

Aproksymacja profilu wysokościowego

Metody numeryczne – projekt 3.

Maciej Winiecki 198363

Wstęp

Celem projektu była implementacja i analiza dwóch metod obliczania aproksymacji interpolacyjnej. Obliczenia były wykonywane na danych przedstawiających profile wysokościowe wybranych tras turystycznych.

Opis analizowanych metod

Metoda Lagrange’a

Pierwszą zaimplementowaną metodą była metoda interpolacji wielomianowej Lagrange’a. Polega ona na wyznaczeniu wielomianu stopnia $n-1$, który przechodzi przez n węzłów interpolacji – funkcja interpolująca ma w tych miejscach wartości równe funkcji interpolowanej.

Wyznaczanie wielomianu podzielone jest na dwa etapy:

- a. Obliczenie *bazy Lagrange’a* dla każdego węzła zgodnie ze wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- b. Następnie używamy wszystkich obliczonych baz do wyznaczenia wielomianu:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

Metoda ta jest bardzo prosta w implementacji i nie wymaga przekształcania macierzy. Jednak, ma ona swoje wady, które będą omówione podczas analizy uzyskanych wyników.

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia

Drugą metodą, która została zaimplementowana, była metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia. Polega ona na zastosowaniu interpolacji lokalnej, czyli pomiędzy poszczególnymi węzłami. Wykres funkcji jest przybliżany poprzez “sklejenie” wielomianów trzeciego stopnia w węzłach interpolacji.

- a. Dla każdego przedziału $[x_i, x_{i+1}]$ konstruowany jest wielomian trzeciego stopnia:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

- b. Następnie zapewniane są cechy interpolacji: funkcja przechodzi przez wszystkie punkty, funkcja i jej pochodne są ciągłe na całym przedziale:

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= S_{i+1}(x_{i+1}) \\ S'_i(x_{i+1}) &= S'_{i+1}(x_{i+1}) \\ S''_i(x_{i+1}) &= S''_{i+1}(x_{i+1}) \end{aligned}$$

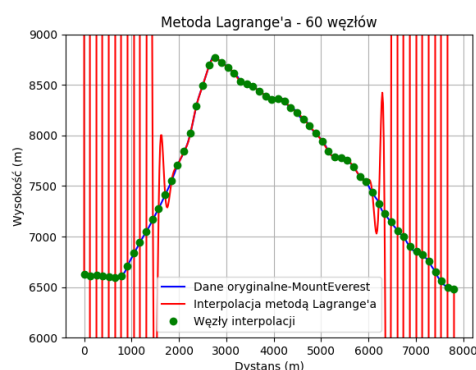
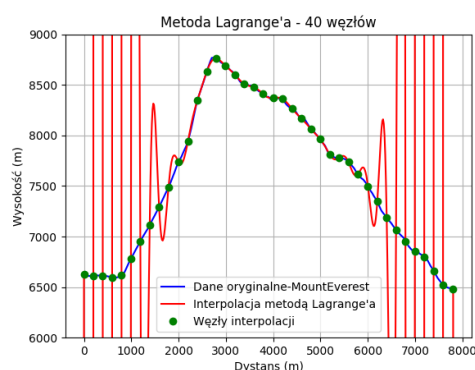
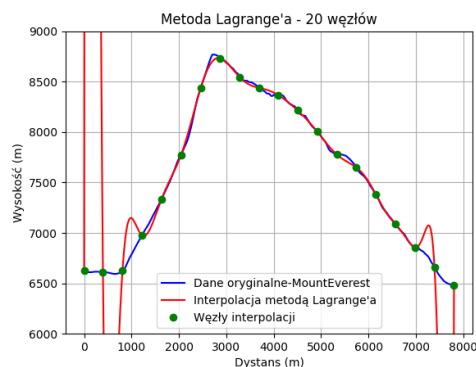
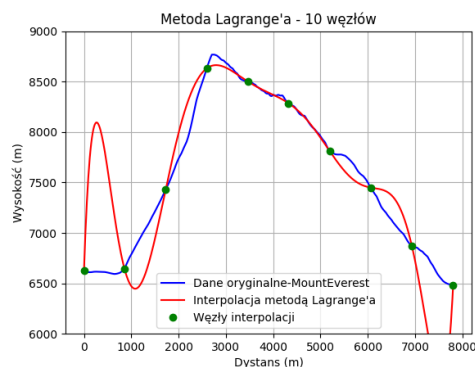
- c. Uwzględnienie warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} S''_0(x_0) &= 0 \\ S''_{n-1}(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i , za pomocą których wyznaczamy wartości interpolacji w wybranym punkcie.

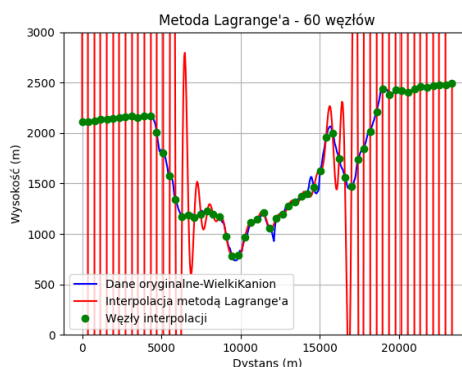
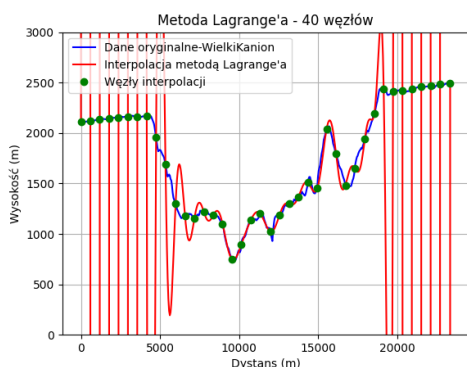
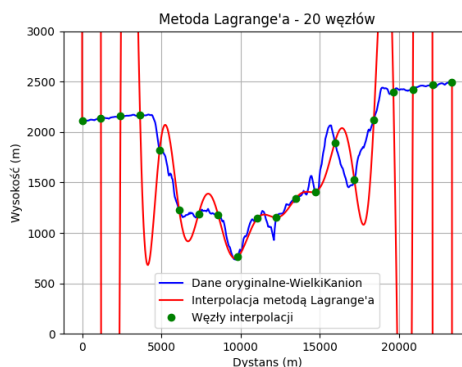
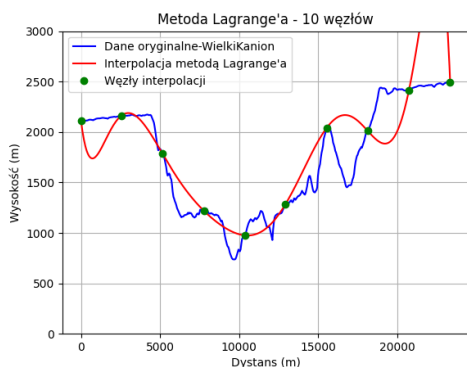
Analiza interpolacji wielomianowej

Pierwszą trasą, dla której wyznaczona została aproksymacja interpolacyjna była trasa na **Mount Everest**.



Powyższe wykresy przedstawiają aproksymację interpolacyjną obliczoną za pomocą metody Lagrange'a. Za każdym razem zwiększana była liczba węzłów interpolacji. Analizowana trasa charakteryzuje się jednym wyraźnym szczytem - a zarówno podejście, jak i zejście przebiegają stosunkowo łagodnie i równomiernie. Przy małej liczbie węzłów, widoczne są różnice pomiędzy aproksymacją, a rzeczywistym przebiegiem funkcji. Jednak, zwiększenie liczby węzłów również nie przyniosło zadowalających rezultatów, ponieważ skutkowało gwałtownym nasileniem błędu Rungego, który objawia się bardzo mocnymi oscylacjami na granicach przedziału.

Druga trasa przedstawiała **Wielki Kanion Kolorado**.



Druga trasa, w odróżnieniu od pierwszej, ma znacznie więcej stromych przewyższeń i spadków, co nadaje jej zróżnicowany charakter. Trasa przyjmuje wklęsły kształt w ujęciu całościowym. Podobnie jak w przypadku pierwszej trasy, aproksymacja z wykorzystaniem mniejszej ilości węzłów nie była zadowalająca. Po zwiększeniu tej liczby efekt poprawiał się w środku przedziału, lecz wiązało się to z nasileniem błędu Rungego.

Wykresy pokazują, że charakter interpolowanej funkcji może wpływać na jakość aproksymacji. W przypadku drugiej, bardziej zróżnicowanej trasy, można zauważyć większe niedokładności.

Powyższe wykresy pozwalają zauważyć pewną zależność - im więcej węzłów, tym większy błąd Rungego, który objawia się bardzo dużymi błędami na krańcach przedziału. Już przy dziesięciu węzłach błędy w początkowych i końcowych etapach trasy są na tyle duże, że w żadnym stopniu nie mogą pełnić przybliżenia funkcji. Wraz ze wzrostem liczby węzłów można zauważyć, że jakość aproksymacji w środkowym etapie trasy polepsza się, lecz uzyskany błąd Rungego prowadzi do zawężenia obszaru, w którym aproksymacja spełnia swoje zadanie.

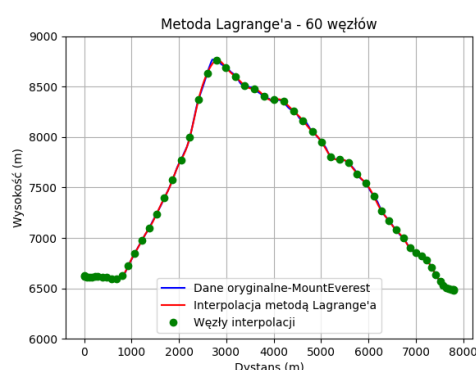
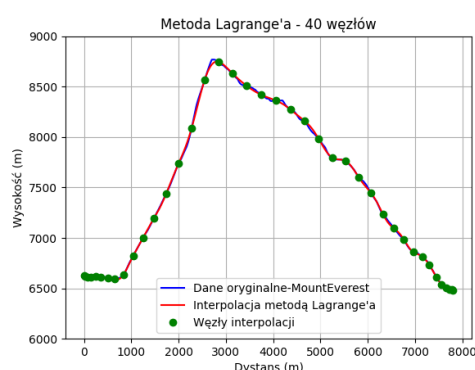
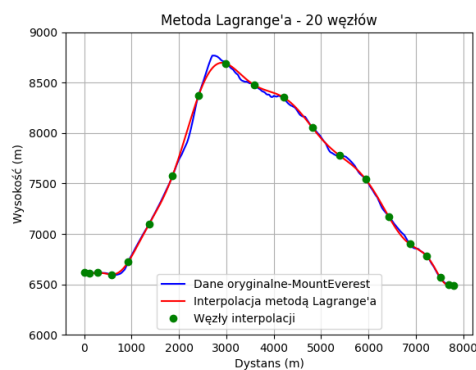
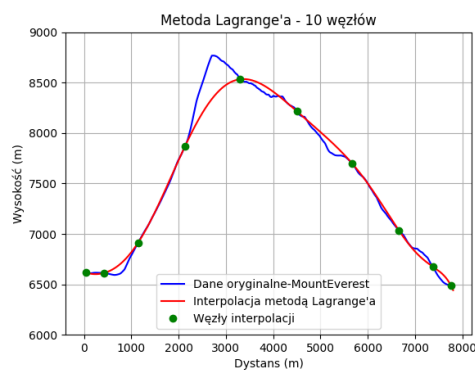
Takie efekty zostały uzyskane, gdy obliczenia były wykonywane korzystając z **równomiernie** rozmieszczonymi węzłami interpolacji. Mając na uwadze ten fakt, została przeprowadzona dodatkowa analiza tej metody, w której badany był wpływ rozmieszczenia węzłów na otrzymany wynik.

Interpolacja wielomianowa z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa

Węzły Czebyszewa to specjalnie dobrane punkty, które mają niwelować błąd interpolacji wielomianowej. Węzły są dobierane na przedziale $[-1, 1]$ według następującego wzoru:

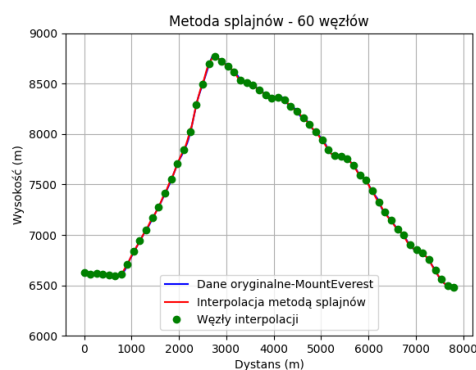
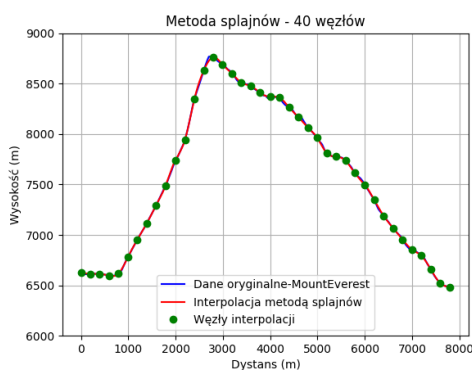
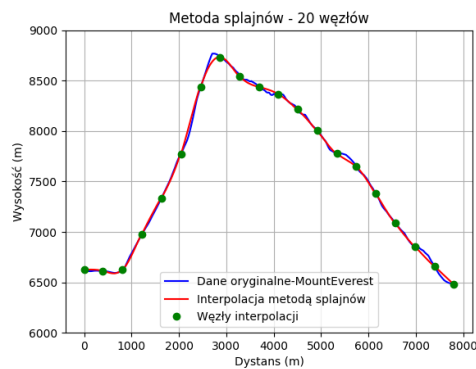
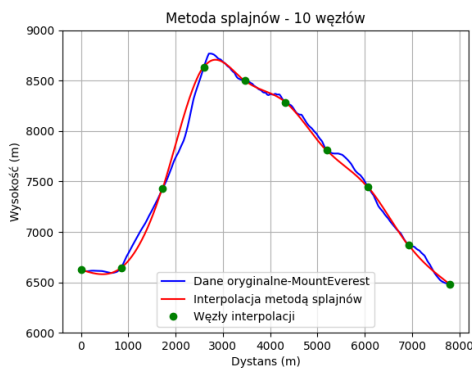
$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), k = 0, 1, \dots, n$$

Dla tak rozmieszczonych węzłów zostały wygenerowane wykresy:



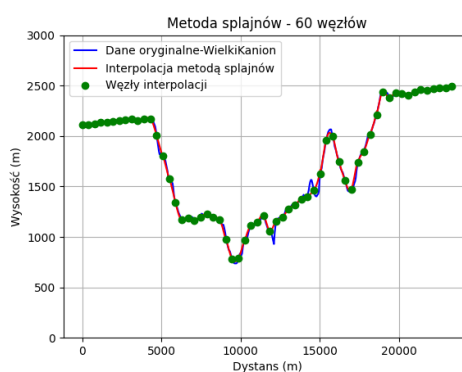
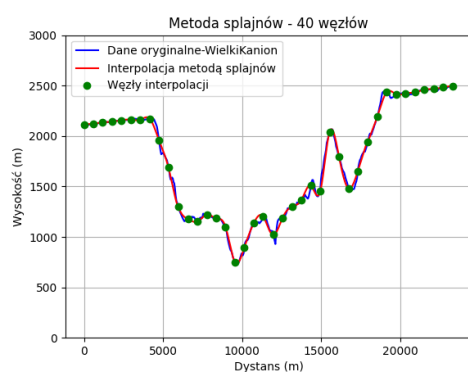
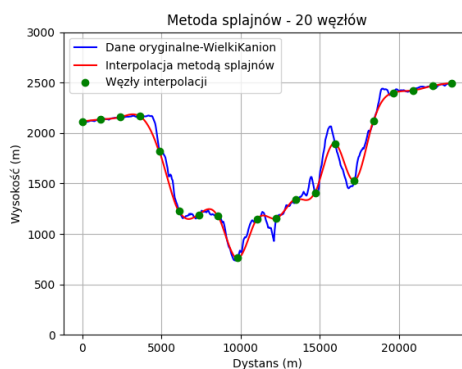
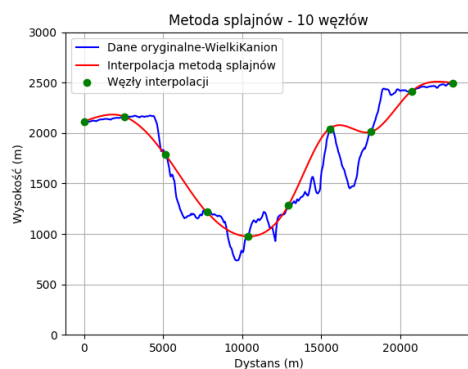
Jak widać na powyższych wykresach, zastosowanie węzłów Czebyszewa, które są zagęszczone na krańcach przedziału, wpłynęło pozytywnie na jakość otrzymanej aproksymacji. Widoczne w przypadku równomiernego rozmieszczenia węzłów oscylacje na brzegach zostały zredukowane.

Za pomocą metody funkcji sklejanych trzeciego stopnia zostały obliczone aproksymacje interpolacyjne dla wcześniej wspomnianych tras.



Wykresy pozwalają stwierdzić, że nawet przy małej liczbie węzłów interpolacji, zastosowana metoda prowadzi do zadowalających wyników. Przebieg otrzymanej aproksymacji w dobrym stopniu oddaje charakter danych oryginalnych. Należy jednak pamiętać, że analizowana trasa ma regularny charakter, co sprzyja obliczeniom.

Analiza metody funkcji sklejanych została również przeprowadzona na podstawie trasy **Wielki Kanion Kolorado**.



W tym przypadku wykorzystanie metody funkcji sklejanych również skutkowało otrzymaniem znacznie lepszego wyniku, niż w przypadku metody Lagrange'a. Wysoko zróżnicowany charakter drugiej trasy nie wpłynął znacząco na wynik aproksymacji, lecz przy małej liczbie węzłów są widocznie nieznaczne różnice pomiędzy danymi oryginalnymi.

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia, choć trudniejsza w implementacji, prowadziła do otrzymania wysoce zadowalających wyników. Brak błędu Rungego przy poprawnie wyznaczonej aproksymacji świadczy o skuteczności badanej metody.

Podsumowując

Przeprowadzone na potrzeby projektu analizy trzech metod interpolacji prowadzą do następujących wniosków. Klasyczna metoda interpolacji wielomianowej Lagrange'a z wykorzystaniem równomiernie rozmieszczonych węzłów interpolacji, mimo bardzo prostej implementacji, nie przyniosła zamierzonych rezultatów. Otrzymana aproksymacja była obciążona dużym błędem Rungego, a zmniejszenie liczby węzłów prowadziło do zmniejszenia jej dokładności. Jednak, znacznym ulepszeniem tej metody okazało się być zastosowanie węzłów Czebyszewa, które były bardziej zagęszczone na krańcach przedziału, co skutecznie zniwelowało wspomniany błąd i znacznie polepszyło jakość interpolacji. Ostatnią badaną metodą było wykorzystanie funkcji sklepanych trzeciego stopnia, która prowadziła do bardzo zadowalającego rezultatu. Przebieg otrzymanej interpolacji dobrze oddawał charakter trasy i nie posiadał znacznych błędów. Badane trasy były bardzo zróżnicowane. Jedną z nich była wysoka góra o równomiernym przebiegu, a druga - głębokim ogromnym przetokiem rzeki o licznych wzniesieniach i dolinach. Uzyskane wyniki pozwalają na stwierdzenie, że charakter interpolowanej trasy ma duże znaczenie i może wpływać zarówno pozytywnie, jak i negatywnie na rezultaty. Wybór odpowiedniej metody interpolacji w oparciu o informacje o dostępnych danych ma kluczowy wpływ na wyniki.