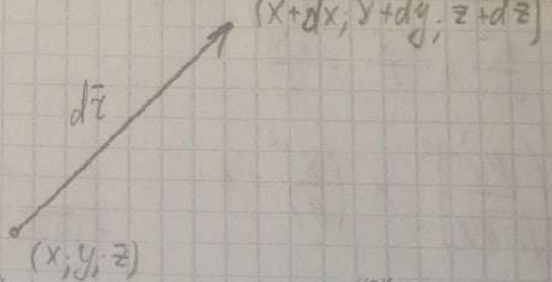
Билет 10

(11) Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Связь между силой и потенциальной энергией. Выражение для нахождения силы в случае известной зависимости потенциальной энергии от координат.

Консервативные силы - силы, работа которых не зависит от траектории пути, а только от начального и конечного положение точек траектории.

Работа консервативной силы по замкнутому пути равна 0.

$$\oint(\bar{F}, d\bar{l})=0$$



$d\bar{r}=(dx; dy\, dz)$

при перемещении между этими точками:

$$A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = W^{нач}_{пот} - W^{кон}_{пот} = -(W^{кон}_{пот} - W^{нач}_{пот})$$

$$W^{кон}_{пот} - W^{нач}_{пот} = (\mathrm{grad}\,W, d\bar{r}) = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial W}{\partial x}dx - \frac{\partial W}{\partial y}dy - \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

$$\bar{F} = -\mathrm{grad}\,W$$

$$\bar{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\bar{k} + \frac{\partial W}{\partial z}\bar{k}\right) = -\mathrm{grad}\,W$$

консервативная сила равна отрицательному градиенту потенциальной энергии.

№2 Фазовая траектория для тела, совершающего гармонические колебания

Фазовой плоскостью называется двумерное пространство, координатами в котором является координата точки и проекция импульса.

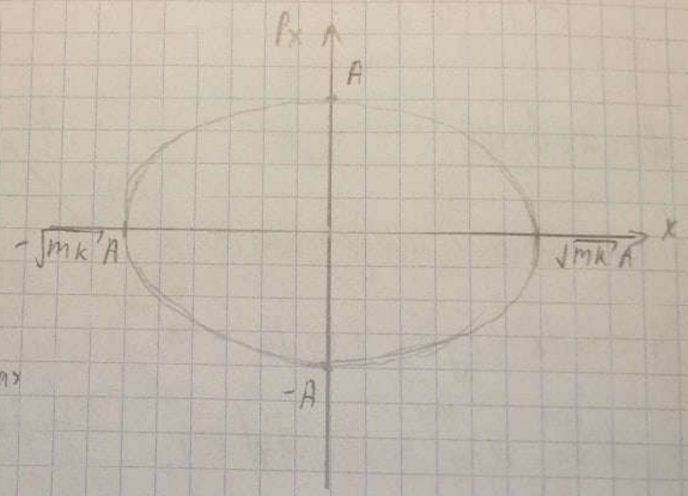
Для пружинного маятника из закона сохранения энергии:

$$W_{мех} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = const$$

следует, что фазовая траектория точки, совершающей свободные незатухающие колебания – это эллипс.

$$\frac{P_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

$$\left(\frac{P_x}{\sqrt{mk}A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1$$



$$\sqrt{mk}A = \omega m A = m V_{max} = P_{max}$$

№3. Подвешенный за край однородный сплошной диск диаметром 26 см может вращаться в вертикальной плоскости. Найдите собственную частоту его малых колебаний. Какой станет частота колебаний данного маятника, если его поместить в вязкую среду (логарифмический декремент затухания равен 1)?

Дано:

$D = 26$ см $= 0{,}26$ м.

$\omega - ?$

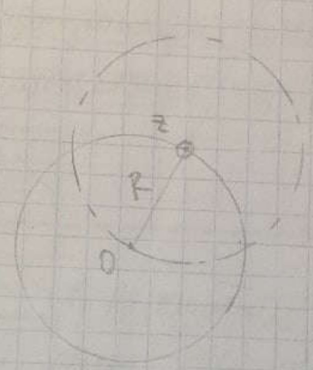
$\delta = \beta T = 1$.

$I_0 = \frac{mR^2}{2}$ (относительно центра) – для диска

По теореме Штейнера: $I_1 = I_0 + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$

По второму закону Ньютона:

$I_1 \varphi'' = -mgR\sin\varphi$; φ – угол отклонения



$$\varphi'' + \frac{mgR\sin\varphi}{I_1} = 0$$

$\sin\varphi \approx \varphi$ т.к. малые колебания

$$\varphi'' + \frac{2g\varphi}{3R} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81}{3\cdot 0{,}13}} = 7{,}093 \text{ Гц}.$$

В вязкой среде.

$$\left.\begin{aligned} &\delta = \beta T = 1 \\ &T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \\ &\omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{2\pi\beta}{\omega} = 1 \Rightarrow 4\pi^2\beta^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{4\pi^2+1}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4\pi^2+1}} = \frac{2\pi\omega_0}{\sqrt{4\pi^2+1}} = 7{,}004 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\omega_0 = 7{,}093$ Гц; $\omega = 7{,}004$ Гц.