

SPRAWOZDANIE Z DRUGIEGO ZADANIA NUMERYCZNEGO MACIEJ WÓJCIK

Spis treści:

1. Polecenie zadania
2. Instrukcja uruchomienia
3. Uwarunkowanie układów
4. Współczynnik uwarunkowania
5. Sposób rozwiązywania układu równań
6. Wyniki
7. Wnioski

1. Polecenie zadania

12. (Zadanie numeryczne NUM2) Zadane są macierze

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2.34332898 & -0.11253278 & -0.01485349 & 0.33316649 & 0.71319625 \\ -0.11253278 & 1.67773628 & -0.32678856 & -0.31118836 & -0.43342631 \\ -0.01485349 & -0.32678856 & 2.66011353 & 0.85462464 & 0.16698798 \\ 0.33316649 & -0.31118836 & 0.85462464 & 1.54788582 & 0.32269197 \\ 0.71319625 & -0.43342631 & 0.16698798 & 0.32269197 & 3.27093538 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2.34065520 & -0.05353743 & 0.00237792 & 0.32944082 & 0.72776588 \\ -0.05353743 & 0.37604149 & -0.70698859 & -0.22898376 & -0.75489595 \\ 0.00237792 & -0.70698859 & 2.54906441 & 0.87863502 & 0.07309288 \\ 0.32944082 & -0.22898376 & 0.87863502 & 1.54269444 & 0.34299341 \\ 0.72776588 & -0.75489595 & 0.07309288 & 0.34299341 & 3.19154447 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy wektory

$$\mathbf{b} \equiv (3.55652063354463, -1.86337418741501, 5.84125684808554, -1.74587299057388, 0.84299677124244)^T$$

oraz $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{b} + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$. Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania $\mathbf{A}_i \mathbf{y}_i = \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{A}_i \mathbf{y}'_i = \mathbf{b}'$ dla $i = 1, 2$. Wyznacz $\Delta_i \equiv \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}'_i\|_2$ oraz zinterpretuj różnicę wartości Δ_1 i Δ_2 .

W zadaniu musimy rozwiązać zadane układy równań i wyznaczyć normę euklidesową dla obydwóch rozwiązań.

Zadanie ma na celu ukazanie wrażliwości układów równań na zaburzenia danych.

2. Instrukcja uruchomienia

Aby uruchomić program należy skorzystać z polecenia:

make run

3. Uwarunkowanie układów

Układy równań możemy podzielić na dwa typy:

- Dobrze uwarunkowany:

Układ równań który jest dobrze uwarunkowany charakteryzuje się tym, że niewielkie zmiany danych w tym układzie, mają nie wielki wpływ na zmiany rozwiązania.

- Źle uwarunkowany:

Układ taki w przeciwieństwie do poprzedniego charakteryzuje się tym, że niewielka zmiana danych w układzie ma znaczący wpływ na wynik.

4. Współczynnik uwarunkowania

Miarą która pozwoli nam stwierdzić, jak układ jest uwarunkowany jest współczynnik uwarunkowania. Mówi on nam o tym, jak bardzo błąd względny wyniku obliczeń „przekracza” błąd względny samej różnicy przybliżenia i wartości dokładnej.

Współczynnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wynosi

$$\kappa = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Dla macierzy symetrycznych, rzeczywistych sprowadza się to do

$$\kappa = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|},$$

gdzie λ_i oznaczają wartości własne macierzy.

Im większy jest współczynnik uwarunkowania tym układ równań jest gorzej uwarunkowany i bardziej podatny na zaburzenia danych.

W przypadku naszego programu możemy skorzystać z wbudowanej w NumPy funkcji do liczenia współczynnika uwarunkowania.

5. Sposób rozwiązywania układu równań

Do rozwiązania układu równań napisałem algorytm działający na zasadzie **Twierdzenia Cramera**.

6. Wyniki

Rozwiązanie równania $A_1 y_1 = b$

y_1 : [2.03163246 -1.03652186 3.22032664 -3.52251753 -0.13949510]

Rozwiązanie równania $A_1 y_1' = b'$

y_1' : [2.03163717 -1.03652190 3.22032706 -3.52251858 -0.13949605]

Rozwiązanie równania $A_2 y_2 = b$

y_2 : [1.99998044 -0.33814055 3.42431038 -3.56662167 0.03297880]

Rozwiązanie równania $A_2 y_2' = b'$

y_2' : [3.42873474 -31.86258866 -5.78337449 -1.57579144 -7.75237480]

Norma 1: 0.00000493458714

Norma 2: 33.84063776623579

Współczynnik uwarunkowania macierzy A_1 : 4.000000025064918

Współczynnik uwarunkowania macierzy A_2 : 320612863.3625027

7. Wnioski

Norma wektora A_1 znacząco różni się od normy wektora A_2 , pomimo tego, że elementy wektorów niewiele różnią się od siebie. Bardzo dobrze ujrzymy to, gdy spojrzymy na wartość współczynników uwarunkowania macierzy.

Wartość wsp. uwarunkowania macierzy A_1 jest dużo mniejsza niż wartość wsp. macierzy A_2 , co oznacza, że macierz A_1 jest dużo mniej wrażliwa na zaburzenia danych od macierzy A_2 . Macierz A_1 jest dobrze uwarunkowana, a macierz A_2 jest źle uwarunkowana.