۲_

با توجه به معماری شبکه و فرمول های forward، ماتریس وزن هایی که در نظر گرفته است، برای مثال W^1، هر درایه W_{ij}^{m} آن، وزنی است که از نورون jام لایه $m-1$ به نورون iام لایه mام متصل می‌شود و نیازی به اعمال transpose هنگام ضرب، نیست.

(۱)

$$\frac{\partial f}{\partial w_{ij}^{[2]}} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial w_{ij}^{[2]}} = ?$$

$\mathcal{L}_i$ ← loss نورون iام لایه آخر

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial a_i^{[2]}} \frac{\partial a_i^{[2]}}{\partial n_i^{[2]}} \frac{\partial z_i^{[2]}}{\partial w_{ij}^{[2]}} = \overbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial a_i^{[2]}} . f'^{[2]}(n_i^{[2]})}^{\delta_i^{[2]}} . a_j^{[1]}$$

← وابسته به تابع هزینه انتخابی

وابسته به تابع فعال سازی انتخابی

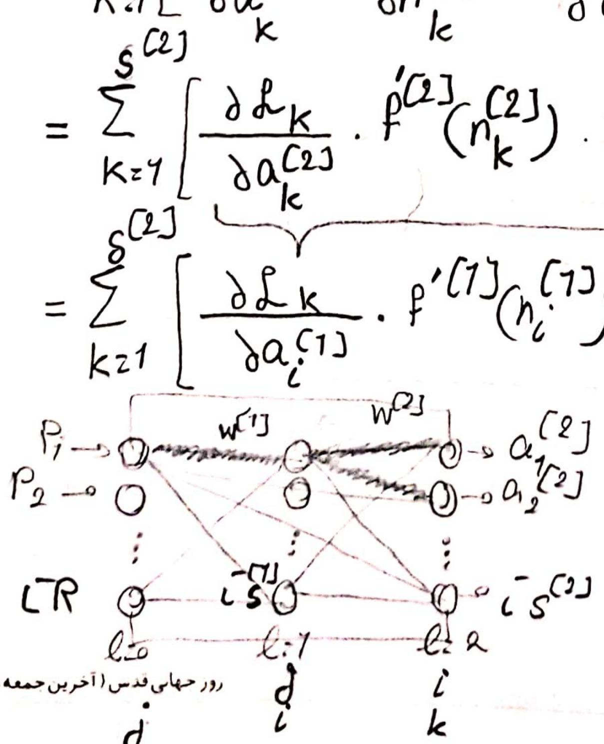
$$\frac{\partial f}{\partial w_{ij}^{[1]}} = \sum_{k=1}^{S^{[2]}} \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial w_{ij}^{[1]}}$$

← به تعداد نورون های لایه آخر ($S^{[2]}$) مسیر وجود دارد.

$$= \sum_{k=1}^{S^{[2]}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial a_k^{[2]}} . \frac{\partial a_k^{[2]}}{\partial n_k^{[2]}} \frac{\partial n_k^{[2]}}{\partial a_i^{[1]}} \frac{\partial a_i^{[1]}}{\partial n_i^{[1]}} \frac{\partial n_i^{[1]}}{\partial w_{ij}^{[1]}} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{S^{[2]}} \left[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial a_k^{[2]}} . f'^{[2]}(n_k^{[2]}) . w_{ki}^{[2]}} . f'^{[1]}(n_i^{[1]}) . \underset{\text{ورودی} \leftarrow}{p_j} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{S^{[2]}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial a_i^{[1]}} . f'^{[1]}(n_i^{[1]}) . a_j^{[0]} \right] = \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{S^{[2]}} \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial a_i^{[1]}}} \Big) . f'^{[1]}(n_i^{[1]}) a_j^{[0]}$$



$$= \delta_i^{[1]} . f'^{[1]}(n_i^{[1]}) a_j^{[0]}$$

$$\Rightarrow \delta_i^{[1]} = \sum_{k=1}^{S^{[2]}} \left[\delta_k^{[2]} . f'^{[2]}(n_k^{[2]}) . w_{ki}^{[2]} \right]$$

به طور کلی داریم:

$$\Rightarrow \frac{\partial loss}{\partial w_{ij}^{m}} = \delta_i^{[m]} \cdot f^{[m]'}(n_i^{[m]}) \cdot a_j^{[m-1]}$$

$$\delta_i^{[m]} = \sum_{k=1}^{S^{[m+1]}} \left[\delta_k^{[m+1]} \cdot f'^{[m+1]}(n_k^{[m+1]}) \cdot w_{ki}^{[m+1]} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial w_{ij}^{m}} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} \frac{\partial loss}{\partial w_{ij}^{m}}$$

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial b_i^{2}} \Rightarrow \frac{\partial L_i}{\partial a_i^{[2]}} \frac{\partial a_i^{[2]}}{\partial n_i^{[2]}} \frac{\partial n_i^{[2]}}{\partial b_i^{[2]}} = 1 \quad = \delta_i^{[2]} \cdot f'^{[2]}(n_i^{[2]})$$

$$\frac{\partial loss}{\partial b_i^{1}} = \sum_{k=1}^{S^2} \frac{\partial L_k}{\partial a_i^{[1]}} \frac{\partial a_i^{[1]}}{\partial n_i^{[1]}} \frac{\partial n_i^{[1]}}{\partial b_i^{[1]}} = 1$$

به نظر می رسد به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{\partial loss}{\partial b_i^{m}} = \delta_i^{[m]} \cdot f'^{[m]}(n_i^{[m]}) \cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial b_i^{2}} = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} \frac{\partial loss}{\partial n_i^{2}}$$

$\delta_i^{[m]} \Rightarrow$ قبلاً محاسبه شد

(3)

$$\Rightarrow \frac{\partial n_i^{2}}{\partial w_{ij}^{2,1}} = \sum_{j=1}^{S^1} p_j$$

$$n_i^{[2]} = \left(\sum_{k=1}^{S^{[2]}} w_{ik}^{[2]} a_k^{[2]}\right) + \left(\sum_{j=1}^{S^{[1]}} w_{ij}^{[2,1]} p_j\right) + b_i^{[2]}$$

$$W^1 \leftarrow W^1 - \eta \nabla C$$

$$W^2 \leftarrow W^2 - \eta \nabla C$$

$$W^{2,1} \leftarrow W^{2,1} - \eta \nabla C$$

$$W^{[1]} = \begin{bmatrix} w^{[1]}_{11} & w^{[1]}_{12} & \cdots & w^{[1]}_{1R} \\ w^{[1]}_{21} & w^{[1]}_{22} & \cdots & w^{[1]}_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{[1]}_{s^1 1} & w^{[1]}_{s^1 2} & & w^{[1]}_{s^1 R} \end{bmatrix} - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial w^{[1]}_{11}} & \cdots & \frac{\partial C}{\partial w^{[1]}_{1R}} \\ & & \\ \frac{\partial C}{\partial w^{[1]}_{s^1 1}} & \cdots & \frac{\partial C}{\partial w^{[1]}_{s^1 R}} \end{bmatrix}$$

C همان cost function است که مجموع تمام loss ها را در نظر می‌گیرد.

به طور مشابه باقی وزن‌ها نیز اصلاح می‌شوند. برای biases نیز داریم:

$$b^{[1]} = \begin{bmatrix} b^{[1]}_1 \\ b^{[1]}_2 \\ \vdots \\ b^{[1]}_{s^1} \end{bmatrix} - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial b^{[1]}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial C}{\partial b^{[1]}_{s^1}} \end{bmatrix}$$