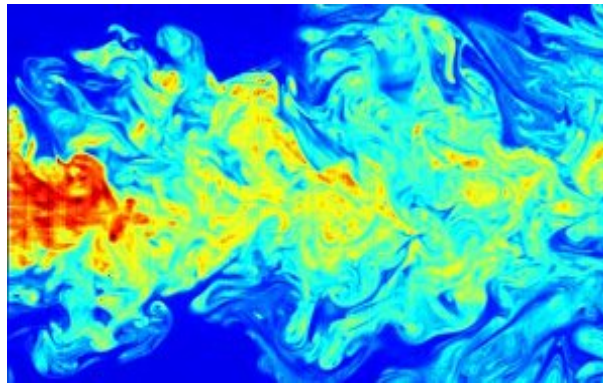


**Rapport du T.P. :**  
**5A. Mathématiques appliquées et Modélisation 2017-2018 (option C.O. et B.D.P.)**

**Modélisation numérique :**  
**Module Mécanique des fluides :**



Travail effectué par : ABOUADALLAH Mohamed Anwar,

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et présentation de notre modèle :</b>	<b>2</b>
1.1	Généralités : . . . . .	2
1.2	Equations de Saint-Venant : . . . . .	2
1.2.1	Cas où la force de Coriolis est constante : . . . . .	2
1.2.2	Cas où la force de Coriolis n'est constante : . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Travail effectué :</b>	<b>4</b>
2.1	Présentation du logiciel utilisé : . . . . .	4
2.2	Présentation de la démarche suivie : . . . . .	4
2.2.1	Cas ou la force de coriolis est constante ou négligée : . . . . .	4
2.2.2	Prise en compte de la force de coriolis : . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Résultats obtenus :</b>	<b>8</b>
3.1	Cas où la force de Coriolis est constante : . . . . .	8
3.2	Cas où la force de Coriolis n'est constante : . . . . .	8
3.2.1	P2 -P1 . . . . .	9
3.2.2	P1nc -P1 . . . . .	10
3.2.3	P1-P1 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Conclusion et bibliographie :</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Bibliographie :</b>	<b>12</b>

# 1 Introduction et présentation de notre modèle :

## 1.1 Généralités :

La mécanique des fluides est un domaine de la physique consacré à l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz et plasmas) et des forces internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues. Durant notre T.P. nous allons nous focaliser sur les équations de Saint-Venant qui sont un cas spéciale des équations de Navier Stokes principalement utilisé pour la modélisation des écoulements quasi-unidimensionnels, par exemple ceux dans un canal ou un cours d'eau.

## 1.2 Equations de Saint-Venant :

### Hypothèses utilisées

- ♣ Nous considérons un modèle bi-dimensionnel
- ♣ On ne prend en compte que les mouvements horizontaux.
- ♣ Le fluide est incompressible : C'est à dire :  $\rho = cst$
- ♣ On est en état d'équilibre hydrostatique : C'est à dire :  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$

Ainsi, comme notre modèle est issu des équations de Naviers Stokes, on va appliquer nos hypothèses dessus, intégrer certaines équation puis les linéariser ce qui va nous donner :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} - f v' + g \frac{\partial \eta'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f u' + g \frac{\partial \eta'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + H \nabla \cdot u' &= 0\end{aligned}$$

Ce qui peut s'exprimer de cette forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \nabla \eta + f k u = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \nabla u = 0 \end{cases}$$

### 1.2.1 Cas où la force de Coriolis est constante :

Si la force de coriolis est constante, alors on utilisera un mode de Fourier continue<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} u = \hat{u} \exp^{i(\omega t)} \exp^{i(kx+ly)} \\ v = \hat{v} \exp^{i(\omega t)} \exp^{i(kx+ly)} \\ \eta = \hat{\eta} \exp^{i(\omega t)} \exp^{i(kx+ly)} \end{cases}$$

Puis on va injecter nos modes continues dans nos équations, cela nous donnera la matrice suivante :

---

1.  $\omega$  : La fréquence de l'onde.

$\hat{x}$  : L'amplitude de x.

$k$  : Le nombre d'onde.

$$\begin{pmatrix} iw & -f & igk \\ f & iw & igl \\ i hk & i hl & iw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi notre dispersion sera :

$$\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2)$$

$\omega^2 = \text{inertie pure} + \text{gravité}$

### 1.2.2 Cas où la force de Coriolis n'est constante :

#### Approximation quasi-géostrophique :

**Définition 1** L'approximation quasi-géostrophique réfère une approximation du mouvement atmosphérique ou océanique lorsque la force de Coriolis et celle du gradient de pression atmosphérique horizontale sont seulement presque en équilibre.

Ainsi notre système devient :

$$\begin{cases} \tilde{u} + g \nabla \tilde{\eta} + f k \tilde{u} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + g \nabla \tilde{u} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{u} = \frac{g}{f_0} \text{rot} \tilde{\eta}$$

$$\text{rot} \tilde{\eta} = (-\tilde{\eta}_y, +\tilde{\eta}_x)$$

On injecte  $\tilde{u}$  dans nos équation et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + \beta_y) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + \beta_y) + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \end{cases}$$

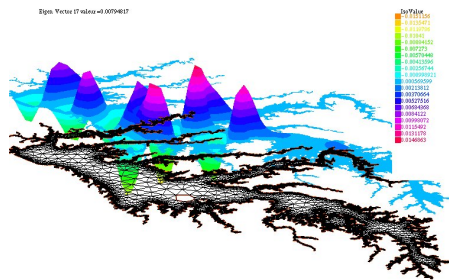
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (a + by) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - (a + by) + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \end{cases}$$

## 2 Travail effectué :

### 2.1 Présentation du logiciel utilisé :

**FreeFem++ [1]** est un logiciel Open Source permettant de résoudre numériquement des équations différentielles par éléments finis<sup>1</sup>. Il possède son propre langage de script [2], inspiré du C++, pour décrire le type de problème différentiel, les équations aux dérivées partielles et les conditions initiales et aux limites. Il peut ainsi résoudre des problèmes dits multi-physiques, présentant des non-linéarités, en bi- comme en tri-dimensionnel, sur des maillages pouvant aller au million de nœuds (ordinateur de calcul standard) jusqu'à quelques milliards de nœuds (gros système multi-processeurs dédié au calcul).



### 2.2 Présentation de la démarche suivie :

#### 2.2.1 Cas où la force de coriolis est constante ou négligée :

2

Données utilisées :

Notation	Valeur
$g$	9.81
$\Delta t$	20
$h$	2000
$\theta$	0.5
$l$	$5 \cdot 10^5$
$\Delta i$	$(\Delta t \sqrt{(g * h)}) / l$

Dans ce t.p., nous allons effectuer la même démarche simple mais, très efficace. Dans la suite de cette sous-sous-section, nous allons mettre les étapes de notre démarche ainsi que les codes utilisés :

#### ♣ Construction des maillages :

On commence par définir nos bords tel cela :

```

1  border a(t=0,2*pi) {x=cos(t); y=sin(t);}
    mesh Th=buildmesh (a(50));
3  Th=adaptmesh (Th,1./40., IsMetric=1,nbv=10000);

```

2. Dans cette partie nous allons négliger la force de coriolis.

```

5 Th=adaptmesh(Th,1./40.,IsMetric=1,nbvx=10000);

```

---

### Listing 1 – Définition des maillages

Ici on définit des maillages circulaires pour modéliser la situation où quelqu'un se trouve au Pôle Nord.

### ♣ Solution initiale :

```

uprec =0.0;
2 vprec =0.0;
pprec = exp(-64.*((x)^2 + (y)^2))/h ;

```

---

### Listing 2 – Solution initiale :

♣ **Construction du problème variationnel :** Cette partie se fera en deux sous parties, la première consistera à définir les espaces et l'élément fini qu'on va mobiliser tandis la seconde permettra d'effectuer la formulation variationnelle de notre problème.

### ✓ Définition des espaces :

```

1 fespace Uh(Th, P1);
  Uh u, v, uu, vv, pp, p, pprec, deltat, deltav, uvisu, uprecprec,
  vprecprec, uprec, vprec ;
3 Uh du, dv; // inconnues : delta_u / delta_v

```

---

### Listing 3 – Définition de nos espaces :

### ✓ Formulation variationnelle :

```

1 problem RD(u,v,p, uu, vv, pp) = int2d(Th)(u*uu +theta*deltat*dx(p)*uu +v*
  vv+theta*deltat*dy(p)*vv + (p+deltat*theta*(dx(u)+dy(v)))*pp)
+ int2d(Th)(-uprec*uu+(1-theta)*deltat*dx(pprec)*uu-vprec*vv+(1-theta)*
  deltat*dy(pprec)*vv + (-pprec+deltat*(1-theta)*(dx(uprec)+dy(vprec)))*
  pp);

```

---

### Listing 4 – Formulation variationnelle :

Maintenant, il ne reste plus qu'à boucler sur le temps afin de trouver notre solution.

### 2.2.2 Prise en compte de la force de coriolis :

#### Données utilisées :

Notation	Valeur
$\Omega$	$7.2921159 \times 10^{-5}$
R	$6.371 \times 10^6$
g	9.81
H	1.6309888
E	$\frac{\sqrt{(2R\omega)}}{\sqrt{gH}}$
U	$\sqrt{gH}$
T	$\frac{E}{2\Omega}$
$\theta$	0.5
dt	$\frac{900.0}{T}$
$\phi_0$	$\frac{28.59983887\pi}{180.0}$
a	$E \sin(\phi_0)$
b	0
f	$a+b*y$
A	0.95
B	$1.3 \times 10^5$

Ici on va suivre la même démarche de résolution, mais on va changer notre jeu de données (à cause du fait que la force de coriolis ne soit pas constante) et de plus on va faire des simulations selon trois éléments finis : Dans un premier temps nous allons utiliser des éléments de type  $P_1$  ensuite nous allons utiliser éléments de type  $P_{1nc}$  puis  $P_2$

- Polynôme de degré 1  $P_1$  : élément linéaire c'est à dire contiennent deux nœuds par arête.
- Polynôme de degré 1  $P_{1nc}$  : élément à deux nœuds par arête non conforme.
- Polynôme de degré 2  $P_2$  : élément parabolique c'est à dire contiennent trois nœuds par arête.

Ensuite on commence par construire nos maillages et on choisi un maillage rectangulaire.

#### ♣ Construction des maillages :

On commence par définir nos bords tel cela :

```

1  mesh Th = square(5,3,[4.7845*(x-0.5),2.8707*(y-0.5)]);
   Th = adaptmesh(Th,1./26.,IsMetric = 1, nbvx = 100000);
3  Th = adaptmesh(Th,1./26.,IsMetric = 1, nbvx = 100000);
```

Listing 5 – Définition des maillages

Ici on définit des maillages circulaires pour modéliser la situation où quelqu'un se trouve au Pôle Nord.

#### ♣ Solution initiale :

```

1  Uh,u,v,uold,vold,uu,vv; // u,v pour la vitesse
   ETah,p,pold,pp; // eta.p pour la pression
3  pold = (A/H)*exp(-(R/(E*B))^2*(x^2 + y^2));
   uold = ((A*R)/(omega*B*B))*sqrt(g/H)*(y/(a+b*y))*exp(-(R/(E*B))^2*(x^2 + y^2));
```

```

5      vold = -((A*R)/(omega*B*B))* sqrt(g/H) * (x/(a+b*y)) * exp(-(R/(E*B))^2 *
      (x^2 + y^2));

```

```

7

```

---

Listing 6 – Solution initiale :

### ♣ Construction du problème variationnel :

#### ✓ Définition des espaces :

```

      fespace Uh(Th, P2); // P2 vitesse
2      //fespace Uh(Th, P1); // P1 pour vitesse
      //fespace Uh(Th, P1nc); // P1-nc pour vitesse
4      fespace ETAh(Th, P1); // P1 pression

```

```

6

```

---

Listing 7 – Définition de nos espaces :

#### ✓ Formulation variationnelle :

```

1      problem Rossby(u,v,p,uu,vv,pp, init = 1, solver = LU) =
      int2d(Th)( ( (u/dt) - (a+b*y)*theta*v + theta*dx(p) ) * uu +
3      ( (v/dt) + (a+b*y)*theta*u + theta*dy(p) ) * vv +
      ( (p/dt) + dx(u)*theta + dy(v)*theta ) * pp
5      )
      +
7      int2d(Th)( ( (-uold/dt) - (a+b*y)*(1-theta)*vold + (1-theta)*dx(
      pold) ) * uu +
      ( (-vold/dt) + (a+b*y)*(1-theta)*uold + (1-theta)*dy(pold) ) * vv
+
9      ( (-pold/dt) + dx(uold)*(1-theta) + dy(vold)*(1-theta) ) * pp
      )
11     + on(1, v=0.0)
      + on(2, u=0.0)
13     + on(3, v=0.0)
      + on(4, u=0.0);
15

```

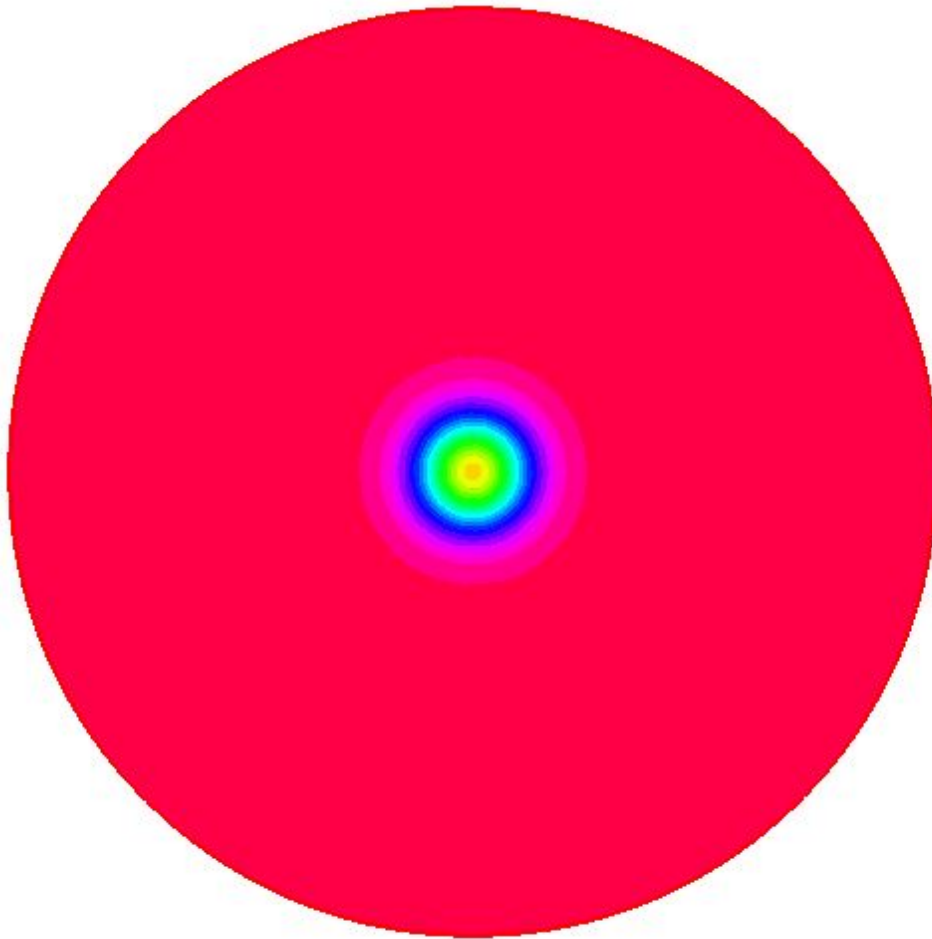
---

Listing 8 – Définition de nos espaces :



### 3 Résultats obtenus :

#### 3.1 Cas où la force de Coriolis est constante :



---

#### Interprétation :

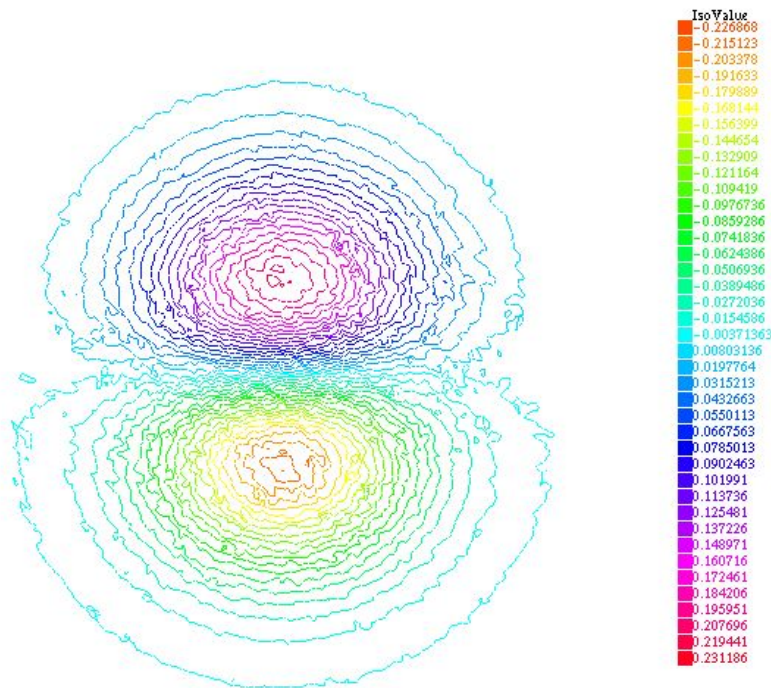
Dans ce premier cas on prend l'exemple d'une personne situé au Pôle Nord dans un repère fix, cela permet de négliger la force de coriolis, de plus notre solution semble parfaitement circulaire. Ensuite, on peut aussi voir que grâce aux données qu'on a utilisé le tourbillon va vers l'Ouest

#### 3.2 Cas où la force de Coriolis n'est constante :

À dessein de mieux expliquer dans cette étape, je dirais que tout d'abord, et contrairement à la première partie du T.p, nous allons prendre en compte la force de coriolis et nous allons faire une approximation géostrophique comme nous l'avons précisé auparavant.

Ensuite dans un premier temps, nous allons fixer notre élément  $P_1$  pour la pression et nous allons effectuer les trois tests suivants.

### 3.2.1 P2 -P1

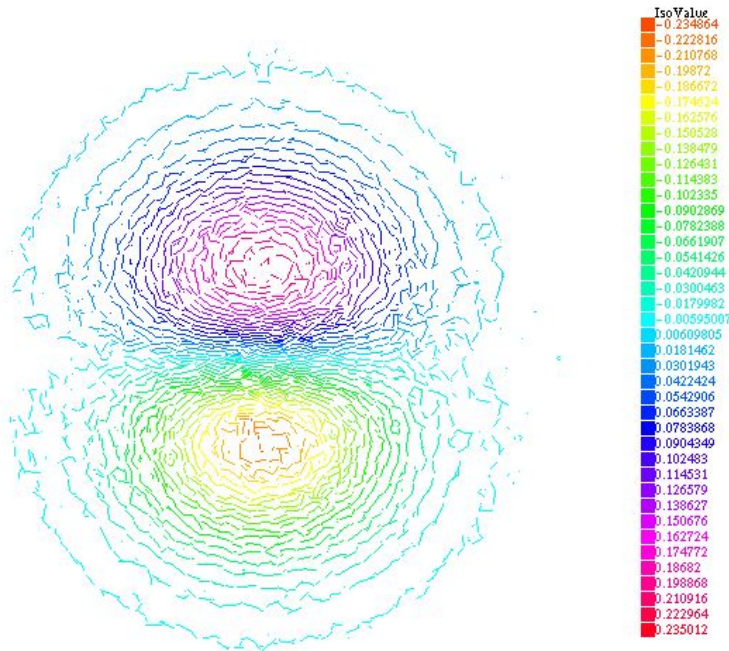


#### Interprétation :

Dans, les trois plot obtenus nous obtenons deux sortes de tourbillons en rotation autour d'eux mêmes. En regardant les isovaleurs, on peut remarquer les isovaleurs sont positives vers le nord(haut du graphique) et négative vers le sud. Tandis qu'elle sont presque nulle au milieu.

De plus, en ce qui concerne notre graphique, nous remarquons que nos oscillations sont uniformes et croissantes par à port au autres graphiques.

### 3.2.2 P1nc -P1

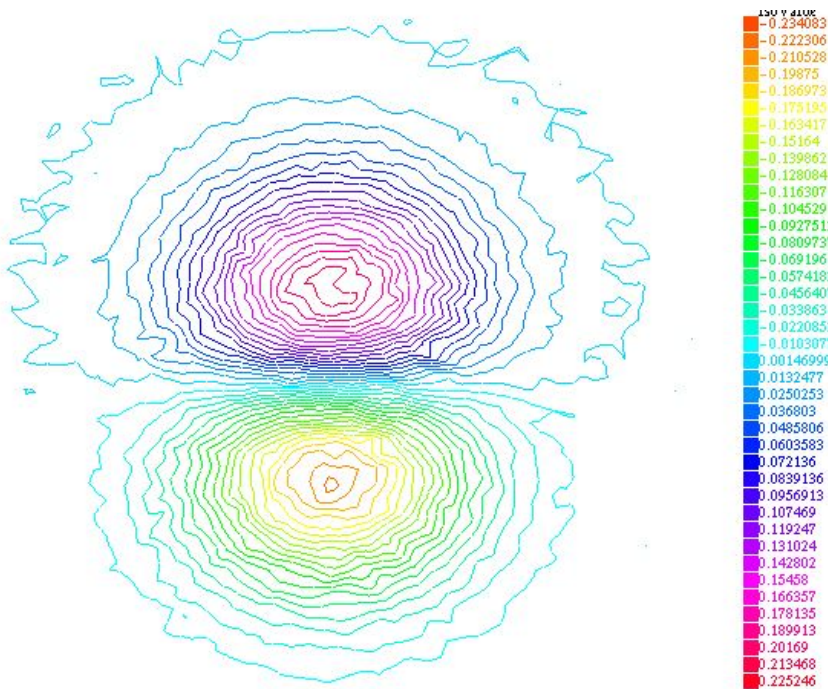


#### ***Interprétation :***

Bien que ce graphique soit un peu similaire au premier graphique, la seule différence réside dans les oscillations, en effet, il y a beaucoup moins d'oscillations que pour le premier test.

De plus on observe  $\omega^q(w^2 - f_0)^{p-q}$  modes parasites, avec q le nombre d'amplitude de fourier pour la vitesse et p le nombre d'amplitude de fourier pour la pression.

### 3.2.3 P1-P1



#### ***Interprétation :***

Pour ce troisième graphique, à la différence des deux premiers, on peut remarquer que les zones où la solution est proche de zéros sont beaucoup plus étendue. De plus, on peut remarquer quelques discontinuité sur la solution (au nord)

## 4 Conclusion et bibliographie :

À dessein de conclure ce projet nous a permis d'effectuer cette analogie cours/réalité sur un domaine très prisé par les mathématiciens et les physiciens : La mécanique des fluides.

De plus, grâce à ce t.p. nous avons manipuler les trois types d'éléments finis via freefem++ et qu'on a un peu compris les différents modes ainsi que les différents types de solutions pour l'équation de saint venant étudiés en cours.

### Bibliographie

[1] Page Freefem wiki.

[2] F. Hecht. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265, 2012.