \in [0, 1]$ ,
  - $I \in [0, 1]$



# Цветовая модель HSL (2)

15

- HSL — hue, saturation, lightness — цветовая модель, в которой цветовыми координатами являются тон, насыщенность и светлота.
- **Тон** (оттенок, hue) — направление вектора цветности на диаграмме цветности с началом в точке белого и концом в данной цветности. **Задаётся углом поворота вокруг оси яркости.** Тон определяет название цвета, например «красный», «синий», «зелёный».



- **Насыщенность** (saturation) — удаленность от оси яркости, интенсивность тона, задается в процентах. Любой ненасыщенный тон будет оттенком серого.
- **Светлота** (lightness, intensity) — субъективная яркость участка изображения, отнесённая к субъективной яркости белого. Положение на оси от чёрного до белого.

# Связь HSL с RGB и вариации

16

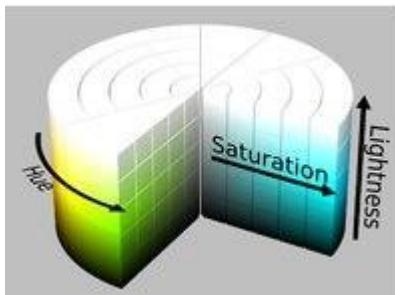
- Формулы расчёта HSL по RGB:

$$H = \begin{cases} \theta; B \leq G \\ 360 - \theta; B > G \end{cases} \text{ где } \theta = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2} * ((R - G) + (R - B))}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}}\right)$$

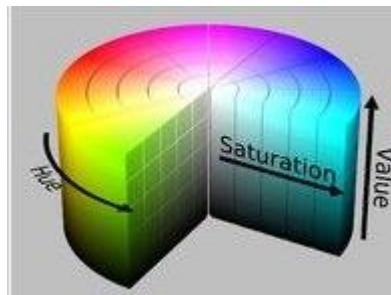
$$S = 1 - \frac{3}{(R + G + B)} \min(R, G, B)$$

$$I = \frac{1}{3}(R + G + B)$$

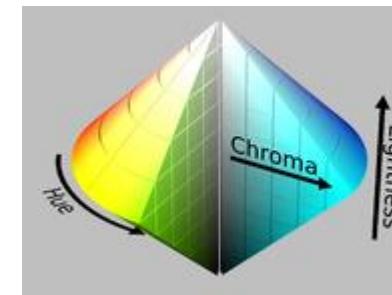
- Если занулить H и S, то из цветного изображения получится полуточновое.



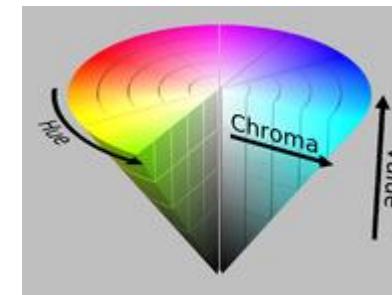
Цилиндр HSL — плоскость белого, плоскость чёрного



Цилиндр HSV — точка белого, плоскость чёрного



Диконус HSL — точка белого, точка чёрного



Конус HSV — точка белого, точка чёрного

# Регулировка характеристик в HSL

17

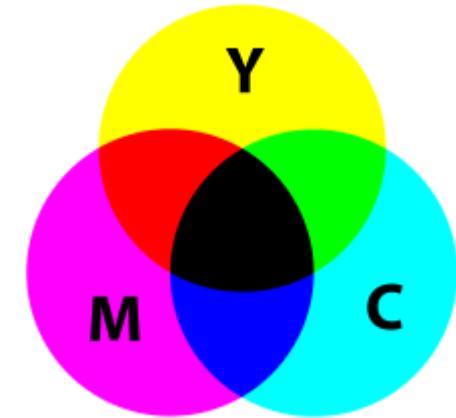
	Интенсивность	Тон	Насыщенность
<b>Уменьшенное значение</b>			
<b>Исходное значение</b>			
<b>Увеличение значение</b>			

Пример из статьи Алексея Горькова <https://habrahabr.ru/post/181580/>

# Цветовая модель CMYK

18

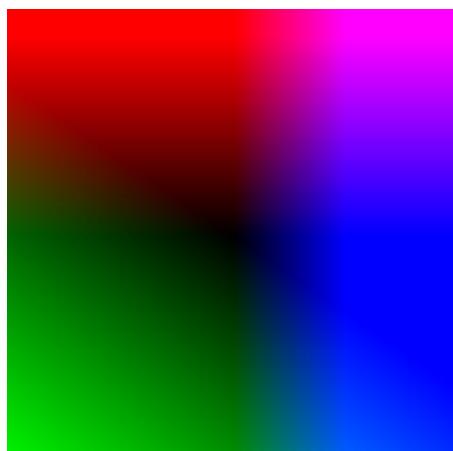
- CMYK — Cyan, Magenta, Yellow, Key color.
- Субтрактивная модель для полиграфии.
- Базовые дополнительные цвета получаются путём вычитания базовых цветов модели RGB из белого.
  - Cyan = White – Red
  - Magenta = White – Green
  - Yellow = White – Blue
- На цветовом кубе RGB цвета CMY лежат на углах, противоположных RGB.



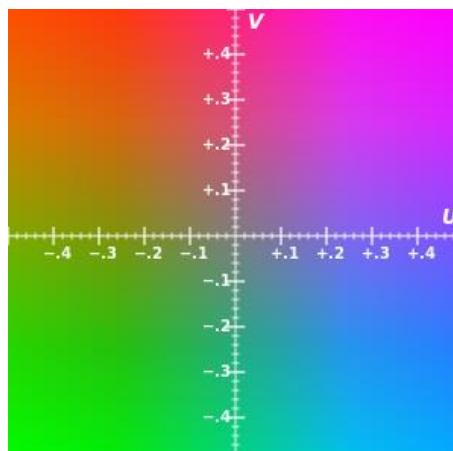
# Цветовая модель YUV

19

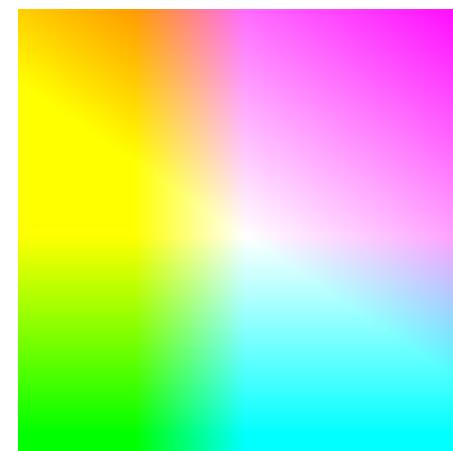
- **YUV** — цветовая модель, в которой цвет представляется как три компонента — яркость  $Y$  [0; 1] и две цветоразностных  $U$  и  $V$  [-0.5; 0.5].
- Яркостная компонента содержит «черно-белое» (в оттенках серого) изображение, а оставшиеся две компоненты содержат информацию для восстановления требуемого цвета.
- Для кодирования  $U$  и  $V$  требуется меньшая разрядность, что даёт экономию при передаче



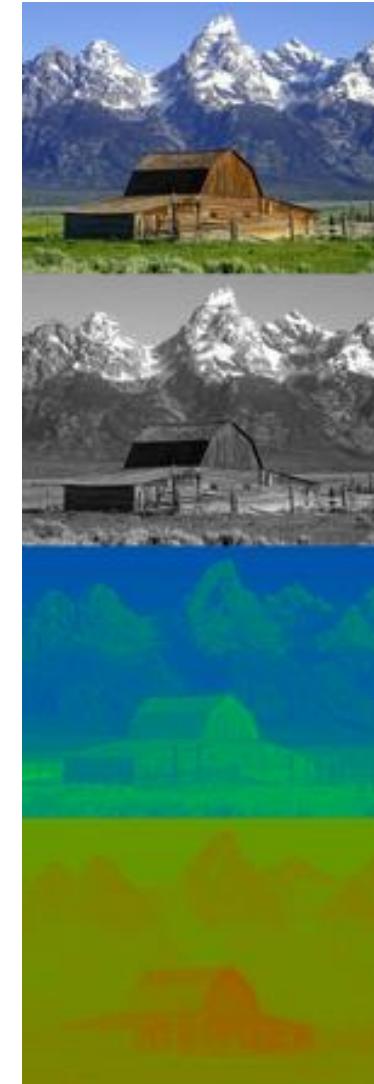
$Y' = 0$



$Y' = 0.5$



$Y' = 1$



# Связь YUV с RGB

20

## □ SDTV with BT.601

$$\begin{bmatrix} Y' \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.14713 & -0.28886 & 0.436 \\ 0.615 & -0.51499 & -0.10001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.13983 \\ 1 & -0.39465 & -0.58060 \\ 1 & 2.03211 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y' \\ U \\ V \end{bmatrix}.$$

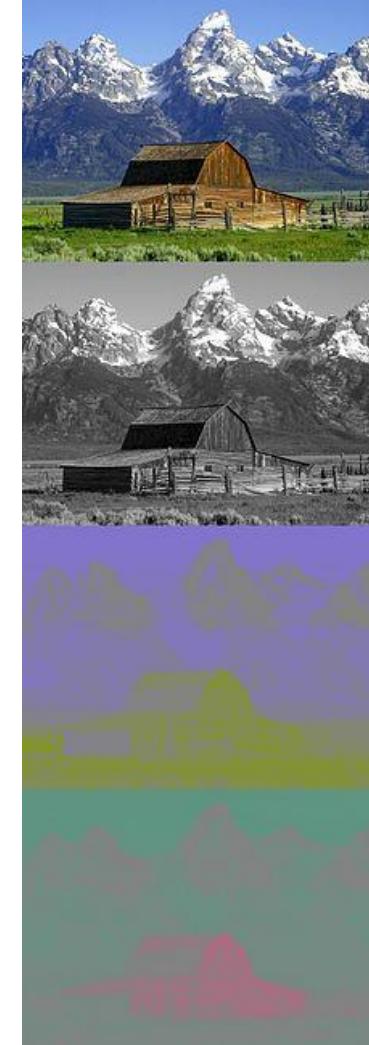
## □ HDTV with BT.709

$$\begin{bmatrix} Y' \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2126 & 0.7152 & 0.0722 \\ -0.09991 & -0.33609 & 0.436 \\ 0.615 & -0.55861 & -0.05639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.28033 \\ 1 & -0.21482 & -0.38059 \\ 1 & 2.12798 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y' \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

# Модели YCbCr, Y'CbCr

21

- **YCbCr, Y'CbCr, или Y Pb/Cb Pr/Cr**, также пишется как **Y'C<sub>B</sub>C<sub>R</sub>** или **YC<sub>B</sub>C<sub>R</sub>** — семейство цветовых пространств, которые используются для передачи цветных изображений в компонентном видео (с раздельной передачей цветности) и цифровой фотографии.
  - Y' — компонента яркости. Отличается от Y, которой обозначают яркость без предыскажения. Апостроф означает, что интенсивность света кодируется нелинейно с помощью гамма-коррекции.
  - C<sub>B</sub> и C<sub>R</sub> являются синей и красной цветоразностными компонентами.



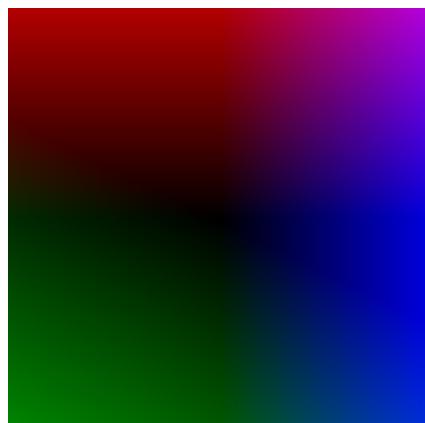
# Связь Y'CbCr с RGB

22

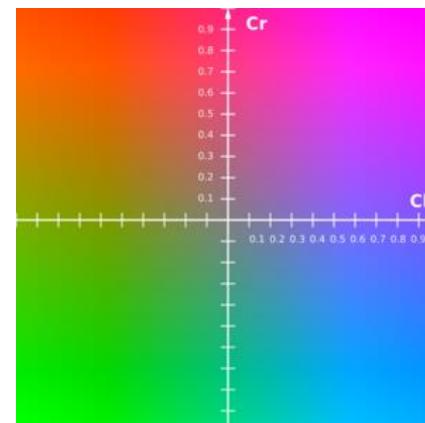
- Цифровые компоненты Y'CbCr (8 бит) рассчитываются из аналоговых R'G'B' [0; 1] следующим образом:

$$\begin{aligned}Y' &= 16 + (65.481 \cdot R' + 128.553 \cdot G' + 24.966 \cdot B') \\C_B &= 128 + (-37.797 \cdot R' - 74.203 \cdot G' + 112.0 \cdot B') \\C_R &= 128 + (112.0 \cdot R' - 93.786 \cdot G' - 18.214 \cdot B')\end{aligned}$$

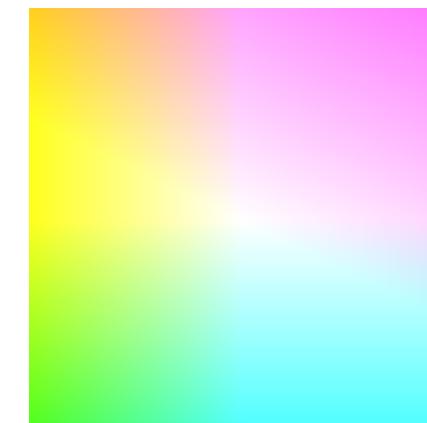
- Плоскость CbCr при разных значениях яркости Y' [0; 1]



$Y' = 0$



$Y' = 0.5$



$Y' = 1$

# Цветовое расстояние

23

- Математическое представление, позволяющее численно выразить различие между двумя цветами;
- Распространенные определения цветового различия обычно используют формулу вычисления расстояния в Евклидовом пространстве;
- Не любое цветовое пространство является евклидовым.
- Говорят об *ощущении*, пишут  $\Delta E$  (*Empfindung* )

# Формулы цветового отличия

## □ CIE76

- Используя координаты  $(L^*a^*b^*)$  и  $(L^*_2a^*_2b^*_2)$  в цветовом пространстве  $L^*a^*b^*$ :

$$\Delta E_{ab}^* = \sqrt{(L_2^* - L_1^*)^2 + (a_2^* - a_1^*)^2 + (b_2^* - b_1^*)^2}$$

- Где значение 2.3 примерно соответствует минимально различимому для человеческого глаза отличию между цветами.

## □ CIE94

- $\Delta E$  (1994) задавалось в цветовом пространстве LCH ( $L^*C^*h$ ).

$$\Delta E_{94}^* = \sqrt{\left(\frac{L_2^* - L_1^*}{K_L}\right)^2 + \left(\frac{C_2^* - C_1^*}{1 + K_1 C_1^*}\right)^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{1 + K_2 C_1^*}\right)^2}$$

- где весовой коэффициент  $K$  зависит от области применения

	Искусство	Промышленность
$K_L$	1	2
$K_1$	0.045	0.048
$K_2$	0.015	0.014

- Ещё есть очень громоздкий стандарт CIEDE2000

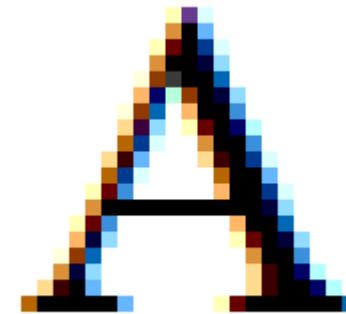
# Бонус 1. Шутки Microsoft Word

25

- Английская буква «A», напечатанная чёрным цветом шрифтом Times New Roman, 22

A

- Она же, многократно увеличенная в Paint
- Видим около десятка цветов и оттенков



## Технические средства ввода изображений

### Достоинства и недостатки

# Технические средства ввода и обработки изображений

27

- Средства ввода изображений:
  - Сканер
  - Факс
  - Цифровое фото
  - Цифровое видео
- Изображения:
  - Бинарные (монохромные, черно-белые)
  - Полутоновые (256 оттенков серого)
  - Цветные (True color 24bit, Deep color 48bit)

# Достоинства и недостатки

28

	Факс	Сканер	Фото (несжатое, с зеркалки)	Видеозахват
Разрешение	Очень низкое	Очень высокое	Высокое	Низкое
Цветопередача	ЧБ	Очень высокая	Отличная	Высокая- средняя
Шумы	Очень большие	Шумы на оригинале + шумы от стекла устройства (жир, пыль, ворс)	Зависят от условий съёмки	Сильно зависят от условий съёмки
Искажения	Очень большие	Поворот, нелинейные искажения	Трапеция, поворот, зернистость	Дрожание, слабая яркость
Общее качество	Худшее	Лучшее	Лучшее	Хорошее

# Особенности обработки

29

	Бинарные	Полутоновые	С палитрой (индексированные)	Полноцветные
Объём	Очень малый, 1 бит на пиксель	Малый, в 8 раз больше бинарного	Средний	Очень большой, в 32 раза больше бинарного
Количество цветов	2	256	По разному	4 млн
Информативность	Минимальная	Средняя	Высокая	Максимальная
Алгоритмы	Простые	Средней сложности	Сложные	Сложные
Вычисления	$O(n*m)$	$O(n*m*c)$	$O(n*m*c)$	$O(n*m*c)$

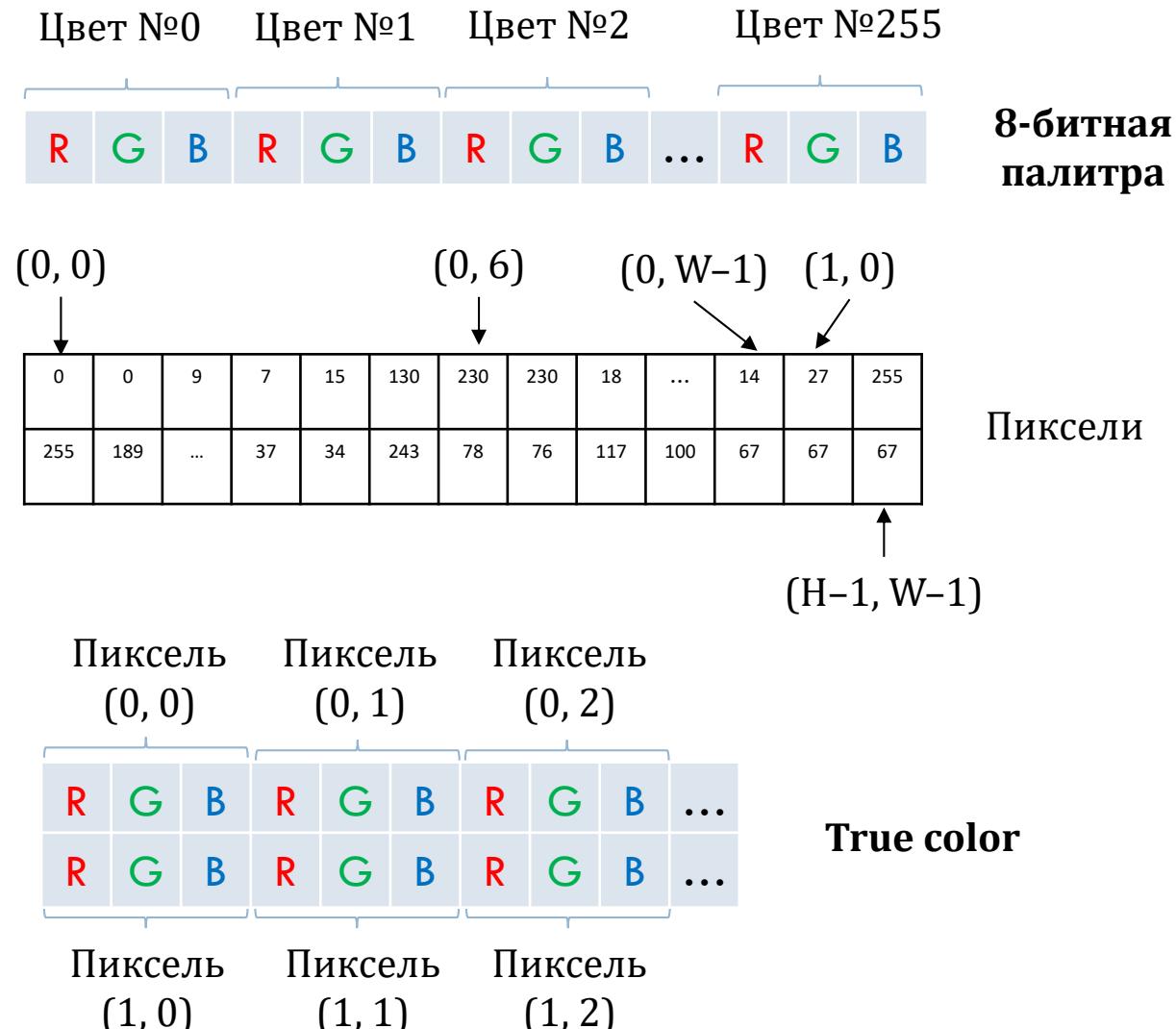
# Форматы файлов изображений

BMP, JPEG, PNG, TIFF, GIF, RAW

# Семейство форматов BMP

31

- Многохромный
  - 1 бит на пиксель
- 16-цветный
  - Палитра, в которой 16 цветов заданы в true color
  - 4-битный индекс цвета в палитре.
- 256-цветный
  - 8-битный индекс цвета в палитре.
- 24-разрядный (true color)
  - 8-бит на каждый цвет



# Формат RAW

32

- Содержит необработанные (сырые) данные об электрических сигналах с фотоматрицы цифрового фотоаппарата или кинокамеры;
- Играют роль цифрового негатива;
- При конвертации в то или иное цветовое пространство применяются настройки баланса белого, светочувствительности, яркости, контраста, насыщенности, контурной резкости.
- После конвертации изображение пригодно для просмотра и печати, но обратная конвертация в raw невозможна.

# Формат GIF

33

- Graphics Interchange Format — формат для обмена изображениями
- Компрессия без потери качества:
  - Lempel-Ziv-Welch (LZW)
  - Run-Length Encoding (RLE)
- Индексированная палитра из 256 цветов
- Один цвет может быть объявлен прозрачным
- Нет полупрозрачности (альфа-канала)
- Есть поддержка анимации: покадровое хранение с указанием времени показа.

# Формат PNG

34

- Portable Network Graphics — растровый формат хранения графической информации
  - Полутон 16 бит;
  - 8-битная палитра для 24-битных цветов;
  - Полноцветное изображение с глубиной 48 бит.
- Сжатие по алгоритму DEFLATE без потерь
- Создан на замену простого проприетарного GIF и сложного TIFF
- Поддержка альфа-канала
- Поддержка гамма-коррекции: хранение коэффициента предыскажения
- Нет анимации

# TIFF

35

- Tagged Image File Format — формат хранения растровых графических изображений:
  - Двуцветные
  - Полутоновые
  - Индексированная палитра
  - RGB, CMYK, YCbCr, CIE Lab
  - На канал 8, 16, 32, 64 бита
- Сжимает без потерь. Но может и с потерями:
  - Без потерь: RLE, LZW, LZ77, ZIP
    - LZ77, LZ78
    - RLE
  - С потерями: используется JPEG внутри TIFF

# Формат JPEG

36

- Joint Photographic Experts Group — растровый графический формат
  - JPEG-LS — сжимает без потерь
  - JPEG — сжимает с потерями на основе дискретного косинусного преобразования (DCT)
  - JPEG2000 — сжимает с потерями на основе вэйвлетов
- Конвертация RGB → YCbCr

# Режимы Image библиотеки PIL

37

Режим	Описание
1	1-bit pixels, black and white, stored with one pixel per byte
L	8-bit pixels, black and white
P	8-bit pixels, mapped to any other mode using a color palette
RGB	3x8-bit pixels, true color
RGBA	4x8-bit pixels, true color with transparency mask
CMYK	4x8-bit pixels, color separation
YCbCr	3x8-bit pixels, color video format. Refers to the JPEG, and not the ITU-R BT.2020, standard
LAB	3x8-bit pixels, the L*a*b color space
HSV	3x8-bit pixels, Hue, Saturation, Value color space
I	32-bit signed integer pixels
F	32-bit floating point pixels

## Передискретизация

Интерполяция  
Децимация

# Передискретизация

39

- Передискретизация (Resampling) — изменение ширины и высоты изображения.
- **Интерполяция** (растяжение, upsampling) — повышение частоты дискретизации
- **Децимация** (сжатие, downsampling) — уменьшение частоты дискретизации путём прореживания его отсчётов (изначально казнь каждого десятого по жребию).
- Передискретизация с рациональным коэффициентом = комбинация растяжения и сжатия с целыми коэффициентами

# Однопроходная передискретизация

40

- Размер выходного изображения задаётся рациональным числом (M/N).
- Для каждого пикселя выходного изображения цвет рассчитывается на основе исходного изображения по формуле:

$$I(x, y) = I\left(\left\lfloor x \frac{N}{M} \right\rfloor, \left\lfloor y \frac{N}{M} \right\rfloor\right)$$

$$x \in [0, W \cdot \frac{M}{N} - 1],$$

$$y \in [0, H \cdot \frac{M}{N} - 1]$$

# Цифровые фильтры для передискретизации

41

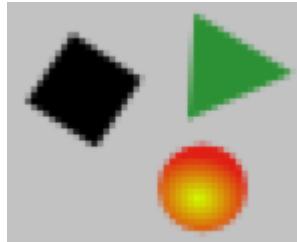
- Применимы в частных случаях:
  - Растворение или сжатие с целым коэффициентом
  - Передискретизация с рациональным коэффициентом
- Классы фильтров
  - Фильтры нижних частот (оконные sinc-фильтры)
  - Линейные интерполяторы и интерполяторы Лагранжа
  - CIC-фильтры (каскады гребёччатых фильтров и интеграторов)

# Артефакты передискретизации

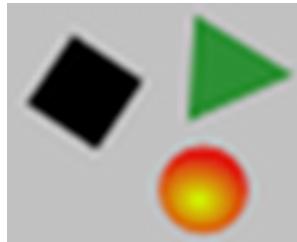
42

- При интерполяции

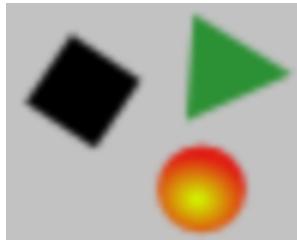
- Пикселизация (*blocking*)



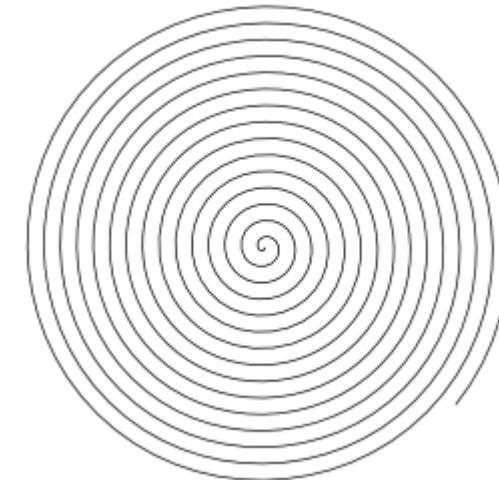
- Звон (каёмка, *ringing*)



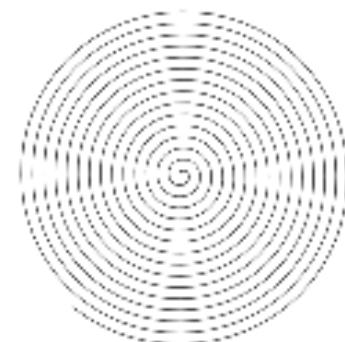
- Размытие (*blurring*)



- При уменьшении разрешения



- Ступенчатость (*aliasing*):



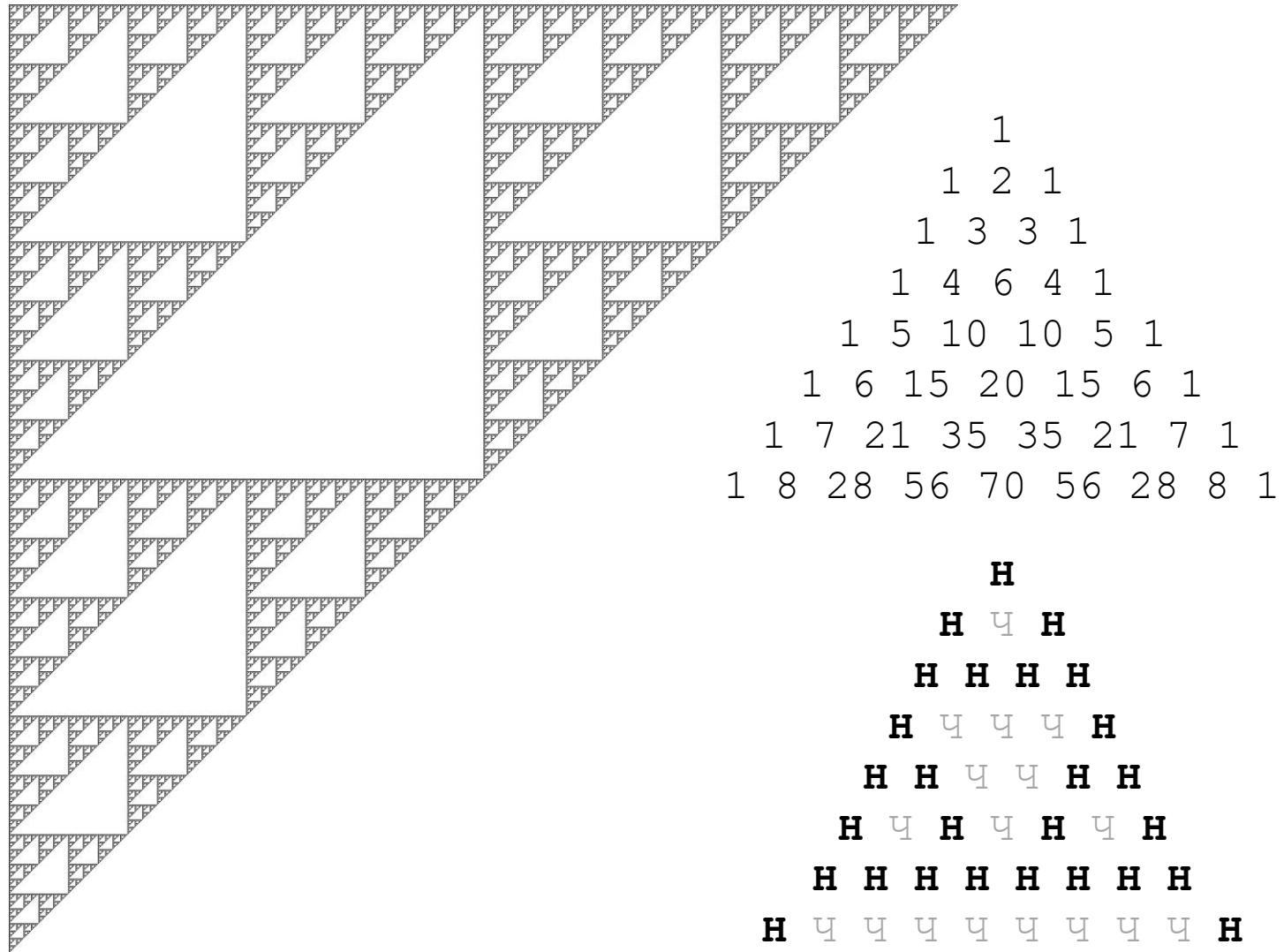
- Эффект муара после сглаживания:



# Бонус 2. О роли Matlab в истории

43

- Ковёр Серпинского размерностью 2048 пикселей
- Он же Треугольник Паскаля, где нечётные числа покрашены чёрным



# Код для ковра Серпинского

44

- 16 строк кода
- 1 час работы

```
function serpinski(n)
    m = zeros(n, n);
    m(1:n, 1) = 1;
    m(1, 1:n) = 1;
    for k = 3:n
        for x = 2:(k-1)
            y = k-x+1;
            m(x, y) = xor(m(x-1, y), m(x, y-1));
        end
    end
    m = (1-m)*255; %% painting black on white
    image(m);
    axis off
    axis image
    imwrite(m, 'I:\\dd\\matlab\\serpinski_triangle.png');
end
```

# Основная литература

45

- 004 С32 **Сергиенко А.Б.** Цифровая обработка сигналов: учебное пособие для вузов, Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011
- Фисенко В.Т., Фисенко Т.Ю., Компьютерная обработка и распознавание изображений, ИТМО, 2008. — 192 с.
- Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Издание 3-е, исправленное и дополненное. Москва: Техносфера, 2012. — 1104 с.

# ЧТО ПОЧИТАТЬ

46

- Цветовые модели
  - [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B2%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F %D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B2%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C)
  - <https://ru.wikipedia.org/wiki/YCbCr>
  - <https://wolfcrow.com/blog/what-is-the-difference-between-cie-lab-cie-rgb-cie-xyy-and-cie-xyz/>
  - [http://www.brucelindbloom.com/index.html?Eqn\\_RGB\\_XYZ\\_Matrix.html](http://www.brucelindbloom.com/index.html?Eqn_RGB_XYZ_Matrix.html)
- Формулы цветового отличия
  - [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0 %D1%86%D0%B2%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%BB%D0%B0%D8%D1%87%D0%B8%D1%8F](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D1%86%D0%B2%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%BB%D0%B0%D8%D1%87%D0%B8%D1%8F)
- Алгоритмы сжатия изображений LZ, RLE, DEFLATE, DCT
  - Ziv, Jacob; Lempel, Abraham (1978) "Compression of individual sequences via variable-rate coding" // IEEE Transactions on Information Theory. 24 (5): 530–536.
  - Ziv, Jacob; Lempel, Abraham (1977). "A Universal Algorithm for Sequential Data Compression". IEEE Transactions on Information Theory. 23 (3): 337–343.
  - Welch, Terry (1984). "A Technique for High-Performance Data Compression". Computer. 17 (6): 8–19.
  - Robinson, A. H.; Cherry, C. (1967). "Results of a prototype television bandwidth compression scheme". Proceedings of the IEEE. 55 (3). IEEE: 356–364.
  - Ahmed, Nasir (1991). "How I Came Up With the Discrete Cosine Transform". Digital Signal Processing. 1 (1): 4–5.
  - <https://en.wikipedia.org/wiki/DEFLATE>