1. Дать определение линейного (векторного) пространства.

2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

3. Дать определение базиса и размерности линейного пространства.

4. Дать определение матрицы перехода от одного базиса к другому.

5. Записать формулу преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.

6. Дать определение подпространства линейного пространства и линейной оболочки системы векторов.

7. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.

8. Записать неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника.

9. Дать определение ортогональной системы векторов и ортонормированного базиса евклидова пространства.

10. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости и ортогональности системы векторов.

11. Дать определение линейного оператора и матрицы линейного оператора.

12. Записать формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

13. Дать определение характеристического уравнения, собственного числа и собственного вектора линейного оператора.

14. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих разным собственным значениям.

15. Дать определение самосопряжённого линейного оператора на евклидовом пространстве и сформулировать теорему о виде матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе.

16. Сформулировать теорему о корнях характеристического уравнения самосопряжённого оператора.

17. Сформулировать теорему о собственных векторах самосопряжённого оператора, отвечающих разным собственным значениям.

18. Сформулировать теорему о существовании ортонормированного базиса, в котором матрица заданного самосопряженного оператора имеет простой вид.

19. Дать определение ортогонального линейного оператора и ортогональной матрицы.

20. Дать определение квадратичной формы, матрицы и канонического вида квадратичной формы.

21. Записать формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

22. Дать определение положительно определённой, отрицательно определённой и неопределённой квадратичной формы.

23. Сформулировать критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы и его следствия для отрицательно определённых и неопределённых форм.

24. Сформулировать закон инерции квадратичных форм.

1. Множество **L** элементов x,y,z называется *линейным пространством*, если:
1. Для $\forall x\in$**L** и $y\in$**L** определена операция сложения;
2. Для $\forall x \in$ **L** и любого числа α определена операция умножения элемента x на число α ;
3. Определено равенство элементов из **L** ;
4. Операции (1) и (2) удовлетворяют условиям:
$x+y=y+x$; $(x+y)+z=x+(y+z)$; $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$; $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$; $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$; $\exists x$, : $x+0 = x$; $\forall x\in$**L:** $x\cdot 1=1\cdot x = x$;
$\forall x \in$ **L** $-\exists$ x: $x+(-x)=0$.

2. Если для системы *k* векторов a_1 , a_1 , a_3 равенство $\sum^{k} \lambda_i a_i = 0$ верно только при $\lambda_i = 0$ (i =1,..,k), то эта система называется *линейно независимой*. В ином случае система ЛЗ: если векторы a_1,a_2 ,a_3 линейно зависимы, то
хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот.

3. $\forall$совокупность *n* ЛНЗ векторов e_1 ,e_2 ,e_3 называется *базисом* пространства $\mathbf{R}^n$, если каждый из векторов пространства $\mathbf{R}^n$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этой совокупности, т.е. $x=x_1 e_1 +x_2 e_2 +x_3 e_3$.

Размерностью пространства $\mathbf{R}^n$ называется число векторов в любом его базисе.

4. Матрица перехода от B к B′ наз матрицу векторов базиса B′ в матрице B

5. Формула преобразования координат при преобразовании базиса: Если x− произвольный вектор из L_n, X и X′− столбцы его координат в базисах B и B′ соответственно то имеет место равенство

$$X'=(T_{B\to B'})^{-1} X$$

6. Подмножество H линейного пространства L называют линейным подпространством, если выполнены следующие два условия: 1) $x,y\in H \Rightarrow x+y\in H$; 2) $x\in H$, $\lambda\in R \Rightarrow \lambda x\in H$. Описанное линейное подпространство называют линейной оболочкой системы векторов $e_1, e_2, ..., e_k$ и обозначают $\mathrm{span}\{e_1,e_2,...,e_k\}$.

7. Линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция, ставящая в соответствие любым двум элементам x ∈ **L** и y ∈ **L** число, называемое скалярным произведением и обозначаемое (x, y), для которого выполняется: $(x,y)=(y,x)$; $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$; $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$; $(x,x)\geq 0$,причем $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

8. нер-во Коши — Буняковского для$\forall x,y$: $(x, x)(y, y) \geq (x, y)^2$
для$\forall x,y$: $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$(нер-во треугольника)

9. Систему векторов евклидова пространства называют ортогональной, если любые два вектора из этой системы ортогональны. Ортогональный базис называют ортонормированным, если каждый вектор этого базиса имеет норму (длину), равную единице.

10. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима

11. Отображение $A: L \to L'$ из линейного пространства L в линейное пространство L′ называют линейным оператором, если выполнены следующие условия:

а) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ для $\forall$ векторов $x, y \in L$;
б) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ для $\forall$ вектора $x \in L$ и любого числа $\lambda \in R$.
Матрицу $A = (a_1 \ldots a_n)$, составленную из координатных столбцов векторов
$Ab_1, \ldots, Ab_n$ в базисе $b = (b_1 \ldots b_n)$ называют <u>матрицей линейного оператора</u> A в базисе b.

12. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $A: L \to L$, записанные в базисах b и e линейного пространства L, связаны друг с другом соотношением $A_e = U^{-1} A_b U$, где $U = U_{b \to e}$ — матрица перехода от базиса b к базису e.

13. Уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ — характеристическим уравнением матрицы A. Ненулевой вектор x в линейном пространстве L называют <u>собственным вектором линейного оператора</u> $A: L \to L$, если для некоторого действительного числа λ выполняется соотношение $Ax = \lambda x$. При этом число λ называют <u>собственным числом</u> линейного оператора A.

14. Пусть собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ линейного оператора A попарно различны. Тогда система соответствующих им собственных векторов $e_1, \ldots, e_r$ линейно независима.

15. Линейный оператор $A^*: E \to E$ называют <u>сопряженным к линейному оператору</u> $A: E \to E$, если для любых векторов $x, y \in E$ верно равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$

Т: Любому линейному оператору $A: E \to E$ соответствует единственный сопряженный оператор A^*, причем его матрицей в любом ортонормированном базисе e является матрица A^T, транспонированная матрице A линейного оператора A в том же базисе e.

16. Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны.

17. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

18. Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ самосопряженного оператора A, дей- ствующего в n-мерном евклидовом пространстве E, попарно различны, то в E существует ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора A имеет диагональ- ный вид, причем диагональными элементами такой матрицы являются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

19. Квадратную матрицу O называют ортогональной, если она удовлетворяет условию $O^T O = E$, где E-единичная матрица

Линейный оператор $A: E \to E$, действующий в евклидовом пространстве E, называют <u>ортогональным оператором</u>, если он сохраняет скалярное произведение в E, т.е. для любых векторов $x, y \in E$ выполняется равенство $(Ax, Ay) = (x, y)$

20. Однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} \in R$ называют <u>квадратичной формой</u>. $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n, называется <u>матрицей квадратичной формы.</u> Квадратичную форму $\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$, $\alpha_i \in R$, $i=1,n$, не имеющую попарных произведений переменных, называют <u>квадратичной формой канонического вида</u>.

21. матрица A квадратичной формы при переходе к новому базису изменяется по формуле $A' = U^T AU$, где U — матрица перехода.

22. Квадратичную форму $f(x) = x^T Ax$, $x = (x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_n)^T$, будем называть:
-положительно (отрицательно) определенной, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$);
– неотрицательно (неположительно) определенной, если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для любого столбца x, причем существует ненулевой столбец x, для которого $f(x) = 0$;
– знакопеременной (неопределенной), если существуют такие столбцы x и y, что
$f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

23. (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма от n пе- ременных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись нера- венства$\Delta_1 >0,\Delta_2 >0,\Delta_3 >0,...,\Delta_n >0$.

Следствие Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $-\Delta_3 > > 0$, . . . , $(-1)^n\Delta_n > 0$ (знаки угловых миноров чередуются начиная с минуса).

24. **Закон инерции** квадратичных форм гласит: число положительных, отрицательных и нулевых канонических коэфициентов квадратичной формы не зависит от преобразования, с помощью которого квадатичная форма приводится к каноническому виду. (НЕ ИЗ ЛЕКЦИЙ!)

Законом инерции. (из лекции)

Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных заменах переменных и равен:
а) числу отличных от нуля коэффициентов в любом ее каноническом виде;
б) количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы (с учетом их кратности).
В различных канонических видах данной квадратичной формы остается неизменным не только количество ненулевых коэффициентов, но и количество положительных и соответственно отрицательных коэффициентов. законом инерции.