

# Многокритериальная оптимизация

## Постановка задачи

Пусть необходимо обеспечить оптимальность объекта|процесса **одновременно по нескольким критериям оптимальности  $\phi_k(X), k \in [1:s]$** .

Скалярные критерии оптимальности  $\phi_k(X), k \in [1:s]$  будем называть **частными критериями оптимальности**.

Совокупность частных критериев оптимальности  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$  будем называть **векторным критерием оптимальности**.

Пусть требуется минимизировать каждый из частных критериев  $\phi_k(X), k \in [1:s]$  в одной и той же области допустимых значений  $D_X \in R^n$ .

Задача многокритериальной оптимизации в общем виде

$$\min_{X \in D_X} (\Phi(X) = \Phi(X^*))$$

где  $D_X$  - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров  $X$ .

## Нормализация частных критериев

$$\phi_k^{\text{норм}}(X) = \frac{\phi_k(X) - \phi_k^*}{\phi_k^{**} - \phi_k^*} \in [0,1], k \in [1:s]$$

где

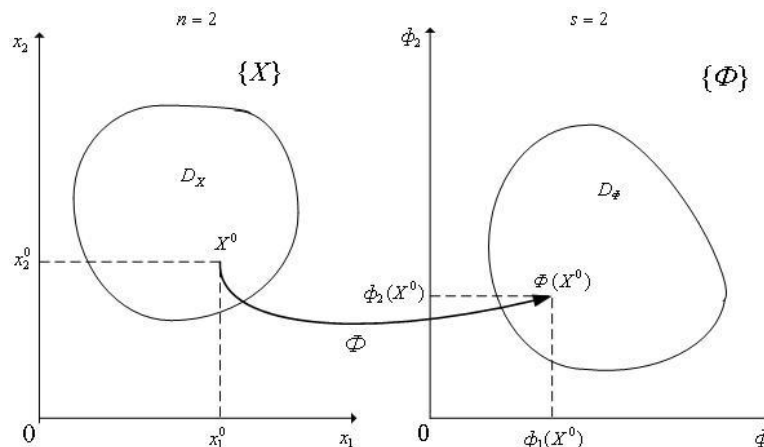
$$\phi_k^* = \min_{X \in D_X} \phi_k(X),$$

$$\phi_k^{**} = \max_{X \in D_X} \phi_k(X).$$

Если не оговорено иное, будем полагать далее, что частные критерии нормализованы, и будем обозначать  $\phi_k(X), k \in [1:s]$  - нормализованные частные критерии оптимальности.

## Множество Парето

Введем понятие **пространства критериев  $\{\Phi\}$**  (см рис для  $n = 2, s = 2$ )

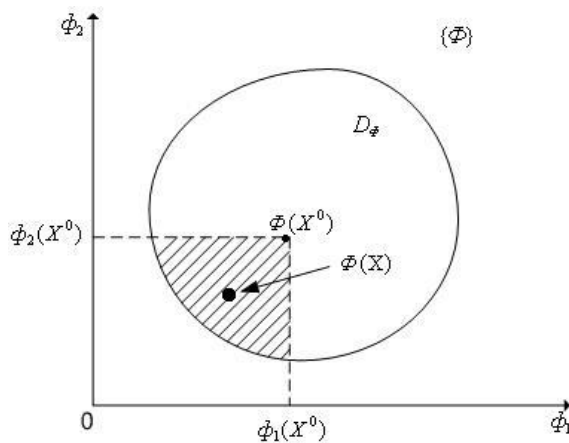


Векторный критерий оптимальности  $\Phi(X)$  выполняет отображение множества допустимых значений  $D_X \in \{X\}$  в некоторую область  $D_\Phi \in \{\Phi\}$  (**область достижимости**), где  $\{X\}$  - пространство варьируемых параметров.

## Отношение предпочтения $\succ$

Введем на множестве  $D_X$  отношение предпочтения ( $\succ$ ).

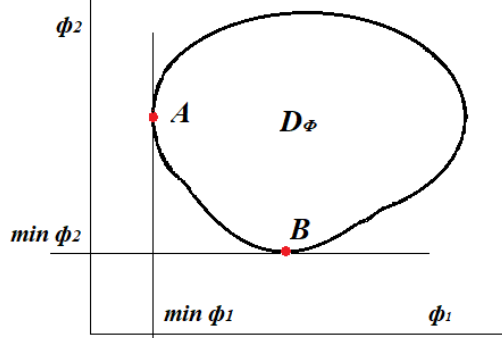
Будем говорить, что вектор  $\bar{X}^1 \in D_X$  **предпочтительнее** вектора  $\bar{X}^2 \in D_X$  ( $\bar{X}^1 \succ \bar{X}^2$ ), если среди равенств и неравенств вида  $\phi_k(\bar{X}^1) \leq \phi_k(\bar{X}^2)$ ,  $k \in [1:s]$  имеется хотя бы одно строгое неравенство (см рис для  $s=2$ ).



Наряду с этим будем говорить, что вектор критериев оптимальности  $\Phi(\bar{X}^1) \in D_\Phi$  предпочтительнее вектора критериев оптимальности  $\Phi(\bar{X}^2) \in D_\Phi$ , и писать  $\Phi(\bar{X}^1) \succ \Phi(\bar{X}^2)$ , если  $\bar{X}^1 \succ \bar{X}^2$ .

Для всех точек заштрихованной области  $\Phi(\bar{X}) \succ \Phi(\bar{X}^0)$ , т.е. заштрихованной области пространства критериев соответствуют векторы варьируемых параметров  $\bar{X} \in D_X$ , для которых  $\bar{X} \succ \bar{X}^0$ .

Пример. Область компромисса

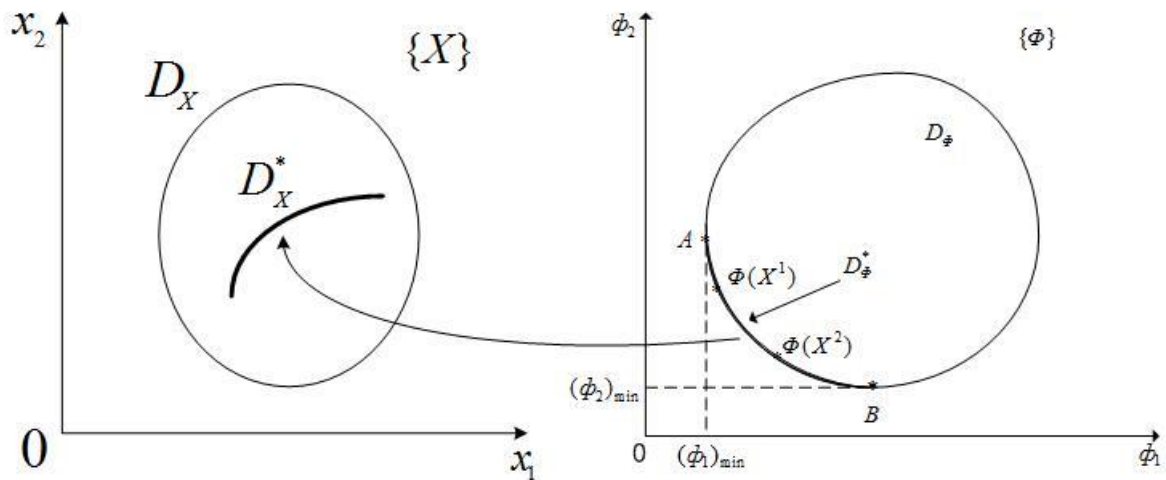


### Множество Парето (область компромисса)

Рассмотрим подмножество  $D_\phi^*$  точек, для которых в множестве  $D_\phi$  нет более предпочтительных точек.

Множество  $D_X^* \in D_X$ , соответствующее  $D_\phi^*$ , называется **множеством Парето** (см рис).

Другими словами, множество Парето можно определить как множество, в котором значение любого из частных критериев оптимальности можно улучшить (уменьшить) только за счет ухудшения (увеличения) других критериев – любое из решений, принадлежащее множеству Парето, не может быть улучшено одновременно по всем частным критериям. Точки, принадлежащие множеству Парето, не связаны между собой отношением предпочтения



Если  $X \in D_X^*$ , то  $\Phi(X) \in D_\phi^*$ . Множество  $D_\phi^*$  называется **фронтом Парето**.

Если множество  $D_\phi$  является выпуклым, то множество  $D_\phi^*$  есть часть границы множества  $D_\phi$  - дуга AB, в которой точка A соответствует  $(\phi_2)_{\min}$ , а точка B -  $(\phi_1)_{\min}$ . Среди точек  $\Phi(X^1) \in D_\phi^*$ ,  $\Phi(X^2) \in D_\phi^*$  нет более предпочтительных, поскольку  $\phi_1(X^1) < \phi_1(X^2)$ , но  $\phi_2(X^1) > \phi_2(X^2)$

**Пример 1.**

Пусть задано множество допустимых значений

$$D_X = \{X \mid -1 \leq x_i \leq 1, i \in [1:2]\}$$

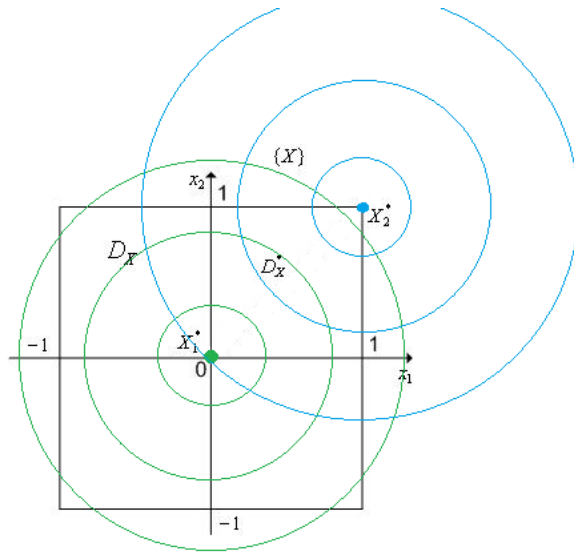
и два частных критерия оптимальности

$$\phi_1(X) = x_1^2 + x_2^2,$$

$$\phi_2(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

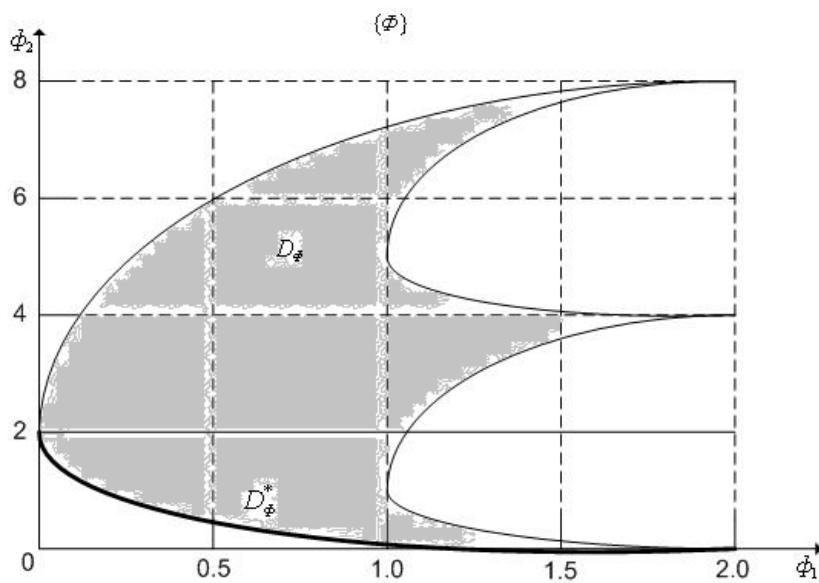
Построить область Парето.

Множество допустимых значений вектора варьируемых параметров  $D_X$

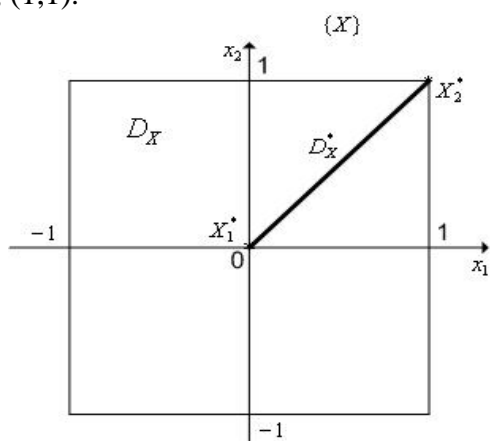


Рассмотрим пространство критериев  $\{\Phi\}$

Множество  $D_\Phi$  при этом имеет вид, представленный на рисунке



Множество Парето  $D_X^*$  представляет собой отрезок прямой, соединяющий точки  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ .



**Роль множества Парето** при решении задач многокритериальной оптимизации определяется следующей теоремой.

**Теорема.** Если для некоторых весовых множителей  $\lambda_k > 0$ ,  $k \in [1:s]$  имеет место равенство

$$\min_{X \in D_X} \sum_{k=1}^s \lambda_k \phi_k(X) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \phi_k(X^*)$$

где  $X^* \in D_X$ , то вектор  $X^*$  оптимален по Парето.

Т.е. теорема показывает, что **выбор определенной точки из множества Парето эквивалентен указанию весов для каждого из частных критериев оптимальности.** На этом факте основано большое количество численных методов решения многокритериальных задач оптимизации.

Заметим, что теорема задает лишь *необходимое условие* оптимальности по Парето вектора  $X^* \in D_X$ . Т.е. из того факта, что точка  $X^*$  принадлежит множеству Парето, не следует, что эта точка обязательно удовлетворяет условию теоремы (случай невыпуклого множества  $D_\phi$ ).

В постановке задачи многокритериальной оптимизации фиксируется лишь множество допустимых значений  $D_X$  и вектор критериев  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$ .

Этой информации недостаточно для однозначного решения задачи. Указанная информация позволяет лишь выделить соответствующее множество Парето (можно сказать, что решением задачи многокритериальной оптимизации в постановке является множество Парето). *Для однозначного решения задачи многокритериальной оптимизации нужна дополнительная информация.*

# 1. Методы решения задач многокритериальной оптимизации, использующие множество Парето

## 1.1. Метод весовых множителей

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} (\Phi(X) = \Phi(X^*)),$$

где  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$  - векторный критерий оптимальности,

$D_X$  - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров.

Сведем задачу многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации.

Определим относительную важность частных критериев и назначим весовые коэффициенты  $\lambda_k, k \in [1:s]$ .

В качестве скалярного критерия используется критерий

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \phi_k(X), \lambda_k \geq 0.$$

Т.е. вместо исходной задачи решается задача глобальной условной оптимизации со скалярным критерием оптимальности

$$\min_{X \in D_X} \varphi(X) = \min_{X \in D_X} \sum_{k=1}^s \lambda_k \phi_k(X) = \varphi(X^*).$$

где на весовые множители  $\lambda_k, k \in [1:s]$  накладываются дополнительные условия вида

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k = 1 \text{ или } \|\Lambda\| = 1.$$

Существуют различные способы выбора весовых множителей  $\lambda_k, k \in [1:s]$ . Одним из таких способов является назначение коэффициентов согласно таблице.

**Таблица - Шкала относительной важности частных критериев**

Относительная важность критерия	Определение относительной важности критериев
1	Равная важность
3	Умеренное (слабое) превосходство
5	Сильное (существенное) превосходство
7	Очевидное превосходство
9	Абсолютное (подавляющее) превосходство
2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними оценками

Для того чтобы при выборе весовых множителей  $\lambda_k, k \in [1:s]$  избавиться от влияния масштабов частных критериев оптимальности, в методе весовых множителей целесообразно использовать нормализованные критерии.

## 1.2 Метод $\varepsilon$ - ограничений

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} \Phi(X) = \Phi(X^*),$$

где  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$  - векторный критерий оптимальности,

$D_X$  - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров.

Метод  $\varepsilon$  - ограничений относится к группе методов, основанных на сведении задачи многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации.

Частные критерии **ранжируются по важности**, и в качестве скалярного критерия оптимальности  $\varphi(X)$  используется самый важный из частных критериев оптимальности  $\phi_p(X)$ ,  $p \in [1:s]$  а остальные частные критерии учитываются с помощью ограничений типа неравенств вида

$$\phi_k(X) \leq \varepsilon_k, k \in [1:s], k \neq p$$

Дополнительной информацией в методе  $\varepsilon$ -ограничений является информация о номере  $p$  самого важного из частных критериев, также информация о максимально допустимых значениях частных критериев  $\varepsilon_k, k \in [1:s], k \neq p$ .

Таким образом, в методе  $\varepsilon$ -ограничений вместо исходной задачи решается задача глобальной условной оптимизации со скалярным критерием оптимальности  $\varphi(X) = \phi_p(X)$

$$\min_{X \in \tilde{D}_X} \varphi(X) = \min_{X \in \tilde{D}_X} \phi_p(X) = \varphi(X^*), \quad (2)$$

где

$$\tilde{D}_X = D_X \cap D_p, \quad D_p = \{X \mid \phi_k(X) \leq \varepsilon_k, k \in [1:s], k \neq p\}. \quad (3)$$

Недостатком метода  $\varepsilon$ -ограничений является трудность выбора максимально допустимых значениях частных критериев  $\varepsilon_k, k \in [1:s], k \neq p$ , которые гарантировали бы достижимость некоторого решения.

### Схема метода $\varepsilon$ -ограничений

1) Выбираем самый важный из частных критериев оптимальности  $\phi_p(X)$  и полагаем  $\varphi(X) = \phi_p(X)$ .

2) Задаем ограничения  $\varepsilon_k, k \in [1:s], k \neq p$  для всех частных критериев оптимальности, исключая критерий  $\phi_p(X)$ .

3) Тем или иным способом формируем множество  $D_p = \{X \mid \phi_k(X) \leq \varepsilon_k, k \in [1:s], k \neq p\}$ , а затем – множество  $\tilde{D}_X = D_X \cap D_p$ .



4) Решаем задачу глобальной условной оптимизации (2). Найденное решение этой задачи  $X^*$  принимаем в качестве решения задачи многокритериальной оптимизации.

### 1.3 Метод справедливого компромисса

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} \Phi(X) = \Phi(X^*),$$

где  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$  - векторный критерий оптимальности,

$D_X$  - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров.

Метод справедливого компромисса строится на основе понятия «**справедливый компромисс**» и использует следующее сильное соглашение: **все частные критерии  $\phi_k(X), k \in [1:s]$  имеют одинаковую важность.**

**Справедливым компромиссом** будем называть такой компромисс, при котором относительный уровень снижения качества решения по одному или нескольким критериям не превосходит относительного уровня повышения качества решения по остальным критериям.

Для формализации понятия справедливого компромисса введем **отношение превосходства**  $\triangleright$  на множестве Парето (не путать с отношением предпочтения  $\succ$ ).

Пусть во множестве Парето  $D_X^*$  даны две точки  $X^1, X^2$  и значения всех частных критериев оптимальности в них  $\phi_k(X^1), \phi_k(X^2), k \in [1:s]$ .

Введем **меру относительного изменения** (снижения – знак «минус» или повышения – знак «плюс») **качества решения** по каждому из критериев

$$\Delta \tilde{\phi}_k(X^1, X^2) = \frac{\Delta \phi_k(X^1, X^2)}{\max(\phi_k(X^1), \phi_k(X^2))}, k \in [1:s],$$

где  $\Delta \phi_k(X^1, X^2) = \phi_k(X^1) - \phi_k(X^2)$  - абсолютное изменение значения критерия оптимальности  $\phi_k(X), k \in [1:s]$  при переходе от решения  $X^1$  к решению  $X^2$ .

Вычислим максимальное относительное **снижение качества** решения при переходе от решения  $X^1$  к решению  $X^2$

$$\Delta \tilde{\phi}_{\min}(X^1, X^2) = \min_{k \in [1:s]} \Delta \tilde{\phi}_k(X^1, X^2)$$

Аналогично вычислим максимальное относительное **повышение качества** решения при переходе от решения  $X^1$  к решению  $X^2$

$$\Delta \tilde{\phi}_{\max}(X^1, X^2) = \max_{k \in [1:s]} \Delta \tilde{\phi}_k(X^1, X^2)$$

Будем говорить, что решение  $X^2$  превосходит решения  $X^1$ , и писать  $X^2 \triangleright X^1$ , если

$$\Delta \tilde{\phi}_{\max}(X^1, X^2) > |\Delta \tilde{\phi}_{\min}(X^1, X^2)|$$

С другой стороны, будем говорить, что решение  $X^1$  превосходит решения  $X^2$ , и писать  $X^1 \triangleright X^2$ , если

$$\Delta \tilde{\phi}_{\max}(X^1, X^2) \leq |\Delta \tilde{\phi}_{\min}(X^1, X^2)|$$

**Пример 3.** Пусть заданы четыре частных критерия оптимальности  $\phi_k(X), k \in [1:4]$  ( $s = 4$ ), в ходе решения задачи оптимизации найдены решения  $X^1, X^2$ , принадлежащие множеству Парето.

Пусть критерии  $\phi_k(X), k \in [1:4]$  в точках  $X^1, X^2$  имеют следующие значения:

	$\phi_1(X)$	$\phi_2(X)$	$\phi_3(X)$	$\phi_4(X)$
$X^1$	1	2	3	5
$X^2$	3	2	0	4

Рассчитаем изменение качества решения при переходе от  $X^1$  к  $X^2$ .

$$\Delta \tilde{\phi}_1(X^1, X^2) = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta \tilde{\phi}_2(X^1, X^2) = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$\Delta \tilde{\phi}_3(X^1, X^2) = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\Delta \tilde{\phi}_4(X^1, X^2) = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$$

	$\phi_1(X)$	$\phi_2(X)$	$\phi_3(X)$	$\phi_4(X)$
$X^1$	1	2	3	5
$X^2$	3	2	0	4
$\Delta \tilde{\phi}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{5}$

$$\Delta \tilde{\phi}_{\min}(X^1, X^2) = \min(-\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{1}{5}) = -\frac{2}{3},$$

$$\Delta \tilde{\phi}_{\max}(X^1, X^2) = \max(-\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{1}{5}) = 1$$

Поскольку  $\Delta \tilde{\phi}_{\max}(X^1, X^2) > |\Delta \tilde{\phi}_{\min}(X^1, X^2)|$ , т.е. максимальное относительное повышение качества решения превышает максимальное относительное снижение качества решения, то **решение  $X^2$  превосходит решение  $X^1$ :  $X^2 \triangleright X^1$**

Дополнительной информацией в методе справедливого компромисса является информация об одинаковой важности всех частных критериев, а также информация о справедливом компромиссе, формализованная отношением превосходства  $\triangleright$

### **Схема метода справедливого компромисса**

1) Полагаем счетчик числа итераций  $r = 1$ .

2) Тем или иным способом выбираем из множества Парето  $D_X^*$  решение  $X^0 = \tilde{X}^*$ .

- 3) Вычисляем значения всех частных критериев оптимальности  $\phi_k(\tilde{X}^*), k \in [1:s]$ .
- 4) Тем или иным способом выбираем из множества Парето  $D_X^*$  решение  $X^r$  (см. ниже).
- 5) Вычисляем значения всех частных критериев оптимальности  $\phi_k(X^r), k \in [1,s]$ .
- 6) Если  $X^r \succ \tilde{X}^*$ , то полагаем  $\tilde{X}^* = X^r$ .
- 7) Если условие окончания итераций выполнено (см. ниже), то принимаем точку  $\tilde{X}^*$  в качестве приближенного решения задачи (1) и заканчиваем вычисления. Иначе - полагаем  $r = r + 1$  и переходим к п. 4.

В простейшем случае выбор решений  $X^r \in D_X^*$  может быть произведен случайным образом. В качестве условия окончания итераций в этом случае может быть использовано достижение заданного количества итераций. Выбор решений  $X^r \in D_X^*$  может быть произведен также с помощью полного перебора узлов какой-либо сетки, покрывающей множество  $D_X^*$ .

Замети, что поскольку метод справедливого компромисса использует относительные изменения частных критериев оптимальности, этот метод инвариантен к масштабу измерения частных критериев, т.е. **не требуется их нормализация**.

## 2 Методы решения задач многокритериальной оптимизации, не использующие множество Парето

### 2.1 Метод приближения к идеальному решению

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} \Phi(X) = \Phi(X^*),$$

где  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$  - векторный критерий оптимальности,

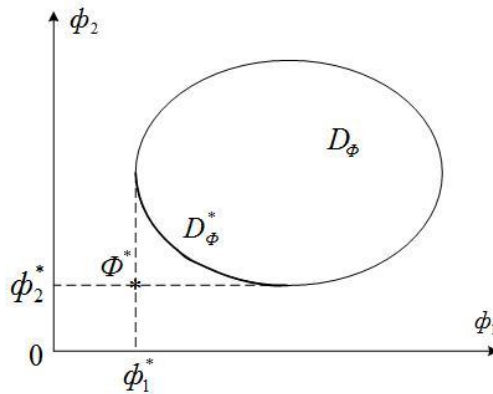
$D_X$  - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров.

Сведем задачу многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации.

**Идеальным решением задачи многокритериальной оптимизации** называется вектор  $\Phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_s^*)$ , где

$$\phi_k^* = \min_{X \in D_X} \phi_k(X), k \in [1:s] -$$

- минимальное значение частного критерия оптимальности  $\phi_k(X)$  во множестве  $D_X$  - см рис.



Рассмотрим скалярный критерий оптимальности

$$\varphi(X) = \left\| \bar{\Phi}(X) - \bar{\Phi}^* \right\|,$$

где  $\|\cdot\|$  - некоторая векторная норма, например, евклидова;

$\bar{\Phi}(X) = \left( \frac{\phi_1(X)}{\phi_1^*}, \frac{\phi_2(X)}{\phi_2^*}, \dots, \frac{\phi_s(X)}{\phi_s^*} \right)^T$  - нормированный векторный критерий оптимальности;

$\bar{\Phi}^* = \left( \frac{\phi_1^*}{\phi_1^*}, \frac{\phi_2^*}{\phi_2^*}, \dots, \frac{\phi_s^*}{\phi_s^*} \right)^T = (1, 1, \dots, 1)^T$  - нормированное идеальное решение - единичный  $(s \times 1)$  - вектор.

В методе приближения к идеальному решению вместо задачи (1) решается задача глобальной условной оптимизации со скалярным критерием оптимальности

$$\min_{X \in D_X} \varphi(X) = \min_{X \in D_X} \left\| \bar{\Phi}(X) - \bar{\Phi}^* \right\| = \varphi(X^*).$$

Заметим, что если  $\|\cdot\|$  - евклидова норма, то критерий оптимальности является квадратичной функцией компонент вектора  $X$ . Поэтому если, дополнительно, множество  $D_X$  является выпуклым, то задача представляет собой задачу квадратичного программирования.

Дополнительной информацией в методе приближения к идеальному решению является информация, заключенная в способе свертывания векторного критерия оптимальности в скалярный критерий.

Поскольку метод приближения к идеальному решению использует нормированные частные критерии оптимальности, этот метод инвариантен к масштабу измерения частных критериев.

## 2.2 Метод последовательных уступок

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации

$$\min_{X \in D_X} \Phi(X) = \Phi(X^*),$$

где  $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_s(X))$  - векторный критерий оптимальности,  $D_X$  - множество допустимых значений вектора варьируемых параметров.

Пусть **уступка**  $\Delta_k$  -- допустимое увеличение значения критерия оптимальности  $\phi_k(X)$ ,  $k \in [1 : s]$  относительно его минимального значения  $\phi_k^* = \min_{X \in D_X} \phi_k(X)$ .

### Схема метода последовательных уступок

1) Производим качественный анализ относительной важности частных критериев оптимальности, на основании чего нумеруем критерии в порядке убывания важности, так что главным считается критерий  $\phi_1(X)$ , следующим по важности – критерий  $\phi_2(X)$  и т.д. до критерия  $\phi_s(X)$ .

2) Для каждого из частных критериев, исключая последний по важности критерий  $\phi_s(X)$ , назначаем **уступки**  $\Delta_k$ ,  $k \in [1 : (s-1)]$ .

3) Последовательно для критериев  $\phi_k(X)$ ,  $k = 1, 2, \dots, (s-1)$  выполняем следующие действия.

3.1) Находим минимум критерия  $\phi_1(X)$

$$\min_{X \in D_X} \phi_1(X) = \phi_1(X_1^*) = \phi_1^*$$

и определяем множества допустимых значений

$$D_X^1 = \{X \mid X \in D_X, \phi_1(X) \leq \phi_1^* + \Delta_1\}.$$

3.2) Находим минимум критерия  $\phi_2(X)$

$$\min_{X \in D_X^1} \phi_2(X) = \phi_2(X_2^*) = \phi_2^*$$

и определяем множество допустимых значений

$$D_X^2 = \{X \mid X \in D_X, \phi_1(X) \leq \phi_1^* + \Delta_1, \phi_2(X) \leq \phi_2^* + \Delta_2\}$$

... и т.д.

3.(s-1)) Находим минимум критерия  $\phi_{s-1}(X)$

$$\min_{X \in D_X^{s-2}} \phi_{s-1}(X) = \phi_{s-1}(X_{s-1}^*) = \phi_{s-1}^*$$

и определяем множества допустимых значений

$$D_X^{s-1} = \{X \mid X \in D_X, \phi_1(X) \leq \phi_1^* + \Delta_1, \phi_2(X) \leq \phi_2^* + \Delta_2, \dots, \phi_{s-1}(X) \leq \phi_{s-1}^* + \Delta_{s-1}\}.$$

3.s) Находим минимум критерия  $\phi_s(X)$

$$\min_{X \in D_X^{s-1}} \phi_s(X) = \phi_s(X_s^*) = \phi_s^*.$$

4) В качестве решения задачи (1) принимаем решение  $X_s^*$  со значениями частных критериев  $\phi_k(X_s^*), k \in [1:s]$ .

**Достоинство метода:** позволяет контролировать, ценой какой уступки в одном критерии приобретается выигрыш в другом критерии.

**Недостатки (трудности):**

1. Метод последовательных уступок применим для решения лишь тех задач многокритериальной оптимизации, в которых все частные критерии естественным образом упорядочены по степени важности.

2. Изложенная схема метода последовательных уступок предполагает, что каждый частный критерий  $\phi_k(X), k \in [1:(s-1)]$  настолько существенно более важен, чем последующий критерий, что можно ограничиться учетом только попарных связей критериев и выбирать величину уступки для данного критерия с учетом поведения лишь одного следующего критерия. Так бывает далеко не всегда.

3. Поскольку взаимосвязь частных критериев обычно неизвестна, заранее назначить величины уступок  $\Delta_k, k \in [1:(s-1)]$ , как правило, не удастся. Поэтому изучение взаимосвязи критериев и назначение величин уступки приходится производить в процессе решения задачи. Практически, для этого вначале оценивают взаимосвязь критериев  $\phi_1(X), \phi_2(X)$ . Для этого задают несколько величин уступок  $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \dots$  и определяют соответствующие значения второго по важности критерия  $\phi_{21}^*, \phi_{22}^*, \dots$ . На основе анализа этой информации принимается решение о величине первой уступки  $\Delta_1$ . Затем аналогично оценивают взаимосвязь критериев  $\phi_2(X), \phi_3(X)$  и назначают величину второй уступки и т.д.

4. Сложной самостоятельной проблемой является отыскание в явном виде множеств  $D_X^1, D_X^2, \dots, D_X^{s-1}$ .

Дополнительной информацией в методе последовательных уступок является информация об относительной важности частных критериев  $\phi_k(X), k \in [1:s]$ , а также информация об уступках  $\Delta_k, k \in [1:(s-1)]$ .