Машинное обучение

Лекция 7. Логистическая регрессия и SVM

Виктор Кантор

План

I. Напоминание линейных моделей
II. Логистическая регрессия
III. Метод опорных векторов (Support Vector Machine)
IV. Подробней о регуляризации
V. Где применяют линейные модели

I. Напоминание линейных моделей

Линейная регрессия

$$a(x) = \langle w, x \rangle + w_0$$

Линейная регрессия

$$a(x) = \langle w, x \rangle + w_0$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} L\big(y_i, a(x_i)\big)$$

Линейная регрессия

$$a(x) = \langle w, x \rangle + w_0$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} L\big(y_i, a(x_i)\big)$$

$$L\big(y_i, a(x_i)\big) = (y_i - a(x_i))^2$$

Линейная регрессия

$$a(x) = \langle w, x \rangle + w_0$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} L\big(y_i, a(x_i)\big)$$

$$L\big(y_i, a(x_i)\big) = (y_i - a(x_i))^2$$

$$L\big(y_i, a(x_i)\big) = |y_i - a(x_i)|$$

Линейная классификация

$$a(x) = \begin{cases} 1, \text{если } f(x) > 0 \\ -1, \text{если } f(x) > 0 \end{cases}$$

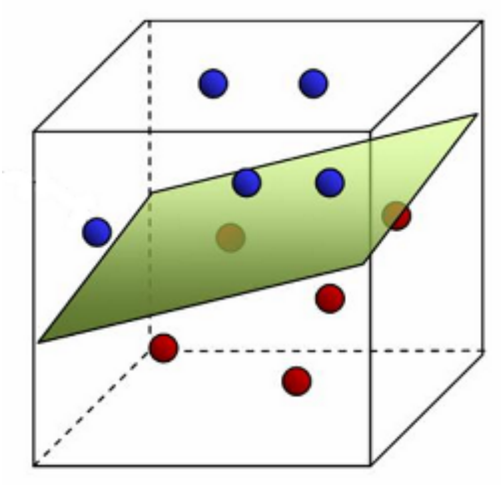
$$f(x) = w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n$$

Линейная классификация

$$a(x) = \begin{cases} 1, \text{если } f(x) > 0 \\ -1, \text{если } f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = w_0 + \langle w, x \rangle$$

Геометрическая интерпретация:
разделяем классы плоскостью

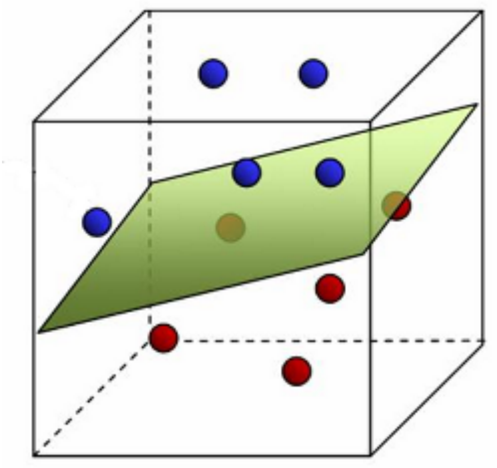


Линейная классификация

$$a(x) = \begin{cases} 1, \text{если } f(x) > 0 \\ -1, \text{если } f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \langle w, x \rangle$$

Геометрическая интерпретация:
разделяем классы плоскостью



Отступ (margin)

Отступом алгоритма $a(x) = sign\{f(x)\}$ на объекте x_i называется величина $M_i = y_i f(x_i)$

(y_i - класс, к которому относится x_i)

$$M_i \leq 0 \Leftrightarrow y_i \neq a(x_i)$$
$$M_i > 0 \Leftrightarrow y_i = a(x_i)$$

Функция потерь

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{\ell} [M_i(w) < 0]$$

Функция потерь

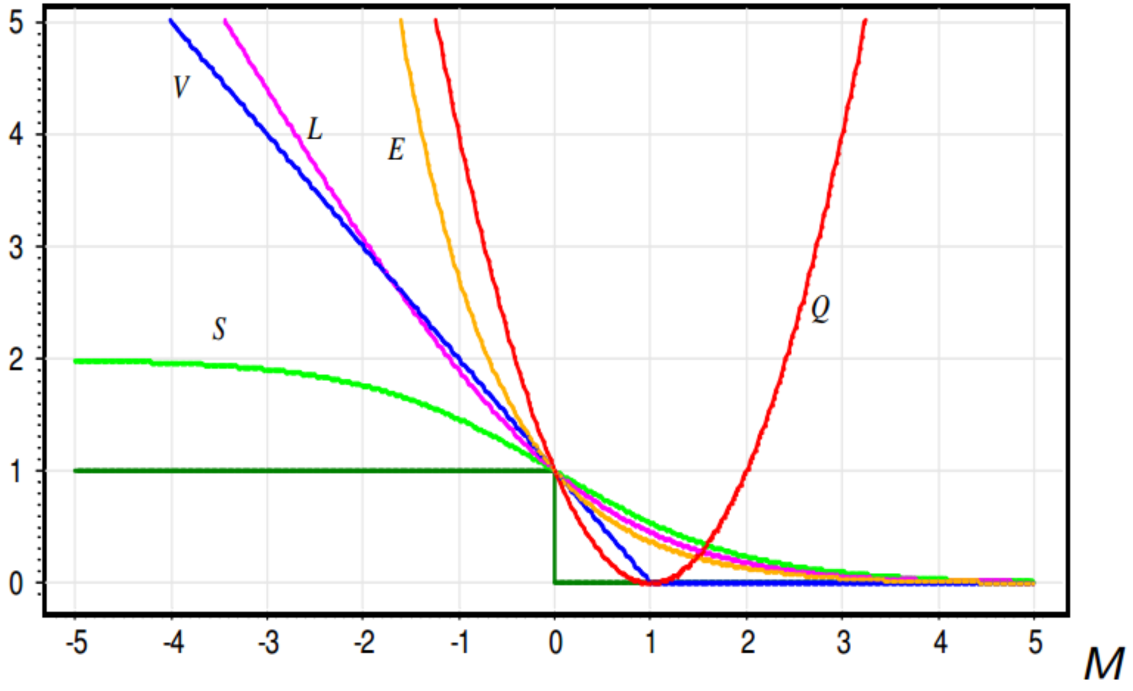
$$Q(w) = \sum_{i=1}^{\ell} [M_i(w) < 0] \leqslant \tilde{Q}(w) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathscr{L}(M_i(w)) \to \min_w;$$

Функция эмпирического риска

Функция потерь

Функция потерь

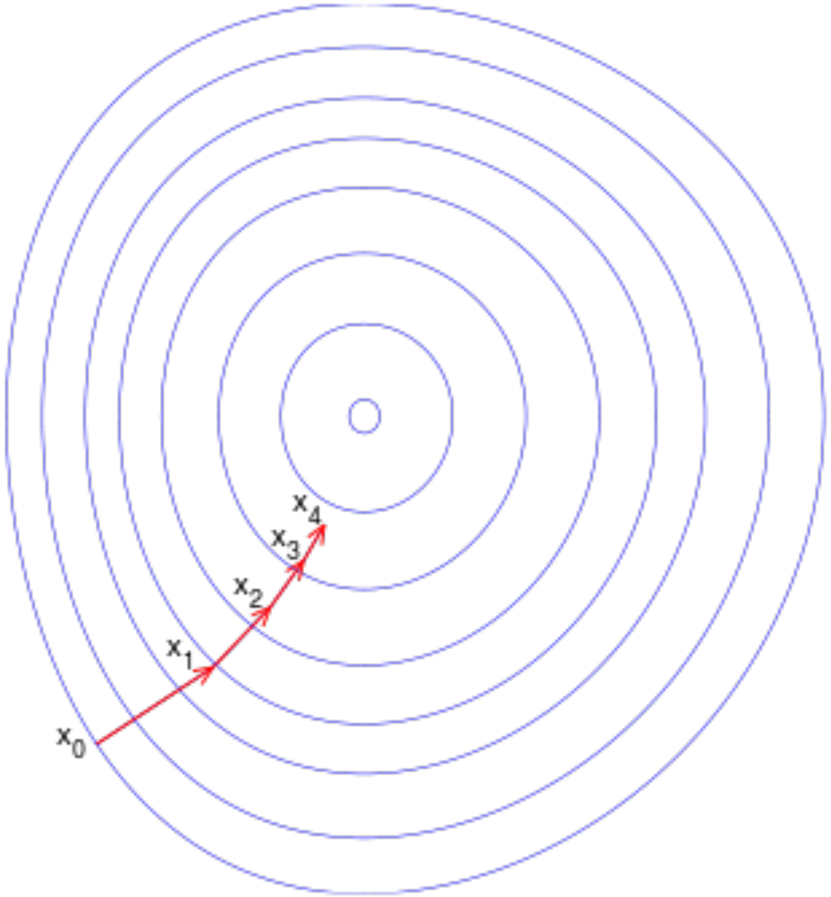
$$Q(w) = \sum_{i=1}^{\ell} [M_i(w) < 0] \leqslant \widetilde{Q}(w) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathscr{L}(M_i(w)) \to \min_w;$$



$Q(M) = (1 - M)^2$
$V(M) = (1 - M)_+$
$S(M) = 2(1 + e^M)^{-1}$
$L(M) = \log_2(1 + e^{-M})$
$E(M) = e^{-M}$

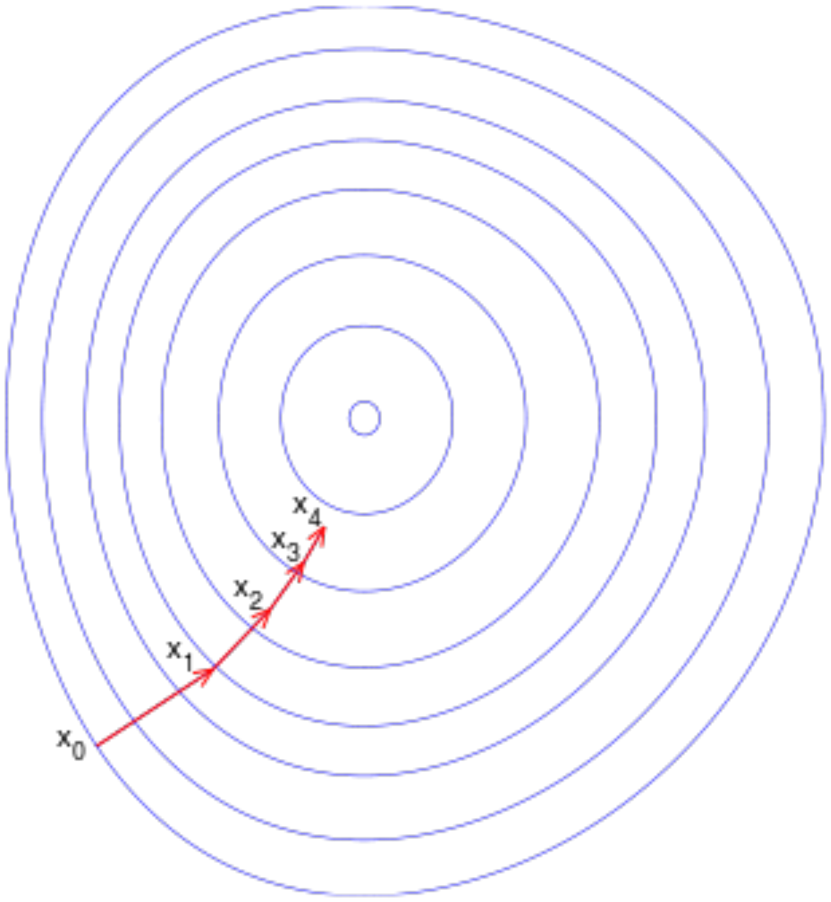
Градиентный спуск

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n),\ n \geq 0.$$



Градиентный спуск

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n),\ n \ge 0.$$



$$\nabla_w \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{l} \nabla L(M_i)$$

$$\nabla \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{l} L'(M_i) \frac{\partial M_i}{\partial w}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial w} = y_i x_i$$

$$\nabla \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{l} y_i x_i L'(M_i)$$

$$\boxed{w_{n+1} = w_n - \gamma_n \sum_{i=1}^{l} y_i x_i L'(M_i)}$$

Стохастический градиент

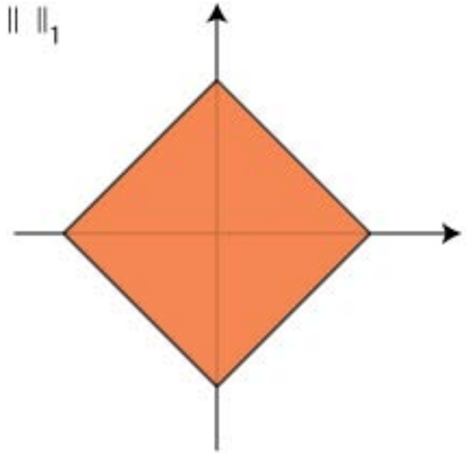
$$w_{n+1} = w_n - \gamma_n \cancel{\sum_{i=1}^{l}} y_i x_i L'(M_i)$$

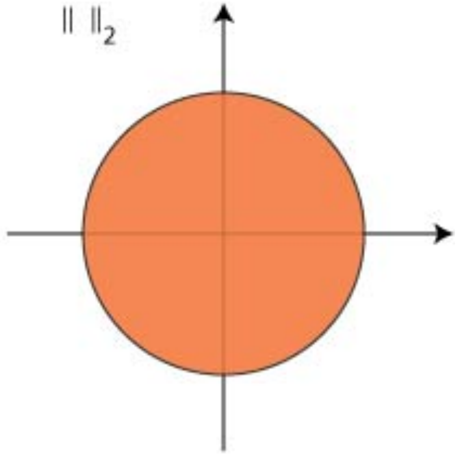
$$\boxed{\begin{array}{c} w_{n+1} = w_n - \gamma_n y_i x_i L'(M_i) \\ x_i \text{ — случайный элемент обучающей выборки} \end{array}}$$

Регуляризация

$$\sum_{i=1}^{l} L(M_i) + \gamma \sum_{k=1}^{m} |w_k| \rightarrow min \qquad \sum_{i=1}^{l} L(M_i) + \gamma \sum_{k=1}^{m} {w_k}^2 \rightarrow min$$

$l1 -$ **регуляризация** $\qquad$ $l2 -$ **регуляризация**





Общий случай

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) + \gamma V(w) \to \min_{w}$$

Функция потерь

Регуляризатор

Коэффициент
регуляризации

II. Логистическая регрессия

Логистическая регрессия

$y_i \in \{0, 1\}$

$$Q = -\sum_{i=1}^{\ell} y_i \ln p_i + (1 - y_i) \ln(1 - p_i) \to \min_w$$

$$p_i = \sigma(\langle w, x_i \rangle) = \frac{1}{1 + e^{-\langle w, x_i \rangle}}$$

Логистическая регрессия

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad Q = -\sum_{i=1}^{\ell} y_i \ln p_i + (1 - y_i) \ln(1 - p_i) \to \min_w$$

$$p_i = \sigma(\langle w, x_i \rangle) = \frac{1}{1 + e^{-\langle w, x_i \rangle}} = P(y = 1 | x)$$

Логистическая регрессия

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad Q = -\sum_{i=1}^{\ell} y_i \ln p_i + (1 - y_i) \ln(1 - p_i) \to \min_w$$

$$p_i = \sigma(\langle w, x_i \rangle) = \frac{1}{1 + e^{-\langle w, x_i \rangle}} = P(y = 1 | x)$$

Как правило, добавляется ℓ_1 или ℓ_2-регуляризация, а оптимизационная задача решается с помощью SGD или метода Ньютона-Рафсона

Эквивалентность оптимизационных задач

$$Q = -\sum_{i=1}^{\ell} y_i \ln \frac{1}{1 + e^{-\langle w, x_i \rangle}} + (1 - y_i) \ln \frac{1}{1 + e^{\langle w, x_i \rangle}} \to \min_w$$

$$-y_i \ln \frac{1}{1 + e^{-\langle w, x_i \rangle}} - (1 - y_i) \ln \frac{1}{1 + e^{\langle w, x_i \rangle}} = \begin{cases} \ln\left(1 + e^{-\langle w, x_i \rangle}\right), y_i = 1 \\ \ln\left(1 + e^{\langle w, x_i \rangle}\right), y_i = 0 \end{cases}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\ln\left(1 + e^{-y_i \langle w, x_i \rangle}\right)}_{L(M) = \ln(1 + e^{-M_i})} \to \min_w \qquad y_i \in \{-1, 1\}$$

Методы оптимизации

- SGD
- Метод Ньютона-Рафсона
- IRLS

III. Метод опорных векторов

Метод опорных векторов

Линейный классификатор:

$$a(x) = sign(< w, x > -w_0)$$

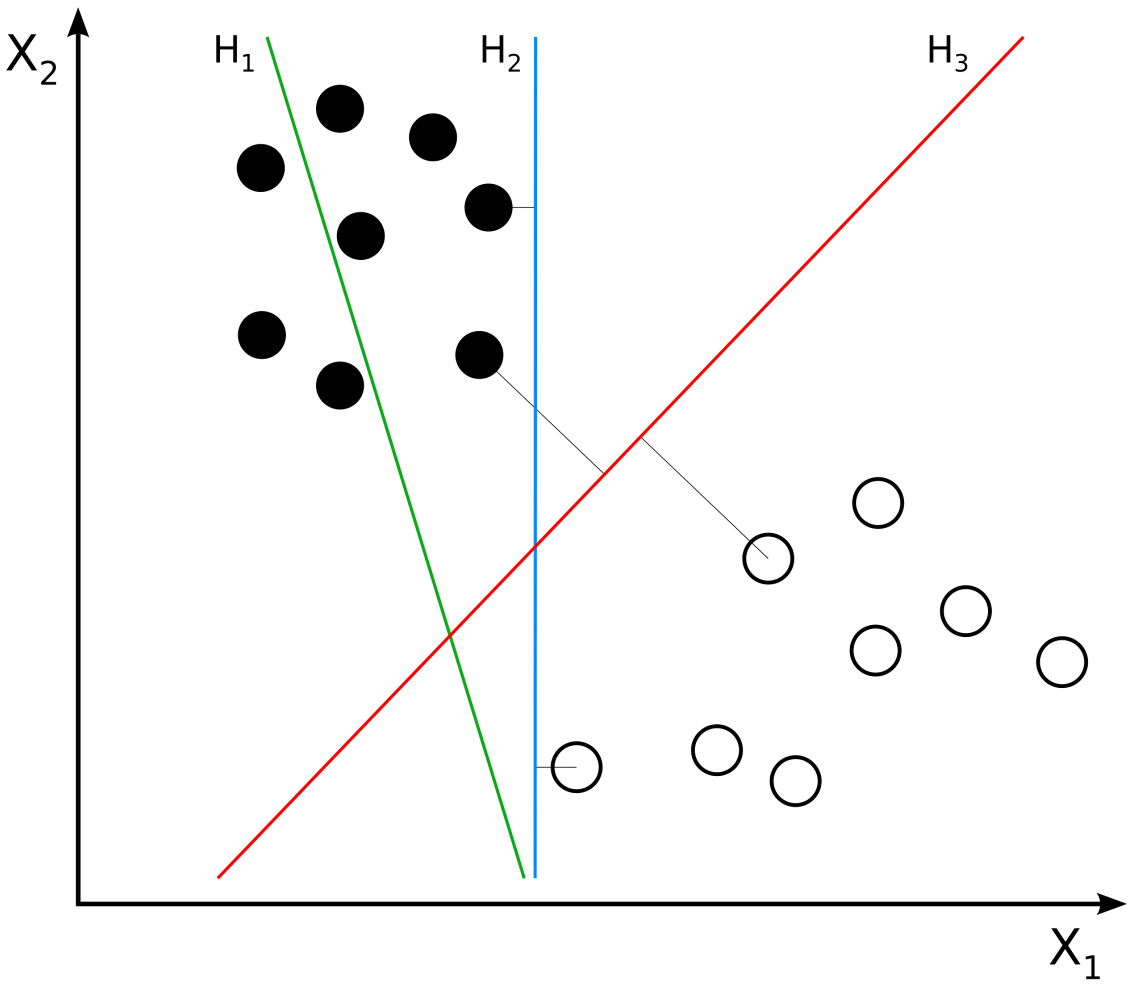
Использующий кусочно-линейную функцию потерь и L2-регуляризатор:

$$\sum_{i=1}^{l} \underbrace{\boxed{L(M_i)}}_{\text{функция потерь}} + \gamma \underbrace{\boxed{\|w\|^2}}_{\text{квадратичный регуляризатор}} \to \min_{w}$$

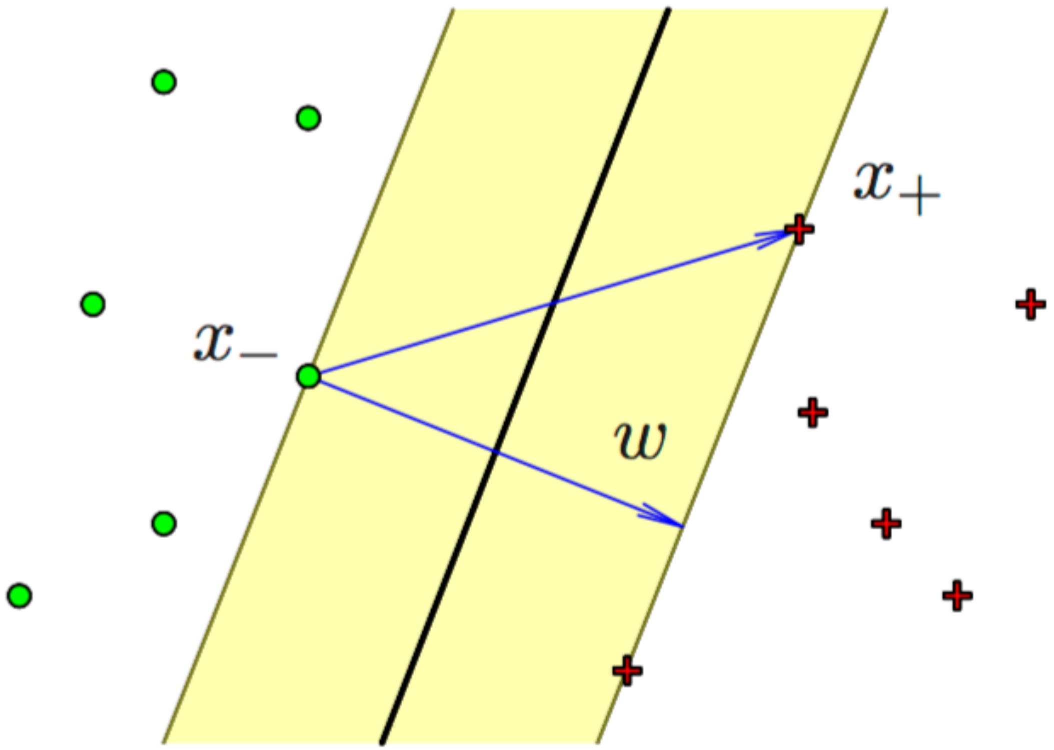
кусочно-линейная функция потерь:

$$L(M_i) = \max\{0, 1 - M_i\} = (1 - M_i)_+$$

Построение разделяющей гиперплоскости

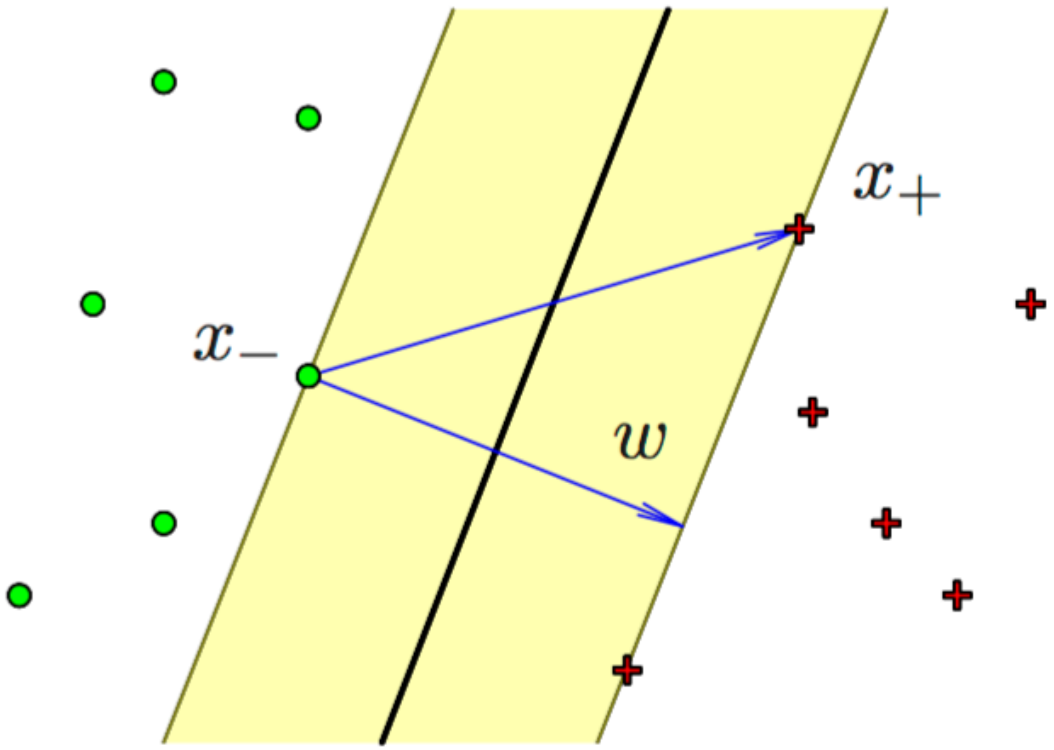


Разделяющая полоса



$$a(x) = \mathrm{sign}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j x^j - w_0\right) = \mathrm{sign}\big(\langle w, x\rangle - w_0\big)$$

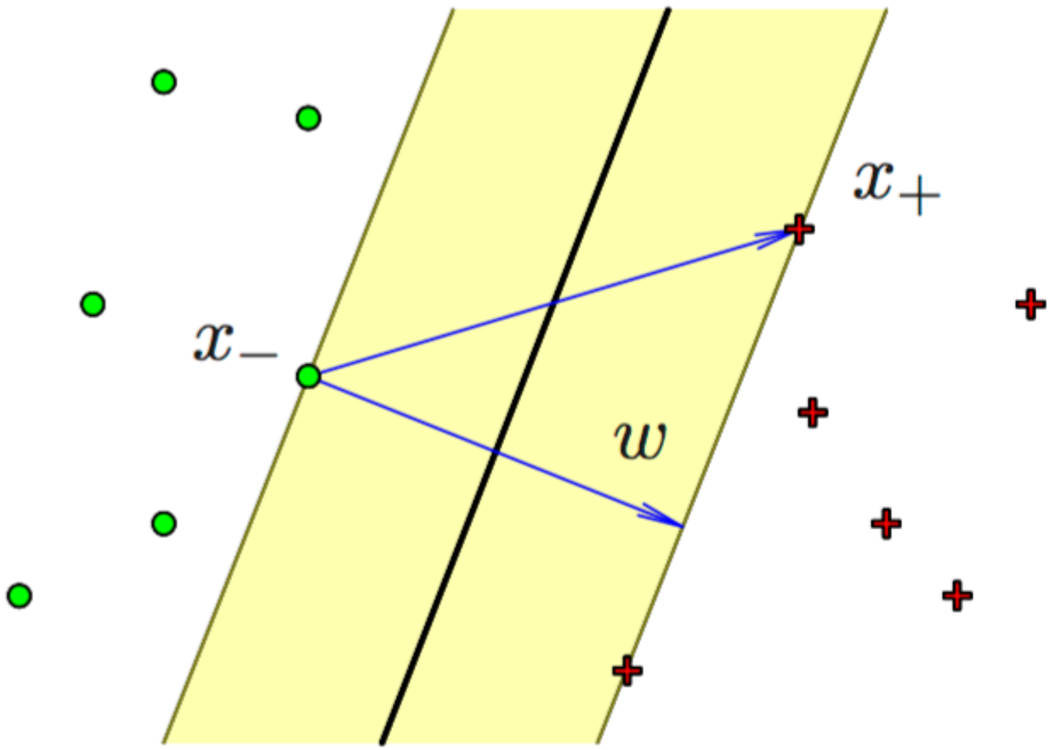
Разделяющая полоса



$$\min_{i=1,\dots,\ell} y_i(\langle w, x_i\rangle - w_0) = 1$$

$$a(x) = \operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j x^j - w_0\right) = \operatorname{sign}(\langle w, x\rangle - w_0)$$

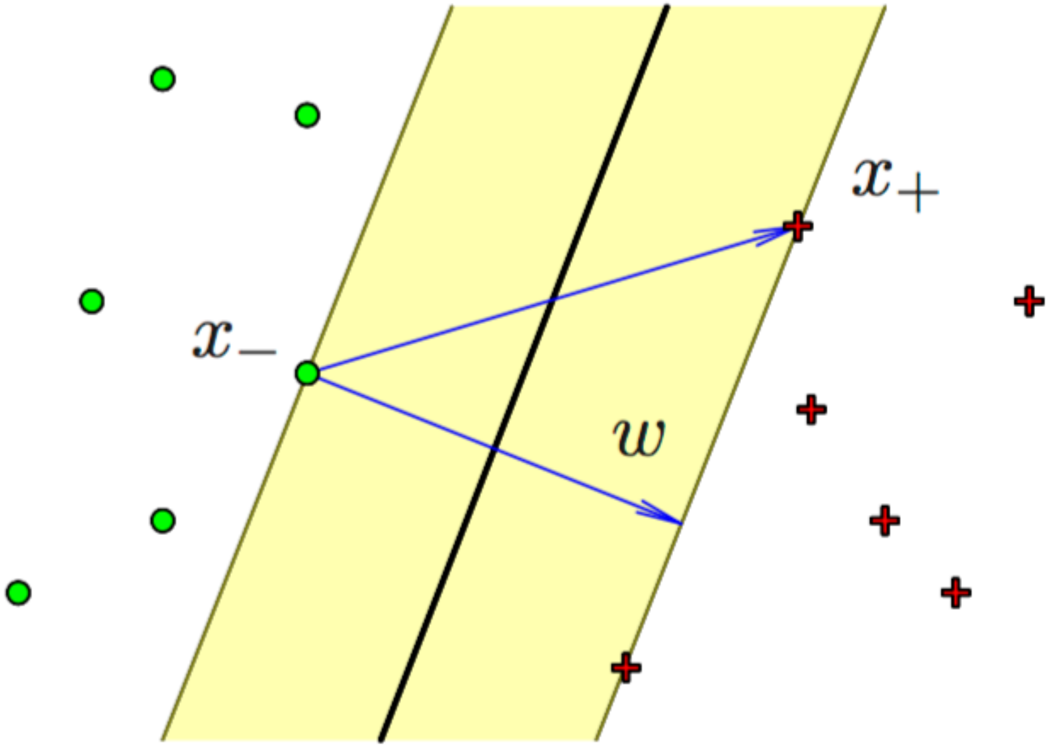
Ширина разделяющей полосы



$$\min_{i=1,\dots,\ell} y_i(\langle w, x_i\rangle - w_0) = 1.$$

$$\left\langle (x_+ - x_-), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle$$

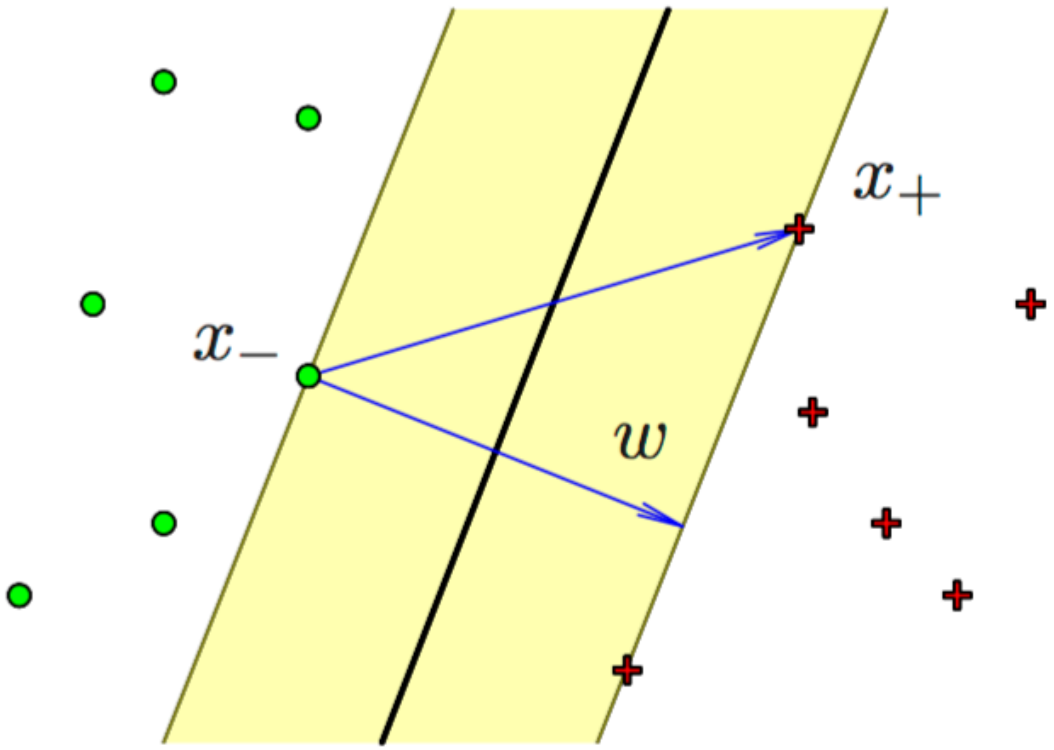
Ширина разделяющей полосы



$$\min_{i=1,\dots,\ell} y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) = 1.$$

$$\left\langle (x_+ - x_-), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \frac{\langle w, x_+\rangle - \langle w, x_-\rangle}{\|w\|}$$

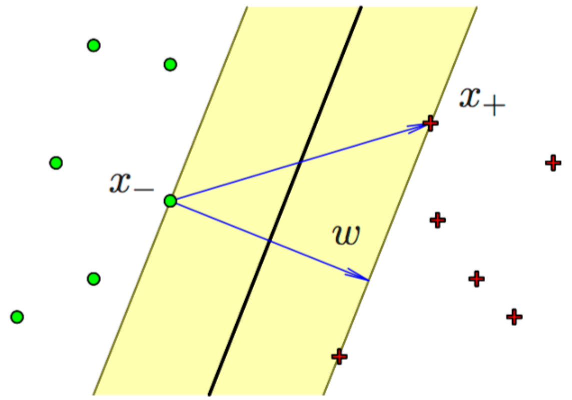
Ширина разделяющей полосы



$$\min_{i=1,\dots,\ell} y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) = 1.$$

$$\left\langle (x_+ - x_-), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \frac{\langle w, x_+\rangle - \langle w, x_-\rangle}{\|w\|} = \frac{(w_0 + 1) - (w_0 - 1)}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|}$$

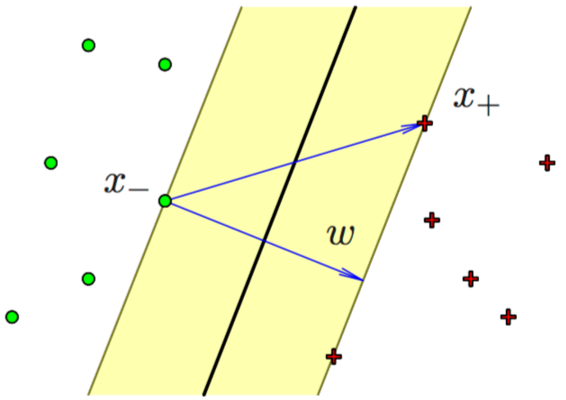
Ширина разделяющей полосы



$$\min_{i=1,\dots,\ell} y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) = 1$$

$$\left\langle (x_+ - x_-), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \frac{\langle w, x_+\rangle - \langle w, x_-\rangle}{\|w\|} = \frac{(w_0+1)-(w_0-1)}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|}$$

Максимизация зазора

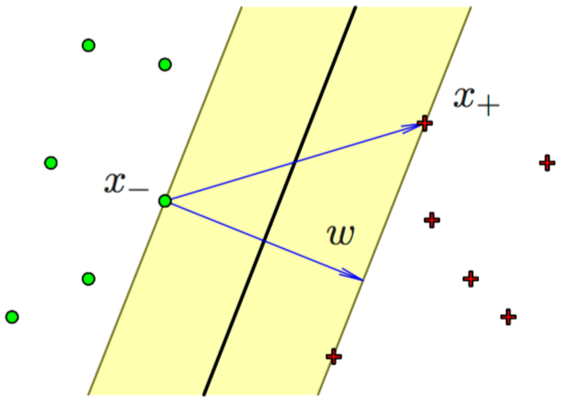


$$\min_{i=1,\dots,\ell} y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) = 1.$$

$$\left\langle (x_+ - x_-), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \frac{\langle w, x_+\rangle - \langle w, x_-\rangle}{\|w\|} = \frac{(w_0+1) - (w_0-1)}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|}$$

$$\begin{cases} \langle w, w\rangle \to \min; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Случай линейно неразделимой выборки



$$\begin{cases} \langle w, w \rangle \to \min; \\ y_i\big(\langle w, x_i \rangle - w_0\big) \geqslant 1, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\langle w, w \rangle + C \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \xi_i \to \min_{w, w_0, \xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i \rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Оптимизационная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min\limits_{w,w_0,\xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Причем здесь линейный классификатор
в привычном нам виде?

Безусловная оптимизационная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min_{w, w_0, \xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Напоминание:

$$M_i = y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big)$$

отступ на i-том объекте

Безусловная оптимизационная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum\limits_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min\limits_{w,w_0,\xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Напоминание:

$$M_i = y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big)$$

отступ на i-том объекте

$$\xi_i \geqslant 0$$

$$\xi_i \geqslant 1 - M_i$$

$$\sum_{i=1}^{l}\xi_i \to min$$

Безусловная оптимизационная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min_{w,w_0,\xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Напоминание:

M_i = $y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big)$

отступ на i-том объекте

$$\xi_i \geqslant 0$$

$$\xi_i \geqslant 1 - M_i$$

$$\Longrightarrow \xi_i = \max\{0, 1 - M_i\} = (1 - M_i)_+$$

$$\sum_{i=1}^{l}\xi_i \to min$$

Безусловная оптимизационная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min\limits_{w,w_0,\xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1,\dots,\ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,\ell. \end{cases}$$

Напоминание:

$$M_i = y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big)$$

отступ на i-том объекте

$$\xi_i \geqslant 0$$

$$\xi_i \geqslant 1 - M_i \quad \Longrightarrow \xi_i = \max\{0, 1 - M_i\} = (1 - M_i)_+$$

$$\sum_{i=1}^{l}\xi_i \to min$$

$$Q(w, w_0) = \sum_{i=1}^{\ell}\big(1 - M_i(w, w_0)\big)_+ + \frac{1}{2C}\|w\|^2 \to \min_{w,w_0}$$

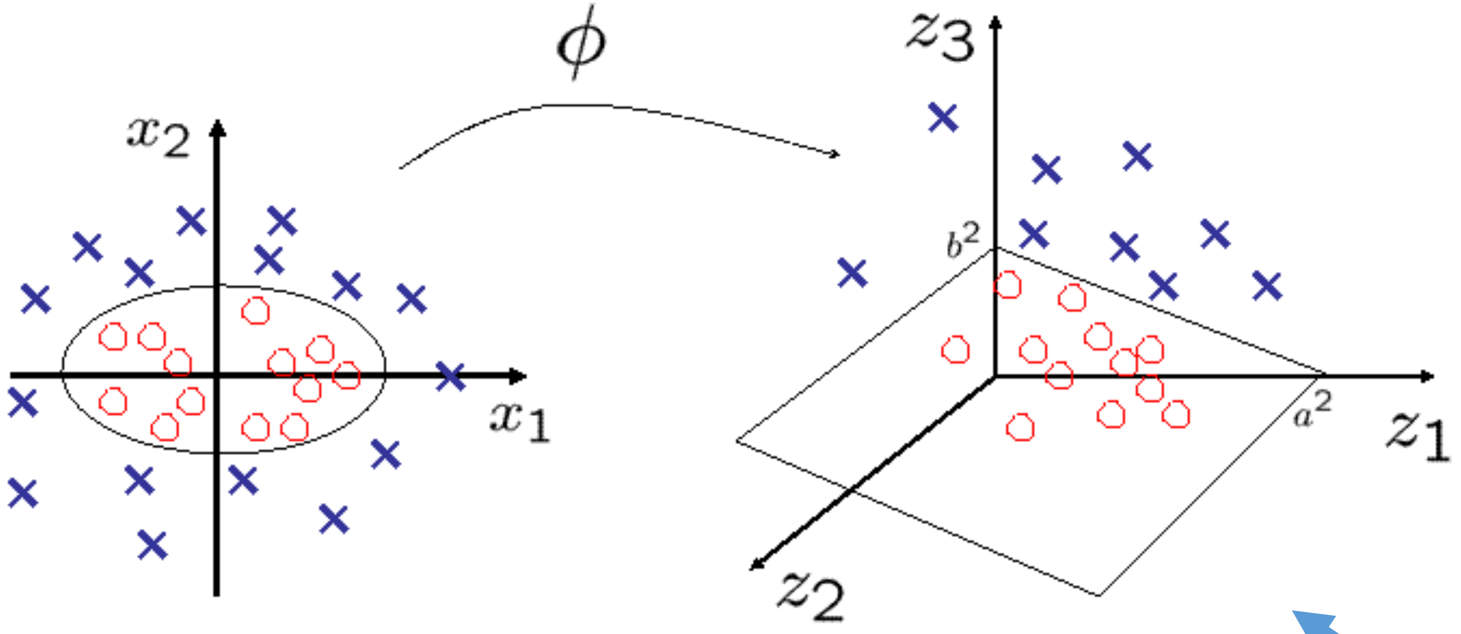
Безусловная оптимизационная задача в SVM

$$Q(w, w_0) = \sum_{i=1}^{\ell} \big(1 - M_i(w, w_0)\big)_+ + \frac{1}{2C}\|w\|^2 \;\to\; \min_{w, w_0}$$

Ключевые моменты

- Метод опорных векторов – линейный классификатор с кусочно-линейной функцией потерь (hinge loss) и L2-регуляризатором
- Придуман метод был из соображений максимизации зазора между классами
- В случае линейно разделимой выборки это означает просто максимизацию ширины разделяющей полосы
- А в случае линейно неразделимой выборки просто добавляется возможность попадания объектов в полосу и штрафы за эти попадания

Добавление новых признаков



$$\phi : (x_1, x_2) \longrightarrow (x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2)$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1 \longrightarrow \frac{z_1}{a^2} + \frac{z_3}{b^2} = 1$$

Спрямляющее пространство

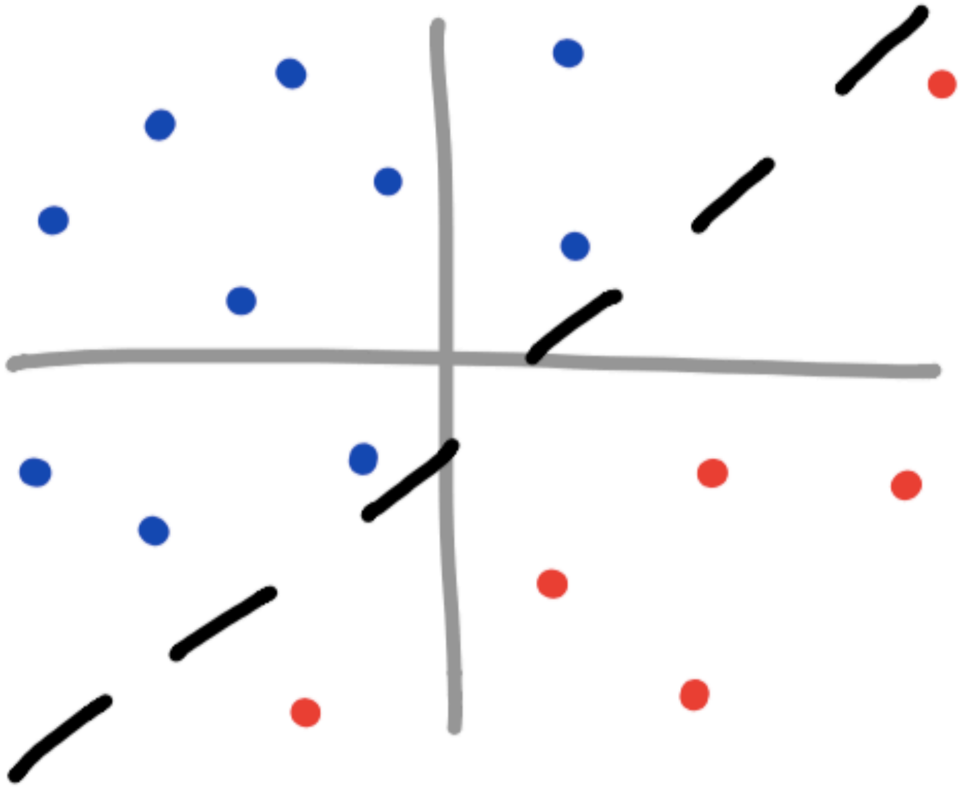
Kernel Trick

$$\begin{matrix} x \mapsto \phi(x) \\ w \mapsto \phi(w) \end{matrix} \implies < w, x > \mapsto < \phi(w), \phi(x) >$$

Можно не делать преобразование признаков явно, а вместо скалярного произведения $< w, x >$ использовать функцию K(w, x), представимую в виде:

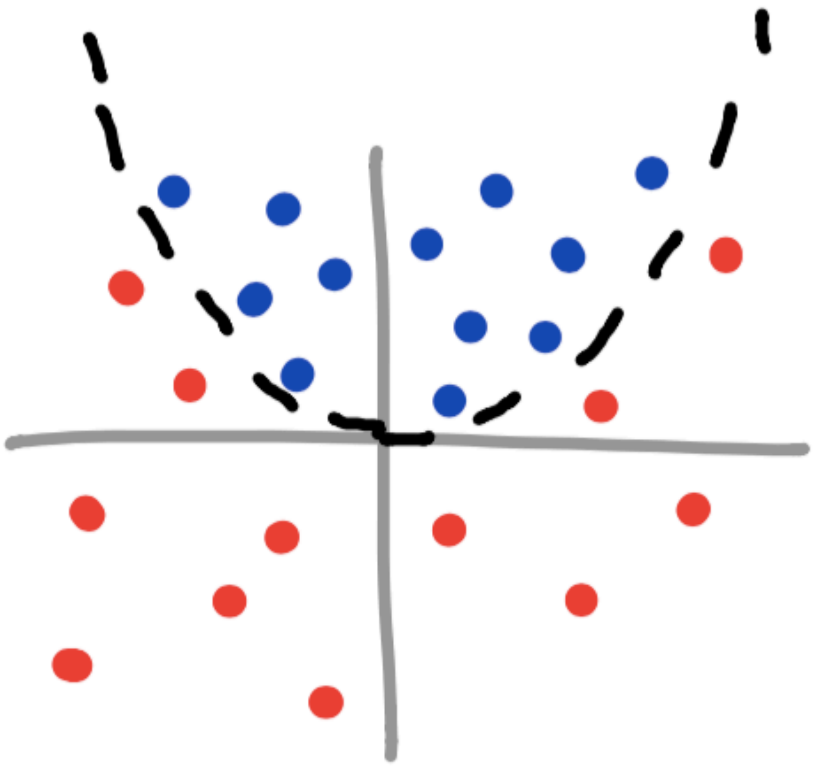
$$K(w, x) = < \phi(w), \phi(x) >$$

Линейное ядро



$$K(w, x) = < \mathrm{w}, x >$$

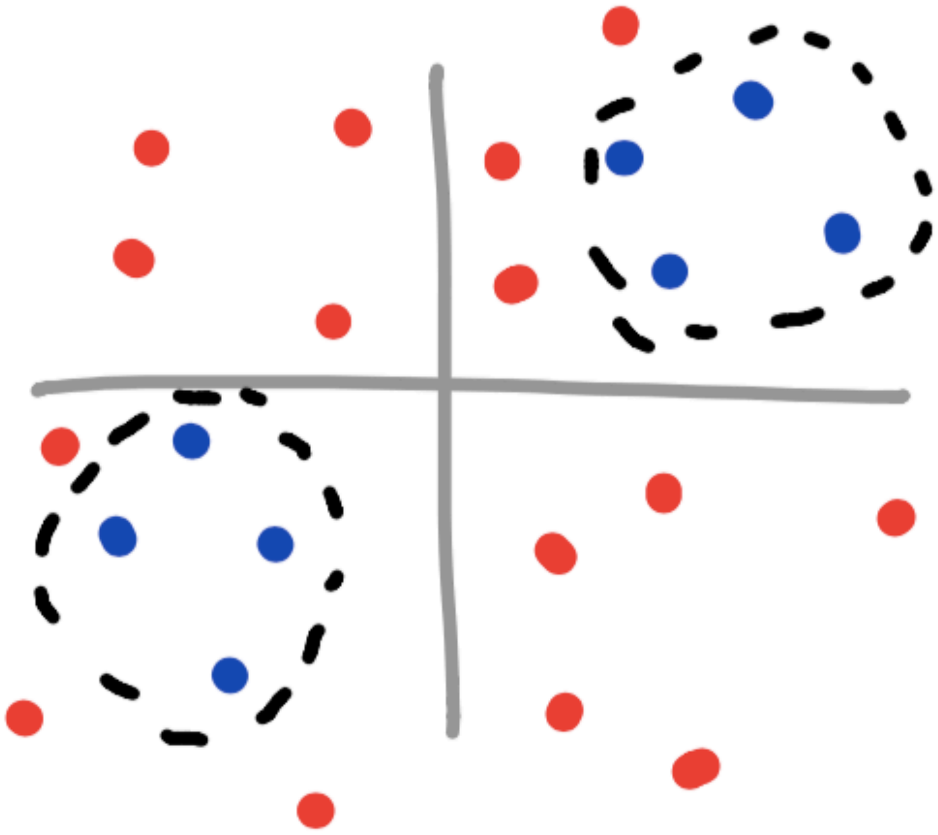
Полиномиальное ядро



$$K(w,x) = (\gamma < w,x > +r)^d$$

https://youtu.be/3liCbRZPrZA

Радиальное ядро



$$K(w, x) = e^{-\gamma \|w - x\|^2}$$

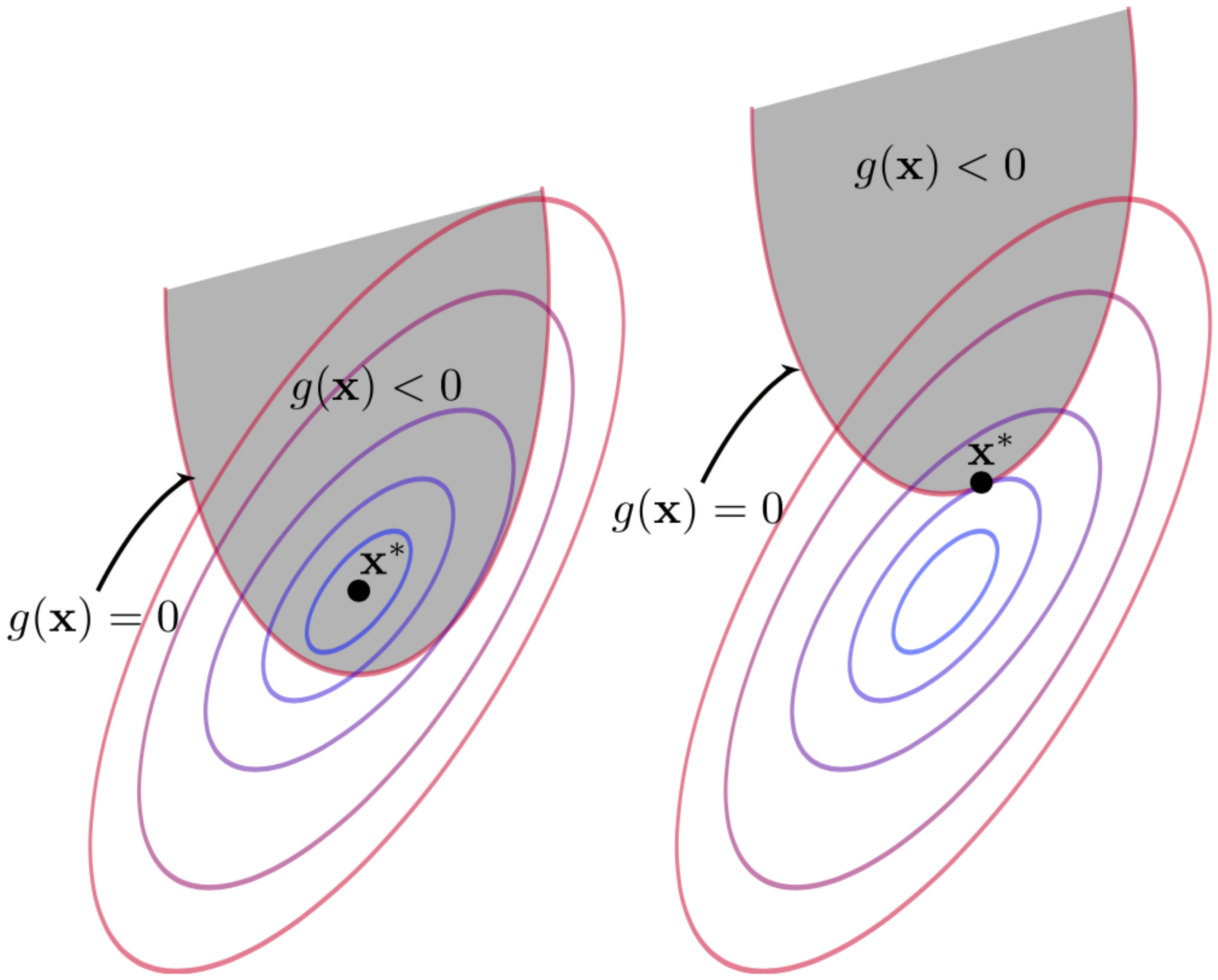
Ядра и библиотеки

- LibSVM – можно выбирать ядра
- LibLinear – только линейное ядро
- Scikit-learn – обертка над LibSVM и LibLinear
- Vowpal Wabbit – только линейное ядро

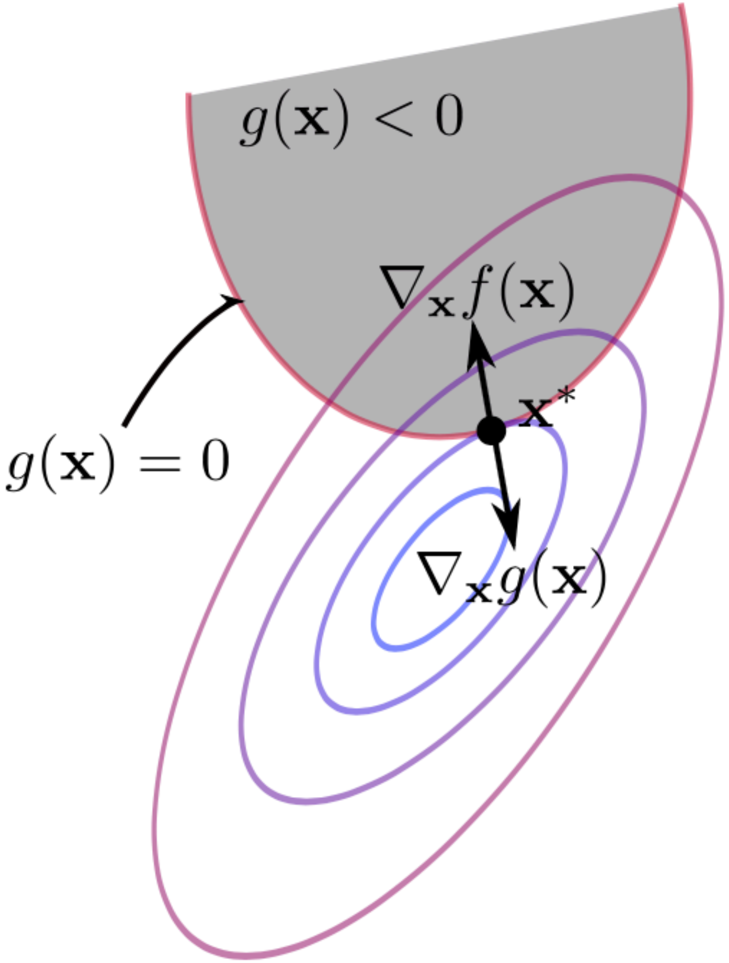
Напоминание: теорема Каруша-Куна-Таккера

$$\begin{cases} f(x) \to \min\limits_{x} \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla_x L(x, \mu) = \nabla_x \big(f(x) + \mu g(x) \big) = 0 \\ \mu g(x) = 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

Напоминание: теорема Каруша-Куна-Таккера



Напоминание: теорема Каруша-Куна-Таккера



Двойственная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum\limits_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min\limits_{w,w_0,\xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1,\dots,\ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,\ell. \end{cases}$$

Двойственная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min_{w, w_0, \xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

$$M_i(w, w_0) = y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big)$$

Двойственная задача в SVM

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i \to \min\limits_{w,w_0,\xi}; \\ y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

$$M_i(w, w_0) = y_i\big(\langle w, x_i\rangle - w_0\big)$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) &= \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\big(M_i(w, w_0) - 1 + \xi_i\big) - \sum_{i=1}^{\ell}\xi_i\eta_i = \\ &= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\big(M_i(w, w_0) - 1\big) - \sum_{i=1}^{\ell}\xi_i\big(\lambda_i + \eta_i - C\big), \end{aligned}$$

Двойственная задача в SVM

$$\mathscr{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\bigl(M_i(w, w_0) - 1 + \xi_i\bigr) - \sum_{i=1}^{\ell}\xi_i\eta_i =$$

$$= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\bigl(M_i(w, w_0) - 1\bigr) - \sum_{i=1}^{\ell}\xi_i\bigl(\lambda_i + \eta_i - C\bigr),$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) \;\to\; \min\limits_{w, w_0, \xi}\; \max\limits_{\lambda, \eta}; \\ \xi_i \geqslant 0, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \eta_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \lambda_i = 0 \;\text{ либо }\; M_i(w, w_0) = 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \eta_i = 0 \;\text{ либо }\; \xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, \ell; \end{cases}$$

Опорные векторы в SVM

$$\mathscr{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\big(M_i(w, w_0) - 1 + \xi_i\big) - \sum_{i=1}^{\ell}\xi_i\eta_i =$$

$$= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\big(M_i(w, w_0) - 1\big) - \sum_{i=1}^{\ell}\xi_i\big(\lambda_i + \eta_i - C\big),$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i y_i x_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i y_i x_i;$$

Двойственная задача: итог

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_i} = -\lambda_i - \eta_i + C = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \eta_i + \lambda_i = C, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

$$\begin{cases} -\mathscr{L}(\lambda) = -\sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\ell} \sum\limits_{j=1}^{\ell} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle \to \min\limits_{\lambda}; \\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant C, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0. \end{cases}$$

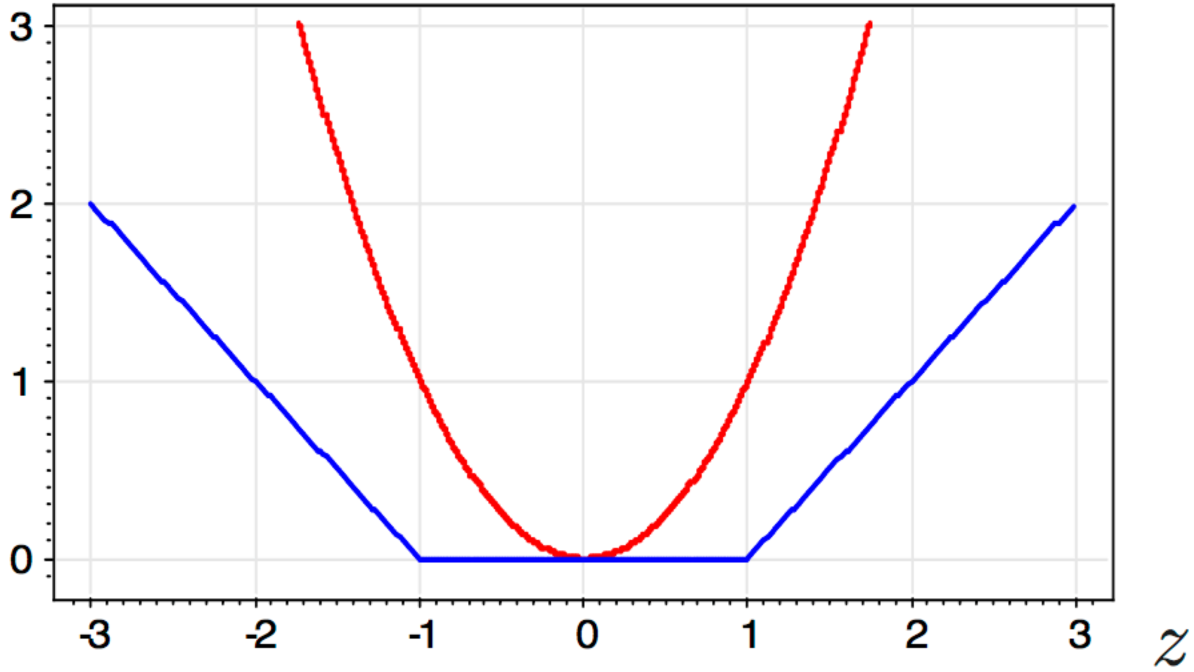
Вид классификатора в SVM

$$a(x) = \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i \langle x_i, x \rangle - w_0\right)$$

Вид классификатора в SVM: теперь с ядром

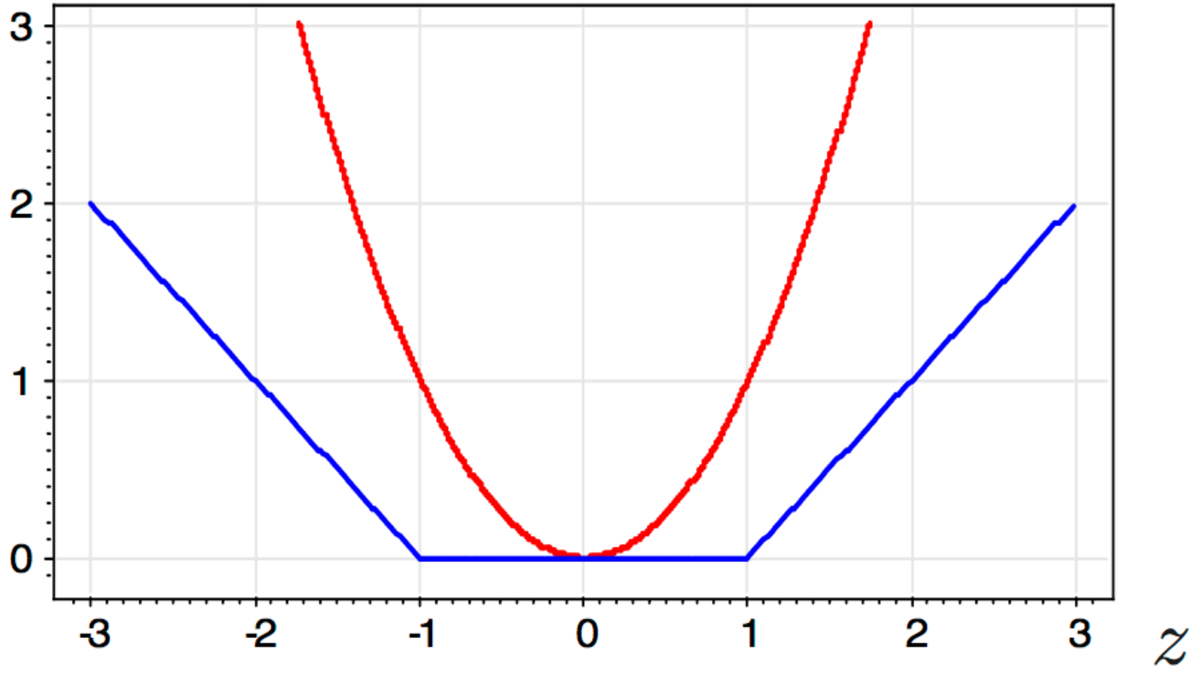
$$a(x) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^{h} \lambda_i y_i K(x_i, x) - w_0\right)$$

Линейная регрессия



$$Q(a, X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\langle w, x_i \rangle - w_0 - y_i \right)^2 + \tau \|w\|^2 \to \min_{w, w_0}$$

SVM для регрессии



$$Q_\varepsilon(a, X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \left| \langle w, x_i \rangle - w_0 - y_i \right|_\varepsilon + \tau \langle w, w \rangle^2 \to \min_{w, w_0}$$

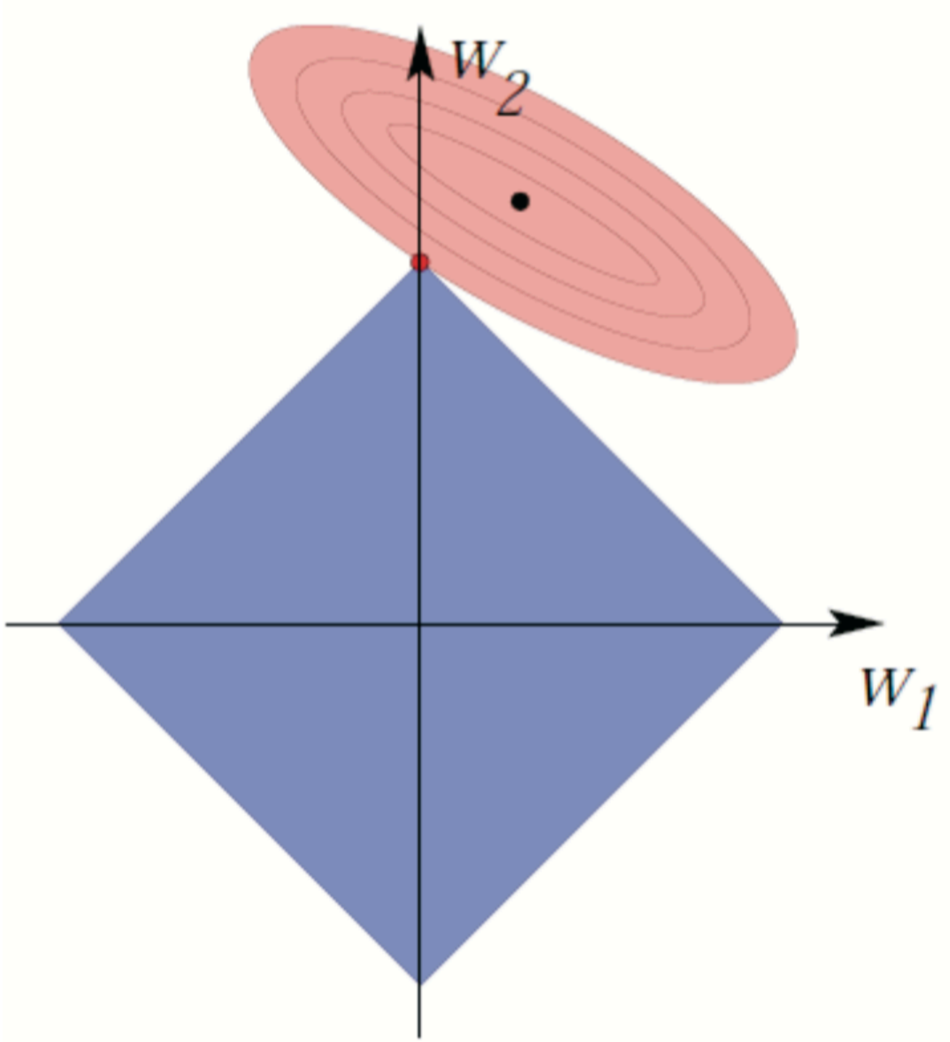
IV. Подробней о регуляризации

Почему ℓ_1 разреживает: простое и неубедительно объяснение

$$\begin{cases} \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{l} L(M_i) \to min \\ \sum_{k=1}^{m} |w_k| \le \tau \end{cases}$$

Почему $\boldsymbol{\ell}_1$ разреживает: простое и неубедительно объяснение

$$\begin{cases} \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{l} L(M_i) \to min \\ \sum_{k=1}^{m} |w_k| \le \tau \end{cases}$$



Вероятностный смысл регуляризаторов

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) \ + \gamma V(w) \to \min_w$$

Вероятностный смысл регуляризаторов

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) + \gamma V(w) \to \min_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} -L\big(y_i, f(x_i)\big) - \gamma V(w) \to \max_w$$

Вероятностный смысл регуляризаторов

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) + \gamma V(w) \to \min_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} -L\big(y_i, f(x_i)\big) - \gamma V(w) \to \max_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \ln e^{-L\left(y_i, f(x_i)\right)} + \ln e^{-\gamma V(w)} \to \max_w$$

Вероятностный смысл регуляризаторов

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) + \gamma V(w) \to \min_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} -L\big(y_i, f(x_i)\big) - \gamma V(w) \to \max_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \ln e^{-L\left(y_i, f(x_i)\right)} + \ln e^{-\gamma V(w)} \to \max_w$$

$$e^{-\gamma V(w)} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-L\left(y_i, f(x_i)\right)} \to \max_w$$

Вероятностный смысл регуляризаторов

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) + \gamma V(w) \to \min_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} -L\big(y_i, f(x_i)\big) - \gamma V(w) \to \max_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \ln e^{-L\left(y_i, f(x_i)\right)} + \ln e^{-\gamma V(w)} \to \max_w$$

$$P(w) \sim \boxed{e^{-\gamma V(w)}} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-L\left(y_i, f(x_i)\right)} \to \max_w$$

Вероятностный смысл регуляризаторов

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} L\big(y_i, f(x_i)\big) + \gamma V(w) \to \min_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} -L\big(y_i, f(x_i)\big) - \gamma V(w) \to \max_w$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \ln e^{-L(y_i, f(x_i))} + \ln e^{-\gamma V(w)} \to \max_w$$

$$P(w) \sim \boxed{e^{-\gamma V(w)}} \prod_{i=1}^{\ell} \boxed{e^{-L(y_i, f(x_i))}} \sim P(x_i, y_i | w)$$

Вероятностный смысл регуляризаторов

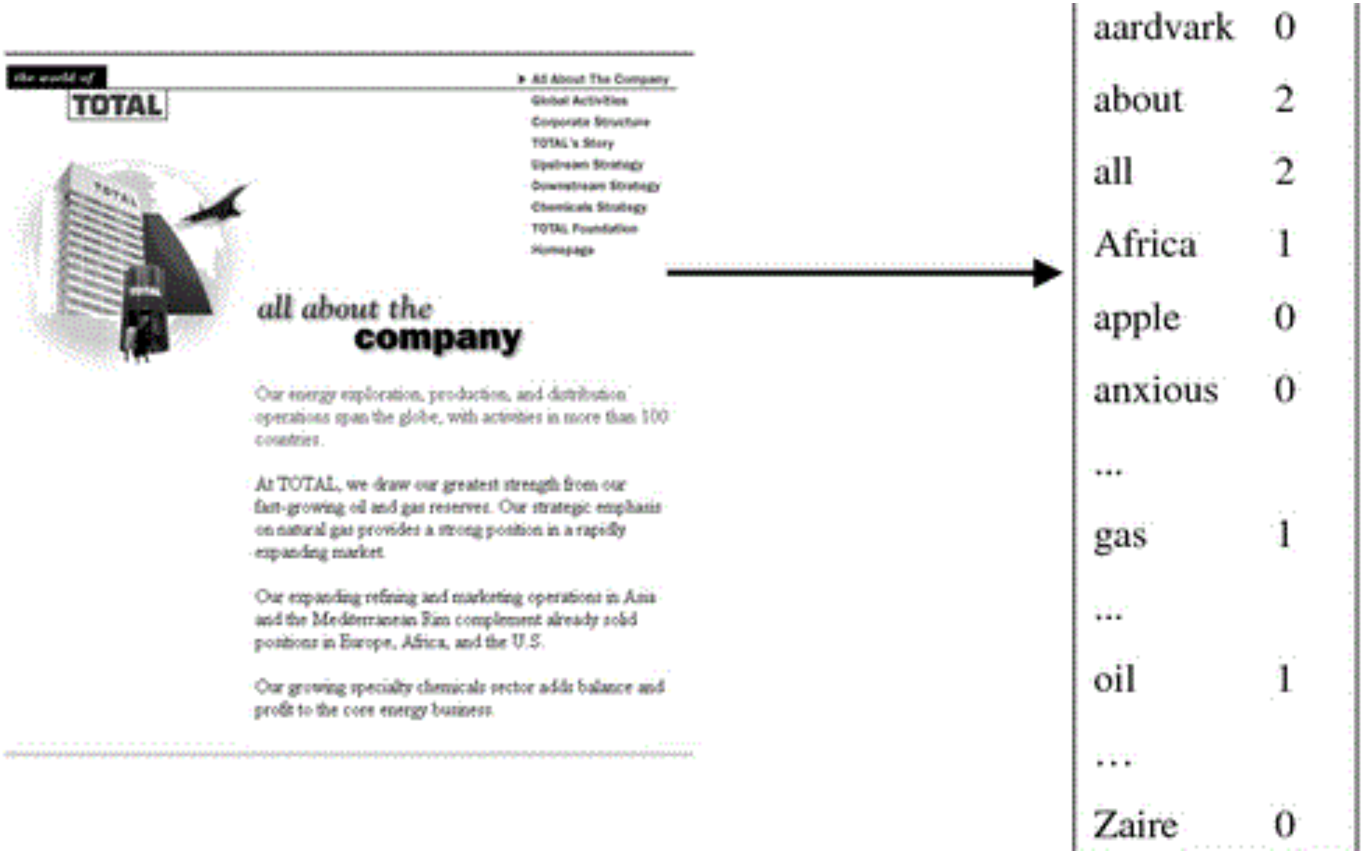
- ℓ_2 – гауссовский регуляризатор
- ℓ_1 – лапласовский регуляризатор

Упражнение:

Покажите связь этих регуляризаторов с заявленными распределениями

V. Где применяют линейные модели

Классификация текстов



Напоминание: hashing trick

feature
a
b
c
b

L столбцов

hash(a) % L = hash(c) % L = 1	hash(b) % L = 2
1	
	1
1	
	1

Обработка разреженных признаков

Часть признаков – разреженные, а часть – плотные, как быть?

- Строим на разреженных признаках линейную модель
- Ответ линейной модели добавляем как еще один плотный признак
- Либо строим на плотных признаках другую модель и усредняем с ней

Простые модели сложных систем

- Прогнозирование охвата целевой аудитории по параметрам рекламной кампании
- Прогнозирование дефектов в продукции на заводе
- Прогнозирование хим. состава в результате сложного процесса производства

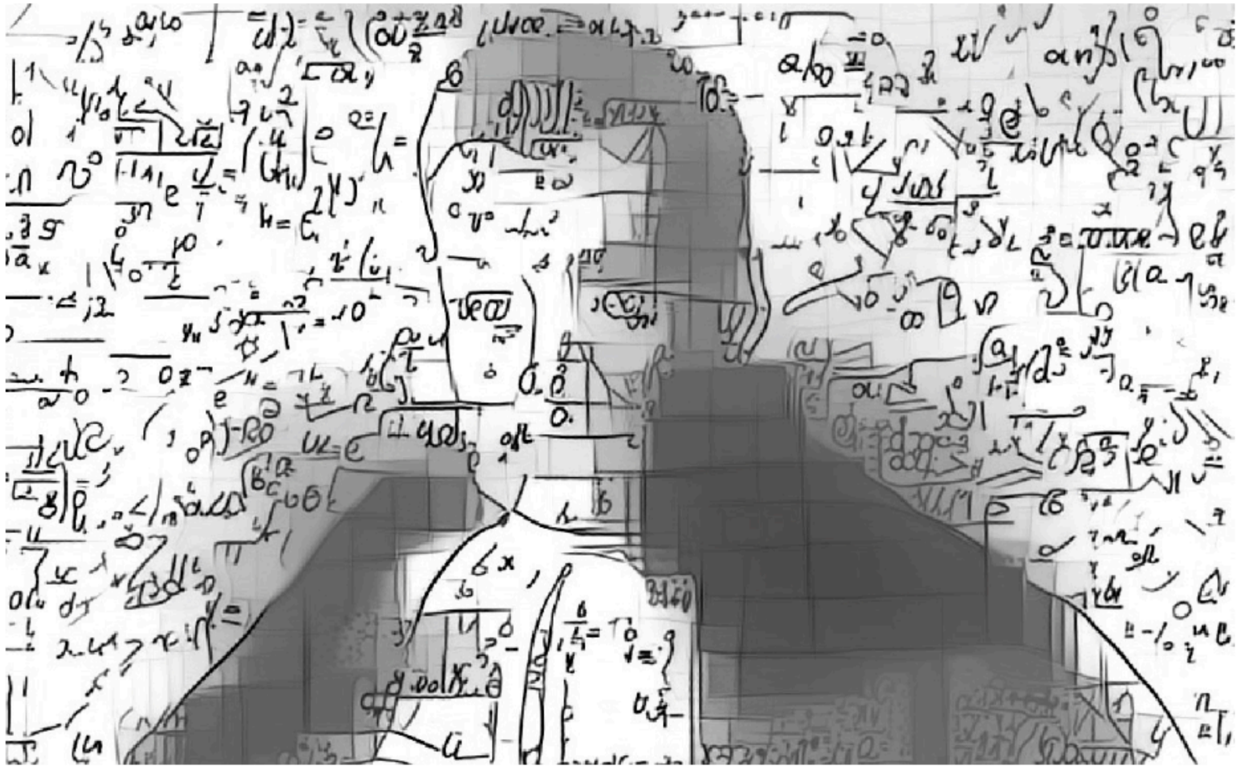
Как правило – везде сложные зависимости от большого числа параметров, но не все параметры известны и мало точек

Отзывы

Отзывы о прошедших лекциях и семинарах можно и нужно оставлять здесь:

https://ml-mipt.github.io/2017part1/

Deep|Bayes Summer School



- Самые продвинутые нейросеточки
- Зачем там байесовские методы?
- Будут ли на школе кормить? Да :)

Deadline 31 Марта

Есть тестовое задание

26-30 Августа, deepbayes.ru