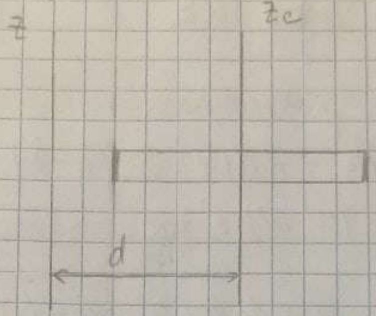
Билет №18

(№1) Теорема Штейнера (без доказательства)

Момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и квадрата расстояния между осями, умноженного на массу тела.

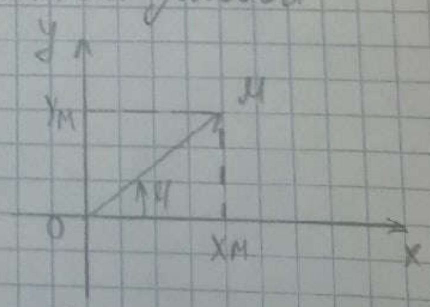
$I = I_0 + md^2$



(№2) Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот (вывод выражения для амплитуды и фазы результирующего колебания).

Векторная диаграмма:

Рассмотрим радиус-вектор точки M, вращающегося вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω.



$\varphi = \omega t + \varphi_0$

φ_0 - начальное значение

$|OM| = A$. Координаты точки M:

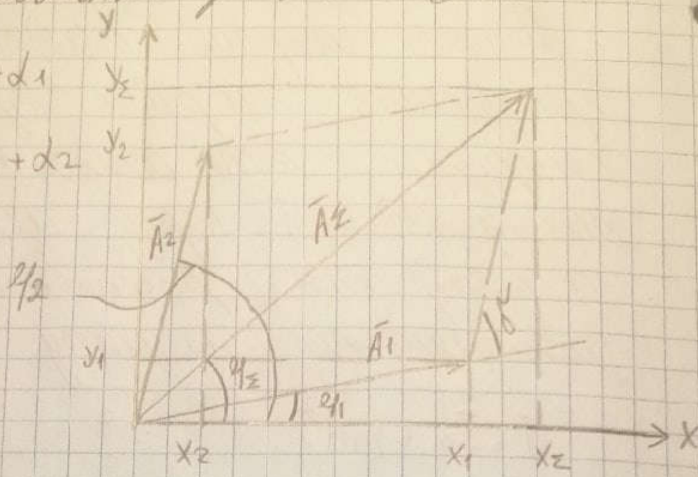
$$\left.\begin{aligned} Y_M &= A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ X_M &= A\cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\}$$ описывают колебание осцилляторов вдоль осей x и y.

Данная форма представления колебания называется амплитудной (векторной) диаграммой

Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот

$x_1 = A_1\cos(\omega t + \alpha_1) \Rightarrow \varphi_1 = \omega t + \alpha_1$

$x_2 = A_2\cos(\omega t + \alpha_2) \Rightarrow \varphi_2 = \omega t + \alpha_2$



Результирующему колебанию

$x_\Sigma = x_1 + x_2$, сопоставим

вектор $\bar A_\Sigma = \bar A_1 + \bar A_2$

с фазой $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$

По теореме косинусов:

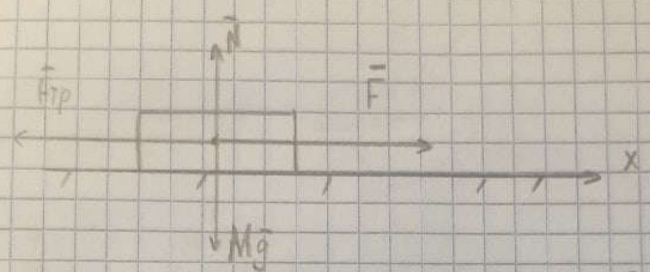
$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \delta)$$

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega - \omega)t + \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

№3. Доска массой M неподвижно лежала на горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения между доской и столом равен μ. В момент времени $t=0$ к доске приложили горизонтальную силу $F=kt$, где k – известная постоянная. Найти зависимость от времени скорость и перемещение доски.

Дано:
$F=kt$
M
μ
$\upsilon(t)$ – ?
$S(t)$ – ?



Момент времени t_0, когда есть сила $F=kt$, но тело еще покоится, т.е. $a=0$.

По третьему закону Ньютона:

$$\begin{cases} F_{тр} = F \\ F_{тр} = N\mu \\ N = Mg \\ F = kt_0 \end{cases} \quad Mg\mu = kt_0 \Rightarrow t_0 = \frac{Mg\mu}{k}$$

Момент времени $t > t_0$.

Второй закон Ньютона

$$Ma = F - F_{тр}$$

$$a = \frac{kt}{M} - g\mu$$

$$\upsilon = \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{kt}{M} - g\mu\right) dt = \left(\frac{kt^2}{2M} - g\mu t\right)\Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= \left(\frac{k(t^2 - t_0^2)}{2M} - g\mu(t - t_0)\right) =$$

$$= \frac{kt^2}{2M} - g\mu t - \frac{k}{2M} \cdot \left(\frac{Mg\mu}{k}\right)^2 + g\mu \cdot \frac{Mg\mu}{k} =$$

$$= \frac{kt^2}{2M} - g\mu t - \frac{Mg^2\mu^2}{2k} + \frac{g^2\mu^2 M}{k}$$

$$S = \int_{t_0}^{t} V\,dt = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{kt^2}{2M} - g\mu t - \frac{Mg^2\mu^2}{2k} + \frac{g^2\mu^2 M}{k} \right) dt =$$

$$= \left(\frac{kt^3}{6M} - \frac{g\mu t^2}{2} - \frac{Mg^2\mu^2}{2k} t + \frac{g^2\mu^2 M}{k} t \right) \Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{kt^3}{6M} - \frac{g\mu t^2}{2} - \frac{\mu^2 g^2 M}{2k} t + \frac{g^2\mu^2 M}{k} t -$$

$$- \frac{k}{6M} \left(\frac{Mg\mu}{k}\right)^3 + \frac{g\mu}{2} \left(\frac{Mg\mu}{k}\right)^2 + \frac{\mu^2 g^2 M}{2k} \left(\frac{Mg\mu}{k}\right) -$$

$$- \frac{g^2\mu^2 M}{k} \left(\frac{Mg\mu}{k}\right) =$$

$$= \frac{kt^3}{6M} - \frac{g\mu t^2}{2} - \frac{\mu^2 g^2 M t}{2} + \frac{g^2\mu^2 M}{k} t -$$

$$- \frac{g^3\mu^3 M^2}{6k^2} + \cancel{\frac{g^3\mu^3 M^2}{2k^2}} + \cancel{\frac{\mu^3 g^3 M^2}{2k^2}} - \cancel{\frac{g^3\mu^3 M^2}{k^2}} =$$

$$= \frac{kt^3}{6M} - \frac{1}{2} g\mu t^2 - \frac{1}{2} \mu^2 g^2 M t + \frac{g^2\mu^2 M t}{k} - \frac{1}{6k^2} g^3\mu^3 M^2$$

Ответ: $V(t) = \frac{1}{2M} kt^2 - g\mu t + \frac{1}{2k} g^2\mu^2 M$

$$S(t) = \frac{1}{6M} kt^3 - \frac{1}{2} g\mu t^2 + t \, g^2\mu^2 M \cdot \frac{2-k}{2k} - \frac{1}{6k^2} g^3\mu^3 M^2$$