SPRAWOZDANIE
Z DRUGIEGO ZADANIA NUMERYCZNEGO
MACIEJ WÓJCIK

Spis treści:

1. Polecenie zadania
2. Instrukcja uruchomienia
3. Uwarunkowanie układów
4. Współczynnik uwarunkowania
5. Wyniki
6. Wnioski

1. Polecenie zadania

12. (**Zadanie numeryczne NUM2**) Zadane są macierze

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2.34332898 & -0.11253278 & -0.01485349 & 0.33316649 & 0.71319625 \\ -0.11253278 & 1.67773628 & -0.32678856 & -0.31118836 & -0.43342631 \\ -0.01485349 & -0.32678856 & 2.66011353 & 0.85462464 & 0.16698798 \\ 0.33316649 & -0.31118836 & 0.85462464 & 1.54788582 & 0.32269197 \\ 0.71319625 & -0.43342631 & 0.16698798 & 0.32269197 & 3.27093538 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2.34065520 & -0.05353743 & 0.00237792 & 0.32944082 & 0.72776588 \\ -0.05353743 & 0.37604149 & -0.70698859 & -0.22898376 & -0.75489595 \\ 0.00237792 & -0.70698859 & 2.54906441 & 0.87863502 & 0.07309288 \\ 0.32944082 & -0.22898376 & 0.87863502 & 1.54269444 & 0.34299341 \\ 0.72776588 & -0.75489595 & 0.07309288 & 0.34299341 & 3.19154447 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy wektory

$$\mathbf{b} \equiv (3.55652063354463, -1.86337418741501, 5.84125684808554, -1.74587299057388, 0.84299677124244)^T$$

oraz $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{b} + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$. Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania $\mathbf{A}_i\mathbf{y}_i = \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{A}_i\mathbf{y}'_i = \mathbf{b}'$ dla $i = 1, 2$. Wyznacz $\Delta_i \equiv ||\mathbf{y}_i - \mathbf{y}'_i||_2$ oraz zinterpretuj różnicę wartości Δ_1 i Δ_2.

W zadaniu musimy rozwiązać zadane układy równań i wyznaczyć normę euklidesową dla obydwóch rozwiązań.

Zadanie ma na celu ukazanie wrażliwości układów równań na zaburzenia danych.

2. Instrukcja uruchomienia

Aby uruchomić program należy skorzystać z polecenia:

make run

3. Uwarunkowanie układów

Układy równań możemy podzielić na dwa typy:

- Dobrze uwarunkowany:
Układ równań który jest dobrze uwarunkowany charakteryzuje się tym, że niewielkie zmiany danych w tym układzie, mają nie wielki wpływ na zmiany rozwiązania.

- Źle uwarunkowany:
Układ taki w przeciwieństwie do poprzedniego charakteryzuje się tym, że niewielka zmiana danych w układzie ma znaczący wpływ na wynik.

4. Współczynnik uwarunkowania

Miarą która pozwoli nam stwierdzić, jak układ jest uwarunkowany jest współczynnik uwarunkowania. Mówi on nam o tym, jak bardzo błąd względny wyniku obliczeń „przekracza" błąd względny samej różnicy przybliżenia i wartości dokładnej.

Przez to, że w zadaniu mamy dwie macierze symetryczne, współczynnik ten wyznaczymy za pomocą wzoru:

$$\kappa = \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$$

Im większy jest współczynnik uwarunkowania tym układ równań jest gorzej uwarunkowany i bardziej podatny na zaburzenia danych.

W przypadku naszego programu możemy skorzystać z wbudowanej w NumPy funkcji do liczenia współczynnika uwarunkowania.

5. Wyniki

Rozwiązanie równania A1y1 = b
y1: [2.03163246, -1.03652186, 3.22032664, -3.52251753, -0.13949510]

Rozwiązanie równania A1y1’ = b’
y1': [2.03163717, -1.03652190, 3.22032706, -3.52251858, -0.13949605]

Rozwiązanie równania A2y2 = b
y2: [1.99998044, -0.33814055, 3.42431038, -3.56662167, 0.03297880]

Rozwiązanie równania A2y2’ = b’
y2': [3.42873474, -31.86258866, -5.78337449, -1.57579144, -7.75237480]

Norma 1: 0.00000493458714

Norma 2: 33.84063773584277

Współczynnik uwarunkowania macierzy A1: 4.000000025064918

Współczynnik uwarunkowania macierzy A2: 320612863.3625027

6. Wnioski

Norma wektora A1 znacząco różni się od normy wektora A2, pomimo tego, że elementy wektorów niewiele różnią się od siebie. Bardzo dobrze ujrzymy to, gdy spojrzymy na wartość współczynników uwarunkowania macierzy.

Wartość wsp. uwarunkowania macierzy A1 jest dużo mniejsza niż wartość wsp. macierzy A2, co oznacza, że macierz A1 jest dużo mniej wrażliwa na zaburzenia danych od macierzy A2. Macierz A1 jest dobrze uwarunkowana, a macierz A2 jest źle uwarunkowana.