Домашнее задание по алгоритмам №1

Максим Мартынов

23 февраля 2021 г.

1) а) $n^{\log n} = \mathcal{O}(1.1^n)$ - истина.
Докажем, что $n^{\log n} = o(1.1^n)$, то есть, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\log n}}{1.1^n} = 0$.
Если мы прологарифмируем левую часть, то получим, что:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n^{\log n}) - \ln(1.1^n) = \lim_{n\to+\infty} \log n \ln n - n \ln 1.1 = -\infty$$

Легко видеть, что последний факт правда, так как n растет намного быстрее, чем $\log n \ln n$.

б) $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = \mathcal{O}(n\log n)$ - истина.
Докажем, что $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = o(n\log n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n^2+n\log n)n\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+\log n)\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n + \frac{\log^2 n}{n}} = 0$$

в) $\forall f : f(n) = \mathcal{O}(f(\frac{n}{2}))$ - ложь
Контрпример: $f(n) = 2^n$:

$$\frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})} = \frac{2^n}{2^{n/2}} = 2^{n/2} \to +\infty \quad \text{при } n \to +\infty$$

г) $\forall f : f(n) \pm o(f(n)) = \Theta(f(n))$ - истина
Например, можно написать такие неравенства: $\frac{1}{2}f(n) \leqslant f(n) \pm o(f(n)) \leqslant 2f(n)$.
Оно верно, потому что $\pm o(f(n)) \leqslant \frac{1}{2}f(n)$ и $\pm o(f(n)) \leqslant f(n)$ при $n \to +\infty$ по определению.

д) $\log(n!) = \Theta(n\log n)$ - истина
Так как $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ для любых оснований a, b, будем считать, что здесь логарифм натуральный.
Воспользуемся формулой Стирлинга: $\ln n! = n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)$.
Теперь легко написать следующие неравенства: $\frac{1}{2}n\ln n \leqslant n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) \leqslant n\ln n$.
Первое неравенство верно, потому что $n + \mathcal{O}(\ln n) = o(n\ln n)$.
Второе неравенство верно, потому что $\mathcal{O}(\ln n) = o(n)$.

2)

A	B	$\mathcal{O}$	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\log^k n$	n^ϵ	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
n^k	c^n	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
2^n	$2^{n/2}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\log(n!)$	$\log(n^n)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

3) $1 = \Theta(n^{1/\log n})$ $\quad n^{1/\log n}$ $\quad \log(\log^* n)$ $\quad \log^*(\log n) = \Theta(\log^* n)$ $\quad \log^* n$ $\quad 2^{\log^* n}$ $\quad \ln(\ln n)$ $\quad \sqrt{\log n}$ $\quad \ln n$ $\quad \log^2 n$ $\quad 2^{\sqrt{2\log n}}$ $\quad 2^{\ln n}$ $\quad n$ $\quad n\log n = \Theta(\log(n!))$ $\quad \log(n!)$ $\quad n^2 = \Theta(4^{\log n})$ $\quad 4^{\log n}$ $\quad n^3$ $\quad (\log n)!$ $\quad n^{\log(\log n)} = \Theta((\log n)^{\log n})$ $\quad (\log n)^{\log n}$ $\quad (\sqrt{n})^{\log n}$ $\quad (3/2)^n$ $\quad 2^n$ $\quad e^n$ $\quad n2^n$ $\quad n!$ $\quad (n+1)!$ $\quad 2^{2^n}$ $\quad 2^{2^{n+1}}$

4) а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

Воспользуемся формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$

Воспользуемся формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}$$

5) а) $n^n = \mathcal{O}(n!)$ - ложь.

Докажем, что $n! = o(n^n)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln n! - \ln n^n = \lim_{n\to+\infty} n\ln n - n + \mathcal{O}(\ln n) - n\ln n = -\infty$$

б) $n\log n - \log n! = \Theta(n)$ - истина.

Будем считать, что логарифм натуральный.

Можно написать такие неравенства:

$$\frac{1}{2}n \leqslant n\ln n - \ln n! = n + \mathcal{O}(\ln n) \leqslant 2n$$

Они верны, потому что $\mathcal{O}(\ln n) = o(n)$.