SPRAWOZDANIE
Z SZÓSTEGO ZADANIA NUMERYCZNEGO
MACIEJ WÓJCIK

Spis treści:

1. Polecenie zadania

(zadanie numeryczne NUM 6) Zadana jest macierz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0.2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0.1 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Stosując algorytm QR znajdź wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{M}$.

(b) Stosując metodę potęgową znajdź największą co do modułu wartość własną macierzy $\mathbf{B}$ z zadania 9. oraz odpowiadający jej wektor własny.

Wyniki sprawdź używając wybranego pakietu algebry komputerowej.

Dla ambitnych: w pkt. (a) wyznacz również wektory własne.

Zadanie polega na obliczeniu wartości własnych macierzy M przy zastosowaniu algorytmu QR i znalezieniu największej co do modułu wartości własnej macierzy B przy zastosowaniu metody potęgowej. Dodatkowo w podpunkcie b musimy jeszcze wyznaczyć odpowiadający wektor do danej wartości własnej.

2. Instrukcja uruchomienia

Aby uruchomić program należy skorzystać z polecenia:

make run

Lub

python3 NUM6.py

3. Metoda potęgowa

Żeby skorzystać z metody potęgowej macierz musi być macierzą symetryczną. Wiadomo że macierz taka jest diagonalizowalna, ma rzeczywiste wartości własne, a jej unormowane wektory własne tworzą bazę ortonormalną.

Korzystając ze wzoru:

$$A^k y = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \lambda_i^k e_i$$

Widzimy, że dla dostatecznie dużych k wyraz zawierający λ_1^k będzie dominował w sumie po prawej stronie, a zatem prawa strona dla dostatecznie dużych k będzie dążyć do największej wartości własnej.

A zatem iteracja:

$$Ay_k = z_k$$

$$y_{k+1} = \frac{z_k}{||z_k||}, \qquad \text{gdzie } ||y_1|| = 1$$

Zbiega się, przy przyjętych założeniach, do unormowanego wektora własnego macierzy A, odpowiadającego największej wartości własnej.

Gdy powyższa iteracja zbiegnie się do punktu stałego, wartość własną obliczamy jako:

$$\lambda = ||z_k||$$

4. Wyniki

Wartości własne macierzy M (podpunkt a):

$$\lambda_1 = 7.230992309092636$$
$$\lambda_2 = 5.900157268642298$$
$$\lambda_3 = 4.815806590699524$$
$$\lambda_4 = 1.053043831565536$$

Największa co do modułu wartość własna macierzy B (podpunkt b):

$$\lambda_{max} = 10.015982847664949$$

Odpowiadający wektor:

$$y = \begin{bmatrix} 0.55829690 \\ 0.77620837 \\ 0.28678781 \\ 0.05964810 \end{bmatrix}$$

5. Wnioski

Wartości własne wyliczone metodą QR zgadzają się z wartościami własnymi wyliczonymi przez funkcję biblioteki NumPy: np.linalg.eig.

Zaimplementowane metody ciężko ze sobą porównać ze względu na to, że wykonują one inne zadanie. Rozkład QR służy do znalezienia wszystkich wartości własnych, a metoda potęgowa wyznacza największą co do modułu wartość własną i odpowiadający jej wektor.