Билет №2.

1. Полное, тангенсальное (касательное), нормальное ускорение.

Вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов - вектора $\bar{a}_\tau$, параллельного вектору скорости и вектора $\bar{a}_n$, перпендикулярного вектору скорости.

$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$

Вектор ускорения $\bar{a}_\tau$ называется тангенциальным или касательным ускорением.

Вектор ускорения $\bar{a}_n$ называется нормальным (перпендикулярным) ускорением.

Введем единичный вектор $\bar{\tau}_{\bar{v}} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$. $\bar{\tau}_{\bar{v}} \uparrow\uparrow \bar{v}$.

$\bar{\tau}_{\bar{v}}$ направлен по касательной траектории в ту же сторону, что и вектор скорости.

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\,|\bar{v}|\bar{\tau}_{\bar{v}}}{dt} = \frac{d|\bar{v}|}{dt}\bar{\tau}_{\bar{v}} + \frac{d\bar{\tau}_{\bar{v}}}{dt}|\bar{v}|$$

$$\bar{a}_\tau = \frac{d|\bar{v}|}{dt}\bar{\tau}_{\bar{v}}$$

$$\bar{a}_n = |\bar{v}|\dot{\bar{\tau}}_{\bar{v}}$$

Вектор $\bar{a}_\tau = \frac{d|\bar{v}|}{dt}\bar{\tau}_{\bar{v}}$ отвечает за изменение модуля вектора скорости

Проекция на направление скорости.

$$(\bar{a}_\tau)_{\bar{v}} = (\bar{a}_\tau, \bar{\tau}_{\bar{v}}) = \frac{d|\bar{v}|}{dt}(\bar{\tau}_{\bar{v}}, \bar{\tau}_{\bar{v}}) = \frac{d|\bar{v}|}{dt}$$

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_n = |\bar{v}|\dot{\bar{\tau}}_{\bar{v}}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\dot{\bar{\tau}}_{\bar{v}}$, т.е. в сторону поворота вектора скорости, следовательно, он отвечает за изменение направления вектора скорости.

Найдем $W_{пот}$ для $F_{грав} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$

Пусть $\bar{R}$ в системе отсчета связан с точкой m_1 =>

$F_{грав}$, действующий на материальную точку m_2, направлен противоположно: $\bar{F}_{грав} = -G\frac{m_1 m_2}{R^2}\bar{e}_{\bar{R}}$,

где $\bar{e}_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}}{|R|}$

т.к. $\bar{F}_{грав}$ – консервативная сила, то

$$\int(\bar{F}, d\bar{r}) = W^{нач}_{пот} - W^{кон}_{пот.}$$

Этот интеграл не должен зависеть от траектории, поэтому будем интегрировать вдоль радиус-вектора $d\bar{r} = d\bar{R}$. $\bar{F}_{грав} \uparrow\downarrow \bar{R}$ =>

$$(\bar{F}_{грав}, d\bar{r}) = -F_{грав}\, dR$$

$$\int(\bar{F}_{грав}, d\bar{r}) = \int_{R_{нач}}^{R_{кон}}(-F_{грав}\, dR) = \int_{R_{нач}}^{R_{кон}}\left(-\frac{G m_1 m_2}{R^2}\, dR\right) = G\frac{m_1 m_2}{R}\Bigg|_{R_{нач}}^{R_{кон}} =$$

$$= G\frac{m_1 m_2}{R_{кон}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{нач.}}$$

Сравним: $W^{нач}_{пот} - W^{кон}_{пот} = G\frac{m_1 m_2}{R_{кон}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{нач}}$

$W_{пот\ грав} = -G\frac{m_1 m_2}{R} + C$ (обычно $C = 0$).

$W_{пот} = \int F_{сопр}\, dS = A_{сопр}$

② Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести (в общем случае и для однородного поля, с выводом)

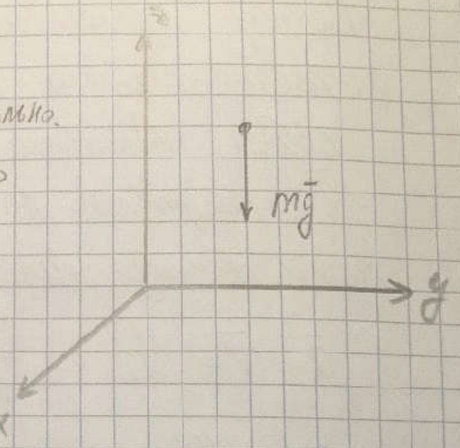
Для силы тяжести $F_T = mg$ потенциальная энергия $W_п = mgh$

h – определяется выбором начала отсчета энергии.

Проверим соотношение $F = -\operatorname{grad} W$

В системе отсчёта, связанной с землёй, введем систему координат так, чтобы ось z была направлена вверх, тогда потенциальная энергия тела равна $W_п = mgz + C$

C – определяется началом отсчета координаты z.



$z = const \Rightarrow$ вектор силы направлен перпендикулярно плоскости z, т.е. вертикально.

Величина энергии увеличивается вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вектор силы направлен вниз

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -mg$$

$$\Downarrow$$

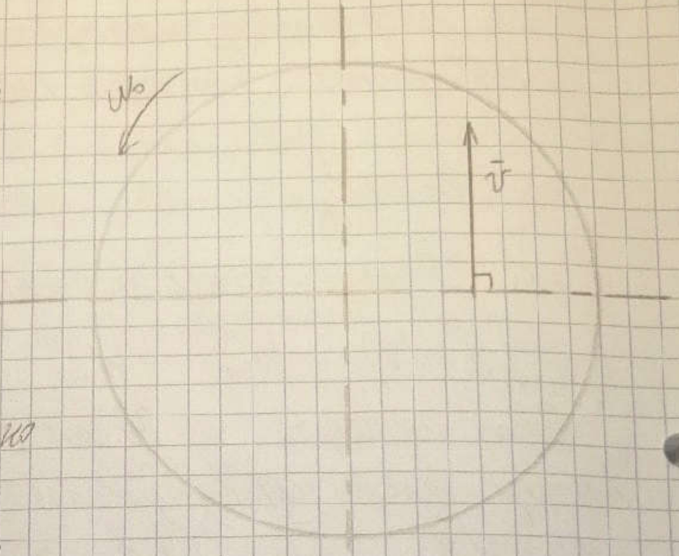
$$\bar{F}(0; 0; -mg)$$

$$W_п^{нач} - W_п^{кон} = A_{гр} = mgh$$

$$A_{гр} = \int F_{np} \, dS = \int mg \, dS = mgh$$

$$W_п^{гр} = mgh$$

③ Вокруг вертикальной оси вращается без трения сплошной однородный диск радиусом R и массой 8m. Угловая скорость диска w_0. На расстоянии R/2 от центра диска стоит пушка массой 4m, в стволе которой находится снаряд массой m. В некоторый момент времени пушка выстреливает и снаряд вылетает горизонтально (в направлении вращения) со скоростью V относительно земли. Найдите угловую скорость диска после выстрела снаряда.



Дано:

$R_1 = R$

$m_1 = 8m$

$w_1 = w_0$

$R_0 = R/2$

$m_2 = 4m$

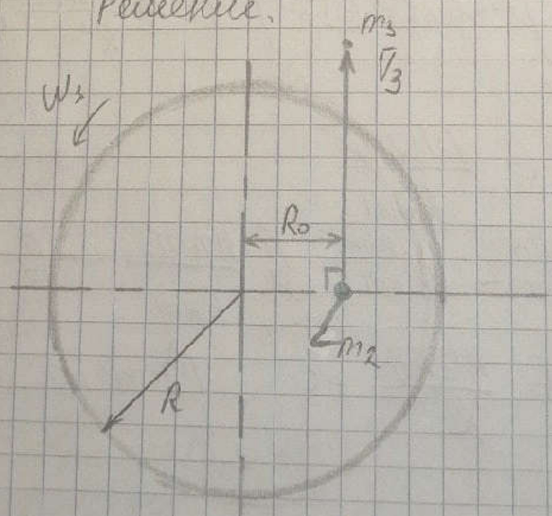
$m_3 = m$

$V_3 = V$

Найти:

w -?

Решение.



Закон сохранения момента инерции:

$$L_{нач} = L_{кон}$$

$$I_{нач} \cdot w_3 = I_{кон} w + m_3 V_3 R_0$$

$$I_{нач} = \frac{m_1 R_1^2}{2} + R_0^2 (m_2 + m_3)$$

$$I_{кон} = \frac{m_1 R_1^2}{2} + m_2 R_0^2$$

$$\left(\frac{m_1 R_1^2}{2} + R_0^2(m_2+m_3)\right)W_1 = \left(\frac{m_1 R_1^2}{2} + m_2 R_0^2\right)W + m_3 V_3 R_0.$$

$$W = \frac{m_1 R_1^2 W_1 + 2W_1(m_2+m_3)R_0^2 - 2m_3 V_3 R_0}{2\left(\frac{m_1 R_1^2 + 2m_2 R_0^2}{2}\right)}$$

$$W = \frac{8m \cdot R^2 \cdot W_0 + 2W_0(4m+m)\frac{R^2}{4} - 2mV\frac{R}{2}}{8mR^2 + 2 \cdot 4m \cdot \frac{R^2}{4}} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

$$W = \frac{16 m W_0 R^2 + 5 W_0 m R^2 - 2mVR}{16 mR^2 + 4mR^2}$$

$$W = \frac{(21 W_0 R - 2V)\,mR}{(20R)\,mR}$$

$$W = \frac{21 W_0 R - 2V}{20R}$$

Ответ: $W = \dfrac{21 W_0 R - 2V}{20R}$