

**Лекция 1. Вводная.**

*Предмет физики. Физический объект, физическое явление, физический закон. Физика и современное естествознание. Системы отсчета. Кинематика материальной точки. Угловые скорость и ускорение твердого тела. Классический закон сложения скоростей и ускорений при поступательном движении подвижной системы отсчета.*

Физика (с древнегреческого переводится как ПРИРОДА) – наука, занимающаяся изучением простейших, и вместе с тем наиболее общих законов движения окружающих нас объектов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и её законы лежат в основе всего естествознания.

В своей основе физика – экспериментальная наука: её законы базируются на фактах, установленных опытным путем. Эти законы представляют собой строго определенные количественные соотношения и формулируются на математическом языке.

Различают экспериментальную физику (опыты, проводимые для обнаружения новых фактов и для проверки открытых физических законов), и теоретическую физику (цель которой состоит в формулировке общих законов природы и в объяснении конкретных явлений на основе этих законов, а также в предсказании новых явлений.)

Современная физика имеет дело с немногим числом фундаментальных законов, или фундаментальных физических теорий, охватывающих все разделы физики. Эти теории представляют собой обобщение наших знаний о характере физических процессов и явлений; приближенно, но наиболее полное отражение различных форм движения материи в природе.

К фундаментальным физическим теориям относятся: классическая механика Ньютона, механика сплошных сред, термодинамика, статистическая физика, электродинамика, специальная теория относительности и релятивистская механика, общая теория относительности, квантовая механика, квантовая статистика, квантовая теория поля.

Физические законы записываются в виде математических соотношений между физическими величинами.

**Физический закон** — эмпирически установленная и выраженная в строгой словесной и/или математической формулировке устойчивая связь между повторяющимися явлениями, процессами и состояниями тел и других материальных объектов в окружающем мире. Выявление физических закономерностей составляет основную задачу физической науки.

**Физический объект** - выделенная для анализа часть физического мира.

**Физическая величина** - характеристика одного из свойств физического объекта: - общая в качественном отношении многим физическим объектам; но - индивидуальная в количественном отношении для каждого объекта.

**Физические величины** имеют единицы измерения (размерности), которые отражают их физические свойства. В настоящее время для систем единиц принята международная система (СИ) в которой основными единицами являются килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела. В рамках СИ считается, что эти единицы имеют независимую размерность, т.е. ни одна из основных единиц не может быть получена из других. (ГОСТ 8.417-81 Государственная система обеспечения единства измерений).

Основным приемом познания является **научный метод** — совокупность основных способов получения новых знаний и методов решения задач в рамках любой науки.

Метод включает в себя способы исследования феноменов, систематизацию, корректировку новых и полученных ранее знаний.

Умозаключения и выводы делаются с помощью правил и принципов рассуждения на основе эмпирических (наблюдаемых и измеряемых) данных об объекте.

Базой получения данных являются *наблюдения и эксперименты*.

Для объяснения наблюдаемых фактов выдвигаются гипотезы и строятся теории, на основании которых формулируются выводы и предположения. Полученные прогнозы проверяются экспериментом или сбором новых фактов.

Важной стороной научного метода, его неотъемлемой частью для любой науки, является требование объективности, исключающее субъективное толкование результатов. *Не должны приниматься на веру какие-либо утверждения, даже если они исходят от авторитетных учёных.*

Всякая физическая теория базируется на каких-то основных положениях (постулатах). При этом в рамках этой теории пренебрегают какими-то явлениями. Затем по результатам опытных данных проверяют выводы, полученные из этой теории. Если необходимо, то основные положения теории уточняются и т.д.

В классической механике, например, время рассматривается как абсолютный параметр, не зависящий от других явлений.

Одной из простейших моделей физического объекта является точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь (и это практически не повлияет на решение задачи). Материальная точка – точка, имеющая массу. Точечный заряд – точка, имеющая электрический заряд.

### Кинематика.

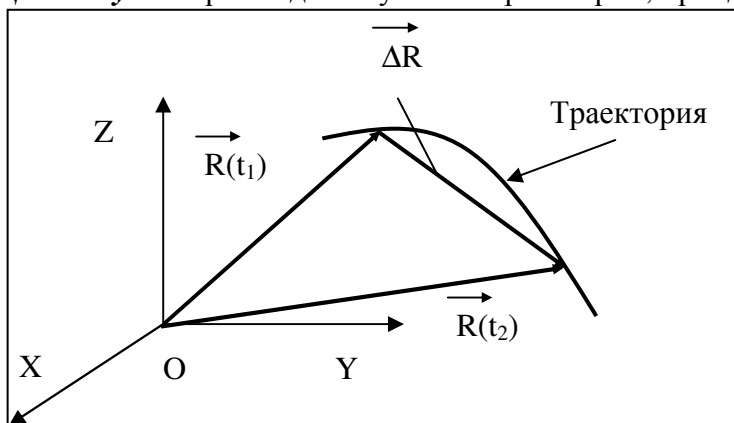
Кинематика описывает общие законы движения точки (без учета сил). Именно в кинематике вводятся понятия вектора скорости, вектора ускорения, вектора перемещения.

При описании движения необходимо определить систему отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение – это тело называется началом отсчета. Выбор системы отсчета определяется целью и удобством рассмотрения движения точек или тел. В качестве системы координат применяют, например, декартову (правую) систему, или сферическую и т.д.

### Траектория, перемещение.

Пусть некоторая точка А движется в пространстве. Множество точек в пространстве, которые проходит точка А при своем движении называется **траекторией** точки. **Уравнение траектории** – это закон изменения радиус-вектора точки, выраженный в виде  $\vec{R}_A = \vec{R}(t)$  (Эта запись означает, что координаты радиус-вектора точки А в каждый момент времени задаются тремя функциями  $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , зависящими от времени  $t$ ). Путь – это участок траектории между начальным и конечным положениями точки.

**Длина пути  $L$**  равна длине участка траектории, пройденного точкой за промежуток времени



( $t_1, t_2$ ). (Иногда путем называют длину пути – обычно это ясно из условия задачи – например, «найти путь, пройденный точкой до остановки»).

Примеры траекторий. Если траектория – окружность, то движение точки называется вращательным. Если траектория – прямая линия, то движение называется прямолинейным.

**Вектором перемещения  $\Delta\vec{R}$**  за интервал времени ( $t_1, t_2$ ) называется вектор, соединяющий начальное (в момент  $t_1$ ) и

конечное (в момент  $t_2$ ) положения точки.

По определению, вектор перемещения равен **векторной** разности радиус-векторов

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(t_2) - \vec{R}(t_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

(т.е. координаты вектора перемещения равны разности соответствующих координат этих векторов). Из рисунка видно, что вектор перемещения лежит на *секущей* прямой для траектории.

Например, если точка покоится, то вектор перемещения – нулевой  $\Delta\vec{R} = \vec{0}$ . Или если точка в процессе своего движения вернулась в ту же точку, то вектор перемещения **тоже** нулевой.

**Величиной перемещения (или просто перемещением)** называется длина вектора перемещения:

$$\Delta R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Очевидно, что длина пути  $L$  и величина перемещения  $\Delta R$ , в общем случае, не совпадают. Если величина перемещения может уменьшаться, то **длина пути убывать не может**.

**Средней путевой скоростью** (или средней скоростью пути) называется отношение длины пути точки за интервал времени  $(t_1, t_2)$  к величине этого интервала  $\Delta t = t_2 - t_1$ . По определению – эта величина является **числом (скаляром)**.

$$V_{\text{ср.пути}} = \frac{L}{\Delta t} \text{ (м/с)}.$$

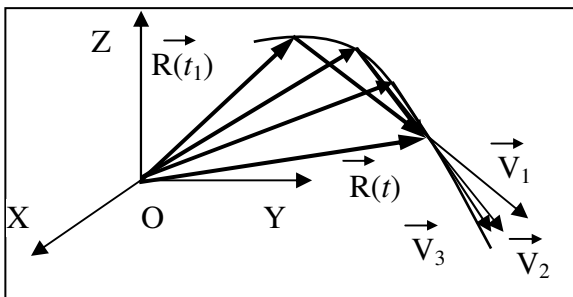
**Вектором средней скорости перемещения** (или просто скоростью перемещения) за период времени  $(t_1, t_2)$  называется **вектор** равный отношению вектора перемещения к величине этого промежутка времени  $\Delta t$ .

$$\vec{V}_{\text{ср.перем}} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right).$$

Координаты этого вектора получены делением координат вектора перемещения на величину интервала времени  $\Delta t$  (так как промежуток времени положительно число, то направления вектора перемещения и вектора средней скорости перемещения совпадают).

### Мгновенная скорость.

**Мгновенная скорость (скорость)** точки  $\vec{V}$ , это вектор, являющийся пределом скоростей перемещения (в некоторый момент времени) при стремлении  $\Delta t$  к нулю.



$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{перем}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}.$$

(В математике таким образом определяется первая производная.) Т.е. вектор скорости – это вектор, равный мгновенному изменению вектора перемещения:  $\vec{V} = \vec{R}'(t)$ . Координаты вектора скорости равны производным от соответствующих координат вектора перемещения:

$$V_x = X'(t), V_y = Y'(t), V_z = Z'(t).$$

В механике *традиционно* производную по времени обозначают верхней точкой. Так что

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}(t).$$

**Вектор скорости всегда** лежит на касательной линии к траектории и направлен в сторону перемещения (движения) точки.

Важное свойство мгновенной скорости - длина вектора мгновенной скорости равна величине **мгновенной путевой скорости**. Отсюда, можно сделать вывод, что **производная по времени от длины пути равна модулю вектора скорости**. Так длина вектора не может быть отрицательной, то производная от длины пути тоже не может быть отрицательной – это значит, что длина пути не убывает:

$$V = |\vec{V}| = \dot{L}(t) \geq 0.$$

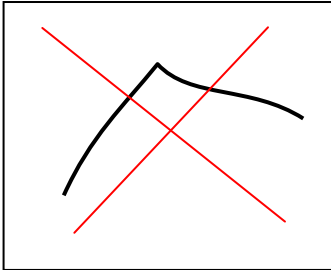
Таким образом, перемещение точки за интервал времени (в декартовой системе координат)

$$\Delta\vec{R} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt \Leftrightarrow \Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt, \quad \Delta y = \int_{t_1}^{t_2} v_y dt, \quad \Delta z = \int_{t_1}^{t_2} v_z dt. \text{ Длина пути } L = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt.$$

**Ускорение.**

В общем случае вектор скорости  $\vec{V}$  тоже зависит от времени, т.е. его координаты являются функциями времени  $\vec{V} = (V_x(t); V_y(t); V_z(t))$ , следовательно, по аналогии с вышеизложенным можно ввести вектор среднего ускорения и вектор мгновенного ускорения, равный мгновенному изменению вектора скорости – он называется *вектором ускорения*  $\vec{a} = \vec{V}'(t)$ , компоненты которого определяются равенствами

$$a_x = \dot{v}_x, \quad a_y = \dot{v}_y, \quad a_z = \dot{v}_z.$$



Единицы измерения величины ускорения м/с<sup>2</sup>.

**В дальнейшем будут рассматриваться только гладкие траектории, а именно – такие траектории, у которых движение точки описывается непрерывно дифференцируемыми функциями. В частности, среди них не могут быть такие у которых касательная не определена однозначно!**

**Движение по прямой (прямолинейное движение).****Движение с постоянной скоростью.**

Если величина вектора скорости точки не меняется, то длина пути вычисляется как  $L = V \cdot (t - t_0)$ , где  $t_0$  – начальный момент отсчета времени.

Пусть теперь постоянно *направление* вектора скорости. В этом случае траектория точки лежит на прямой линии. **Всегда можно таким образом ввести систему координат, чтобы этой прямой являлась, например, ось X.** Тогда во все моменты времени остальные координаты  $Y=0$  и  $Z=0$ . Вектор скорости должен касаться траектории, поэтому он также лежит на этой прямой и для него также  $V_y=0$ ,  $V_z=0$ . Таким образом, при прямолинейном движении радиус-вектор описывается одной координатой  $X(t)$ ,  $\vec{R} = (X(t); 0; 0)$ ; вектор скорости одной координатой  $V_x(t)$ ,  $\vec{V} = (V_x(t); 0; 0)$  и ускорение тоже одной координатой  $a_x(t)$ ,  $\vec{a} = (a_x(t); 0; 0)$ . Поэтому в данном случае можно не использовать векторное представление, а только числовое – рассматривая только соответствующую координату. О направлении вектора можно судить по знаку координаты - если координата соответствующего вектора положительная, то вектор направлен в положительном направлении оси X. Тогда

$$\Delta x = \int_{t_0}^t v_x dt, \quad \Delta v_x = \int_{t_0}^t a_x dt$$

В частном случае равноускоренного (равнопеременного движения)  $a_x = const$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0) + \frac{a_x \cdot (t - t_0)^2}{2}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot (t - t_0),$$

где  $x_0$ ,  $v_{0x}$  – значения координаты и скорости в начальный момент времени  $t=t_0$ .

В общем случае движения с постоянным ускорением можно записать

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot (t - t_0), \quad x = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0) + \frac{a_x \cdot (t - t_0)^2}{2},$$

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot (t - t_0), \quad y = y_0 + v_{0y} \cdot (t - t_0) + \frac{a_y \cdot (t - t_0)^2}{2},$$

$$v_z = v_{0z} + a_z \cdot (t - t_0), \quad z = z_0 + v_{0z} \cdot (t - t_0) + \frac{a_z \cdot (t - t_0)^2}{2}.$$

или, в векторной форме

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{a} \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0).$$

траекторией тела может быть прямая или парабола, в зависимости от начальных условий.

### Закон сложения скоростей и ускорений.

При описании движения точки все системы отсчета является равноправными. Рассмотрим как преобразуются кинематические величины при переходе от одной системы отсчета к другой. Ограничимся системами отсчета, которые движутся друг относительно друга поступательно.

Положение некоторой точки А можно задать в системе отсчета 1 радиус-вектором  $\vec{R}_1$ , в системе отсчета 2 – радиус-вектором  $\vec{R}_2$ . Если задан вектор, задающий положения начала отсчета одной системы отсчета относительно другой, то

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_{21}$$

Тогда получаем уравнения связи для скоростей и ускорений

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21}, \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{21},$$

где  $\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{R}_{21}}{dt}$ ,  $\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{a}_{21}}{dt}$  – векторы скорости и ускорения второй системы отсчета относительно первой.

Системой отсчета, *сопутствующей* данной точке называется такая система отсчета, в которой вектор скорости данной точки является нулевым (т.е. точка покоится в данной системе отсчета).

**Пример.** Сопутствующей системой отсчета для водителя автомобиля является система, связанная с автомобилем, так как в этой системе отсчета водитель покоится. ♣

### Математические сведения

Скалярное произведение двух векторов  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  и  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  в декартовой системе координат вычисляется как  $(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ .

С другой стороны  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$  в любой системе координат.

Выводы из этих формул.

1) Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны друг другу.

2) Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2, \text{ откуда для длины вектора } |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}.$$

3) Определим единичный вектор направления для любого вектора  $\vec{b}$  как вектор

$$\vec{\tau}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}. \text{ Он не зависит от длины вектора } \vec{b}, \text{ а зависит, только от его направле-}$$

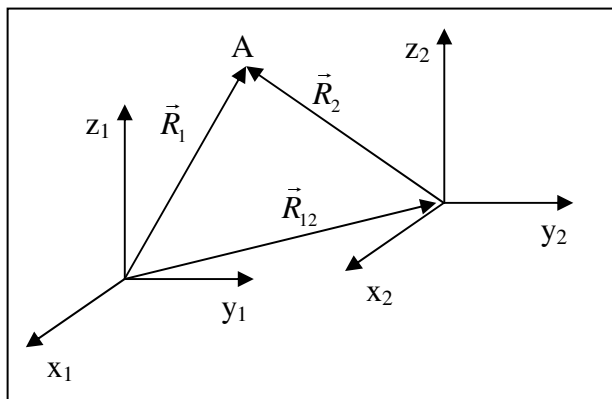
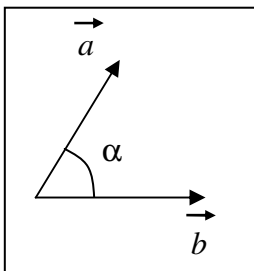
ния. Причем длина этого вектора равна единице:

$$|\vec{\tau}_b| = \sqrt{(\vec{\tau}_b, \vec{\tau}_b)} = \sqrt{\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)} = 1.$$

Чтобы найти проекцию вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ , надо найти проекцию на его направление

$$(\vec{a})_b = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \left( \vec{a}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = (\vec{a}, \vec{\tau}_b).$$

4) Если вектор непрерывно меняется в зависимости от какого-то параметра, то этот вектор можно диф-



ференцировать по этому параметру. Пусть, например, координаты вектора зависят от времени

$\vec{a} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ , тогда вектор  $\vec{c}$ , координаты которого определяются равенствами  $c_x = \frac{da_x}{dt}$ ,

$c_y = \frac{da_y}{dt}$ ,  $c_z = \frac{da_z}{dt}$  называется производным от вектора  $\vec{a}$ , т.е.  $\vec{c} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ .

5) Производная от скалярного произведения двух векторов

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{d}{dt}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \frac{da_x}{dt} b_x + \frac{da_y}{dt} b_y + \frac{da_z}{dt} b_z + a_x \frac{db_x}{dt} + a_y \frac{db_y}{dt} + a_z \frac{db_z}{dt} = \left( \frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{b} \right) + \left( \vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt} \right)$$

В частности,  $\frac{d}{dt}(|\vec{a}|^2) = \frac{d}{dt}(\vec{a}, \vec{a}) = 2 \left( \frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{a} \right)$ .

6) Если длина вектора  $|\vec{a}| = \text{const}$  не меняется, но сам вектор не постоянен  $\vec{a} \neq \text{const}$ , то получаем,

что из условия  $|\vec{a}|^2 = \text{const}$  вытекает  $\frac{d}{dt}(|\vec{a}|^2) = \left( \frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{a} \right) = 0$ , т.е. эти векторы ортогональны друг

другу:  $\frac{d\vec{a}}{dt} \perp \vec{a}$ . В некоторой системе координат вектор  $\vec{a}$  *вращается* вокруг своего начала.

В этом случае конец вектора  $\vec{a}$  описывает окружность, а вектор  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  направлен по касательной к

этой окружности в сторону поворота  $\vec{a}$  и, очевидно,  $\frac{d\vec{a}}{dt} \perp \vec{a}$ .

### Движение точки на плоскости.

Если траектория точки лежит в плоскости, то такое движение называется «плоским». В этом случае векторы скорости и ускорения также лежат в этой плоскости для любого момента времени.

Рассмотрим сопутствующую систему отсчета (эта система отсчета движется вместе с точкой). Тогда вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов - вектора  $\vec{a}_t$ , параллельного вектору скорости и вектора  $\vec{a}_n$ , перпендикулярного вектору скорости

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Вектор ускорения  $\vec{a}_t$  называется тангенциальным или касательным ускорением, а вектор ускорения  $\vec{a}_n$  называется нормальным (перпендикулярным) ускорением.

Введем единичный вектор для направления скорости  $\vec{\tau}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ . Этот вектор направлен по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор скорости. Тогда для ускорения должно быть

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{\tau}_v + |\vec{v}| \dot{\vec{\tau}}_v.$$

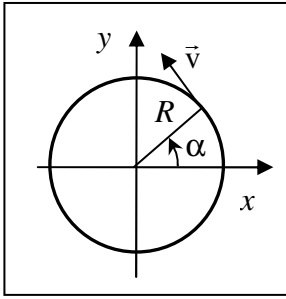
В этом выражении первое слагаемое определяет вектор, параллельный вектору скорости, а второе – перпендикулярный (так как  $\vec{\tau}_v \perp \dot{\vec{\tau}}_v$ ), поэтому  $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{\tau}_v$  и  $\vec{a}_n = |\vec{v}| \dot{\vec{\tau}}_v$ .

Вектор  $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{\tau}_v$  (тангенциальное или касательное ускорение) отвечает за изменение модуля вектора скорости. Проекция на касательное направление

$$(\vec{a}_t)_v = (\vec{a}_t, \vec{\tau}_v) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} (\vec{\tau}_v, \vec{\tau}_v) = \frac{d|\vec{v}|}{dt}.$$

Если модуль (длина) вектора скорости увеличивается, то величина проекции на касательное направление вектора ускорения положительная и  $\vec{a}_t$  направлен в ту же сторону, что и вектор скорости  $\vec{v}$ . И наоборот - если модуль вектора скорости уменьшается, то вектор касательного ускорения направлен против вектора скорости.

Вектор нормального ускорения  $\vec{a}_n = |\vec{v}| \dot{\vec{\tau}}_v$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\dot{\vec{\tau}}_v$ , т.е. в сторону поворота вектора скорости, следовательно, он отвечает за изменение направления вектора скорости.



Для того чтобы получить явную формулу для величины нормального ускорения рассмотрим движение точки по окружности радиуса R. Пусть окружность лежит в плоскости  $z=0$ . Радиус-вектор точки на окружности  $\vec{R} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha, 0)$ . Вектор скорости точки

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = (-\dot{\alpha} \cdot R \sin \alpha, \dot{\alpha} \cdot R \cos \alpha, 0), \text{ вектор ускорения точки}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (-\ddot{\alpha} \cdot R \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot R \cos \alpha, \ddot{\alpha} \cdot R \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot R \sin \alpha, 0)$$

Введем обозначения:

- величина  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  называется угловой скоростью (единица измерения 1/с),

- касательным ускорением называется величина  $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  (единица измерения 1/с<sup>2</sup>).

Тогда  $\vec{v} = (-\omega R \sin \alpha, \omega R \cos \alpha, 0)$  и величина скорости

$$|\vec{v}| = |\omega| R.$$

Рассмотрим проекцию вектора ускорения на единичный вектор  $\vec{\tau}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$

Так как  $(\vec{a}, \vec{\tau}_R) = (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \vec{\tau}_R) = (\vec{a}_n, \vec{\tau}_R)$ , где

$$(\vec{a}_n, \vec{\tau}_R) = (-\ddot{\alpha} \cdot R \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot R \cos \alpha) \cos \alpha + (\ddot{\alpha} \cdot R \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot R \sin \alpha) \sin \alpha$$

$$(\vec{a}_n, \vec{\tau}_R) = -\dot{\alpha}^2 \cdot R \cos \alpha \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot R \sin \alpha \sin \alpha = -\omega^2 \cdot R, \text{ то}$$

$$|\vec{a}_n| = |\omega|^2 R = \frac{|\vec{v}|^2}{R}.$$

Так как вектор скорости поворачивается к центру окружности, то вектор нормального ускорения направлен перпендикулярно вектору скорости к центру окружности (поэтому его часто называют *центростремительным* ускорением).

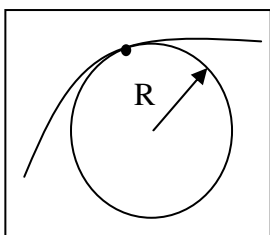
Найдем величину касательного ускорения. Так как  $\vec{\tau}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\omega}{|\omega|} (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$  и

$$a_\tau = (\vec{a}, \vec{\tau}_v) = (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \vec{\tau}_v) = (\vec{a}_\tau, \vec{\tau}_v), \text{ то}$$

$$a_\tau = \frac{\omega}{|\omega|} (\sin \alpha (\varepsilon \cdot R \sin \alpha + \omega^2 \cdot R \cos \alpha) + (\varepsilon \cdot R \cos \alpha - \omega^2 \cdot R \sin \alpha) \cos \alpha) \text{ или } a_\tau = \frac{\omega}{|\omega|} \varepsilon \cdot R, \text{ поэтому}$$

$$|a_\tau| = |\varepsilon| \cdot R.$$

К любой гладкой кривой можно в каждой точке построить не только единственную касательную прямую, но единственную касательную окружность. Поэтому при произвольном плоском движении точки вектор нормального ускорения направлен к центру этой касательной окружности. Для модуля вектора нормального ускорения можно написать формулу:



$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}.$$

Здесь  $v^2$  – квадрат модуля вектора скорости, R – радиус кривизны траектории в данной точке (радиус окружности, которая касается траектории в данной точке).

Величина скорости, длина пройденного пути определяются только касательным ускорением точки. О кривизне плоской траектории можно судить по нормальному ускорению точки. Если

«не обращать внимание» на нормальное ускорение, то движения по прямой линии и по гладкой кривой неразличимы. В этом смысле при вращательном движении с **постоянным касательным ускорением**  $a_t = \text{const}$  можно в качестве координаты взять длину дуги:

$$S = V_0 \cdot t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}$$

или

$$R \cdot (\varphi - \varphi_0) = R \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{R \cdot \varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Здесь принято, что  $t_0 = 0$ ,  $\omega_0$  – угловая скорость в начальный момент времени.

Таким образом, при вращательном движении с постоянным угловым ускорением можно написать формулу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$

Соответственно, для угловой скорости  $\varphi'(t) = \omega$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

#### **Частный случай – вращение с постоянной скоростью.**

При движении по окружности с постоянной скоростью касательное ускорение равно нулю. Угловая скорость остается постоянной  $\omega = \omega_0$ , следовательно, и угловое ускорение равно нулю. Тогда угловая координата меняется по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot (t - t_0).$$

Одному полному обороту соответствует  $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$ . Время одного оборота называется ПЕРИОДОМ  $T = t - t_0$ . Отсюда

$$2\pi = \omega \cdot T, \text{ откуда } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

*Замечание.* Последняя формула может быть получена и другим способом. При движении по окружности длина пути за один оборот равна  $L = 2\pi R$ , а величина скорости  $v = \omega \cdot R$ . Если скорости постоянная, то  $T = \frac{L}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Величина  $\nu = \frac{1}{T}$  называется **частотой вращения** и измеряется в Герцах (Гц). Частота вращения – это количество оборотов в секунду. Тогда угловая скорость выражается через частоту:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Поэтому иногда угловую скорость вращения называют циклической частотой вращения.

Очень часто скорость вращения задают в *количествах оборотов в минуту* -  $n$  (об/мин).

Связь частоты и скорости вращения  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{n}{60} = \frac{\pi n}{30}$ .



**Лекция 2. «Закон сохранения импульса».**

*Силы. Инерциальная система отсчета. Динамика материальной точки. Механическая система и ее центр масс. Уравнение изменения импульса механической системы. Закон сохранения импульса.*

**Определение.** Вектором импульса материальной точки называется вектор  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Единица измерения кг·м/с. Вектор импульса направлен также как и вектор скорости – по касательной к траектории. Иногда импульс называют количеством движения.

Если импульс точки изменился, то говорят, что на материальную точку было оказано воздействие со стороны внешних тел. Это воздействие называется *импульсом силы*.

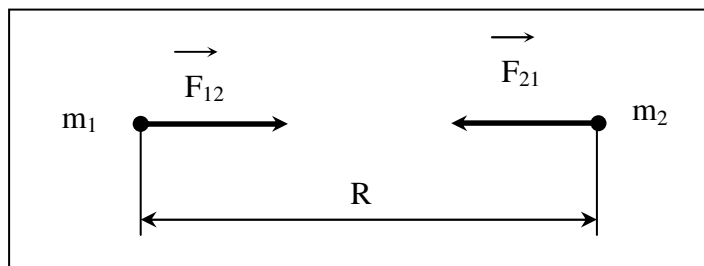
**Силы в механике.**

Сила – величина являющаяся мерой механического действия на данное материальное тело других тел. Это действие вызывает изменение импульсов точек тела или его деформацию и может иметь место, как при непосредственном контакте, так и через посредство создаваемых телами *полей*. Сила – векторная величина, характеризующаяся величиной, направлением и точкой приложения. Действия с силами, приложенными в одной точке производятся в соответствии с правилами действий с векторами. В классической механике силы не меняются при переходе от одной системы отсчета к другой.

Основные примеры сил в механике.

**1. Сила всемирного тяготения.**

**Закон всемирного тяготения Ньютона:** две материальные точки, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ , находящиеся друг от друга на расстоянии  $R$ , взаимно притягиваются с силой, прямо зависящий от произведения масс точек и обратно зависящий от квадрата расстояния между ними. Силы



притяжения точек лежат на линии, соединяющей эти точки.

Величина силы притяжения определяется по формуле:

$$F_{\text{ГП}} = G \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Константа  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  называется *гравитационной постоянной*.

Для двух сфер или шаров (однородных) сила гравитационного взаимодействия определяется также, только в этом случае берется *расстояние между их центрами*.

**2. Сила тяжести.**

Рассмотрим какое-нибудь тело массы  $m$ , находящееся *вблизи* поверхности Земли. Если тело имеет размеры соизмеримые с размерами человека (автомобиль, дом, мост и т.д.), то оно может быть представлено как материальная точка по сравнению с Землей (планетой). Планету Земля можно считать однородным шаром. Следовательно, для взаимодействия тела с Землей можно применить закон всемирного тяготения. При этом перепишем его немного в другом виде

$$F_{\text{ГП}} = mG \frac{M_{\text{ЗЕМЛИ}}}{(R_{\text{ЗЕМЛИ}} + h)^2}.$$

Здесь  $M_{\text{ЗЕМЛИ}}$  – масса планеты Земля,  $R_{\text{ЗЕМЛИ}} \approx 6400 \text{ км} = 6\,400\,000 \text{ м}$  – средний радиус планеты Земля,  $h$  – высота, на которой находится тело над Землей. Введем обозначение

$$g = G \frac{M_{\text{ЗЕМЛИ}}}{(R_{\text{ЗЕМЛИ}} + h)^2}.$$

Если тело находится на сравнительно *небольшой* высоте (по отношению к радиусу Земли) над поверхностью Земли, то в знаменателе можно считать, что  $R_{\text{ЗЕМЛИ}} + h \approx R_{\text{ЗЕМЛИ}}$ , поэтому для тела, находящегося вблизи поверхности Земли величина  $g = G \frac{M_{\text{ЗЕМЛИ}}}{(R_{\text{ЗЕМЛИ}})^2}$  остается практически

постоянной и равной  $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ . Следовательно, силу гравитации, действующую на тело массы  $m$  вблизи поверхности Земли можно считать равной  $F_{\text{ГР}} = mg$  и направленной к центру Земли. В этом случае силу гравитации называют *силой тяжести*. Она является частным случаем силы гравитации. В задачах, где поверхность Земли можно считать плоской, вектор силы тяжести *всегда* направлен *вниз к земле*.

### 3. Сила (нормальной) реакции опоры.

Если два тела находятся в соприкосновении, то между ними, вообще говоря, действуют силы взаимной реакции, вызванные этим соприкосновением. При прекращении соприкосновения эти силы исчезают. Эти силы называют силами *реакции опоры*. Сила, действующая перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел приложенная в точке соприкосновения тел называется силой *нормальной реакции опоры*.

*Весом тела* называется сила, с которой тело давит на *горизонтальную* поверхность.

### 4. Сила натяжения нити.

При попытке сжать нить с ее концов она начнет провисать, т.к. она не сопротивляется сжатию. Однако при растяжении она натягивается, т.е. она сопротивляется растяжению. Точно так же при попытке изогнуть нить она начнет прогибаться – т.е. нить не сопротивляется изгибу. Следовательно, сила, возникающая в нити при ее растяжении должна быть *растягивающей* и *направленной вдоль нити*. Эту силу называют *силой натяжения нити*.

### 5. Сила трения.

Сила трения возникает между *соприкасающимися* телами при попытке сдвинуть их друг относительно друга. Одной из причин возникновения силы трения является неровность поверхностей тел, взаимная деформация точек поверхностей и т.д. Сила трения всегда направлена так, чтобы *препятствовать относительному движению* соприкасающихся тел.

Сила трения бывает двух видов – сила трения покоя и сила трения скольжения.

*Сила трения покоя* действует на покоящееся тело при попытке сдвинуть его.

*Сила трения скольжения* действует на тело, скользящее по поверхности другого тела. Величина силы трения скольжения *не зависит* от площади поверхности соприкасающихся тел, а определяется силой реакции опоры  $N$  между телами и коэффициентом трения  $\mu$ :  $F_{\text{ТР}} = \mu N$ .

### 6. Сила сопротивления движению тела в жидкости или газе.

При движении тела в вязкой среде на него действует сила сопротивления. Сила сопротивления всегда направлена против *относительного* движения тела в жидкости или газе. Для сферических тел можно считать, что она приложена к центру сферы. Величина силы зависит от величины площади поперечного сечения тела  $S$ , а также от скорости тела  $V$ . В общем случае величину силы сопротивления можно представить в виде

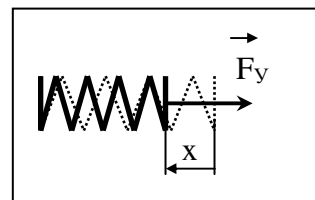
$$F_{\text{СОПР}} = \alpha \cdot S \cdot v^N,$$

где  $\alpha$  - коэффициент, зависящий от свойств жидкости и формы тела, показатель степени  $N$  определяется параметрами движения. При малых скоростях движения  $N=1$ .

### 7. Сила упругости.

*Деформацией тела* называется изменение размеров тела под действием действующей на него силы. Величину деформации определяют как разность между размером тела при действующей на него силе  $L_1$  и размером в свободном (ненагруженном состоянии)  $x = L_1 - L$ . *Направлением деформации* называется направление смещения точек тела.

**Закон Гука:** Сила упругости, возникающая в теле при *малой* деформации величиной  $x$ , прямо пропорциональна величине деформации и на-



правлена противоположно ее направлению.

$$\vec{F}_{\text{УПР}} = -k \cdot \vec{x}.$$

Коэффициент  $k$  называется *коэффициентом упругости* (жесткости) и измеряется в Н/м.

**Пример.** Найдем общий коэффициент упругости для двух невесомых пружин *одинаковой* длины, жесткости которых равны  $k_1$  и  $k_2$ , при параллельном и последовательном соединениях.

При параллельном соединении: общая сила деформации равна сумме сил в каждой из пружин:

$$F = F_1 + F_2.$$

При параллельном соединении деформации пружин одинаковые:  $x_1 = x_2 = x$ .

Тогда:  $k_{\text{ОБЩ}}x = k_1x_1 + k_2x_2$ . Поэтому:  $k_{\text{ОБЩ}} = k_1 + k_2$ . *При параллельном соединении жесткости пружин складываются.*

При последовательном соединении: в этом случае сила упругости *в любом* сечении пружин одинаковая! Действительно, если бы в двух рядом находящихся сечениях силы были бы разными, то часть пружины между этими двумя сечениями согласно второму закону Ньютона двигалась бы под действием разности этих сил, т.е. пружина продолжала бы деформироваться до тех пор, пока силы не станут равными.

Общая деформация пружин равна сумме деформаций каждой из них:  $x_1 + x_2 = x_{\text{ОБЩ}}$

Отсюда:

$$\frac{F}{k_{\text{ОБЩ}}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

или  $\frac{1}{k_{\text{ОБЩ}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ . *При последовательном соединении жесткости складываются по закону обратных величин.*

### Обобщенный закон Гука.

Рассмотрим силу упругости в стержне, площадь сечения которого  $S$ , а коэффициент жесткости  $k$ . Пусть  $L_0$  – начальная длина стержня. Если стержень деформировался на величину  $\Delta L$ , то величина силы упругости равна  $F = k \cdot \Delta L$ .

*Определение.* Напряжением  $\sigma$  в сечении называется отношение величины силы к площади поперечного сечения  $\sigma = \frac{F}{S}$ . Напряжение измеряется в Па (Паскалях.)

С учетом этого определения силу упругости можно представить в виде

$$F = \sigma \cdot S = k \cdot \Delta L = k \cdot L_0 \cdot \frac{\Delta L}{L_0}, \text{ откуда } \sigma = \frac{k \cdot L_0}{S} \cdot \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Введем обозначения: пусть  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$  – относительная деформация (безразмерная величина), а

$E = \frac{k \cdot L_0}{S}$ . Коэффициент  $E$  называется *коэффициентом упругости* материала или *модулем Юнга* (измеряется в Па).

Тогда обобщенный закон Гука будет иметь вид: Напряжение и относительная деформация прямо пропорциональны друг другу  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Коэффициентом пропорциональности является модуль Юнга.

### Законы Ньютона.

#### 1-Й ЗАКОН НЬЮТОНА.

Формулировка закона: Существуют такие системы отсчета, в которых материальная точка либо покоится, либо движется по прямой с постоянной скоростью, если на нее не действуют внешние силы или (векторная) сумма внешних сил равно нулю. Такие системы отсчета называются *инерциальными*. (То есть в *инерциальной* системе вектор ускорения точки равен нулю при нулевой силе).

Определения.

Свойство тела не изменять вектора своей скорости в отсутствие внешних сил называется *инертностью* тела (движение тела в такой системе отсчета называется *движением по инерции*).

**Масса** тела – это мера инертности тела. В классической физике масса тела равна сумме масс частей этого тела (говорят, что масса *аддитивная* – т.е. суммируемая величина). *В классической физике масса тела не зависит от системы отсчета.*

*Замечание.* Эксперимент показывает, что *инертная* масса равна *гравитационной*.

*Замечание.* Система отсчета, связанная с *неподвижной* Землей является неинерциальной ввиду вращения Земли (как планеты) вокруг оси, вокруг Солнца и т.д.

*Хотя система отсчета, связанная с Землей и не является инерциальной, в большом количестве задач ее можно считать инерциальной и это не приводит к большим относительным погрешностям.*

## 2-Й ЗАКОН НЬЮТОНА.

**Формулировка закона:** в инерциальной системе отсчета вектор ускорения материальной точки *сонаправлен* с вектором суммы внешних сил, его величина прямо пропорциональна величине равнодействующей всех сил и обратно пропорциональна массе этого тела:  $\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$ . (Чаще используют запись  $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$ .)

Это три числовых уравнения в координатах:

$$\begin{cases} m \cdot a_x = \sum F_x \\ m \cdot a_y = \sum F_y \\ m \cdot a_z = \sum F_z \end{cases}$$

Второй закон Ньютона можно записать и *импульсном* виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

- производная от вектора импульса в инерциальной системе отсчета равна вектору силы.

**Замечание.** Требование инерциальности системы отсчета весьма существенно. Первый закон выделяет инерциальные системы отсчета как такие системы, в которых материальная точка, на которое не действуют внешние силы, движется без ускорения. При переходе от одной системы отсчета к другой, ускорение преобразуется по правилу  $\vec{a}_1 = \vec{a}_{21} + \vec{a}_1$  (см. выше), и если новая система движется относительно старой без ускорения  $\vec{a}_{21} = \vec{0}$ , то ускорения тела в них *одинаковые*. Поэтому во всех *инерциальных* системах отсчета второй закон Ньютона выглядит одинаково:

$$m\vec{a}_A = m\vec{a}_{1A} = \sum \vec{F}.$$

Это равенство выражает собой принцип относительности Галилея для классической механики.

## 3-Й ЗАКОН НЬЮТОНА.

Две материальные точки действуют друг на друга с силами одинаковыми по величине, природе этих сил, и противоположными по направлению.  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .



*Три закона Ньютона дают рецепт для решения задач динамики.*

**Шаг 1.** Выбираем инерциальную систему отсчета.

**Шаг 2.** Используя третий закон Ньютона, расставляем силы, действующие на материальную точку.

**Шаг 3.** Вводим систему координат. Находим векторную сумму этих сил либо явно, либо в проекциях на оси системы координат. Применяя второй закон Ньютона либо в векторной форме  $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ , либо в проекциях

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_x \\ ma_y = \sum F_y \\ ma_z = \sum F_z \end{cases}$$

Находим ускорение точки. (Как правило, систему координат надо вводить таким образом, чтобы можно было *проще* решить систему уравнений для нахождения проекций ускорения.)

*Шаг 4.* По найденному ускорению определяем параметры движения, используя кинематические соотношения.

### НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

При движении тела относительно инерциальной системы второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F},$$

где  $\vec{a}$  - ускорение тела относительно инерциальной системы. Формально второй закон Ньютона связывает *вектор ускорения в данной системе отсчета* и вектор суммы всех сил, действующих на тело.

Пусть есть еще одна система отсчета, которая движется относительно инерциальной с ускорением  $\vec{a}_c$ , следовательно, она уже *не является инерциальной*. Тогда ускорение тела в этой системе можно найти как разность ускорений  $\vec{a}_l = \vec{a} - \vec{a}_c$  или  $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_l$ .

Подставим это выражение в уравнение движения  $m(\vec{a}_c + \vec{a}_l) = \sum \vec{F}$ .

Поэтому если последнее равенство переписать в виде

$$m\vec{a}_l = \sum \vec{F} - m\vec{a}_c,$$

то это выражение ФОРМАЛЬНО совпадает со вторым законом Ньютона, только в правой части появилось дополнительное слагаемое  $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_c$ , которое называется *силой инерции*. Знак минус показывает, что вектор этой силы направлен *против вектора ускорения системы отсчета*. Это *фиктивная* сила, в том смысле, что нет тел, которые создают эту силу и она пропадает при переходе к инерциальной системе отсчета. Иногда говорят, что инерциальные системы отсчета – это такие системы, в которых силы инерции равны нулю. (По современным представлениям силы инерции создаются всеми телами в нашей Вселенной.)

### ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК.

Во многих задачах тело нельзя рассматривать как материальную точку, поэтому приходится рассматривать его как систему материальных точек, взаимодействующих друг с другом. При описании движения такой системы, состоящей, например, из  $N$  точек, необходимо описать движение каждой точки с учетом всех сил, действующих на нее. Так как для любой точки имеется три уравнения движения (вдоль каждой из осей), то количество уравнений равно  $3N$ . При увеличении  $N$  трудоемкость описания движения возрастает многократно. При этом необходимо учитывать также силы между точками. Иногда *априори* такие силы даже неизвестны. Но известны внешние силы, действующие на систему. Оказывается, что для каждой системы существует *особая* точка, ускорение которой определяется только внешними силами – эта точка называется *центром масс системы*.

#### Центр масс.

Рассмотрим, для простоты, систему из двух материальных точек. Запишем уравнения движения для каждой из них (второй закон Ньютона)

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 \end{cases}$$

Силы, действующие на точку можно разделить на две группы:

1. силы, действующие со стороны другой точки (их называют *внутренними* по отношению к системе)

2. силы, действующие со стороны тел, не входящих в систему (их называют *внешними*).

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^{\text{ВНЕШ}} + \vec{F}_1^{\text{ВНУТР}} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^{\text{ВНЕШ}} + \vec{F}_2^{\text{ВНУТР}} \end{cases}$$

Теперь сложим эти уравнения. Тогда *внутренние* силы, по третьему закону Ньютона, взаимно компенсируются, останутся только *внешние*. Векторную сумму внешних сил обозначим как  $\vec{F}^{\text{ВНЕШ}}$ . В итоге, получаем:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}^{\text{ВНЕШ}}.$$

Введем новый радиус-вектор, который называется **радиус-вектором центра масс системы**:

$$\vec{R}_C = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2},$$

Этот радиус-вектор определяет некоторую точку, которая называется центром масс системы.

Здесь  $m_1, m_2$  – массы точек системы,  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  – их радиус-векторы. В знаменателе этого выражения стоит суммарная масса всех точек системы – ее называют **массой системы**

$$m_C = m_1 + m_2.$$

Продифференцируем по времени (помним, что производная от радиус-вектора по времени равна вектору скорости) и получим вектор скорости центра масс:

$$\vec{V}_C = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_C},$$

а ускорение центра масс:

$$\vec{a}_C = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_C}.$$

Поэтому уравнение движения системы точек будет иметь вид:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = m_C \vec{a}_C = \vec{F}^{\text{ВНЕШ}} \quad \text{или} \quad \vec{a}_C = \frac{\vec{F}^{\text{ВНЕШ}}}{m_C}$$

Центр масс системы (тела) – это точка, масса которой равна массе всей системы (или тела), а вектор ускорения центра масс (в инерциальной системе отсчета) определяется только внешними силами, действующими на систему (тело). Поэтому при нахождении закона движения системы точек можно считать, что *вектор равнодействующей внешних сил приложен к центру масс системы*.

### Выводы

1) Радиус-вектор центра масс системы точек  $\vec{R}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{m_C}.$

2) Скорость центра масс  $\vec{V}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{m_C}.$

3) Ускорение центра масс  $\vec{a}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m_C}.$

4) Правила для нахождения центра масс системы.

- Если у системы есть ось симметрии, то центр масс находится на этой оси. Если осей симметрии несколько, то центр масс лежит на их пересечении. При этом центр масс тела может не принадлежать телу (пример - кольцо).
- Если систему разбить на части, для каждой из них найти центр масс, то центр масс системы можно найти по центрам масс частей.

5) Вектор импульса центра масс  $\vec{p}_C = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i$  равен суммарному импульсу точек системы.

Откуда  $\vec{p}_C'(t) = \sum_i \vec{p}_i'(t) = \sum_i m_i \vec{V}_i'(t) = \sum_i m_i \vec{a}_i = m_C \vec{a}_C = \vec{F}^{ВНЕШ}$ , т.е.

$$\vec{p}_C'(t) = \vec{F}^{ВНЕШ}$$

*Производная от импульса центра масс системы равна векторной сумме внешних сил действующих на все точки системы (в инерциальной системе отсчета).*

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА.

Запишем второй закон Ньютона в импульсном виде (для инерциальной системы отсчета):

$$\vec{p}_C'(t) = \vec{F}^{ВНЕШ}.$$

Это **векторное** равенство. В трехмерном пространстве - это три уравнения для проекций на оси координат. В декартовой системе координат эти уравнения выглядят так:

$$\begin{cases} p_{CX}'(t) = F_X^{ВНЕШ} \\ p_{CY}'(t) = F_Y^{ВНЕШ} \\ p_{CZ}'(t) = F_Z^{ВНЕШ} \end{cases}$$

1. Рассмотрим случай, когда на систему вообще не действуют внешние силы, (такая система называется *замкнутой*) или равнодействующая внешних сил равна нулю  $\vec{F}^{ВНЕШ} = \vec{0}$ .

Это означает, что производная от вектора импульса системы равна нулю  $\vec{p}_C'(t) = \vec{0}$ . Поэтому вектор суммарного импульса (замкнутой) системы остается постоянным.

$$\vec{p}_C = m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_N \vec{v}_N = \text{const}.$$

В частности, в проекциях на оси это равенство выглядит так

$$\begin{cases} p_{CX}(t) = m_1 v_{1X} + \dots + m_N v_{NX} = \text{const} \\ p_{CY}(t) = m_1 v_{1Y} + \dots + m_N v_{NY} = \text{const} \\ p_{CZ}(t) = m_1 v_{1Z} + \dots + m_N v_{NZ} = \text{const} \end{cases}$$

*Итак, если равнодействующая всех сил, действующих на систему равна нулю, то вектор суммарного импульса системы сохраняется.*

2. Рассмотрим такое направление в пространстве, на которое проекция силы  $\vec{F}$  равна нулю. Введем систему координат так, чтобы ось X совпадала с этим направлением. Тогда уравнения движения выглядят:

$$\begin{cases} p_{CX}'(t) = 0 \\ p_{CY}'(t) = F_Y^{ВНЕШ} \\ p_{CZ}'(t) = F_Z^{ВНЕШ} \end{cases}$$

О сохранении *вектора* импульса в этом случае говорить НЕЛЬЗЯ - сохраняется только одна *координата X* вектора импульса системы. Но и это порой значительно помогает в решении задачи.

### ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА.

Запишем второй закон Ньютона в импульсном виде (для инерциальной системы отсчета):

$$\vec{p}_C'(t) = \vec{F}^{ВНЕШ}.$$

Поэтому вектор изменения импульса системы за интервал времени  $\Delta t$  равен

$$\Delta \vec{p}_C = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \vec{F}^{ВНЕШ} dt.$$

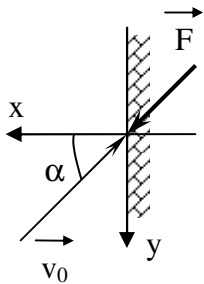
Выражение в правой части равенства носит название *импульса силы*.

Следовательно, *вектор изменения импульса системы за некоторый промежуток времени равен импульсу силы, действующей на тело в течение этого промежутка.*

**Пример.** Пуля массы  $m$  ударяется в массивную стену со скоростью  $v_0$  и застревает в ней. Найти среднее значение силы при ударе, если время удара  $\Delta t$ .

**Решение.** Пусть пуля налетает под углом  $\alpha$  к нормали. Так как стена массивная, то после удара скорость стены можно принять за ноль. Для пули можно записать закон изменения импульса

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{конеч}}} \vec{F} dt,$$



где  $\vec{F}$  - вектор силы, действующей на пулю при ударе.

Так мы ищем среднее значение силы, то вектор силы можно считать постоянным, поэтому

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t.$$

Левая часть этого равенства  $\Delta \vec{p}(t) = \vec{p}_{\text{кон}} - \vec{p}_{\text{нач}} = -\vec{p}_{\text{нач}}$ , так как  $\vec{p}_{\text{кон}} = \vec{0}$ .

Из этого равенства следует, что вектор силы  $\vec{F} = -\frac{\vec{p}_{\text{нач}}}{\Delta t} = -\frac{m\vec{v}_0}{\Delta t}$  направлен

против вектора скорости при ударе.



**Лекция 3. Закон сохранения момента импульса.**

*Момент силы. Момент импульса материальной точки и механической системы. Уравнение моментов механической системы. Закон сохранения момента импульса механической системы.*

**Математическое замечание.**

Векторным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  и  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  называется вектор  $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$ , который в декартовой системе координат определяется по формуле

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x).$$

Величина  $|\vec{s}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$  (площадь прямоугольника на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ).

Свойства векторного произведения.

1) Вектор  $\vec{s}$  направлен перпендикулярно к плоскости векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Поэтому для любого вектора  $\vec{d}$ , лежащего в плоскости (линейно независимых) векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (т.е.  $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ ), получаем  $(\vec{s}, \vec{d}) = 0$ . Следовательно, если два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллельны, то  $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

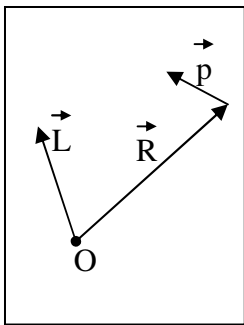
2) Производная по времени – это вектор  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$ .

Действительно, (базисные векторы постоянные)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \frac{d}{dt} (\vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x)) = \\ &= \vec{e}_x (\dot{a}_y b_z + a_y \dot{b}_z - \dot{a}_z b_y - a_z \dot{b}_y) + \vec{e}_y (\dot{a}_z b_x + a_z \dot{b}_x - \dot{a}_x b_z - a_x \dot{b}_z) + \vec{e}_z (\dot{a}_x b_y + a_x \dot{b}_y - \dot{a}_y b_x - a_y \dot{b}_x) = \\ &= \vec{e}_x (\dot{a}_y b_z - \dot{a}_z b_y) + \vec{e}_y (\dot{a}_z b_x - \dot{a}_x b_z) + \vec{e}_z (\dot{a}_x b_y - \dot{a}_y b_x) + \\ &+ \vec{e}_x (a_y \dot{b}_z - a_z \dot{b}_y) + \vec{e}_y (a_z \dot{b}_x - a_x \dot{b}_z) + \vec{e}_z (a_x \dot{b}_y - a_y \dot{b}_x) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dot{a}_x & \dot{a}_y & \dot{a}_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ \dot{b}_x & \dot{b}_y & \dot{b}_z \end{vmatrix} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \end{aligned}$$

**Вектор момента импульса**

Вектором момента импульса относительно точки О называется  $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}$ ,



где  $\vec{R}$  – радиус-вектор из точки О,  $\vec{p} = m\vec{v}$  – вектор импульса точки. Вектор  $\vec{L}$  направлен перпендикулярно к плоскости векторов  $\vec{R}$  и  $\vec{p}$ . Точку О иногда называют *полем*.

Найдем производную от вектора момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} + \vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Первое слагаемое в правой части:  $\frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = \vec{0}$ . Так как в инерци-

альной системе отсчета по второму закону Ньютона (в импульсной форме)  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , то второе

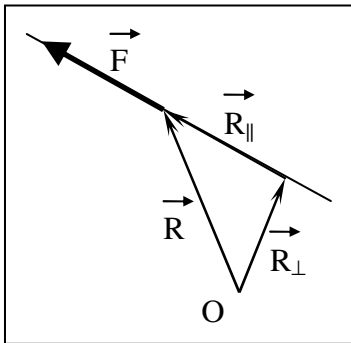
слагаемое имеет вид  $\vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}$ .

Величина  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{R} \times \vec{F}$  называется *моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки O*.

Окончательно получаем *уравнение динамики вращательного движения точки*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

*Производная от вектора момента импульса относительно точки равна моменту действующих сил относительно этой точки.*



#### Свойства момента силы.

1)  $\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{R}$  и  $\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{F}$ .

2) В декартовых координатах

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yF_z - zF_y) + \vec{e}_y (zF_x - xF_z) + \vec{e}_z (xF_y - yF_x).$$

или  $\vec{M}_O = \vec{M}_{Ox} + \vec{M}_{Oy} + \vec{M}_{Oz}$  - вектор момента силы относительно точки равен сумме моментов силы относительно координатных осей.

3) Момент суммы сил равен сумме моментов каждой из сил  $\vec{M}_O\left(\sum_i \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ .

4) Сумма моментов сил относительно точки

$$\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i$$

при переходе к другой точке  $O_1$ , при которой  $\vec{R}_i = \vec{R}_{i1} + \vec{R}_1$  изменится по правилу

$$\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_i (\vec{R}_{i1} + \vec{R}_1) \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{R}_{i1} \times \vec{F}_i) + \sum_i (\vec{R}_1 \times \vec{F}_i) = \vec{M}_{O1} + \vec{R}_1 \times \left( \sum_i \vec{F}_i \right).$$

Следовательно, момент сил не изменится, если  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ .

5) Пусть  $\vec{R} = \vec{R}_\perp + \vec{R}_\parallel$ , где  $\vec{R}_\perp \perp \vec{F}$ ,  $\vec{R}_\parallel \parallel \vec{F}$  тогда  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{R}_\perp \times \vec{F}$ .

Следовательно, если две *одинаковые* силы лежат на *одной прямой*, то их моменты *одинаковые*. Эта прямая называется *линией действия силы  $\vec{F}$* . Длина вектора  $|\vec{R}_\perp|$  называется *плечом силы относительно точки O*.

#### Момент силы относительно оси.

Как следует из определения момента силы, координаты вектора моменты силы относительно координатных осей определяются формулами

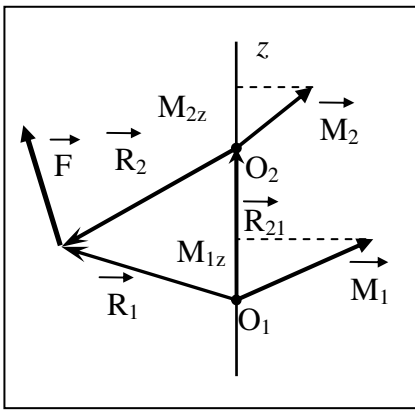
$$M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Рассмотрим нахождение момента силы относительно *некоторой* оси  $z$ . Для этого надо рассмотреть вектор момента силы относительно *некоторой* точки  $O$  на *этой* оси и найти проекцию вектора момента силы на эту ось.

#### Свойства момента силы относительно оси $z$ .

1) Проекция вектора момента силы на ось  $z$  не зависит от выбора точки  $O$ . Возьмем на оси  $z$  две разные точки  $O_1$  и  $O_2$  и найдем моменты силы  $F$  относительно этих точек.

$$\vec{M}_1 = \vec{R}_1 \times \vec{F}, \quad \vec{M}_2 = \vec{R}_2 \times \vec{F}.$$



Разность векторов  $\vec{M}_1 - \vec{M}_2 = (\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \times \vec{F}$  перпендикулярна вектору  $\vec{R}_1 - \vec{R}_2 = \vec{R}_{21}$ , лежащему на оси  $z$ . Следовательно, если рассмотреть орт оси  $z$  – вектор  $\vec{k}$ , то проекции на ось  $z$

$$M_{1z} - M_{2z} = (\vec{M}_1, \vec{k}) - (\vec{M}_2, \vec{k}) = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2, \vec{k}) = 0$$

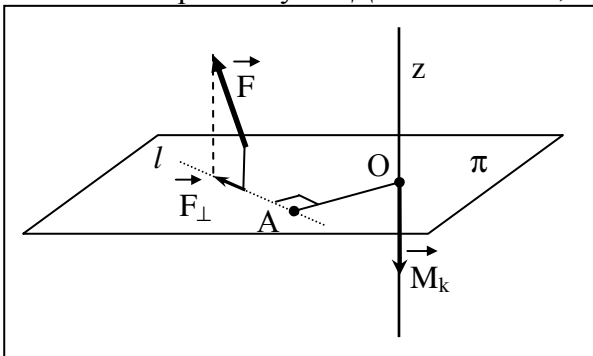
равны между собой. Следовательно, момент силы относительно оси определен однозначно.

*Если момент силы относительно некоторой точки на оси равен нулю, то равен нулю момент силы относительно этой оси.*

2) Если вектор силы  $\vec{F}$  параллелен оси  $z$ , то момент силы относительно оси равен нулю  $M_z = 0$ . Действительно вектор момента силы относительно любой точки на оси должен быть перпендикулярен вектору силы, поэтому он также перпендикулярен параллельной оси – проекция вектора момента силы на эту ось будет равна нулю. Следовательно, если  $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$  разложение вектора силы на компоненту  $\vec{F}_\parallel$  параллельную оси, и компоненту  $\vec{F}_\perp$ , перпендикулярную оси, то

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_\parallel) + M_z(\vec{F}_\perp) = M_z(\vec{F}_\perp).$$

3) Если вектор силы и ось не параллельны, но лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси равен нулю. Действительно, в этом случае вектор момента силы относительно



любой точки на оси направлен перпендикулярно этой плоскости (т.к. вектор  $\vec{R}$  тоже лежит в этой плоскости). Можно сказать и иначе. Если рассмотреть точку пересечения линии действия силы и прямой  $z$ , то момент силы относительно этой точки равен нулю, поэтому и момент силы относительно оси равен нулю.

Итак, чтобы найти момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$ , надо:

- 1) найти проекцию силы  $\vec{F}_\perp$  на любую плоскость  $\pi$  перпендикулярную этой оси и указать точку  $O$  – точку пересечения этой плоскости с осью  $z$ ;
- 2) найти плечо силы  $\vec{F}_\perp$  относительно оси – т.е. расстояние от линии действия силы  $l$  (в плоскости  $\pi$ ) до прямой  $z$  – длину отрезка  $OA$ ;
- 3) найти величину момента силы  $M_k = F_\perp \cdot |OA|$  и направление по правилу правого винта (буравчика).

*Правило правого винта* в данном случае: вектор момента силы вдоль оси направлен так, что вектор  $\vec{F}_\perp$  задает вращение в плоскости  $\pi$  вокруг точки  $O$  по часовой стрелке.

- 4) Если на оси  $z$  указано положительное направление (говорят, что ось ориентирована), то указать знак проекции момента силы.

### Момент импульса механической системы.

Рассмотрим суммарный момент импульса системы относительно некоторой точки  $O$ .

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{p}_i$$

При переходе к другой точке  $O_1$  радиус-векторы точек системы преобразуются  $\vec{R}_i = \vec{R}_{i1} + \vec{R}_1$ , поэтому

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{R}_{li} + \vec{R}_l) \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{R}_{li} \times \vec{p}_i + \vec{R}_l \times \vec{p}_i) = \sum_i \vec{R}_{li} \times \vec{p}_i + \vec{R}_l \times \left( \sum_i \vec{p}_i \right)$$

Суммарный импульс системы равен импульсу центра масс  $\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_c$

$$\vec{L} = \vec{L}_l + \vec{R}_l \times \vec{p}_c.$$

В системе отсчета, где центр масс системы покоится  $\vec{p}_c = \vec{0}$ , суммарный момент импульса *не зависит* от точки, относительно которой он вычисляется.

Если рассматривается движение твердого тела, то возможное движение в этом случае – это вращение вокруг центра масс. *В этом смысле момент импульса описывает вращательное движение.*

Найдем производную от суммарного момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i.$$

Силы, действующие на точки системы, разделим на внутренние, действующие между точками системы и внешние – со стороны тел, не входящих в систему:  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{BHYTP} + \vec{F}_i^{BHEII}$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times (\vec{F}_i^{BHYTP} + \vec{F}_i^{BHEII}) = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{BHYTP} + \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{BHEII}.$$

Внутренние силы подчиняются третьему закону Ньютона - они лежат на прямых линиях, попарно соединяющих точки, противоположны по направлению и одинаковы по величине

$$\vec{F}_i^{BHYTP} = -\vec{F}_j^{BHYTP}.$$

Для каждой из таких пар сил можно ввести одинаковое плечо  $\vec{R}_{ij\perp}$ , поэтому

$$\sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{BHYTP} = \sum_i (\vec{R}_{\perp ij} \times \vec{F}_i^{BHYTP} + \vec{R}_{\perp ij} \times \vec{F}_j^{BHYTP}) = \sum_i \vec{R}_{\perp ij} \times (\vec{F}_i^{BHYTP} + \vec{F}_j^{BHYTP}) = \vec{0}.$$

Окончательно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{BHEII} = \sum_i \vec{M}_o (\vec{F}_i^{BHEII}).$$

Уравнение динамики вращательного движения системы точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_o (\vec{F}_i^{BHEII}).$$

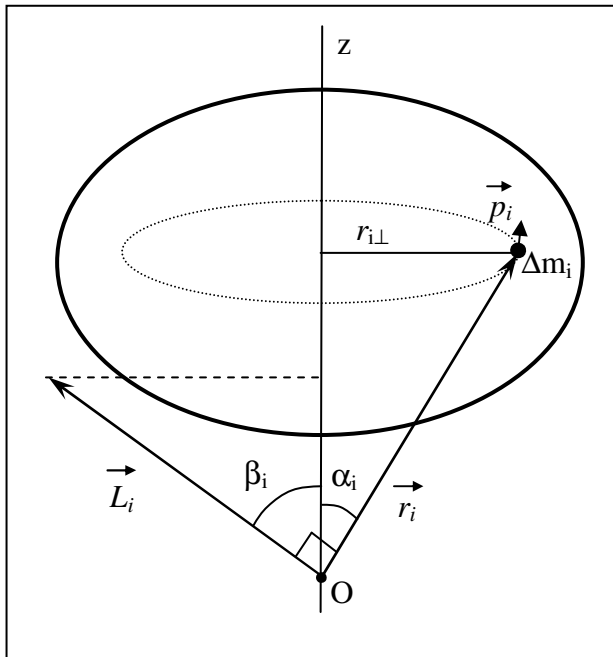
Покоординатное равенство

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{ox} (\vec{F}_i^{BHEII}), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{oy} (\vec{F}_i^{BHEII}), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{oz} (\vec{F}_i^{BHEII}).$$

*Производная от вектора суммарного момента импульса системы равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему.*

### Момент импульса твердого тела.

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью  $\omega$ . Выделим в теле малую частицу массой  $\Delta m_i$ . Найдем момент импульса этой частицы относительно некоторой точки O на оси вращения. Если радиус-вектор точки  $\vec{r}_i$ , а вектор импульса  $\vec{p}_i$ , то вектор момента импульса  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  приложен к точке O и направлен перпендикулярно к векторам  $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$  под некоторым углом  $\beta_i$  к оси z. Траекторией частицы  $\Delta m_i$  является окружность, а вектор импульса  $\vec{p}_i$  направлен по касательной к этой окружности. Следовательно, угол между векторами  $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$  равен  $90^\circ$ . Поэтому величина  $L_i = r_i p_i$ . Пусть  $r_{i\perp}$  - радиус ок-



ружности – траектории частицы. Тогда

$p_i = \Delta m_i v_i = \Delta m_i \cdot r_{i\perp} \omega$ . Рассмотрим проекцию вектора момента импульса на ось  $z$ :  $L_{iz} = L_i \cos \beta_i$ .

Учитывая, что  $\cos \beta_i = \sin \alpha_i$ , получаем:

$L_{iz} = r_i p_i \cos \beta_i = r_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp} \omega \sin \alpha_i$ . Но  $r_{i\perp} = r_i \sin \alpha_i$ .

Тогда

$$L_{iz} = \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^2 \omega$$

Для всего тела

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^2 \omega = \omega \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^2.$$

В выражение входят параметры движения частиц, которые не зависят от положения точки  $O$ . Поэтому величина момента импульса вдоль оси  $z$  не зависит от положения точки на оси, для которой она вычисляется.

В этом выражении величина

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^2$$

называется *моментом инерции* твердого тела относительно оси  $z$  (единица измерения  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ). Для сплошных тел

$$I_z = \iiint_m r_{\perp}^2 dm.$$

### Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Момент импульса твердого тела при вращательном движении вокруг оси  $z$  вычисляется как

$$L_z = I_z \omega.$$

Тогда уравнение динамики:

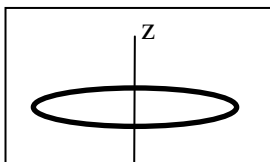
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \omega).$$

Если тело твердое, то  $I_z = \text{const}$ , поэтому, с учетом того, что  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$  (угловое ускорение), получаем

$$I_z \varepsilon = M_z^{\text{ВНЕС}}$$

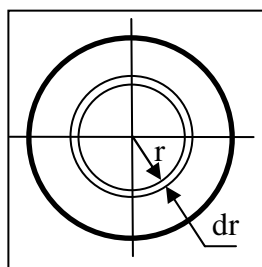
Это уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: угловое ускорение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси прямо пропорционально величине момента внешних сил относительно этой оси. Момент инерции играет роль *меры инертности при вращательном движении*.

### Примеры на вычислении момента инерции.



1) Момент инерции тонкого кольца (прямого цилиндра) массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси  $z$ , перпендикулярной плоскости кольца, проходящей через центр кольца

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2.$$

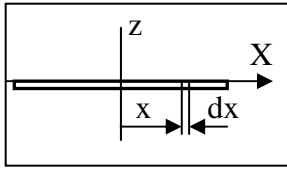


2) Момент инерции диска (сплошного цилиндра) массы  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси  $z$ , перпендикулярной плоскости диска, проходящей через центр диска (сплошного цилиндра).

Выделим тонкий цилиндр радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ .

Масса этого цилиндра  $dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{m}{R^2} 2r dr$ ,  $r_{\perp} = r$ .

Поэтому  $I_z = \int_0^R r^2 \frac{m}{R^2} 2r dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$



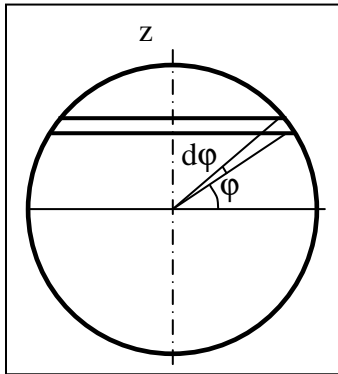
3) Момент инерции тонкого стержня относительно оси z, являющейся срединным перпендикуляром. Масса стержня m, длина L.

Выделим на расстоянии x от оси маленькую часть стержня длиной dx.

Масса этой части  $dm = \frac{m}{L} dx$ ,  $r_{\perp} = x$ . Откуда

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{3L} \frac{2L^3}{8} = \frac{mL^2}{12}.$$

4) Момент инерции тонкостенного шара относительно любой оси симметрии z. Масса шара m, радиус R.



Выделим на поверхности сферы кольцевой сегмент, для которого ось z является осью симметрии. Сегмент опирается на малый центральный угол dφ, положение сегмента определяется углом φ, отсчитываемым от плоскости экватора.

Тогда  $r_{\perp} = R \cos \varphi$ ,  $dm = \frac{m}{4\pi R^2} 2\pi R \cos \varphi \cdot R d\varphi$

$$I_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R \cos \varphi)^2 \frac{m}{4\pi R^2} 2\pi R \cos \varphi \cdot R d\varphi$$

$$I_z = \frac{m}{2} R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \varphi)^2 \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{m}{2} R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi)$$

$$I_z = \frac{2}{3} mR^2.$$

5) Момент инерции сплошного шара относительно любой оси симметрии z. Масса шара m, радиус шара R.

Представим шар как набор вложенных друг в друга тонкостенных сфер переменного радиуса r и толщиной dr. Масса одной такой сферы  $dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{3m}{R^3} r^2 \cdot dr$ .

Момент инерции такой сферы  $dI_z = \frac{2}{3} dm \cdot r^2 = \frac{2}{3} \frac{3m}{R^3} r^2 \cdot dr \cdot r^2 = \frac{2m}{R^3} r^4 \cdot dr$ .

Поэтому  $I_z = \int_0^R \frac{2m}{R^3} r^4 dr = \frac{2m}{R^3} \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} mR^2$

### Теорема Гюйгенса-Штейнера

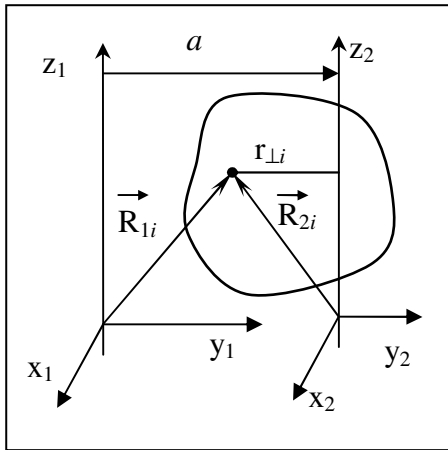
Как связаны между моменты инерции твердого тела относительно двух параллельных осей?

Рассмотрим две параллельные оси  $z_1$  и  $z_2$ . Введем две системы координат так, чтобы их оси x и y были параллельны друг другу, причем вторая система координат была получена параллельным переносом из первой на вектор  $\vec{a} = (a_x, a_y, 0)$ . При этом расстояние между осями

будет равно  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ .

Тогда координаты любой i-й точки связаны соотношениями

$$x_{2i} = x_{1i} + a_x, \quad y_{2i} = y_{1i} + a_y, \quad z_{2i} = z_{1i}.$$



Квадрат расстояния от этой точки до первой оси  $z_1$ :

$$r_{1i}^2 = x_{1i}^2 + y_{1i}^2 \text{ и до второй оси } r_{2i}^2 = x_{2i}^2 + y_{2i}^2.$$

Вычисляем момент инерции относительно второй оси:

$$I_{z2} = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{2i\perp}^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot (x_{2i}^2 + y_{2i}^2),$$

$$I_{z2} = \sum_i \Delta m_i \cdot (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) + \sum_i \Delta m_i \cdot (a_x^2 + a_y^2) + 2 \sum_i \Delta m_i \cdot (x_{1i} a_x + y_{1i} a_y)$$

В этом равенстве

$$\sum_i \Delta m_i \cdot (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{1i\perp}^2 = I_{z1} - \text{момент инерции относи-}$$

тельно оси  $z_1$ ,

$$\sum_i \Delta m_i \cdot (a_x^2 + a_y^2) = a^2 \sum_i \Delta m_i = m a^2,$$

$$\sum_i \Delta m_i \cdot (x_{1i} a_x + y_{1i} a_y) = \sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} a_x + \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i} a_y = a_x \sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} + a_y \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i}.$$

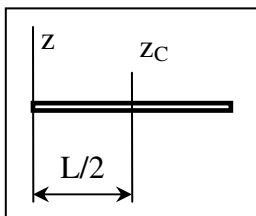
Учтём, что  $\sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} = m x_{1C}$  и  $\sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i} = m y_{1C}$  (где  $x_{1C}$  и  $y_{1C}$  – координаты центра масс тела в 1й системе координат) и получим

$$I_{z2} = I_{z1} + m a^2 + 2m(a_x x_{1C} + a_y y_{1C})$$

Если ось  $z_1$  проходит через центр масс тела, то  $x_{1C} = 0$  и  $y_{1C} = 0$ , поэтому выражение упрощается:

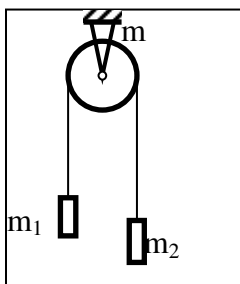
$$I_z = I_{zC} + m a^2$$

**Это теорема Гюйгенса-Штейнера:** момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и квадрата расстояния между осями, умноженного на массу тела.



**Пример.** Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через край стержня, перпендикулярно ему, равен сумме момента инерции относительно срединной оси и массе, умноженный на квадрат половины длины стержня:

$$I_z = I_{zC} + m \frac{L^2}{4} = \frac{Lm^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}.$$



**Пример.** Рассмотрим движение грузов на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (диск). Массы грузов  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), масса блока  $m$ . Трения в оси блока нет. Нить не скользит по блоку. Силами сопротивления в воздухе пренебрегаем. Найти ускорение грузов. Радиус блока  $R$ .

**Решение.** Фиксируем систему отсчета, в которой ось блока неподвижна. Предполагаем, что эта система отсчета инерциальная. Ось  $z$  системы координат в этой системе отсчёта направим вдоль оси вращения блока («от нас»).

нас»).

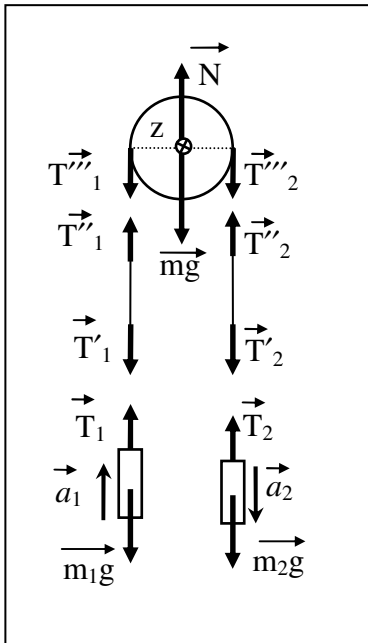
«Мысленно» разбиваем систему на части и находим силы между частями системы в соответствие со вторым и третьим законами Ньютона.

При этом учтём, что нить невесомая (масса любой части нити равна нулю), поэтому, если кусок нити движется под действием (растягивающих) сил, то из второго закона Ньютона

$$m_{\text{нити}} \vec{a} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$$

следует при  $m_{\text{нити}} = 0$ , что эти силы равны по величине  $F_2 = F_1$ .

Нить также является нерастяжимой, поэтому ускорения всех точек нити одинаковые по величине. Следовательно, ускорения грузов одинаковые по величине.



Нить не скользит по блоку – это значит, что скорости точек обода диска равны скоростям (соответствующих) точек нити. Следовательно, их тангенциальные ускорения тоже одинаковые.

Из всего этого следуют уравнения:

- равенства соответствующих сил натяжения

$$T_1 = T_1' = T_1'' = T_1''', \quad T_2 = T_2' = T_2'' = T_2''',$$

- равенства ускорений

$$a_1 = a_2 = \varepsilon R,$$

- равновесия оси блока

$$N - mg - T_1 - T_2 = 0$$

- динамики центров масс грузов

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$$

- динамики вращательного движения блока вокруг оси z

$$I_z \varepsilon = T_2 R - T_1 R.$$

Обозначим величину ускорения грузов как  $a$ .

В данном случае момент инерции блока (диска) относительно оси вращения  $I_z = \frac{mR^2}{2}$ , поэтому из уравнения динамики вращательного движения

$$\frac{mR^2}{2} \frac{a}{R} = (m_2 g - m_2 a) R - (m_1 g + m_1 a) R$$

находим 
$$a = \frac{(m_2 - m_1) g}{\left(\frac{m}{2} + m_2 + m_1\right)}.$$

### Закон сохранения момента импульса.

Уравнение динамики вращательного движения системы точек

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O (\vec{F}_i^{BHEIII}).$$

Покоординатное равенство

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{Ox} (\vec{F}_i^{BHEIII}), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{Oy} (\vec{F}_i^{BHEIII}), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz} (\vec{F}_i^{BHEIII}).$$

1) Если момент внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой точки равен нулю, то сохраняется момент импульса системы относительно этой точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O (\vec{F}_i^{BHEIII}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L} = const.$$

Например, при движении планет в гравитационном поле Солнца, сохраняется вектор момента импульса планеты относительно Солнца, т.к. линия действия силы гравитации проходит через Солнце, поэтому её момент равен нулю относительно Солнца.

2) Если момент внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой оси равен нулю, то сохраняется момент импульса системы вдоль этой оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz} (\vec{F}_i^{BHEIII}) = 0 \Leftrightarrow L_z = 0.$$

**Пример.** Волчок будет вращаться достаточно долго при малой силе трения, сохраняя тем самым момент импульса вдоль вертикальной оси z, так моменты сил тяжести и реакции опоры равны нулю (векторы силы тяжести и реакции опоры параллельны оси вращения).



### Векторная форма записи угловой скорости

Рассмотрим поворот твердого тела на малый угол  $d\varphi$  вокруг оси  $z$ .

Точка А, находящаяся на расстоянии  $r_{\perp}$  от оси вращения переместится на малый вектор  $d\vec{s}$ , направленный по касательной к окружности в направлении поворота:  $ds = r_{\perp} d\varphi$ . Пусть положение точки А задано с помощью радиус-вектора  $\vec{R}$  из какой-то точки О на оси вращения, тогда  $r_{\perp} = R \sin \alpha$ , поэтому можно написать

$$ds = R \sin \alpha \cdot d\varphi.$$

Если вдоль оси вращения задать вектор поворота  $d\vec{\varphi}$ , связанный с направлением поворота правилом буравчика, то справедливым будет равенство

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{R}$$

Так как для скорости движения точки А справедливо выражение  $d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$ , то задавая вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения равенством  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ , получаем

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

направление вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  и направление вращения связаны правилом буравчика (правого винта).

С помощью вектора угловой скорости можно задать вектор момента импульса вдоль оси вращения  $\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$ .

### Замечание.

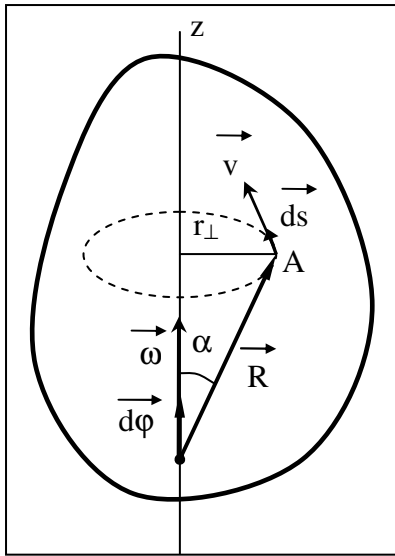
Условия равновесия тела можно сформулировать таким образом:

1) Если тело покоится, то центр масс тела не движется, поэтому для центра масс

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{\text{ВНЕСИ}}}{m_c} = \vec{0}.$$

Поэтому  $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ВНЕСИ}} = \vec{0}$  - сумма внешних сил, действующих на тело равна нулю. Следовательно, сумма проекций внешних сил на *любое направление* равна нулю.

2) Если тело не вращается, то угловое ускорение  $\varepsilon = \frac{M_z^{\text{ВНЕСИ}}}{I_z} = 0$ , т.е.  $M_z^{\text{ВНЕСИ}} = 0$  - сумма моментов внешних сил относительно любой оси равна нулю.



**Лекция 4. Закон сохранения энергии в механике.**

*Работа и кинетическая энергия. Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций. Связь между потенциальной энергией и силой. Закон сохранения энергии.*

Рассмотрим движение материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчета. Второй закон Ньютона имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Вектор скорости точки  $\vec{v}$  направлен по касательной к траектории. Поэтому вектор малого перемещения точки  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  тоже направлен по касательной к траектории (здесь  $dt$  – малый промежуток времени). Умножаем скалярно уравнение движения на вектор малого перемещения и интегрируем вдоль пути

$$\int_{\text{Путь}} \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) = \int_{\text{Путь}} (\vec{F}, d\vec{r}).$$

Левая часть равенства.

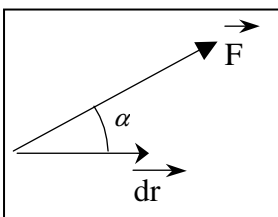
$$\begin{aligned} \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) &= \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}dt \right) = m \left( \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} \right) dt = m \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} (\vec{v}, \vec{v}) \right] dt = d \left( \frac{mv^2}{2} \right) \\ \int_{\text{Путь}} \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) &= \int_{\text{Путь}} d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{\text{КОНЕЧ}} - \left( \frac{mv^2}{2} \right)_{\text{НАЧ}}. \end{aligned}$$

*Кинетической энергией* материальной точки массы  $m$ , которая движется скоростью  $v$ , называется величина

$$W_{\text{кин}} = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Единицы измерения кинетической энергии – Дж (Джоуль). Иногда кинетическую энергию выражают через импульс тела ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ):  $W_{\text{кин}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ .

Замечание. Кинетическая энергия зависит от системы отсчета. Например, в сопутствующей системе отсчета кинетическая энергия равна нулю.



Рассмотрим правую часть равенства.

Работой постоянной силы  $\vec{F}$ , действующей на материальную точку, при малом перемещении  $d\vec{r}$  этой точки называется произведение

$$A = (\vec{F}, d\vec{r}) = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором силы и вектором перемещения.

Единицы измерения работы – Дж (Джоуль).

*Работу величиной в один Джоуль совершает постоянная сила в 1 Ньютон, совпадающая по направлению с перемещением длиной 1 метр.*

Работа переменной силы

$$A = \int_{\text{Путь}} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\text{Путь}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

где  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  – малый вектор перемещения.

Итог

Приравняем правую и левую части равенства

$$\int_{\text{Путь}} \left( m \frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r} \right) = \int_{\text{Путь}} (\vec{F}, d\vec{r})$$

Или, с учётом приведённых обозначений:

$$W_{КИН}^{КОНЕЧ} - W_{КИН}^{НАЧ} = A$$

Теорема об изменении кинетической энергии. Изменение кинетической энергии материальной точки на участке пути равно работе действующих на нее сил на этом участке.

Мощность силы.

Средней мощностью силы  $F$  называется отношение работы этой силы к интервалу времени, за который была совершена эта работа

$$P_{CP} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Единицы измерения мощности Вт (Ватт), мощность силы в 1 Вт соответствует работе в 1 Дж, совершаемой силой за 1 секунду.

Мгновенной мощностью силы называется мощность этой силы за малый промежуток времени

$$P = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}, \vec{v}),$$

где  $\vec{v}$  - вектор скорости точки.

Следствие. Если в каждый момент времени  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , то работа данной силы равна нулю.

### Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В этом случае скорость вращения каждой точки вокруг оси равна  $v_i = \omega r_{i\perp}$ , где  $r_{i\perp}$  - расстояние от точки до оси вращения, поэтому суммарная кинетическая энергия всех точек

$$W_{КИН}^{ВРАЩ} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 r_{i\perp}^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z,$$

где  $I_z$  - момент инерции тела относительно оси вращения.

Рассмотрим уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг оси

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z.$$

При малом угле поворота  $d\varphi = \omega dt$  отсюда следует

$$I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = M_z d\varphi$$

Для левой части равенства

$$I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega = d\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right).$$

Если рассмотреть поворот на конечный угол  $\Delta\varphi$ :

$$\int_{\Delta\varphi} I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = \int_{\Delta\varphi} M_z d\varphi,$$

откуда

$$\left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right)_{КОН} - \left(\frac{I_z \omega^2}{2}\right)_{НАЧ} = \int_{\Delta\varphi} M_z d\varphi$$

Так как слева стоит выражение для изменения кинетической энергии вращающегося тела, то справа стоит выражение для работы сил при повороте тела. Таким образом, если известен момент сил  $M_z$  относительно оси вращения  $z$ , то работа этих сил при повороте тела вокруг оси вычисляется по формуле

$$A = \int_{\Delta\varphi} M_z d\varphi.$$

А мгновенная мощность сил

$$P = M_z \omega.$$

С учетом векторной записи угла поворота и угловой скорости эти равенства можно записать

$$A = \int_{\Delta\varphi} (\vec{M}, d\vec{\varphi}), \quad P = (\vec{M}, \vec{\omega}).$$

### КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА (СИСТЕМЫ ТОЧЕК).

Рассмотрим систему движущихся точек. Кинетическая энергия системы - это суммарная энергия всех точек:

$$W_{\Sigma} = \sum_i W_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\vec{v}_i, \vec{v}_i)}{2}.$$

Скорость каждой точки представим в виде  $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{i\_OTH}$ ,

где  $\vec{v}_C$  - скорость центра масс системы (одинаковая для всех точек системы),

$\vec{v}_{i\_OTH}$  - относительная скорость точки (в системе отсчета, где центр масс покоится).

$$W_{\Sigma} = \sum_i \frac{m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{i\_OTH}, \vec{v}_C + \vec{v}_{i\_OTH})}{2} = \sum_i \frac{m_i (\vec{v}_C, \vec{v}_C) + 2m_i (\vec{v}_C, \vec{v}_{i\_OTH}) + m_i (\vec{v}_{i\_OTH}, \vec{v}_{i\_OTH})}{2}.$$

В правой части равенства

$$\sum_i \frac{m_i (\vec{v}_C, \vec{v}_C)}{2} = \frac{(\vec{v}_C, \vec{v}_C)}{2} \sum_i m_i = \frac{m v_C^2}{2} - \text{кинетическая энергия центра масс системы};$$

$$\sum_i \frac{m_i (\vec{v}_{i\_OTH}, \vec{v}_{i\_OTH})}{2} = \sum_i \frac{m_i v_{i\_OTH}^2}{2} = W_{КИН}^{OTH} - \text{кинетическая энергия движения точек относительно центра масс};$$

$$\sum_i \frac{2m_i (\vec{v}_C, \vec{v}_{i\_OTH})}{2} = \left( \vec{v}_C, \sum_i m_i \vec{v}_{i\_OTH} \right), \text{ но } \sum_i m_i \vec{v}_{i\_OTH} = m \vec{v}_{C\_OTH}, \text{ где } \vec{v}_{C\_OTH} - \text{скорость центра}$$

масс в системе отсчета, где центр масс покоится. Очевидно  $\vec{v}_{C\_OTH} = \vec{0}$ , поэтому

$$\sum_i \frac{2m_i (\vec{v}_C, \vec{v}_{i\_OTH})}{2} = \left( \vec{v}_C, \sum_i m_i \vec{v}_{i\_OTH} \right) = \vec{0}.$$

Окончательно

$$W_{СИСТЕМЫ} = \frac{m_C v_C^2}{2} + W_{КИН}^{OTH}.$$

*Полная кинетическая энергия тела (системы точек) равна сумме кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения относительно центра масс.*

**Пример.** Определить кинетическую энергию диска массой  $m$  и радиуса  $R$ , катящегося без проскальзывания со скоростью  $V$ .

**Решение.** Так как диск катится без проскальзывания, то скорость центра масс равна  $V$  и скорость вращения обода диска *относительно* центра масс тоже равна  $V$ . Следовательно, полная кинетическая энергия:

$$W_K = \frac{m v_C^2}{2} + W_{К.ВРАЩ}.$$

При вращении диска вокруг центра масс угловая скорость всех точек равна  $\omega = \frac{v}{R}$ , поэтому кинетическая энергия вращения равна  $W_{\text{к.вращ}} = \frac{I_{zC}\omega^2}{2}$ . Момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр масс равен  $I_{zC} = \frac{mR^2}{2}$ .

Кинетическая энергия центра масс равна  $W_{\text{к.с}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ .

Следовательно  $W_{\text{к}} = W_{\text{к.с}} + W_{\text{к.вращ}} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} mv^2$ . ♣

### Математическое отступление

Пусть задана функция от нескольких аргументов, являющаяся непрерывно-дифференцируемой по каждому из них  $f(t, x, y, z)$ . Нахождение производной такой функции по одному из аргументов (например, по  $x$ ) при условии, что остальные *не меняются*, называется *частной производной* по данному аргументу и обозначается  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

Пусть в трехмерном пространстве задана непрерывно дифференцируемая функция  $U(x, y, z)$ . Рассмотрим значения этой функции в двух соседних точках пространства, отстоящих друг от друга на малый вектор  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ :

$$U_1 = U(x, y, z) \text{ и } U_2 = U(x + dx, y + dy, z + dz).$$

Тогда разложение в ряд Тейлора для функции  $U$  вблизи точки  $(x, y, z)$  имеет вид:

$$U_2 = U_1 + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \dots$$

Если ввести вектор  $\text{grad}U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$ , который называется *градиентом* функции  $U$ , и отбросить остальные слагаемые в разложении (которые обозначены точками), то для изменения значений  $U$  можно записать

$$\Delta U = U_2 - U_1 \approx (\text{grad}U, d\vec{r}) = |\text{grad}U| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\text{grad}U$  и  $d\vec{r}$ .

#### Свойства градиента функции

1) В каком направлении нужно двигаться, чтобы увеличение функции было максимальным? Видно, что при постоянных величинах  $|\text{grad}U|$  и  $|d\vec{r}|$  значение  $\Delta U$  будет максимальным при  $\cos \alpha = 1$  или  $\alpha = 0$ , т.е. вектор  $d\vec{r}$  должен быть сонаправлен вектору  $\text{grad}U$ .

Вектор градиента функции  $\text{grad}U$  направлен в сторону максимального роста функции  $U$ .

2) Поверхностью уровня функции  $U$  называется поверхность в пространстве, на которой  $U(x, y, z) = \text{const}$ . Если сместиться вдоль поверхности уровня на малый вектор  $d\vec{r}$ , то значение функции не изменится, поэтому  $\Delta U = 0$ . Это означает, что  $(\text{grad}U, d\vec{r}) = 0$ , т.е. векторы  $\text{grad}U$  и  $d\vec{r}$  перпендикулярны.

Вектор градиента функции направлен перпендикулярно к поверхности уровня функции.

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ.

Существует определенная группа сил, которые зависят только от взаимного положения точек. Такие силы называются *консервативными*.

Консервативными силами являются:

- 1) Сила всемирного тяготения. Она зависит только от расстояния между телами.
- 2) Сила тяжести. Она является частным случаем силы всемирного тяготения.
- 3) Сила кулоновского взаимодействия.
- 4) Сила упругости.

Для каждой из консервативных сил можно определить *потенциальную энергию*.

Потенциальная энергия для консервативной силы - это *физическая величина, зависящая только от положения точки (тела), уменьшение которой равно работе соответствующей силы, действующей на точку (тело)*.

$$W_{\text{ПОТЕНЦ\_НАЧАЛЬНАЯ}} - W_{\text{ПОТЕНЦ\_КОНЕЧНАЯ}} = A$$

(Обратите внимание на порядок индексов). Потенциальная энергия, как и работа, измеряется в Джоулях. Потенциальная энергия – это энергия, определяемая *положением тела*. В одном и том же положении тело будет иметь одинаковую потенциальную энергию.

1) Следовательно, *работа консервативной силы не зависит от пути, вдоль которого двигалось тело, а только от него начального и конечного положений*.

*Замечание.* Поскольку в определении сказано о *разности* энергий, то энергию можно определить несколько «произвольным образом» - к определяющим соотношениям можно прибавить *любую* постоянную величину  $C$ , которая при взятии разности пропадет:

$$(W_{\text{П\_НАЧ}} + C) - (W_{\text{П\_КОН}} + C) = A.$$

2) Таким образом, потенциальная энергия определена *с точностью до константы*. Поэтому нельзя говорить об абсолютном значении потенциальной энергии без указания «начала отсчета».

3) *Работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю.*

$$\int_{\text{Путь}} (\vec{F}, d\vec{l}) = W_{\text{ПОТ}}^{\text{НАЧ}} - W_{\text{ПОТ}}^{\text{КОН}}.$$

Для замкнутого пути  $W_{\text{ПОТ}}^{\text{НАЧ}} = W_{\text{ПОТ}}^{\text{КОН}}$ , поэтому  $\oint_{\text{Путь}} (\vec{F}, d\vec{l}) = 0$ . (Кружок в знаке интеграла показывает, что путь замкнутый.)

*Замечание.* Нельзя сказать, что если работа силы по замкнутому контуру равна нулю, то эта сила – консервативная. Например, вектор магнитной составляющей силы Лоренца всегда направлен перпендикулярно вектору скорости, поэтому работа этой силы по любой траектории, в том числе и по замкнутой, равна нулю, но эта сила не является консервативной.

Рассмотрим две близкие точки в пространстве, смещенные друг от друга на *малый* вектор  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ , т.е. координаты которых  $(x, y, z)$  и  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ .

Работа консервативной силы  $\vec{F}$  при перемещении между этими точками

$$A \approx F_x dx + F_y dy + F_z dz = W_{\text{ПОТ}}^{\text{НАЧ}} - W_{\text{ПОТ}}^{\text{КОН}}.$$

Но изменение потенциальной энергии при перемещении между точками можно записать в виде

$$W_{\text{ПОТ}}^{\text{КОН}} - W_{\text{ПОТ}}^{\text{НАЧ}} \approx (\text{grad} W, d\vec{r}) = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz.$$

или

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial W}{\partial x} dx - \frac{\partial W}{\partial y} dy - \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

Так как вектор  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  произвольный, то поэтому должно быть

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z},$$

т.е. должно выполняться равенство

$$\vec{F} = -\text{grad} W.$$

*Изоэнергетической поверхностью* в пространстве называется поверхность уровня энергии, т.е. поверхность на которой величина энергии остается постоянной. Изоэнергетическая поверхность для потенциальной энергии называется также *экипотенциальной поверхностью*.

Таким образом, *вектор консервативной силы направлен в сторону скорейшего убывания потенциальной энергии перпендикулярно экипотенциальной поверхности*.

### Примеры потенциальной энергии.

1) Найдем потенциальную энергию для силы гравитационного взаимодействия  $F_{ГРAB} = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$ .

Пусть  $\vec{R}$  – радиус-вектор, откладываемый от материальной точки  $m_1$ . Тогда вектор гравитационной силы, действующей на материальную точку  $m_2$ , направлен в противоположную сторону

$$\vec{F}_{ГРAB} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{e}_{\vec{R}}, \text{ где } \vec{e}_{\vec{R}} = \left( \frac{\vec{R}}{R} \right) - \text{единичный вектор направления для вектора } \vec{R}.$$

Должно выполняться равенство

$$\int_{\text{Путь}} (\vec{F}, d\vec{r}) = W_{\text{ПОТ}}^{\text{НАЧ}} - W_{\text{ПОТ}}^{\text{КОН}}.$$

Этот интеграл не должен зависеть от траектории, поэтому будем интегрировать вдоль радиус-вектора  $d\vec{r} = d\vec{R}$ . Так как векторы  $\vec{F}_{ГРAB}$  и  $d\vec{R}$  направлены противоположно, то

$$(\vec{F}_{ГРAB}, d\vec{r}) = -F_{ГРAB} dR.$$

$$\int_{\text{Путь}} (\vec{F}_{ГРAB}, d\vec{r}) = \int_{R_{НАЧ}}^{R_{КОН}} (-F_{ГРAB} dR) = \int_{R_{НАЧ}}^{R_{КОН}} \left( -G \frac{m_1 m_2}{R^2} dR \right) = G \frac{m_1 m_2}{R} \Big|_{R_{НАЧ}}^{R_{КОН}} = G \frac{m_1 m_2}{R_{КОН}} - G \frac{m_1 m_2}{R_{НАЧ}}$$

$$\text{Сравниваем: } W_{\text{ПОТ}}^{\text{НАЧ}} - W_{\text{ПОТ}}^{\text{КОН}} = G \frac{m_1 m_2}{R_{КОН}} - G \frac{m_1 m_2}{R_{НАЧ}}.$$

Так потенциальная энергия гравитационного взаимодействия определяется

$$W_{\text{ПОТ.ГРAB}} = -G \frac{m_1 m_2}{R} + C.$$

**Обратите внимание на знак минус! (Обычно C=0.)**

2) Для силы тяжести  $F_T = mg$  потенциальная энергия  $W_{II} = mgh$ . Здесь высота  $h$  определяется выбором начала отсчета энергии. Проверим соотношение  $\vec{F} = -\text{grad}W$ . Введем систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена вверх (против силы тяжести), тогда потенциальная энергия  $W_{II} = mgz + C$ , где  $C$  определяется началом отсчета координаты. Экипотенциальная поверхность – горизонтальная плоскость  $z = \text{const}$ , поэтому вектор силы должен быть направлен ей перпендикулярно, т.е. вертикально. Величина энергии увеличивается вверх, поэтому вектор силы должен быть направлен вниз. Действительно,  $F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ ,  $F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = 0$ ,

$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -mg$ . Т.е. вектор силы  $\vec{F} = (0, 0, -mg)$  в этой системе координат направлен вертикально вниз.

3) Для силы кулоновского взаимодействия:  $F_{\text{КУЛ}} = k \frac{q_1 q_2}{R^2}$  потенциальная энергия:

$$W_{\text{ПОТ.КУЛ}} = k \frac{q_1 q_2}{R} + C.$$

(Обычно C=0. В этом случае если заряды разного знака, то потенциальная энергия отрицательна.)

4) Для силы упругости  $F_y = kx$  потенциальная энергия:  $W_{\text{пот.упр}} = k \frac{x^2}{2} + C$

(Обычно  $C=0$ .)

Потенциальная энергия для обобщенного закона Гука

Из соотношений  $x = \epsilon l$ ,  $E = \frac{kl}{S}$ , получаем  $W_{\text{пот.упр}} = k \frac{(\epsilon l)^2}{2} = \frac{kl}{S} \frac{\epsilon^2}{2} Sl$

Учитывая, что объем деформируемого тела  $V = Sl$ , находим энергию при возникновении относительной деформации величиной  $\epsilon$ :

$$W_{\text{пот.упр}} = \frac{E\epsilon^2}{2} V.$$

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

*Определение. Полной механической энергией тела (системы)* называется сумма потенциальной и кинетической энергий

$$W_{\text{МЕХАН}} = W_{\text{КИН}} + W_{\text{ПОТ}}.$$

Рассмотрим тело, на которое действуют только консервативные силы. Изменение кинетической энергии тела равно суммарной работе действующих на нее сил:

$$W_{\text{КИН\_КОНЕЧ}} - W_{\text{КИН\_НАЧ}} = A.$$

Но, так как в системе действуют только консервативные силы, то для них можно ввести потенциальную энергию и выразить работу через уменьшение потенциальной энергии:

$$A = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОНЕЧ}}.$$

Следовательно,  $W_{\text{КИН\_КОНЕЧ}} - W_{\text{КИН\_НАЧ}} = A = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОНЕЧ}}$

или  $W_{\text{КИН\_КОНЕЧ}} + W_{\text{ПОТ\_КОНЕЧ}} = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} + W_{\text{КИН\_НАЧ}}$ . Т.е.

$$W_{\text{МЕХ\_КОНЕЧ}} = W_{\text{МЕХ\_НАЧ}}.$$

Формулировка закона сохранения механической энергии. *Если на тело или в системе тел действуют только консервативные силы, то механическая энергия тела или системы тел остается постоянной.*

**Пример.** Найти величину второй космической скорости для Земли.

(Второй космической скоростью называется наименьшая скорость старта тела с поверхности планеты, при которой тело может улететь от планеты «навсегда» – т.е. уйти на бесконечно большое расстояние, так что сила притяжения к планете обратится в ноль.)

*Решение.* Когда тело массой  $m$  стартует со скоростью  $V$  с Земли, полная механическая энергия

системы тело-Земля равна  $W_{\text{МЕХ\_НАЧ}} = -G \frac{mM_3}{R_3} + \frac{mV^2}{2}$ . (Здесь принято, что постоянная  $C=0$ ).

Предположим, что тело улетело от Земли на бесконечно большое расстояние и там остановилось. Тогда полная механическая энергия должна быть равна нулю. Гравитационная сила является консервативной, поэтому в системе планета-тело выполняется закон сохранения механической энергии:  $W_{\text{МЕХ\_КОНЕЧ}} = W_{\text{МЕХ\_НАЧ}}$  или

$$-G \frac{mM_3}{R_3} + \frac{mV^2}{2} = 0, \text{ откуда } V = \sqrt{\frac{2GM_3}{R_3}}$$

С учетом выражения для ускорения свободного падения близи поверхности Земли:  $g = \frac{GM_3}{R_3^2}$ ,

получаем  $V = \sqrt{2gR_3}$ . Видим, что эта скорость больше первой космической в  $\sqrt{2}$ . ♣



**Консервативные силы** сохраняют механическую энергию. Поэтому они так и называются. (Название «консервативные» – переводится как «сохраняющие»).

Помимо консервативных сил в механике вводятся также **диссипативные силы** – силы «рассеивающие» механическую энергию. *Диссипация* – это перевод энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов (в конце концов – в тепло).

К диссипативным силам относятся, в частности, сила трения скольжения и сила сопротивления движению тела в жидкости или газе.

Во всех системах, независимо от типа действующих сил, всегда выполняется основной закон природы – *закон сохранения энергии*. *Энергия замкнутой системы не убывает и не увеличивается – она только переходит из одной формы в другую.*

Пусть в системе действуют консервативные и неконсервативные силы. Тогда

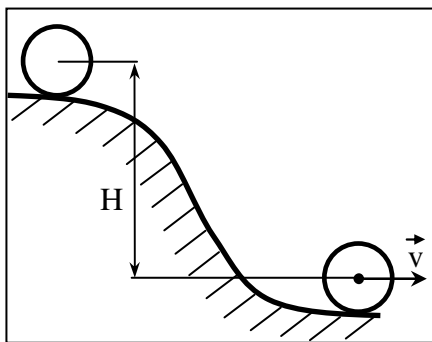
$$W_{\text{кин}}^{\text{кон}} - W_{\text{кин}}^{\text{нач}} = A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}$$

Для консервативных сил  $A_{\text{конс}} = W_{\text{пот}}^{\text{нач}} - W_{\text{пот}}^{\text{кон}}$ . Поэтому

$$W_{\text{кин}}^{\text{кон}} - W_{\text{кин}}^{\text{нач}} = W_{\text{пот}}^{\text{нач}} - W_{\text{пот}}^{\text{кон}} + A_{\text{неконс}} \quad \text{или} \quad W_{\text{кин}}^{\text{кон}} + W_{\text{пот}}^{\text{кон}} - (W_{\text{кин}}^{\text{нач}} + W_{\text{пот}}^{\text{нач}}) = A_{\text{неконс}}, \text{ т.е.}$$

$$W_{\text{мех}}^{\text{кон}} - W_{\text{мех}}^{\text{нач}} = A_{\text{неконс}}.$$

Изменение механической энергии системы равно работе неконсервативных сил.



**Пример.** Диск массы  $m$  и радиуса  $R$  скатывается без проскальзывания с горки высотой  $H$ . Найти скорость диска в конце спуска. (Силой сопротивления воздуха пренебречь).

**Решение.** В данном случае в системе есть сила трения, которая заставляет вращаться диск. Но т.к. диск катится без скольжения, то скорость в точке касания равна нулю. Поэтому мощность силы трения равна нулю, следовательно, и её работа равна нулю. Тогда  $W_{\text{мех}}^{\text{кон}} - W_{\text{мех}}^{\text{нач}} = A_{\text{неконс}} = 0$ , т.е.

$$W_{\text{мех}}^{\text{кон}} = W_{\text{мех}}^{\text{нач}} \quad \text{или} \quad mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

$$\text{Откуда} \quad mgH = \frac{3}{4}mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{4}{3}gH}.$$

**Пример.** Рассмотрим удар двух тел.

Под ударом подразумевается *кратковременное* взаимодействие тел. Если соударяются два тела конечной массы, то выполняется закон сохранения вектора импульса.

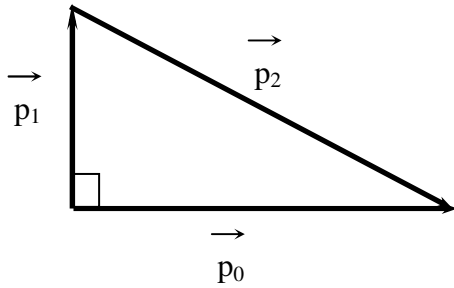
Удары можно подразделить на упругие и неупругие. При *упругом* (абсолютно упругом) ударе сохраняется суммарная кинетическая энергия тел. При *неупругом*, соответственно, не сохраняется. При *абсолютно неупругом* ударе тела слипаются и далее движутся вместе.

По характеру взаимодействия удар можно описать как *центральный* и *нецентральный*. При *центральной* ударе силы взаимодействия направлены вдоль линии, проходящей через центры масс тел. После центрального удара у тел, двигавшихся до удара только поступательно, не будет вращательного движения вокруг центра масс.

По виду движения тел можно ввести прямой и не прямой удары. При *прямом* ударе существует такая система отсчета, в которой сила взаимодействия направлена вдоль относительной скорости движения тел. В такой системе отсчета при *прямом* ударе тела до и после удара будут двигаться вдоль одной прямой.

**Пример.** Тело массой  $m_1$ , движущееся со скоростью  $V$  налетает на неподвижное тело и после упругого центрального соударения отскакивает от него под углом  $90^\circ$  к первоначальному направлению своего движения со скоростью  $V/2$ . Определить массу неподвижного тела.

**Решение.** Перейдем в систему отсчета, в которой плоскость движения совпадает с плоскостью ХУ системы отсчета. Так как удар упругий, то сохраняется импульс и механическая энергия. Закон сохранения импульса:  $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ , где  $p_0$  – начальный импульс налетающего тела,  $p_1$  – конечный импульс налетающего тела,  $p_2$  – конечный импульс тела, масса которого неизвестна.



Из рисунка видно, что векторы импульса образуют прямоугольный треугольник. Поэтому по теореме Пифагора:

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 \text{ или } m_2^2 V_2^2 = m_1^2 V^2 + m_1^2 V_1^2.$$

Закон сохранения энергии:  $\frac{m_1 V^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}.$

Получили систему уравнений 
$$\begin{cases} m_2^2 V_2^2 = m_1^2 V^2 + m_1^2 V_1^2 \\ \frac{m_1 V^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на  $2m_2$ :  $m_1 m_2 (V^2 - V_1^2) = m_2^2 V_2^2$  и в правую часть подставим первое уравнение:  $m_1 m_2 (V^2 - V_1^2) = m_1^2 V^2 + m_1^2 V_1^2.$

Отсюда  $m_2 = \frac{m_1 (V^2 + V_1^2)}{V^2 - V_1^2}$  или с учетом заданных значений скоростей:

$$m_2 = \frac{m_1 \left( V^2 + \frac{V^2}{4} \right)}{V^2 - \frac{V^2}{4}} = \frac{5}{3} m_1. \clubsuit$$

**Пример.** Два шарика одинакового размера с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся со скоростями  $V_1$  и  $V_2$  вдоль одной прямой и упруго соударяются. Найти скорости шариков после удара.

**Решение.** Поскольку удар, очевидно, является центральным и прямым, шарики после удара будут двигаться вдоль той же прямой. Запишем закон сохранения импульса в проекции на эту прямую:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2.$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}.$$

В итоге, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2 \\ m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2. \end{cases}$$

Если первое уравнение переписать в виде:  $m_1 (V_1 - U_1) = m_2 (U_2 - V_2),$

а второе уравнение переписать в виде:

$$m_1 (V_1^2 - U_1^2) = m_2 (U_2^2 - V_2^2) \text{ или } m_1 (V_1 - U_1)(V_1 + U_1) = m_2 (U_2 - V_2)(U_2 + V_2),$$

то с учетом первого уравнения получаем:  $V_1 + U_1 = U_2 + V_2.$

Тогда  $U_1 = U_2 + V_2 - V_1$ , поэтому, подставив это выражение в первое уравнение, получаем:

$$m_1 (2V_1 - U_2 - V_2) = m_2 (U_2 - V_2)$$

Откуда:  $U_2 = \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2}{(m_2 + m_1)}$  и  $U_1 = \frac{2m_2 V_2 + (m_1 - m_2) V_1}{(m_2 + m_1)}.$  ♣

**Выводы из решения данной задачи.**

1) Пусть шары имеют одинаковые массы  $m_1=m_2$ . Тогда скорости  $U_2=V_1$ ,  $U_1=V_2$ , т.е. шарики **обмениваются скоростями** после удара.

2) Пусть масса второго шарика много больше массы первого шарика  $m_2 \gg m_1$ . Тогда  $U_2=V_2$ ,  $U_1 = 2V_2 - V_1$ . Таким образом, **второй шарик не изменит своей скорости после удара.** ♣

**Пример.** На покоящуюся гладкую стенку под углом  $\alpha$  к нормали со скоростью  $V$  налетает шарик и упруго ударяется о стенку. Найти скорость шарика после удара.

**Решение.** Так как масса стенки много больше массы шарика, то, как видно из результатов решения предыдущей задачи, скорость стенки не изменится.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mU^2}{2} \text{ или } V^2 = U^2$$

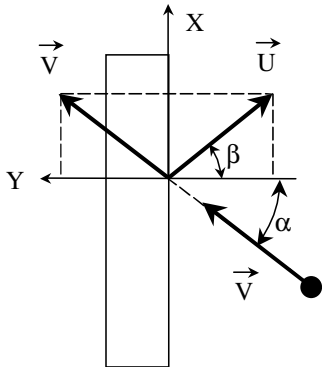
(энергию стенки не учитываем, так как она покоится). Т.е. скорость шарика сохраняется по величине.

Стенка гладкая – сила трения отсутствует, поэтому импульс шарика вдоль оси  $X$  сохраняется:

$$mV \cdot \sin \alpha = mU \cdot \sin \beta.$$

Следовательно, угол падения равен углу отражения:  $\alpha = \beta$ .

*При упругом ударе о неподвижную стенку составляющая скорости, параллельная стенке не изменяется, а составляющая скорости, перпендикулярная стенке изменяет свое направление на обратное. Угол падения равен углу отражения.* ♣



### Лекция 5. «Колебания»

*Гармонические колебания. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления равных и близких частот. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот. Свободные незатухающие колебания. Энергия и импульс гармонического осциллятора. Фазовая траектория. Физический маятник. Квазиупругая сила.*

#### Положение равновесия и квазиупругая сила.

Рассмотрим одномерное движение тела под действием консервативной силы вдоль оси X. Для потенциальной энергии тела вблизи некоторой точки  $x_0$  можно записать выражение

$$W(x) = W_0 + \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

Потенциальная энергия и вектор консервативной силы связаны соотношением

$$\vec{F} = -\text{grad}W$$

откуда для проекции силы на ось X  $F_x = -\frac{dW}{dx}$ , т.е.

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x_0} - \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \dots$$

Если точка  $x_0$  является положением равновесия, то должно выполняться условие

$$F_x = -\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x_0} = 0, \text{ поэтому для изменения потенциальной энергии вблизи точки } x_0$$

$$\Delta W = W(x) - W_0 \approx \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2$$

$$\text{и для проекции силы } F_x \approx -\left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0).$$

Рассмотрим случай, когда в точке  $x_0$  наблюдается локальный минимум потенциальной энергии. Тогда  $\frac{d^2W}{dx^2} > 0$  и существует некото-

рая окрестность точки  $U(x_0)$ , для всех точек из которой выполняется  $W(x) > W_0$  и  $F_x > 0$  при  $x < x_0$ ,  $F_x < 0$  при  $x > x_0$ , то есть в точках

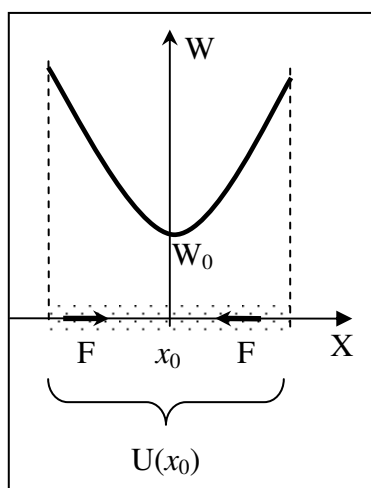
этой окрестности вектор силы, действующей на тело, будет направлен к точке  $x_0$ , а это значит, что при малых смещения тела из положения равновесия, сила будет стремиться вернуть тело обратно. Такое положение равновесия называется *устойчивым*.

Положение равновесия называется *неустойчивым*, если при малом отклонении от этого положения возникает сила, стремящаяся увести тело от положения равновесия. Очевидно, в этом случае в точке наблюдается локальный максимум потенциальной энергии и  $\frac{d^2W}{dx^2} < 0$ .

В случае, когда  $\frac{d^2W}{dx^2} = 0$  требуется дополнительное исследование.

Выражение для консервативной силы вблизи положения равно можно записать в векторной форме  $\vec{F} = -k_0 \Delta \vec{x}$ , а величину потенциальной энергии  $W = \frac{1}{2} k_0 \Delta x^2 + \text{const}$ , где

$k_0 = \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x_0}$ . Такая форма записи для консервативной силы вблизи точки равновесия называется *квазиупругой силой*.



Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося под действием квазиупругой силы вблизи точки устойчивого положения равновесия  $ma_x = F_x$ , где  $F_x = -k_0(x - x_0)$

Введем ось X так, чтобы  $x_0 = 0$ , тогда уравнение движения примет вид  $ma_x = -k_0x$ . С учетом зависимости  $a_x = \ddot{x}$  это уравнение примет вид  $m\ddot{x} = -k_0x$  или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m} > 0$ .

Это *линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка*.

Решением этого уравнения являются гармонические функции от времени t

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ или } x = A \sin(\omega_0 t + \beta),$$

описывающие смещение от равновесного значения. (Обе формы записи равноправны. Например, одна переходит в другую при  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ).

Так как гармонические функции синус и косинус имеют период  $2\pi$ , то параметры процесса будут повторяться через минимальный промежуток времени T, называемый *периодом*, определяемый соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Таким образом, уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

описывает *колебательный процесс*, параметры которого не изменяются с течением времени. Этот процесс принято называть *свободными незатухающими колебаниями*.

Учитывая, что величина  $\nu = \frac{1}{T}$  называется *частотой колебаний* (единица измерения Гц - Герц), то величину

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

называют *круговой* или *циклической частотой* колебаний (единица измерения  $\text{с}^{-1}$ ).

Величина A – амплитуда колебаний - модуль максимального смещения. По определению  $A > 0$  – всегда положительная величина. Аргумент гармонической функции  $(\omega t + \alpha)$  называется фазой колебания, а величина  $\alpha$  называется *начальной фазой* колебаний (Это фаза колебаний в момент времени  $t=0$ , который обычно называют *начальным моментом времени*).

В этом колебательном процессе с течением времени сохраняется величина механической энергии  $W_{\text{Мех}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0x^2}{2} = \text{const}$ . Действительно:

$$\frac{dW_{\text{Мех}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0x^2}{2} \right) = 2m \frac{\dot{x}}{2} \ddot{x} + 2k_0 \frac{x}{2} \dot{x} = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0.$$

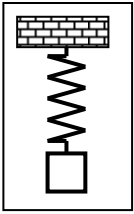
### Свободные незатухающие колебания.

*Колебания* – движения или состояния, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей.

В физике особо выделяют механические и электромагнитные колебания (и их комбинации).

Моделью для изучения механических колебаний является *осциллятор* – материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. (Более того, термин осциллятор применим к любой системе, если опи-

сывающие ее величины периодически меняются во времени.) Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, маятник.



**Пример.** Груз массы  $m$  подвешен на невесомой пружине жесткости  $k$  в поле сил тяжести (пружинный маятник). Найти период его колебаний. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение.** Запишем уравнение его движения в проекции на вертикальное направление  $Y$

$$ma = -F_{\text{упр}} + mg = -k \cdot y + mg \quad \text{или} \quad a = -\frac{k}{m}y + g.$$

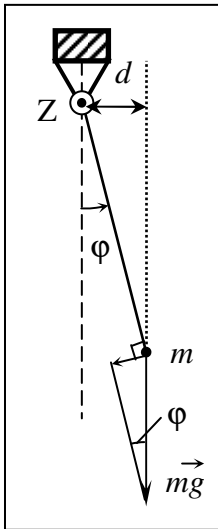
где  $y$  – величина растяжения пружины. Положение равновесия груза на пружине  $y_0 = \frac{mg}{k}$ . Введем смещение груза от положения равновесия  $x = y - y_0$ , тогда  $y = x + y_0$ ,  $a = \ddot{y} = \ddot{x}$ .

$$\text{Получаем уравнение } \ddot{x} = -\frac{k}{m}(x + y_0) + g = -\frac{k}{m}x - \frac{k}{m}y_0 + g = -\frac{k}{m}x, \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\text{Здесь } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ и период колебаний } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$\text{Механическая энергия груза на пружине } W_{\text{Мех}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

**Пример.** Найдем период колебаний *математического маятника* – материальной точки массы  $m$ , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длины  $l$ .



**Решение.** Рассмотрим движение маятника в тот момент, когда он поднимается. Отклонение нити от вертикали зададим угловой координатой  $\varphi$ . При этом если угол  $\varphi$  увеличивается (против часовой стрелки), то касательное ускорение точки направлено против направления движения. Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$ma_{\tau} = -mg \cdot \sin\varphi.$$

Вблизи положения равновесия проекция силы тяжести должна быть представлена как квазиупругая сила. Если выполняется *условие малости колебаний*, то  $\sin\varphi \approx \varphi$ , поэтому длина дуги окружности  $x = l\varphi$ , следовательно,

$$\text{проекция силы тяжести } mg \cdot \sin\varphi \approx \frac{mg}{l} \cdot l\varphi = \frac{mg}{l} \cdot x. \text{ Поэтому коэффициент в}$$

$$\text{выражении для квазиупругой силы } k_0 = \frac{mg}{l}. \text{ Касательное ускорение связано с}$$

угловым ускорением соотношением  $a_{\tau} = \varepsilon \cdot l$  (где  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ ), поэтому, после сокращения массы  $m$  получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0.$$

С учетом выражения для циклической частоты  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  период колебаний имеет вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \text{ Механическая энергия математического маятника}$$

$$W_{\text{Мех}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mg}{l} \frac{x^2}{2}.$$

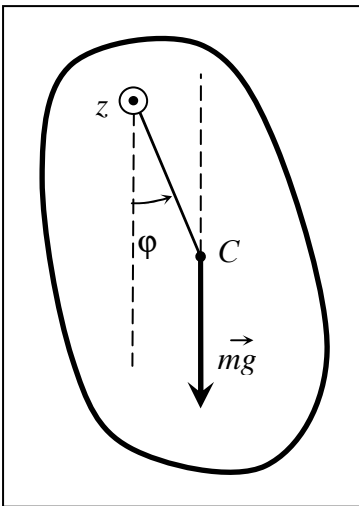
При движении по окружности  $x = l\varphi$ ,  $\dot{x} = l\dot{\varphi}$ , поэтому

$$W_{MEX} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mg}{l} \frac{l^2\varphi^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

**Уравнение колебаний для математического маятника можно вывести, используя уравнение динамики вращательного движения.**

Проведем ось  $Z$  через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника, тогда момент инерции материальной точки относительно оси  $Z$   $I_z = ml^2$ , момент импульса точки  $\vec{L} = I_z \vec{\dot{\varphi}}$  направлен вдоль оси  $Z$ , а момент силы тяжести  $M_z = -mgl \sin \varphi \approx -mgl\varphi$  (плечо силы тяжести относительно оси  $d = l \sin \varphi \approx l\varphi$ ) направлен против оси  $Z$ .

Закон вращательного движения точки вокруг оси  $Z$ :  $\frac{dL_z}{dt} = M_z$  или  $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$ . ♣



**Пример.** Найдём период колебаний *физического маятника* - тела массы  $m$ , которое может совершать колебания под действием силы тяжести (инерции) вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. Соппротивлением воздуха пренебрегаем.

**Решение.** Проведем из центра масс тела  $C$  перпендикуляр к оси вращения  $z$ . Пусть длина этого перпендикуляра равна  $l$ .

Положение тела зададим углом отклонения от вертикали этого перпендикуляра  $\varphi$ .

При этом если угол  $\varphi$  увеличивается (тело поворачивается против часовой стрелки), то вектор момента импульса  $\vec{L}$  направлен вдоль горизонтальной оси  $z$  на нас. Момент внешней силы тяжести относительно оси  $z$  направлен против от нас. Рассмотрим проекции на ось  $z$ :  $L_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi}$ ,  $M_z(m\vec{g}) = -mgl \sin \varphi$ .

Уравнение вращения вокруг оси  $z$ :  $\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внеш}$  или  $I_z \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$

Если выполняется условие малости колебаний:  $\sin \varphi \approx \varphi$ , то уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgl}{I_z} \varphi.$$

С учетом выражения для циклической частоты  $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}$  получаем выражение для периода ко-

лебаний физического маятника  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgl}}$ .

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника с таким же периодом.

$$T_{MAT} = T_{физ}, \quad 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}, \quad l_{пр} = \frac{I_z}{ml}. \quad \clubsuit$$

**Замечание.** Как показано в последних двух примерах, уравнения колебаний можно получить, вводя обобщенную координату - угол и обобщенную квазиупругую силу – момент силы тяжести.

Энергия и импульс гармонического осциллятора

Пусть закон движения осциллятора  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ .

**Среднее значение** (по времени) некоторой величины  $u(t)$  за интервал времени  $(t_1, t_2)$  – это такое постоянное значение  $\langle u \rangle$ , для которого выполняется равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \langle u \rangle dt = \langle u \rangle \cdot (t_2 - t_1), \quad \text{поэтому} \quad \langle u \rangle = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt.$$

Так как колебания незатухающие, то они продолжаются бесконечно долго, поэтому средние значения надо искать на бесконечном интервале.

Среднее значение проекции импульса

$$p_x = mv_x = m\dot{x} = -m\omega A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\langle p_x \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t p_x dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t (-m\omega A \sin(\omega t + \alpha)) dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} mA (\cos(\omega t + \alpha) - \cos(\alpha)) \right) = 0.$$

гармонического осциллятора равно нулю (так  $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$  для любых  $\varphi$ ).

Среднее значение кинетической энергии  $W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m}$

$$\begin{aligned} \langle W_k \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \frac{p_x^2}{2m} dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)}{2} dt \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \frac{m\omega^2 A^2}{2} \int_0^t \frac{1 - \cos[2(\omega t + \alpha)]}{2} dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \frac{m\omega^2 A^2}{4} \left( t - \frac{1}{2\omega} (\sin[2(\omega t + \alpha)] - \sin[2\alpha]) \right) \right) \end{aligned}$$

Так как  $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$  для любых  $\varphi$ , то  $\langle W_k \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{4}$ .

Среднее значение потенциальной энергии  $W_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}$

$$\begin{aligned} \langle W_{\Pi} \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \frac{kx^2}{2} dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{2} dt \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \frac{kA^2}{2} \int_0^t \frac{1 + \cos[2(\omega t + \alpha)]}{2} dt \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \frac{kA^2}{4} \left( t + \frac{1}{2\omega} (\sin[2(\omega t + \alpha)] - \sin[2\alpha]) \right) \right) \\ \langle W_{\Pi} \rangle &= \frac{k^2 A^2}{4}. \end{aligned}$$

С учетом соотношения  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  получаем, что  $\langle W_k \rangle = \langle W_{\Pi} \rangle = \frac{k^2 A^2}{4}$ .

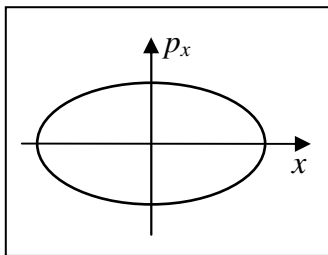
Среднее значение механической энергии осциллятора

$$\langle W_{MEX} \rangle = \langle W_k + W_{\Pi} \rangle = \langle W_k \rangle + \langle W_{\Pi} \rangle = \frac{k^2 A^2}{2}.$$

Как и следовало ожидать, полная механическая энергия осциллятора остается постоянной.

### Фазовая плоскость.

*Фазовой плоскостью* называется двумерное пространство, координатами в котором является координата точки и проекция импульса (соответственно, обобщенная координата и обобщенный импульс).



Для пружинного маятника из закона сохранения энергии

$$W_{MEX} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = const$$

следует, что *фазовая траектория* точки, совершающей свободные незатухающие колебания – это эллипс

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad \left( \frac{p_x}{\sqrt{mk}A} \right)^2 + \left( \frac{x}{A} \right)^2 = 1,$$

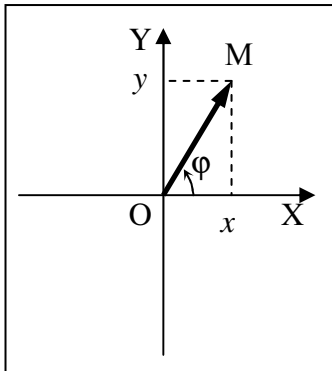
полуоси которого  $a = \sqrt{mk}A = m\omega A = mv_{max} = p_{max}$ ,  $b = A$ .

Замечание. В случае если система состоит из N осцилляторов, то фазовое пространство имеет размерность 2N.



**Векторная диаграмма.**

Рассмотрим радиус-вектор точки М, вращающейся вокруг начала координат с угловой скоростью  $\omega$ . Тогда угол между радиус-вектором и осью Х меняется с течением времени по закону  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – его начальное значение. Пусть длина радиус-вектора  $|OM| = A$



Координаты точки М:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

описывают колебания осциллятора вдоль осей.

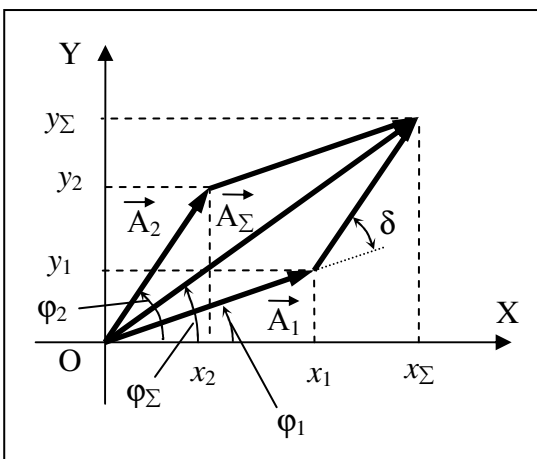
Данная форма представления колебаний называется амплитудной (векторной) диаграммой.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления: два осциллятора совершают колебания вдоль оси Х с циклическими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Зададим эти колебания на векторной диаграмме с помощью векторов.

1-е колебание задаётся вектором  $\vec{A}_1$ , который вращается вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ , угол вращения меняется по закону  $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$ .



2-е колебание задаётся вектором  $\vec{A}_2$ , соответственно, угол  $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$ .

Тогда результирующему колебанию  $x_\Sigma = x_1 + x_2$  сопоставим вектор  $\vec{A}_\Sigma = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$  с фазой  $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$

По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \delta)$$

Учтем, что  $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$ ,

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1, \text{ тогда}$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_\Sigma = \frac{y_\Sigma}{x_\Sigma} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \text{ или}$$

$$\operatorname{tg}(\omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma) = \frac{A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)}.$$

$$\text{Соответственно, } \operatorname{tg}(\alpha_\Sigma) = \frac{A_1 \sin(\alpha_1) + A_2 \sin(\alpha_2)}{A_1 \cos(\alpha_1) + A_2 \cos(\alpha_2)}.$$

Остановимся подробнее на двух частных случаях.

1) Пусть  $A_1 = A_2 := A$ ,  $\omega_1 = \omega_2 := \omega$ . Тогда  $A_\Sigma^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 2A^2(1 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1))$ .

Амплитуда результирующего колебания в этом случае не зависит от времени.

Если разность начальных фаз колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi n$ , где  $n$  – целое число, то наблюдается усиление колебаний  $A_\Sigma = 2A$ .

Если разность начальных фаз колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi + 2\pi n$ , где  $n$  – целое число, то колебания гасят друг друга  $A_\Sigma = 0$ .

Для вывода формулы результирующего колебания воспользуемся соотношением

$\cos \beta_1 + \cos \beta_2 = 2 \cos \left( \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta_2 + \beta_1}{2} \right)$ , поэтому, учитывая четность функции косинус:

$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 2A \cos \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \cos \left( \omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right)$$

Амплитудой должно быть выражение не зависящее от времени, но амплитуда не может быть отрицательной величиной, следовательно

$$A_{\Sigma} = 2A \left| \cos \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right|,$$

Тогда

$$x_{\Sigma} = 2A \left| \cos \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right| \cos \left( \omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} + \theta \right).$$

Если  $\cos \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) > 0$ , то  $\theta = 0$ , но если  $\cos \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) < 0$  то  $\theta = \pi$ .

2) Рассмотрим случай, когда амплитуды одинаковые  $A_1 = A_2 := A$ , но частоты отличаются на небольшую величину  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \ll \omega$ . Для упрощения примем, что  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = 0$ . Поступая как и в предыдущем случае, получаем

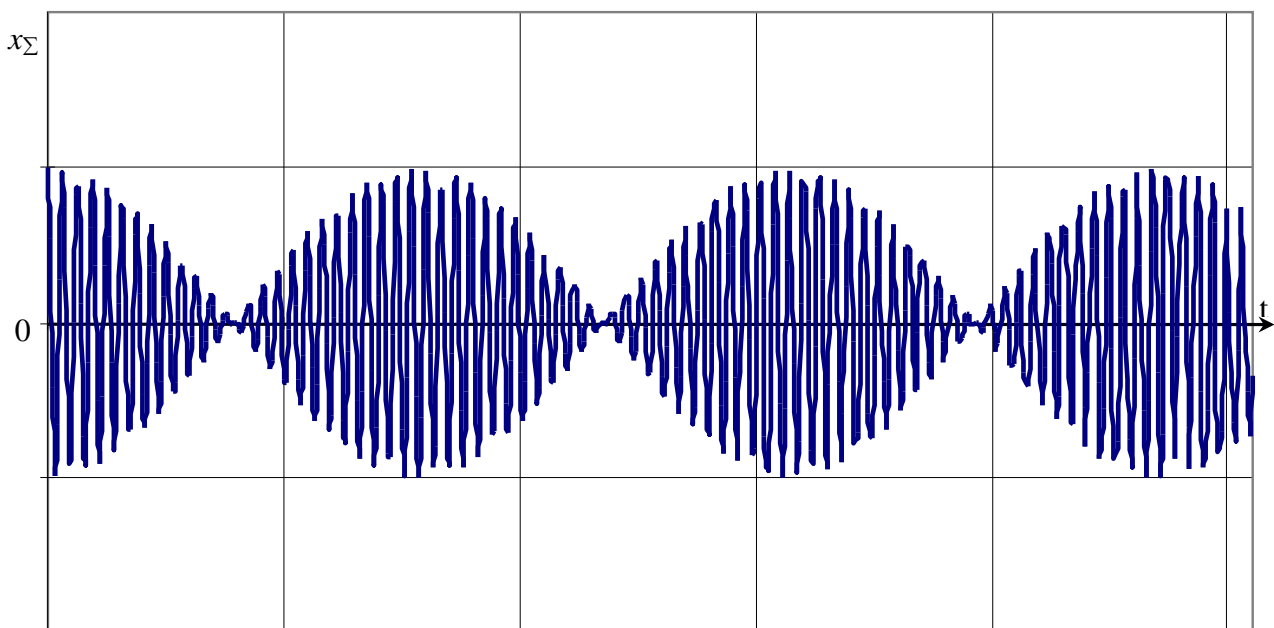
$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 2A \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \left( \omega t + \frac{\Delta\omega}{2} t \right).$$

Пренебрегая в выражении для фазы второго сомножителя величиной  $\Delta\omega$  по сравнению с  $\omega$ , получаем:

$$x_{\Sigma} = 2A \left| \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \right| \cos (\omega t + \theta).$$

Если  $\cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t \right) > 0$ , то  $\theta = 0$ , но если  $\cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t \right) < 0$  то  $\theta = \pi$ .

Таким образом, при сложении колебаний близких частот возникает периодическое изменение амплитуды и скачкообразное изменение фазы результирующего колебания – явление, которое называется *биением*.



### Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Рассмотрим колебания точки одновременно по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \alpha_x), \quad y = A_y \sin(\omega_y t + \alpha_y).$$

Отметим, что при  $\alpha_x = \alpha_y$  фазы колебаний сдвинуты на  $\pi/2$ .

1) Пусть частоты колебаний одинаковые  $\omega_x = \omega_y := \omega$

Обозначим  $\alpha_y = \alpha_x + \delta$ . Получим уравнение траектории

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t + \alpha_x), \quad \frac{y}{A_y} = \sin(\omega t + \alpha_x + \delta) = \sin(\omega t + \alpha_x) \cos \delta + \cos(\omega t + \alpha_x) \sin \delta$$

$$\frac{y}{A_y} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2} \cos \delta + \frac{x}{A_x} \sin \delta, \quad \left(\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x} \sin \delta\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\right) \cos^2 \delta$$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2 \frac{x}{A_x} \frac{y}{A_y} \sin \delta + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \cos^2 \delta.$$

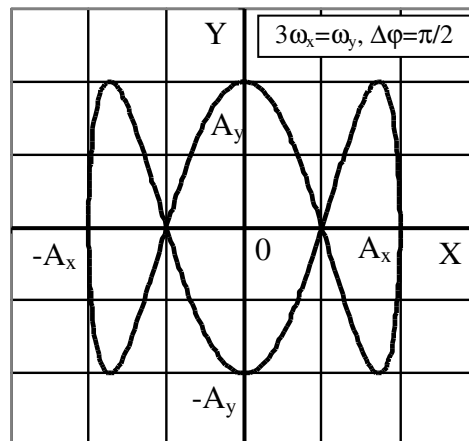
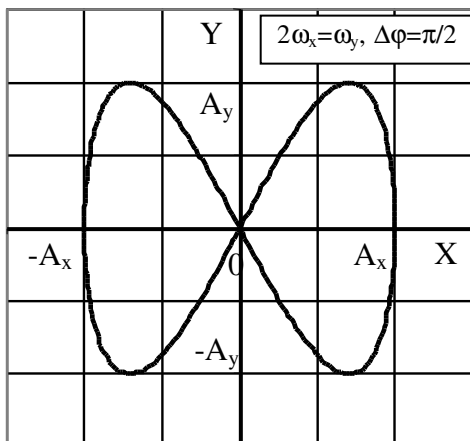
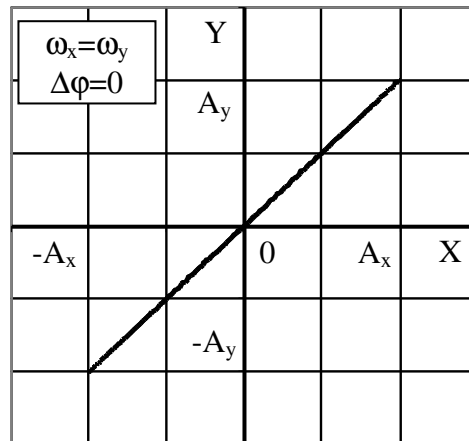
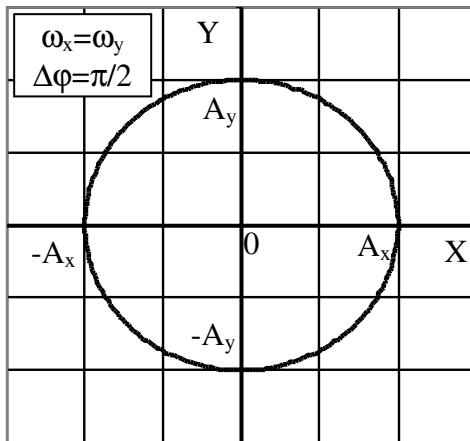
Это уравнение линии *второго порядка на плоскости*.

Если  $\delta = 0$  (фазы колебаний сдвинуты на  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), то получаем эллипс  $\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = 1$ .

Если  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  (фазы колебаний сдвинуты на  $\Delta\varphi = 0$  или  $\pi$ ), то получаем отрезок прямой.

2) Фигуры для некоторых других соотношений частот и разности фаз показаны на рис.

Соотношение частот колебаний по фигуре можно определить из соотношения



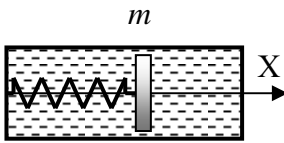
$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x},$$

где  $n$  – количество пересечений фигуры и прямой, параллельной соответствующей оси.

Траектория точки, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, при рациональном отношении частот колебаний называется фигурой Лиссажу. Условие рационального частот отношения означает, что отношение частот можно записать в виде рационального числа. В этом случае траектория является замкнутой. Если отношение частот не является рациональным числом, то траектории незамкнутая линия.

**Лекция 6. «Колебания» (продолжение).**

*Свободные затухающие колебания. Декремент и логарифмический декремент колебаний. Вынужденные колебания. Установившиеся вынужденные колебания. Механический резонанс.*



Рассмотрим движение тела в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи положения равновесия (например, поршня на пружине).

Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r \cdot \vec{v}, \text{ где } r - \text{коэффициент сопротивления (Н·с/м)}$$

Уравнение движения поршня можно записать в виде  $ma = -kx - rv$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где введены обозначения  $2\beta = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Это уравнение называется *уравнением свободных затухающих колебаний*.

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$W_{\text{Мех}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = m \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \right).$$

(Если  $r=0$ , то получаем уравнение свободных незатухающих колебаний  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  с периодом

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .) Для затухающих колебаний механическая энергия не остаётся постоянной

$$\frac{dW_{\text{Мех}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ m \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \right) \right\} = m (\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x}) = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = m\dot{x}(-2\beta\dot{x}) = -r\dot{x}^2 < 0$$

а убывает. Поэтому с течением времени колебания затухают.

Решение ищем уравнения свободных затухающих в виде  $x = e^{\lambda t}$ . Подставим в уравнение и, после сокращений, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Дискриминант квадратного уравнения  $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$ ,

значения корней  $\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ .

Тогда решение уравнения должно иметь вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\beta t} \left( C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные коэффициенты.

Воспользуемся формулой Эйлера:  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ , где  $i = \sqrt{-1}$ .

Видно, что если  $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ , то решение не описывает колебания.

Колебания будут наблюдаться, если  $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ . Введем обозначение  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .

Тогда  $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i \cdot \omega$  и решение уравнения будет иметь вид

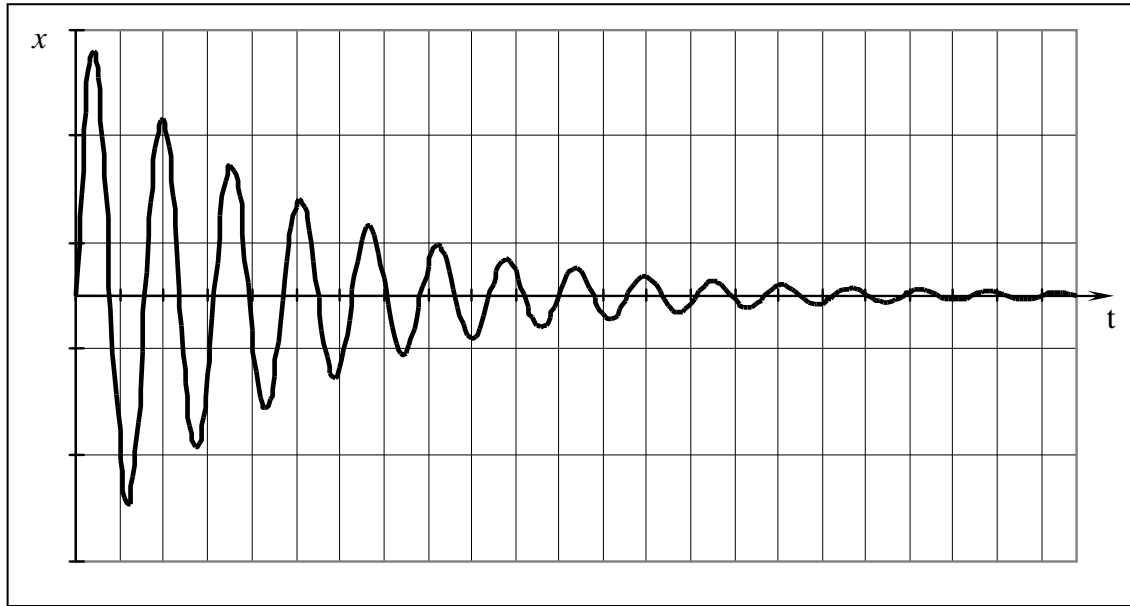
$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

- оно описывает свободные колебания циклической частоты  $\omega$ , затухающие с течением време-

ни. Где циклическая частота затухающих колебаний  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , а период  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ .

Необходимым условием колебательного движения является неравенство  $\beta < \omega_0$ .

Величина  $A = A_0 e^{-\beta t}$  является *амплитудой затухающих колебаний*. С течением времени амплитуда убывает – говорят, что колебания *затухают*. Временем *затухания* (временем *релаксации*) называется время, за которое амплитуда убывает в  $e$  раз



$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e, \quad e^{\beta\tau} = e, \quad \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Число полных колебаний, совершаемое системой за это время  $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$ .

Декремент затухания – отношение амплитуд колебаний через период

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Логарифмический декремент затухания  $\delta = \ln \Delta = \beta T$ . Поэтому  $N_e = \frac{1}{\delta}$ .

Величина  $Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}$  называется *добротностью колебательной системы*.

Энергию колебаний в момент времени  $t$  можно определить как  $W = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2}$ .

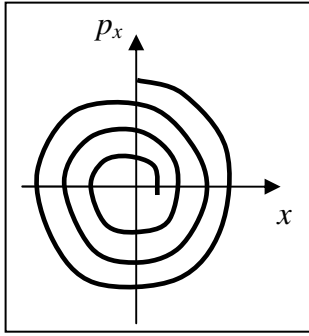
Убыль энергии за один период  $W_1 - W_2 = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{kA_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} (1 - e^{-2\beta T})$

Рассмотрим отношение запасенной энергии к убыли энергии  $\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$ .

При малом логарифмическом декременте затухания  $\delta = \beta T \ll 1$  воспользуемся разложением  $1 - e^{-2\beta T} = 1 - (1 - 2\beta T + \dots) \approx 2\beta T$ . Учитывая,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  и при малых  $\beta$   $\omega \approx \omega_0$

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\beta \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\beta 2\pi} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Для затухающих свободных колебаний добротность характеризует скорость убывания энергии при малых затуханиях.

**Фазовый портрет свободных затухающих колебаний.**

Закон колебательного движения  $x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)$ .

Скорость при колебаниях

$$v_x = \dot{x} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) + \omega A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{Импульс } p_x = m v_x = -m\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) + m\omega A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

Так как  $\sin(\omega t + \alpha) = \frac{x}{A_0 e^{-\beta t}}$  и  $\cos(\omega t + \alpha) = \frac{p_x + m\beta x}{m\omega A_0 e^{-\beta t}}$ , то

$$\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha) = \left( \frac{x}{A_0 e^{-\beta t}} \right)^2 + \left( \frac{p_x + m\beta x}{m\omega A_0 e^{-\beta t}} \right)^2 = 1$$

Фазовая траектория представляет собой сужающуюся к нулевой точке спираль. Вращение происходит по часовой стрелке.

**Вынужденные колебания.**

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ .

Второй закон Ньютона  $ma = -kx - rv + F(t)$  перепишем в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

где введены обозначения  $2\beta = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ . Это уравнение называется *уравнением вынужденных колебаний*.

Решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является *сумма* решений *однородного* и *частного* решения *неоднородного* уравнений.

Однородное уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

является уравнением свободных затухающих колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$$

будем искать в виде  $x_B = A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B)$ . Изобразим уравнение

на амплитудно-векторной диаграмме, на которой величине  $\omega_0^2 x_B = \omega_0^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B)$  соответствует вектор  $\vec{A}_{B1}$ , такой что

$|\vec{A}_{B1}| = \omega_0^2 A_B$ . Так как

$$\dot{x}_B = -\omega_B A_B \sin(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B A_B \cos\left(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2}\right), \text{ то величине}$$

$$2\beta\dot{x}_B = 2\beta\omega_B A_B \cos\left(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2}\right) \text{ соответствует вектор } \vec{A}_{B2}, \text{ повернутый относительно вектора}$$

$\vec{A}_{B1}$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ , длина которого  $|\vec{A}_{B2}| = 2\beta\omega_B A_B$ .

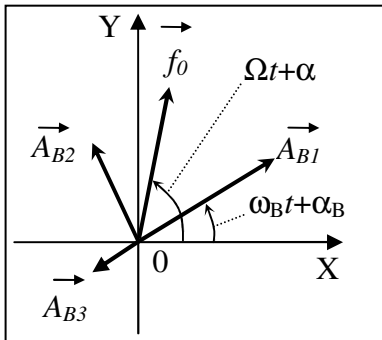
Величине  $\ddot{x}_B = -\omega_B^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B^2 A_B \cos(\omega_B t + \alpha_B + \pi)$  соответствует вектор  $\vec{A}_{B3}$ , повернутый на угол  $\pi$  относительно вектора  $\vec{A}_{B1}$  и  $|\vec{A}_{B3}| = \omega_B^2 A_B$ .

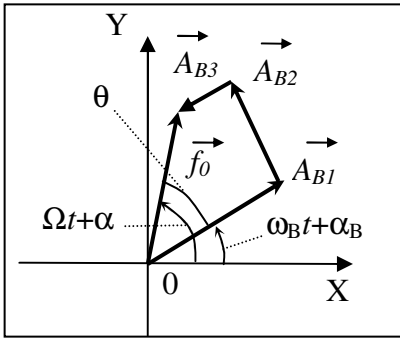
В правой части уравнения величине  $f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$  соответствует вектор  $\vec{f}_0$ .

Уравнению  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t + \alpha)$

будет соответствовать векторная сумма

$$\vec{A}_{B1} + \vec{A}_{B2} + \vec{A}_{B3} = \vec{f}_0.$$





Так как длины векторов не меняются, то это равенство возможно только для случая  $\omega_B = \Omega$ . Таким образом, *вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы.*

Из диаграммы следует, что при этом должно выполняться равенство  $f_0^2 = (A_{B1} - A_{B3})^2 + A_{B2}^2$ , поэтому получаем

$$f_0^2 = (\omega_0^2 A_B - \Omega^2 A_B)^2 + (2\beta\Omega A_B)^2.$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

Обозначим через  $\theta = \alpha - \alpha_B$  - разность фаз вынуждающей силы и вынужденных колебаний.

Из диаграммы следует, что  $\operatorname{tg} \theta = \frac{A_{B2}}{A_{B1} - A_{B3}}$ :  $\operatorname{tg} \theta = \frac{2\beta\omega_B A_B}{\omega_0^2 A_B - \omega_B^2 A_B} = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$

Таким образом, при  $\omega_0 > \Omega$  получаем, что  $\theta > 0$  – вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, а при  $\omega_0 < \Omega$  - вынужденные колебания опережают по фазе вынуждающую силу.

*Следствие.* Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний - свободные затухающие с собственной частотой  $\omega$ , и вынужденные – с частотой вынуждающей силы. Затухающие с течением времени прекратятся и останутся только вынужденные колебания – их называют *установившимися*.

*Резонанс* – явление резкого возрастания амплитуды установившихся колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной резонансной частоте системы.

Найдем, при какой частоте вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний будет иметь максимальное значение. Для этого найдем экстремум амплитуды:  $\frac{\partial A_B}{\partial \Omega} = 0,$

$$\frac{\partial A_B}{\partial \Omega} = -\frac{1}{2} \frac{f_0 (2(-2\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2 \Omega)}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2)^{3/2}} = \frac{f_0 \Omega (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\beta^2)}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2)^{3/2}} = 0.$$

Первое решение  $\Omega=0$  соответствует постоянной сдвигающей силе и отсутствию вынужденных колебаний.

Второе (ограниченное) решение  $\Omega_{\text{REZ}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  называется *резонансной частотой системы*.

Отсюда вытекает условие возникновения резонанса  $\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$

*Амплитуда колебаний при резонансе*

$$A_{B\_REZ} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2 (\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2 \omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

Предельное значение амплитуды вынужденных колебаний при постоянной (сдвигающей) силе (когда  $\Omega=0$ ) – это статическое отклонение на величину  $A_{0B} = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$

Рассмотрим отношение  $\frac{A_B}{A_{0B}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\frac{\beta^2}{\omega_0^2} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}.$



При резонансе оно примет вид  $\frac{A_{B\_REZ}}{A_{0B}} = \frac{1}{2 \frac{\beta}{\omega_0} \sqrt{1 - 2 \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}$ .

Обозначим  $x = \frac{\Omega}{\omega_0}$  и построим графики зависимости амплитуды от частоты для различных значений параметров. (График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты называется *резонансной кривой*.).

**Зависимость резонансной частоты и резонансной амплитуды от параметра затухания**

$\beta/\omega_0$	0,04	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4
$\Omega/\omega_0$	0,998398718	0,995088	0,989949	0,959166	0,905539	0,824621
$\frac{A_{B\_REZ}}{A_{0B}}$	12,52004813	7,178117	5,050763	2,60643	1,840525	1,515848

**Резонансная кривая**

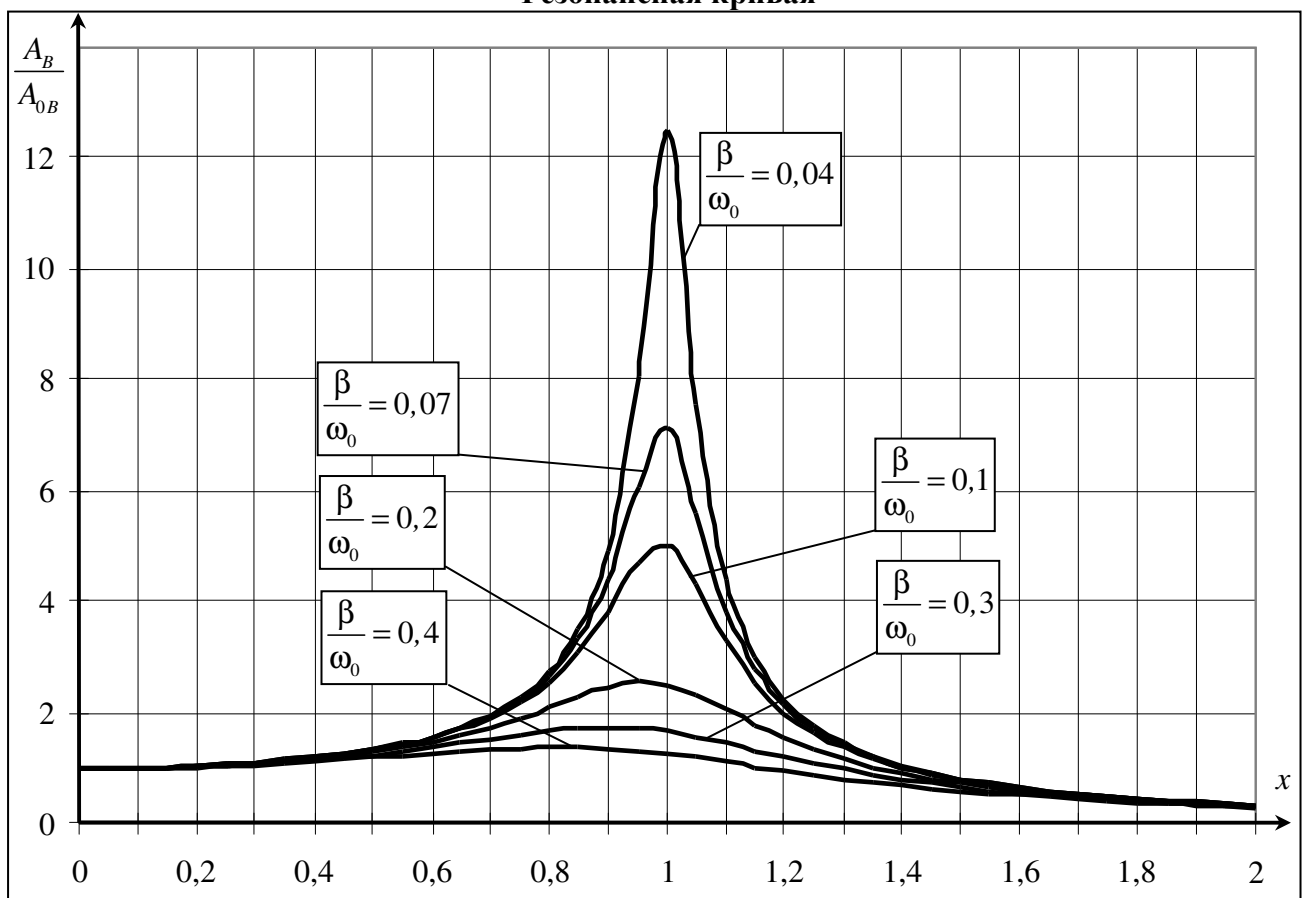
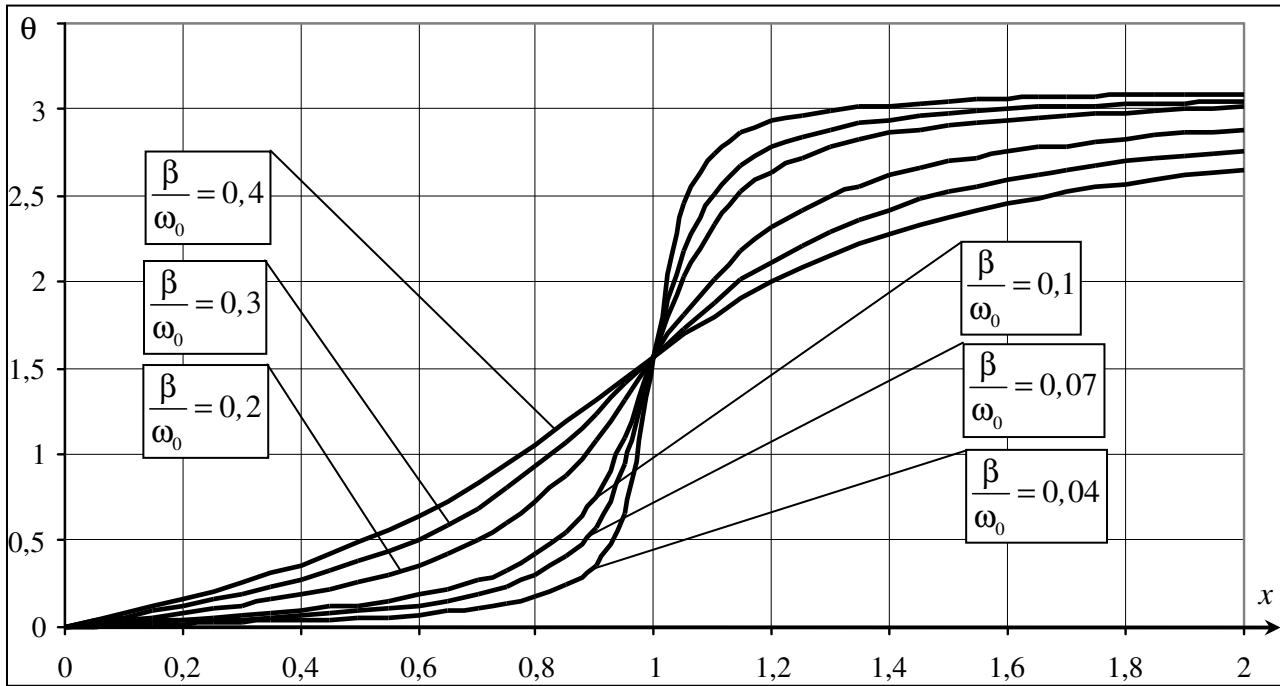


График зависимости разности фаз от частоты



Ширина резонансной кривой  $\Delta\Omega_R$  - это интервал частоты, в пределах которого амплитуда колебаний отличается от резонансной амплитуды в пределах  $A(\Omega) \geq \frac{A_R}{\sqrt{2}}$ . (Или энергия колебаний отличается не более чем в 2 раза).

Учитывая, что  $A_{B\_REZ} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$  и  $A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$ ,

$$\text{находим } \frac{A_{B\_REZ}}{A_B} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

$$\text{Или } \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = 2\sqrt{2}\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Откуда получаем квадратное уравнение  $\Omega^4 + (4\beta^2 - 2\omega_0^2)\Omega^2 + (\omega_0^2 - 4\beta^2)^2 = 0$ .

Дискриминант этого уравнения  $D = 16\beta^2\omega_0^2 - 48\beta^4 = 16\beta^2(\omega_0^2 - 3\beta^2)$ .

Решение квадратного уравнения

$$(\Omega^2)_{1,2} = \frac{-(4\beta^2 - 2\omega_0^2) \pm 4\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}{2} = -(2\beta^2 - \omega_0^2) \pm 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}.$$

Так как  $(\omega_0^2 - 4\beta^2)^2 > 0$ , то  $(\Omega^2)_{1,2} = \omega_0^2 - 2\beta^2 \pm 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)} > 0$ .

Откуда находим (только положительные решения)

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}.$$

Поэтому для ширины резонансной кривой получаем

$$\Delta\Omega_R = \Omega_2 - \Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}} - \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}.$$

Следовательно, такой параметр определен при  $\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$ .

Найдем отношение  $\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R}$  при малом значении  $\beta$ .

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}} - \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - 3\beta^2)}}},$$

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} = \frac{\Omega_{REZ}}{\sqrt{\Omega_{REZ}^2 + 2\beta\sqrt{(\Omega_{REZ}^2 - \beta^2)}} - \sqrt{\Omega_{REZ}^2 - 2\beta\sqrt{(\Omega_{REZ}^2 - \beta^2)}}} \quad \text{или} \quad \frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} \approx \frac{\Omega_{REZ}}{2\beta}.$$

Учтем, что при малых  $\beta$  выполняется  $\Omega_{REZ} \approx \omega_0 \approx \omega$ , поэтому

$$\frac{\Omega_{REZ}}{\Delta\Omega_R} \approx \frac{\Omega_{REZ}}{2\beta} \approx \frac{\omega}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = Q,$$

где величины  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $Q$  характеризуют затухающие свободные колебания данной колебательной системы.

Рассмотрим также отношение

$$\frac{A_{B\_REZ}}{A_{0B}} = \frac{1}{2\frac{\beta}{\omega_0}\sqrt{1-2\frac{\beta^2}{\omega_0^2}}}.$$

Для малого затухания  $\beta$ :  $\frac{A_{B\_REZ}}{A_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = Q$ .

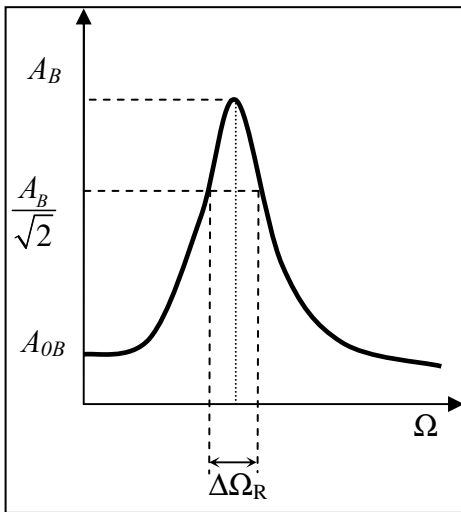
#### Следствия.

1) Для вынужденных колебаний добротность колебательной системы характеризует *резонансные свойства колебательной системы*. Добротность равна отношению резонансной частоты к широте резонансной кривой (при малом затухании). Отсюда следует, что чем выше добротность, тем уже («острее») ре-

зонансная кривая  $\Delta\Omega_R = \frac{\Omega_{REZ}}{Q}$ .

2) Добротность при малом затухании также характеризует отношение амплитуды при резонансе к статическому отклонению системы под действием постоянной силой такой же

величины  $\frac{A_{B\_REZ}}{A_0} \approx Q$ .



**Лекция 7. «Механические волны».**

*Виды механических волн. Упругие волны в стержнях. Волновое уравнение. Плоская гармоническая волна, длина волны, фазовая скорость. Сферические волны. Объемная плотность энергии волны. Вектор Умова – вектор плотности потока энергии. Когерентные волны. Интерференция волн. Стоячая волна.*

Волна – это процесс распространения возмущений некоторой физической величины в пространстве с течением времени. Если возмущения описываются как механическое движение среды, то волна называется *механической*. Например, возмущения могут представлять собой отклонения точек среды от своих положений равновесия. Если эти отклонения направлены перпендикулярно движению волны, то волна называется *поперечной*, если параллельны – то *продольной*. Примером поперечных волн являются волны на поверхности жидкости или колебания гитарной струны. В глубине жидкости или в газе могут распространяться только продольные волны. Примером является звуковая волна – колебания давления (плотности) в газе или жидкости.

Важное свойство волновых движений состоит в *локальной связи между возмущениями в близких точках среды*. То есть отклонение от положения одной точки вызывает отклонения соседних близких точек. Локальная связь между точками является причинно-следственной связью, поэтому процесс распространения возмущения в таких средах имеет конечную скорость.

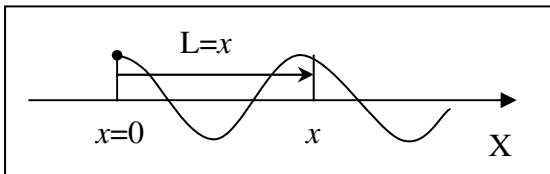
*Монохроматическая волна* – это идеализация волнового процесса – это бесконечная волна, при которой состояние среды описывается с помощью гармонической функции постоянной частоты.

Рассмотрим поперечную монохроматическую волну, испускаемую некоторым источником, находящимся в начале оси  $X$  ( $x=0$ ) и совершающим колебания по гармоническому закону. Пусть его закон колебаний имеет вид  $\xi = A \cos(\omega t + \alpha)$ . Так как скорость движения волны ко-

нечная, то обозначим её через  $v$ .

Колебание, испущенное источником в момент времени  $t$  придет (без изменений) в точку, отстоящую от источника на расстоянии  $L$ , лишь спустя промежуток

времени  $\Delta t = \frac{L}{v}$ :



$$\xi = A \cos(\omega(t - \Delta t) + \alpha) = A \cos\left(\omega t - \omega \frac{L}{v} + \alpha\right)$$

Поэтому колебания в координате  $x > 0$  будут иметь вид  $\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$  – волна, бегущая в положительном направлении оси  $X$ , а если  $x < 0$ , то  $\xi = A \cos(\omega t + kx + \alpha)$  – волна, бегущая в отрицательном направлении оси  $X$ . Здесь величина  $k = \frac{\omega}{v}$  называется *волновым числом*.

Здесь величина  $k = \frac{\omega}{v}$  называется *волновым числом*.

Так как  $\omega$  – циклическая частота, то временной период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

$k$  – циклическая частота колебаний по координате  $X$ , поэтому пространственный период  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

называется *длиной волны*. Из соотношения  $k = \frac{\omega}{v}$  получаем  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT}$ , откуда получаем  $\lambda = vT$  – то есть длина волны – это расстояние, проходимое волной за время, равное периоду колебаний.

Для функции  $\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$  выполняются соотношения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{откуда}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Это уравнение называется *волновым уравнением* для одномерного случая (Вдоль координаты X).

### Рассмотрим свойства решений этого уравнения.

1. Геометрическое место точек среды, где наблюдаются колебания, называют *волновым полем*. Волновое уравнение – линейное, в том смысле, что сумма двух решений тоже является решением. Это так называемый принцип суперпозиции – *при наложении волновых полей получается поле волновое поле, являющееся их суммой*.

В общем случае решением одномерного волнового уравнения является сумма двух произвольных дважды непрерывно-дифференцируемых функций

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt),$$

одна из которых -  $f_1(x - vt)$  - описывает возмущение, распространяющееся в положительном направлении оси X – его называют *убегающей* волной, а вторая,  $f_2(x + vt)$  - в отрицательном направлении оси X – её называют *набегающей* волной.

Действительно, подставим в волновое уравнение выражение

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt).$$

Тогда  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f_1(x - vt) + f_2(x + vt)) = -v \cdot f_1'(x - vt) + v \cdot f_2'(x + vt),$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 f_1''(x - vt) + v^2 f_2''(x + vt),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f_1(x - vt) + f_2(x + vt)) = f_1'(x - vt) + f_2'(x + vt), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f_1''(x - vt) + f_2''(x + vt).$$

Штрихи означают производные от функций по аргументу.

При подстановке этих соотношений в волновое уравнение  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ :

$$v^2 f_1''(x - vt) + v^2 f_2''(x + vt) = v^2 (f_1''(x - vt) + f_2''(x + vt))$$

получаем тождество.

2. Геометрическое место точек в пространстве, для которых фаза волны одинаковая называют *волновой* или *фазовой поверхностью*. В одномерном случае волновая поверхность – это плоскость, которая движется вдоль оси с течением времени  $\omega t + kx = const$  или  $\omega t - kx = const$ . Поэтому волна называется *плоской*. Если волновая поверхность – сфера, то волна называется *сферической*.

Скорость движения плоской фазовой поверхности можно найти дифференцированием по

времени уравнений  $\omega + k\dot{x} = 0$  или  $\omega - k\dot{x} = 0$ . Видно, что скорость вдоль оси  $v = \pm \frac{\omega}{k}$  по вели-

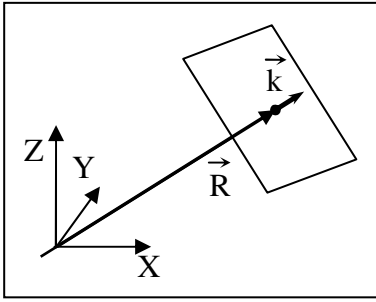
чине совпадает со скоростью волны, определяемой из уравнения. Таким образом, в волновом

уравнении  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$  присутствует квадрат скорости, которая называется *фазовой скоростью волны*.

Замечание. В общем случае, фазовая скорость может зависеть от параметров волны (амплитуды, частоты). Для случая, когда скорость зависит от частоты волны, имеется особое название – дисперсия волн.

### Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении.

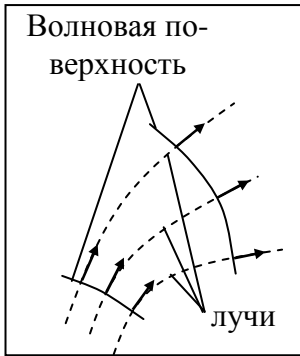
Пусть волна движется в направлении прямой линии, которая проходит через начало координат. Тогда радиус-вектор любой точки, лежащей на этой прямой, тоже лежит на этой прямой и длина этого вектора равна расстоянию R от начала координат. Поэтому уравнение волны, которая бежит вдоль этой прямой можно записать в виде  $\xi = A \cos(\omega t - kR + \alpha)$ . Фазовая поверхность перпендикулярна этой прямой. Введем *волновой вектор*  $\vec{k}$ , направленный перпенди-



кулярно фазовой (волновой) поверхности волны в сторону её движения. Длина вектора  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  равна волновому числу. Так как волновой вектор параллелен прямой, то можно записать  $kR = (\vec{k}, \vec{R})$  и  $\xi = A \sin(\omega t - (\vec{k}, \vec{R}) + \alpha)$ .

Но для любой плоской волны всегда есть прямая линия, перпендикулярная волновой поверхности и проходящая через начало координат, поэтому такая форма записи является общей.

В чем удобство введения волнового вектора? С его помощью можно определять положение любой волновой поверхности. При этом движение волновой поверхности можно описать с помощью лучей. Луч – это линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направлена как волновой вектор.



Волновое уравнение для движения волны в 3х мерном пространстве в общем случае имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Если ввести условное обозначение  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \Delta \xi$ , то это уравне-

ние можно записать в виде

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$  так называемый *оператор Лапласа* (**Пьер-Симон Лаплас** – французский ученый).

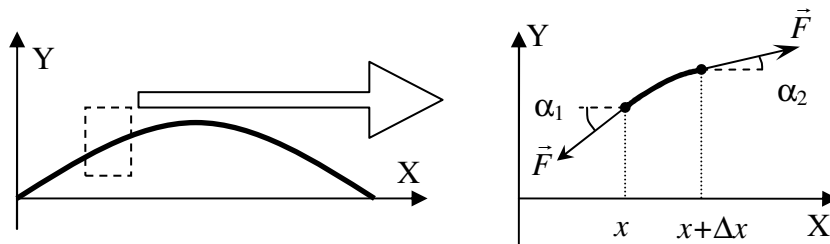
*Сферическая волна* описывается функцией

$$\xi = \frac{A_0}{R} \cdot \cos(\omega t + (\vec{k}, \vec{R}) + \alpha) + \frac{A_0}{R} \cdot \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{R}) + \beta).$$

Амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию от центра волны.

### Примеры по выводу уравнений колебаний.

Рассмотрим малые поперечные колебания тонкой однородной струны длины L и массы



m, закрепленной с обоих концов. Пусть сила натяжения струны F постоянная по величине. Форма проволоки задается уравнением  $y(x)$ . Выделим малый кусок проволоки, длина которого вдоль оси X равна  $\Delta x$ , а масса  $\Delta m$ . Так как колебания поперечные, то запишем второй закон Ньютона для куска  $\Delta m$  вдоль оси Y:

$$\Delta m a_y = F \cdot \tan \alpha_2 - F \cdot \tan \alpha_1$$

$$\tan \alpha_1 = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x, \quad \tan \alpha_2 = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \approx \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x \cdot \Delta x \quad (\text{разложение в ряд Тейлора}).$$

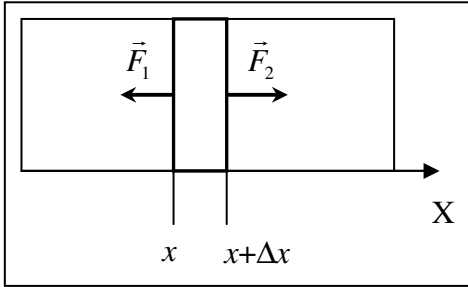
$$\Delta m a_y = F \cdot \left( \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x \cdot \Delta x \right) - F \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x = F \cdot \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x \cdot \Delta x$$

$$\Delta m = \frac{m}{L} \Delta x \text{ и } a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{m}{L} \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_x \cdot \Delta x.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{LF}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Поэтому скорость волны в струне  $v = \sqrt{\frac{LF}{m}}$ .

Если возвращающая сила пропорциональна смещению точки от положения равновесия,



то волна называется *упругой*. Выведем волновое уравнение на примере продольных волн деформации в стержне.

Выделим часть стержня длиной  $\Delta x$ . Если площадь поперечного сечения стержня равна  $S$ , плотность материала  $\rho$ , то масса этой части  $\Delta m = \rho S \Delta x$ . При деформациях на эту часть стержня действуют силы упругости. Запишем второй закон Ньютона – уравнение движения этой части стержня вдоль оси  $X$ :

$$\Delta m a_x = F_2 - F_1.$$

Это уравнение записано в предположении растяжения этой части стержня. Силы с обеих сторон выделенной части вызваны деформацией стержня. При равновесии и отсутствии деформации положение точек в двух близко расположенных сечениях стержня можно задать координатами  $x$  и  $x + \Delta x$ . При деформировании стержня его точки сместятся от равновесных положений. Пусть  $x_1(x)$  – задает положение точки стержня при деформации, если её равновесное положение задавалось координатой  $x$ . Тогда для близкого сечения новыми координатами будет  $x_1 + \Delta x_1$ . Изменение линейного размера части стержня вызвано смещением точек стержня. Введем величину смещения  $\xi = x_1 - x$ . По определению, относительная деформация в данном сечении стержня – это отношение изменения длины части стержня к начальной длине этой части:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x}.$$

Если стержень сжимается, то его продольные размеры уменьшаются  $\Delta x_1 < \Delta x$  и поэтому  $\varepsilon < 0$ . Таким образом, при сжатии  $\varepsilon < 0$  и при растяжении  $\varepsilon > 0$ .

Если все точки стержня смещаются на одинаковую величину, то изменения длины участка стержня не происходит. Поэтому деформация равна разности смещений соседних точек

$$\Delta x_1 - \Delta x = \Delta \xi. \text{ Тогда можно записать } \varepsilon = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}.$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

По обобщенному закону Гука  $F_1 = \sigma_x S$ ,  $F_2 = \sigma_{x+\Delta x} S$ . Напряжения в сечениях стержня найдем по закону Гука:  $\sigma_x = E \varepsilon_x$ ,  $\sigma_{x+\Delta x} = E \varepsilon_{x+\Delta x}$ , где  $E$  – модуль упругости материала (модуль Юнга).

Относительная деформация меняется вдоль стержня, поэтому можно считать, что

$$\varepsilon_{x+\Delta x} = \varepsilon_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x + \dots \text{ (разложение в ряд Тейлора).}$$

$$a_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Последовательно подставим эти соотношения в уравнения движения:

$$\Delta m a_x = F_2 - F_1: \rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma_{x+\Delta x} S - \sigma_x S, \quad \rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \varepsilon_2 - E \varepsilon_1, \quad \rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \left( \varepsilon_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x \right) - E \varepsilon_1,$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x.$$

С учетом равенства  $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ , после сокращений, получаем дифференциальное уравнение, описывающее распространение волны (вдоль одного направления – оси X):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \text{ или } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Здесь,  $\xi$  – параметр, описывающий колебания (величина смещения точек при деформации),  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость волны. ♣

Рассмотрим выделенный участок стержня длиной  $\Delta x$ . При колебаниях скорость этого участка  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  и величина деформации  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Соответственно, кинетическая и потенциальные энергии выделенного участка равны  $W_K = \frac{1}{2} \rho S \Delta x \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$  и  $W_{II} = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 S \Delta x$ . Объем участка

$$V = S \Delta x. \text{ Объемная плотность механической энергии } w = \frac{W_K + W_{II}}{V} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Если уравнение движения волны записать в виде  $\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$ , то с учетом соотношений для скорости  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx + \alpha)$  и деформации  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kA \sin(\omega t - kx + \alpha)$  получается

$$w = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + \frac{1}{2} E \cdot k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha),$$

$$w = (\rho \cdot \omega^2 + E \cdot k^2) \frac{1}{2} A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha).$$

Используем выражение для скорости волны  $v^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{\omega^2}{k^2}$ :

$$w = \rho \cdot \omega^2 \left( 1 + \frac{E}{\rho} \cdot \frac{k^2}{\omega^2} \right) \frac{1}{2} A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) = \rho \cdot \omega^2 2 \frac{1}{2} A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

$$w = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2} (1 - \cos(2[\omega t - kx + \alpha])).$$

Среднее значение плотности потока энергии, переносимой волной

$$\langle w \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2} (1 - \cos(2[\omega t - kx + \alpha])) dt \right] = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2}$$

Следствия

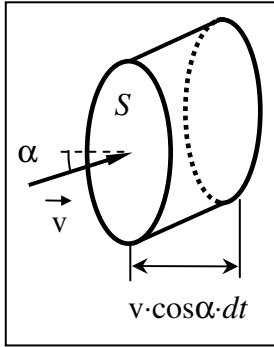
- 1) Величины скорости точек  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx + \alpha)$  и деформации среды

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kA \sin(\omega t - kx + \alpha) \text{ колеблются синфазно друг другу.}$$

- 2) Закон изменения плотности энергии описывается волновым уравнением и представляет волну плотности энергии. Скорость этой волны  $v_{ЭН} = \frac{2\omega}{2k} = v$  в данном случае совпадает с фазовой скоростью волны. (В общем случае это не так.)



### Вектор Умова



Пусть энергия переносится со скоростью  $\vec{v}$  в направлении под углом  $\alpha$  к нормали некоторой малой площадки  $S$ . Тогда вся энергия, прошедшая через эту площадку за малое время  $dt$  окажется в области, объем которой  $dV = S \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dt$  (на рисунке эта область является косым цилиндром). Если объемная плотность энергии равна  $w$ , то энергия этого объема

$$W = w \cdot dV = w \cdot S \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dt$$

Мощность переноса энергии через площадку  $S$ :  $\frac{dW}{dt} = w \cdot dV = w \cdot S \cdot v \cdot \cos \alpha$ .

Введем вектор плотности потока энергии (Вектор Умова)

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v},$$

тогда  $\frac{dW}{dt} = j \cdot S \cdot \cos \alpha$ . Если ввести вектор  $\vec{S} = \vec{n} \cdot S$ , направленный по нормали к площадке, и скалярное произведение  $j \cdot S \cdot \cos \alpha = (\vec{j}, \vec{S})$  определить как поток вектора Умова через площадку  $S$ , то *мощность переноса энергии через площадку определяется потоком вектора Умова через эту площадку*  $\frac{dW}{dt} = (\vec{j}, \vec{S})$ .

**Интенсивность волны** – это средняя по времени энергия переносимая волной через площадку в направлении перпендикулярном к этой площадке.

Для плоской волны интенсивность  $I = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2} S$  не меняется при распространении волны

Для сферической волны интенсивность через любую сферу радиуса  $R$  с центром в источнике

$$I = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2} S = \frac{\rho \cdot \omega^2}{2} \frac{A_0^2}{R^2} 4\pi R^2 = 2\pi \rho \cdot \omega^2 A_0^2$$

является постоянной величиной.

Если интенсивность волны уменьшается, то среда называется *диссипативной*.

Если интенсивность волны увеличивается, то среда называется *активной*.

### Интерференция волн

**Интерференция волн** – взаимное усиление или ослабление волн при их наложении друг на друга (суперпозиции волн) при одновременном распространении в пространстве, что приводит к перераспределению энергии колебаний, устойчивому во времени. Интерференция волн наблюдается согласно принципу суперпозиции волн.

Рассмотрим суперпозицию двух волн одного направления  $\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \alpha_1)$  и

$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \alpha_2)$ .

Рассмотрим амплитудно-векторную диаграмму. По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos(\pi - \delta)$$

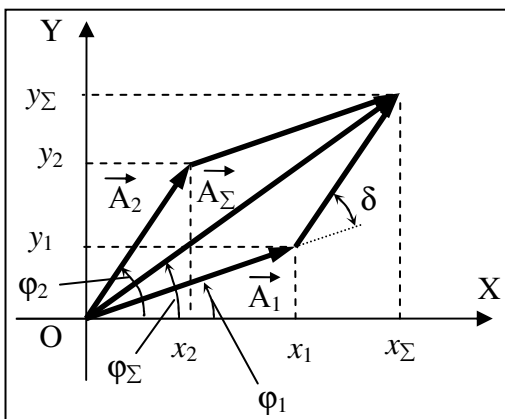
Учтем, что  $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$ ,

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 x_2 - k_1 x_1) + \alpha_2 - \alpha_1, \text{ тогда}$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 x_2 - k_1 x_1) + \alpha_2 - \alpha_1).$$

Если результирующая амплитуда не зависит от времени, то разность фаз волн должна быть постоянной во времени. Такие волны называются *когерентными*. В частности, получаем, что частоты когерентных волн совпадают  $\omega_2 = \omega_1$ .

Вообще говоря, волны могут двигаться к точке встречи в разных средах, поэтому их скорости могут быть там различными, а также расстояние до точки тоже могут быть разными.



$$A_{\Sigma}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos((k_2x_2 - k_1x_1) - (\alpha_2 - \alpha_1))$$

Поэтому в точке наблюдения может быть

либо усиление колебаний при  $\cos((k_2x_2 - k_1x_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)) = 1$ ,

либо ослабление колебаний при  $\cos((k_2x_2 - k_1x_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)) = -1$ .

### Стоячая волна.

Стоячая волна образуется при наложении двух волн одинаковой частоты, бегущих в противоположных направлениях:

$$\xi = A \cos(\omega t + kx + \alpha_1) + A \cos(\omega t - kx + \alpha_2)$$

Пусть  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = 0$ , тогда  $\xi = 2A \cos(kx) \cos(\omega t + \theta)$ .

Величину  $A_0 = 2A |\cos(kx)|$  можно назвать амплитудой стоячей волны. Так как амплитуда не может быть отрицательной, то необходимо брать модуль  $|\cos(kx)|$ . Тогда в тех точках, где  $\cos(kx) > 0$  значение  $\theta=0$ , а в тех точках, где  $\cos(kx) < 0$  надо, для учета знака минус, принять  $\theta=\pi$ . Точки, где амплитуда стоячей волны максимальная, называются *пучностями*. Эти точки можно найти из условия  $|\cos(kx)| = 1$ , откуда  $kx = \pm \pi \cdot n$  ( $n$  – целое число). Следовательно, координаты пучностей  $x_{пуч}^n = \pm \frac{\pi \cdot n}{k} = \pm \frac{\pi \cdot n}{2\pi} \lambda = \pm n \frac{\lambda}{2}$ . Соседние пучности находятся друг от друга на расстоянии  $\frac{\lambda}{2}$  – половины длины волны. Точки, где амплитуда стоячей волны равна нулю,

называются *узлами*. Эти точки можно найти из условия  $|\cos(kx)| = 0$ , откуда  $kx = \frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot n$  ( $n$  –

целое число). Следовательно, координаты узлов  $x_n^{уз} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot n\right)}{k} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot n\right)}{2\pi} \lambda = \left(\frac{1}{2} \pm n\right) \frac{\lambda}{2}$ .

Соседние узлы находятся друг от друга на расстоянии  $\frac{\lambda}{2}$  – половины длины волны.

Следовательно, расстояние между ближайшими соседними узлами и пучностями равно  $\frac{\lambda}{4}$ .

Найдем объемную плотность энергии стоячей волны  $w = w_K + w_{II} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$

$$w = \frac{1}{2} \rho (-\omega 2A \cos(kx) \sin(\omega t + \theta))^2 + \frac{1}{2} E (-k 2A \sin(kx) \cos(\omega t + \theta))^2$$

$$w = 2A^2 \rho \omega^2 (\cos^2(kx) \sin^2(\omega t + \theta) + \sin^2(kx) \cos^2(\omega t + \theta))$$

$$w = 2A^2 \rho \omega^2 \left( \frac{1 + \cos(2kx)}{2} \frac{1 - \cos(2[\omega t + \theta])}{2} + \frac{1 - \cos(2kx)}{2} \frac{1 + \cos(2[\omega t + \theta])}{2} \right)$$

$$w = A^2 \rho \omega^2 (1 - \cos(2kx) \cos(2[\omega t + \theta]))$$

Видно, что плотность энергии тоже является стоячей волной. Т.е. энергия стоячей волной не переносится.

**Лекция 8, 9. «Элементы релятивистской механики».**

*Преобразования Галилея. Инвариантность уравнений механики относительно преобразований Галилея. Специальная теория относительности. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Кинематические следствия из преобразований Лоренца. Релятивистский закон сложения скоростей. Интервал. Элементы релятивистской динамики. Взаимосвязь массы и энергии. Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы. Основное уравнение релятивистской динамики.*

*Математическое отступление.*

Понадобится формула разложения в ряд Тейлора для малых  $x$

$$(1-x)^{\alpha} \approx 1 - \alpha x$$

**Принцип относительности Галилея**

Законы классической механики не зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Время абсолютно, не зависит от систем отсчета, везде течет вперед с одинаковой скоростью. (Может меняться только начальный момент времени.)

*Принцип относительности Галилея:* Если в двух замкнутых лабораториях, одна из которых движется равномерно прямолинейно (и поступательно) относительно другой, провести одинаковый механический эксперимент, то результат будет одинаковым.

Это приводит к требованию инвариантности уравнений механики относительно преобразований Галилея.

При переходе от одной системы отсчета к другой радиус-векторы точек связаны соотношением

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_{21},$$

где  $\vec{R}_{21}$  - вектор, задающий положение одной системы отсчета относительно другой. Промежутки времени одинаковые  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ . Учитывая, что масштаб времени не меняется, получаем уравнения связи для скоростей и ускорений

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21},$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{21},$$

где  $\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{R}_{21}}{dt}$ ,  $\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{v}_{21}}{dt}$  - векторы скорости и ускорения второй системы отсчета относительно первой.

Выберем класс инерциальных систем отсчета. Эти системы отсчета могут двигаться с разными скоростями, но их относительные ускорения нулевые, поэтому при переходе от одной инерциальной системы к другой ускорения точек не меняется. Так как векторы сил тоже не зависят от системы отсчета, то второй закон Ньютона в них выглядит одинаково

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

**Специальная теория относительности.**

СТО создана Эйнштейном в 1905 г.

*Сигнал* - это процесс, с помощью которого можно передать из одной точки в другую силовое воздействие. Т.е. сигнал должен передавать импульс и энергию. В СТО сигналом является световой (электромагнитный) сигнал.

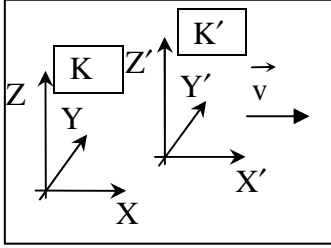
**Постулаты СТО**

1. Принцип постоянства скорости света: скорость света не зависит от движения источника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета в вакууме и является предельной скоростью передачи сигнала. Величина скорости света в вакууме равна  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.
2. Принцип относительности. Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета – уравнения выражающие законы природы инвариантны при переходе от одной системы отсчета к другой.

Скорости точек, величина которых сравнима со скоростью света (и, конечно, обязательно меньше!) называются *релятивистскими*.

С помощью сигнала можно производить синхронизацию часов (согласование показаний), расположенных в различных точках пространства – из одной точки в момент времени  $t$  по собственным часам отсылается сигнал во вторую точку, находящуюся на расстоянии  $L$ . Во вто-

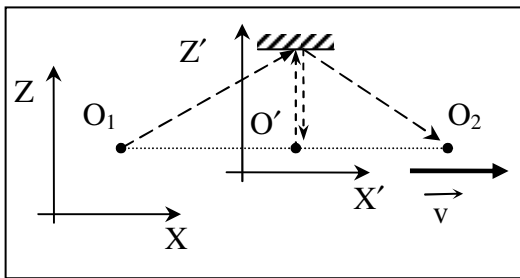
рой точке на собственных часах выставляется время  $t + \frac{L}{c}$ .



Рассматриваем две инерциальные системы отсчета К и К'. Пусть система К' движется вдоль оси Х системы К со скоростью  $v$  так, что соответствующие оси обеих систем остаются параллельными друг другу.

Так как при малых скоростях поперечные координаты тел во всех инерциальных системах отсчета одинаковы, то это должно выполняться и при релятивистских скоростях. Действительно, если рассмотреть последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся в одном направлении, значение скоростей которых возрастает на небольшую величину при переходе от одной системы к другой, то получим, что при любых попарных сравнениях всегда поперечные размеры не меняются.

В системе К' рассмотрим сигнал, пущенный вдоль оси Z' из точки O'. Пусть этот сигнал отразившись от покоящегося в этой системе отсчета зеркала вернется обратно в точку O'. Если расстояние между точкой O' и зеркалом равно S, то по собственным часам системы К' пройдет промежуток времени  $\Delta t' = \frac{2S}{c}$ . Расстояние вдоль вертикальной оси в обеих системах одинако-



вое. Скорость светового сигнала тоже одинаковая. Так как точка O' движется относительно системы К, то в этой системе отсчета сигнал будет испущен в точке O<sub>1</sub> и принят в точке O<sub>2</sub>. Поэтому по собственным часам системы К промежуток времени надо оп-

ределить из равенства  $\Delta t = \frac{2\sqrt{S^2 + \left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$ .

Откуда  $\Delta t = \frac{2S}{\sqrt{(c)^2 - (v)^2}}$ . Поэтому  $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{2S}{c} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2S} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Таким образом, промежутки

времени связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Пусть в подвижной системе отсчета К' параллельно оси X' расположен стержень длиной  $L_0$ . При движении этого стержня со скоростью  $V$  вдоль оси X неподвижной системы К он пройдет неподвижные часы за время  $\Delta t_0 = \frac{L_0}{V}$ . В системе К' эти же часы пролетят стержень за время

$\Delta t = \frac{L_0}{V}$ . Так как часы движутся со скоростью  $V$ , то их показания в неподвижной системе отсче-

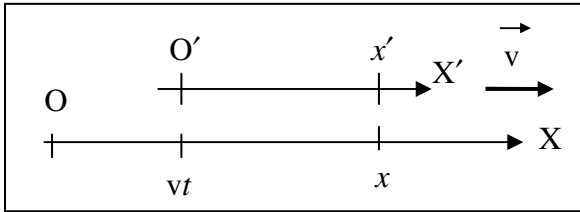
та связаны с показаниями в подвижной системе  $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Откуда получаем  $\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  или

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Таким образом, понятие длины – относительное. Уменьшение длины – это кинематический эффект – в теле не возникает никаких деформаций.

#### Закон преобразования координат



Так как координата – это расстояние вдоль оси от нулевой точки, то координате  $x'$  в движущейся системе  $K'$  соответствует отрезок  $O'x'$ , длина которого  $|x'|$ . Поэтому в системе  $K$  ему соответствует длина  $|x'| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . В системе  $K$  координата точки  $O'$  равна

$vt$ , поэтому  $|x'| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = |x - vt|$ . В координатной записи справедливо равенство

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt \quad \text{или}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Но системы отсчета  $K$  и  $K'$  равноправны. Поэтому можно считать, что система  $K$  движется относительно  $K'$  в противоположном направлении оси  $X'$  со скоростью  $-v$ .

Поэтому можно записать  $x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

Используя эти формулы найдем преобразования для времени

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt' - vt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad x' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = x' + vt' - vt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$vt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x' \frac{v^2}{c^2} + vt',$$

$$t = \frac{\frac{v}{c^2} x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично, получаем

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Окончательно формулы перехода от одной системы отсчета к другой в данном случае движения имеют вид:

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$y' = y, \quad z' = z.$$

В СТО время является координатой. Т.е. положение точки задается 4мя координатами  $(t, x, y, z)$ . Это 4х мерное пространство называется *мировым пространством*. Каждая точка мирового пространства называется *мировой точкой*. Траектория точки в мировом пространстве называется *мировой линией*. Например, если точка покоится в обычном 3х мерном пространстве, то её мировой линией является прямая, параллельная оси  $t$ .

*Интервалом* между двумя событиями (мировыми точками) в СТО называется величина, квадрат которой определяется как

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2].$$

Найдем квадрат интервал между двумя событиями в системе  $K'$ :

$$s'^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]$$

$$s'^2 = c^2 \left( \frac{t_2 - t_1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)^2 - \left[ \left( \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]$$

$$s'^2 = \left( \frac{(c+v)(t_2 - t_1) - \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \left( \frac{(c-v)(t_2 - t_1) + \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$s'^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = s^2$$

Получается, что величина интервала не зависит от системы отсчета. Как принято говорить, интервал является *инвариантной* величиной

$$s'^2 = inv.$$

При преобразованиях Галилея время абсолютно, поэтому инвариантность интервала эквивалентна сохранению расстояния между двумя точками в обычном трехмерном пространстве при переходе от одной системы отсчета. *Поэтому интервал в СТО является аналогом расстояния между двумя мировыми точками.*

Интервал называется *времениподобным*, если  $s^2 > 0$  и *пространственноподобным*, если  $s^2 < 0$ . Для светового луча всегда  $s^2 = 0$ . Это эквивалентно уравнению

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = 0,$$

которое задает в обычном трехмерном пространстве расширяющуюся с течением времени сферу  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = R^2$ , где  $R^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2$ .

Поверхность в мировом пространстве, для которой  $s^2 = 0$  называется *световым конусом*. Световой конус можно задать для любой точки. Если два события как две мировые точки связаны времениподобным интервалом, то одна из этих точек лежит внутри светового конуса другой точки и существует такая трехмерная система отсчета, в которой эти два события произошли в одном месте, но в разное время.

И наоборот, если два события как две мировые точки связаны пространственноподобным интервалом, то ни одна из этих точек не лежит внутри светового конуса другой точки и существует такая трехмерная система отсчета, в которой эти два события произошли в одно время, но в разных точках.

Если между двумя событиями можно установить причинно-следственную связь, то есть сказать, что одно событие является причиной другого, то эти события должны быть связаны времениподобным интервалом.

### Преобразование скорости.

Пусть точка движется в системе отсчета К вдоль оси Х со скоростью  $v_x$ , найдем ее скорость в системе К':

$$dt' = \frac{dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (dx - v dt)}{\left(dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx\right) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) v_x}$$

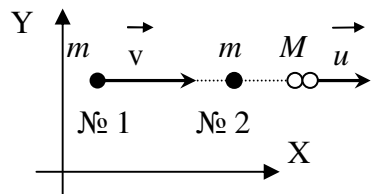
$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) v_x}$$

Пусть точка движется в системе отсчета К вдоль оси Y со скоростью  $v_y$ , найдем ее скорость в

системе К'  $v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\left(dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{dx}{dt}\right)} = v_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$

$$v'_y = v_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

### Релятивистский импульс.



Y  
X

№ 1    № 2

Рассмотрим абсолютно неупругое столкновение двух одинаковых частиц в системе отсчета К. При этом будем считать, что частица №1 массы  $m$  налетает на покоящуюся частицу №2 массы  $M$  со скоростью  $v$ , двигаясь вдоль оси Х. Из закона сохранения импульса вдоль оси Х в системе отсчета К следует

$$mv = Mu.$$

В классическом приближении  $M = 2m$ ,  $u = \frac{v}{2}$ .

В релятивистском случае массы могут зависеть от величины скорости частиц

$$m(v)v = M(u)u.$$

Перейдем в систему отсчета К', которая движется вдоль оси Х со скоростью  $v$ . В этой системе частица №1 покоится, а №2 движется со скоростью  $-v$ . Закон сохранения импульса вдоль оси Х' имеет вид

$$-m(v)v = -M(u)u.$$

Но по формуле преобразования скорости при переходе от системы К к системе К':

$$-u = \frac{u - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)u}.$$

Откуда

$$v = \frac{2u}{1 + \left(\frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

Рассмотрим сохранение импульса вдоль оси  $Y$  – для этого перейдем в систему отсчета  $K''$ , которая движется против оси  $Y$  с некоторой скоростью  $v_0$ . В этой системе отсчета

- скорость налетающей частицы  $v'' = \sqrt{v_x''^2 + v_y''^2}$ , где  $v_y'' = v_0$ ,  $v_x'' = v \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$ ,

- скорость покоящейся частицы равна  $v_0$ ,

- скорость образовавшейся частицы  $u'' = \sqrt{u_x''^2 + u_y''^2}$ , где  $u_y'' = v_0$ ,  $u_x'' = u \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$ .

Закон сохранения импульса вдоль оси  $Y$ :

$$m(v'')v_y'' + m(v_y'')v_y'' = M(u'')u_y''$$

С учетом того, что скорости всех частиц вдоль оси  $Y$  одинаковые получаем

$$m(v'') + m(v_y'') = M(u'').$$

Это равенство выполняется при любых скоростях вдоль оси  $X$ . В частности, при  $v_y'' = v_0 = 0$  это соотношение переходит в равенство:

$$m(v) + m(0) = M(u).$$

Подставим его в уравнение для импульса вдоль оси  $X$ :  $m(v)v = M(u)u$  и получим

$$m(v)v = [m(v) + m(0)]u,$$

откуда  $m(v) = m(0) \frac{u}{v - u}$ .

Выразим скорость  $u$  из равенства  $v = \frac{2u}{1 + \left(\frac{u^2}{c^2}\right)}$ :

$$vu^2 - 2uc^2 + c^2v = 0, \quad D = 4c^4 - 4c^2v^2 = 4c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad u_{1,2} = \frac{c^2 \pm c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{v}.$$

Решение  $\frac{u_1}{c} = \frac{c + c \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{v} = \frac{c}{v} \left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\right) > 1$  надо отбросить как противоречащее постулату о максимальной скорости света.

Подстановка второго решения  $u = \frac{c^2 - c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{v}$ , приводит к зависимости



$$m(v) = m(0) \frac{c^2 - c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v - \frac{c^2 - c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}}, \quad m(v) = m(0) \frac{c^2 - c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ c^2 - c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\}} = m(0) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Величину массы в системе отсчета, где тело покоится, будем обозначать  $m_0 = m(0)$  и называть *массой покоя*. Соответственно, величину  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  называют *релятивистской массой*.

Выражение для *релятивистского импульса*  $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \vec{v}$ .

В классической механике при абсолютно неупругом ударе механическая энергия не сохраняется. Но из закона сохранения импульса следуют выражения для масс  $M = 2m$  и для скоростей  $u = \frac{v}{2}$ .

В релятивистском случае  $u = \frac{c^2 - c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}$ . При  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$   $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$  получа-

ем  $u \approx \frac{c^2 - c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)}{v} = \frac{v}{2}$ , т.е. равенство выполняется только при  $v \rightarrow 0$ .

Рассмотрим соотношение для масс  $m(v) + m(0) = M(u)$ , которое выполняется при любых скоростях. Если перейти в систему отсчета, где  $M$  покоится после удара, то в ней тела 1 и 2 будут двигаться до удара с одинаковыми скоростями  $\frac{u}{2}$ , но направленными навстречу друг другу. Следовательно, будет справедливо равенство

$$m\left(\frac{u}{2}\right) + m\left(-\frac{u}{2}\right) = M(0)$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{4c^2}}} + \frac{m_0}{2\sqrt{1 - \frac{u^2}{4c^2}}} = M_0$$

При  $\frac{u^2}{c^2} \ll 1$   $\left(1 - \frac{u^2}{4c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{u^2}{4c^2}$ ,  $\frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{4c^2}}} \approx 2m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{4c^2}\right)$

В системе отсчета, где составная частица покоится, обе движущиеся частицы имели суммарную

классическую кинетическую энергию  $W = \frac{m_0 \left(\frac{u}{2}\right)^2}{2} + \frac{m_0 \left(\frac{u}{2}\right)^2}{2} = \frac{m_0 u^2}{4}$ , поэтому равенство

$$2m_0 + \frac{m_0 u^2}{4c^2} = M_0$$

показывает, что масса образовавшейся частицы больше суммарной массы покоя частиц за счет *наличия кинетической энергии*. Если покоящемуся телу массы  $m_0$  приписать энергию покоя

$W_0 = m_0 c^2$ , то это равенство для масс можно трактовать как закон сохранения энергии

$$M_0 c^2 = 2m_0 c^2 + W_{кин}.$$

### Основное уравнение релятивистской динамики.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Это выражение можно записать в виде  $\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \left( -\frac{1}{2} \frac{-2(\vec{v}, \vec{a})}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right) = \frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ \frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a}) \vec{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + m \vec{a} &= \vec{F} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что вектор ускорения и вектор силы не совпадают по направлению.

- 1) Если вектор скорости и ускорения перпендикулярны друг другу, то  $m\vec{a} = \vec{F}$
- 2) Если вектор скорости и ускорения параллельны друг другу, то в случае, если они сонаправлены  $(\vec{v}, \vec{a}) \vec{v} = v\vec{a}\vec{v} = v\vec{a}v = \vec{a}v^2$  и

$$\frac{m_0 \vec{a} v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + m \vec{a} = \vec{F}, \quad \left( \frac{m_0 v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + m \right) \vec{a} = \vec{F}$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( \frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + 1 \right) \vec{a} = \vec{F}, \quad \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \vec{a} = \vec{F}$$

Но если они направлены противоположно  $(\vec{v}, \vec{a}) \vec{v} = -v\vec{a}\vec{v} = -v\vec{a}v = -\vec{a}v^2$ , то

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right) \vec{a} = \vec{F}, \quad m_0 \vec{a} \frac{\left(1 - 2\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \vec{F}$$

В общем случае для мощности силы  $\frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a}) (\vec{v}, \vec{v})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + m (\vec{v}, \vec{a}) = (\vec{F}, \vec{v})$

$$\frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a}) (\vec{v}, \vec{v})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{v}, \vec{a}) = (\vec{F}, \vec{v}), \left( \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + 1 \right) \frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (\vec{F}, \vec{v}),$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (\vec{F}, \vec{v}), \frac{m_0 (\vec{v}, \vec{a})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = (\vec{F}, \vec{v}),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\vec{F}, \vec{v})$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$W_{кин\_2} - W_{кин\_1} = A$$

Следовательно, можно принять в качестве кинетической энергии  $W_{кин} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + C$ .

Значения постоянной  $C$  определим из условия равенства нулю кинетической энергии при нулевой скорости  $0 = m_0 c^2 + C$ , откуда  $C = -m_0 c^2$ .

$$W_{кин} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2.$$

С учетом выражения  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ,  $W_{кин} = (m - m_0) c^2$ .

При малых скоростях  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{v^2}{c^2}$ , поэтому получаем классиче-

скую формулу для кинетической энергии.

$$W_{кин} \approx m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right] - m_0 c^2 = \frac{m_0 v^2}{2}$$

Рассмотрим выражения  $(W_{кин} + m_0 c^2)^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  и  $p^2 c^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Они связаны соотношением  $(W_{кин} + m_0 c^2)^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4$

Если ввести энергию покоя тела  $W_0 = m_0 c^2$ , то полная энергия тела будет определяться формулой

$$W = W_{кин} + W_0 = (m - m_0)c^2 + m_0c^2 = mc^2,$$

или

$$W = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Так как правая часть выражения

$$W^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4,$$

не зависит от системы отсчета, то соотношение между полной энергией и импульсом – является инвариантом при любых преобразованиях инерциальных систем отсчета

$$W^2 - p^2c^2 = inv.$$

### Преобразование импульса и энергии

Пусть в системе отсчета К импульс тела направлен вдоль оси X:  $p = p_x = \frac{m_0u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ . Пол-

ная энергия  $W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ . В системе отсчета К', которая движется вдоль оси X со скоростью v,

импульс тела соответственно равен  $p' = p'_x = \frac{m_0u'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$ ,  $W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$ .

Скорости связаны соотношением  $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$ .

Тогда  $p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} \right)^2}} \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'}$ ,

$$p_x = \frac{m_0(u' + v)}{\sqrt{\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right)^2 - \frac{(u' + v)^2}{c^2}}}, \quad p_x = \frac{m_0(u' + v)}{\sqrt{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}},$$

$$p_x = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}u' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p'_x + \frac{W'}{c^2}v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right)u'} \right)^2}},$$

$$W = \frac{m_0c^2 \left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right)^2 - \frac{(u' + v)^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2 \left(1 + \frac{v}{c^2}u'\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}},$$

$$W = \frac{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} + \frac{m_0 u' v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W' + p'_x v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Сравним формулы преобразования импульса, энергии и координат

$p_x = \frac{p'_x + \left(\frac{W'}{c^2}\right)v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$\left(\frac{W}{c^2}\right) = \frac{\left(\frac{W'}{c^2}\right) + p'_x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$t = \frac{\frac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Если установить соответствие – энергия (деленная на  $c^2$ ) и время, проекция импульса и координата, то можно увидеть, что их формулы преобразования идентичны.

### Преобразование частоты.

Рассмотрим монохроматическую световую волну, распространяющуюся вдоль оси X. Фаза волны  $\Phi = \omega t - kx + \alpha$ . Количество длин волн, которое пройдет между двумя точками  $x_1$  и  $x_2$  за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  определяется как  $N = \frac{\omega(t_2 - t_1) - k(x_2 - x_1)}{2\pi}$ . Эта величина не меняется при переходе к другой системе отсчета. Следовательно, не должна меняться фаза волны – т.е. максимуму волны в одной системе отсчета должен соответствовать максимум в другой системе. Т.е.  $\Phi = \omega t - kx + \alpha = const$  или  $\Phi = 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{c}x + \alpha = const$ , откуда

$$2\pi\nu\left(t - \frac{1}{c}x\right) = 2\pi\nu'\left(\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{c}\frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \quad \nu\left(t - \frac{1}{c}x\right) = \nu'\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{1}{c}x\right)$$

$$\nu = \nu'\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \nu'\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}} = \nu'\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}},$$

$$\text{Таким образом, } \nu = \nu'\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}} \text{ или } \omega = \omega'\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}}.$$

Если в системе отсчета К частота волны равна  $\nu$ , то в системе К', которая движется в направле-

нии движения волны со скоростью  $v$ , частота будет меньше  $\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$ , а в системе К'', ко-

торая движется в противоположном направлении частота будет больше  $\omega'' = \omega \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$ .

Зависимость частоты сигнала от скорости источника называется эффектом Доплера.

Именно эффектом Доплера объясняют смещения спектров излучения звезд в сторону коротких длин волн при удалении звезды от земного наблюдателя (ультрафиолетовое смещение) и в сторону длинных волн при приближении (красное смещение).

### Лекция 10.

*Статистический и термодинамический метод описания макроскопических тел. Термодинамическая система. Термодинамические состояния, обратимые и необратимые термодинамические процессы. Внутренняя энергия и температура термодинамической системы. Теплота и работа. Адиабатически изолированная система. Первое начало термодинамики.*

Термодинамика рассматривает методы описания физических систем, состоящих из очень большого числа частиц. Как правило, это *макросистемы*, состоящие из *микрочастиц*. *Макросистема* – это система, имеющая массу, сравнимую с массой окружающих тел. *Микро-частица* – частица, масса которой сравнима с массой атомов. Например, 1 моль вещества содержит число микрочастиц, определяемое числом Авогадро  $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ . Поэтому для описания таких систем необходимо применять методы, позволяющие учитывать такое большое количество частиц.

Для описания макросистем применяются законы классической механики, методы статистической физики и начала термодинамики.

Описание систем с большим количеством частиц с точки зрения механики требует решения большого числа уравнений движения с учетом взаимодействия частиц между собой. Этот подход осложняют как математические проблемы, так и недостаточные сведения о взаимодействии частиц.

Статистический метод описания основывается на применении законов теории вероятностей. При этом вводится функция распределения, с помощью которой находят нас средние значения. В этом подходе не надо знать характер взаимодействия частиц и точные уравнения их движения. Статистическими методами можно описывать изменения состояния системы посредством введения кинетических уравнений изменения функции распределения.

Гидродинамический подход описывает изменение состояния системы путём определения изменения средних значений и т.д.

Наиболее общим является *термодинамический метод*, который заключается в описании поведения систем с помощью основных постулатов (законов), называемых *началами термодинамики*. Их справедливость подтверждается опытным путём.

*Термодинамическая система* – система, описываемая с позиций термодинамики. Термодинамика описывает макроскопические движения (изменение состояний) систем с помощью параметров, которые принято (весьма условно) разделять на внутренние и внешние. Обычно в большинстве задач достаточно задать три параметра (координат состояния).

*Равновесным* (состоянием термодинамического равновесия) называется такое состояние, в котором отсутствуют *любые потоки* (энергии, вещества и т.д.), а макроскопические параметры являются установившимися и не изменяются во времени.

*Теплопередача* – передача энергии от одного тела к другому без переноса вещества и совершения механической работы.

*Нулевое начало термодинамики.* Изолированная термодинамическая система, предоставленная себе самой, стремится к состоянию термодинамического равновесия и после его достижения не может самопроизвольно из него выйти. Такой процесс перехода в равновесное состояние называется релаксацией. Время, в течение которого система приходит в равновесное состояние, называется *временем релаксации*.

Если две термодинамические системы, имеющие тепловой контакт, находятся в состоянии термодинамического равновесия, то и совокупность этих систем находится в термодинамическом равновесии.

Если термодинамическая система находится в термодинамическом равновесии с двумя другими системами, то и эти две находятся в термодинамическом равновесии друг с другом. переход из одного термодинамического состояния в другое называется термодинамическим процессом.

При этом в равновесной термодинамике рассматриваются только квазистатические или квазиравновесные процессы – бесконечно медленные процессы, состоящие из непрерывно сменяющихся друг за другом равновесных состояний. Реально такие процессы не существуют, однако, при достаточно медленном протекании изменений в системе можно аппроксимировать реальный процесс квазистатическим процессом.

Равновесные процессы считаются обратимыми – при изменении параметров состояния в первоначальные окружающие тела тоже переходят в первоначальное состояние.

Круговой (или циклический) процесс – это процесс, при котором система возвращается в исходное состояние.

Внешняя энергия системы связана с движением системы и положением системы в поле внешних сил. Внутренняя энергия системы включает в себя энергию микроскопического движения и взаимодействия частиц термодинамической системы, а также их внутримолекулярную и внутриядерную энергии. Внутренняя энергия термодинамической системы определяется с точностью до постоянной величины.

*Температура* – это величина, характеризующая состояние термодинамической системы и зависящая от параметров состояния (например, давления и объема). Она является однозначной функцией внутренней энергии системы.

Свойства температуры.

- 1) Если в системе между телами, находящимися в тепловом контакте теплопередача отсутствует, то эти тела имеют одинаковую температуру и находятся в термодинамическом равновесии друг с другом.
- 2) Если две равновесные термодинамические системы находятся в тепловом контакте и имеют одинаковую температуру, то вся совокупность находится в равновесии при той же температуре.
- 3) Если в теплоизолированной системе, состоящей из двух тел, одно тело находится при меньшей температуре, то теплопередача осуществляется от более нагретого тела к менее нагретому телу. Этот процесс осуществляется до тех пор, пока не наступит равенство температур и система не придет в состояние термодинамического равновесия.

В качестве эталонной температуры выбирают температуру тела, которая зависит от известных параметров. Для этого вводят понятие реперной точки и температурной шкалы. В настоящее время в качестве реперной точки принята «тройная точка» воды – при давлении 609 Па и температуре 273,16 К вода может одновременно существовать в твердом, жидком и газообразном состояниях. При этом температура плавления льда 273,15 К.

*Адиабатически изолированная система* – система, изменение состояния которой происходит только за счет механических перемещений частей системы или окружающих тел и не может происходить путем теплообмена с окружающими телами.

Изменение состояния адиабатической системы называется адиабатическим процессом, а оболочку, окружающую систему – адиабатической оболочкой.

Джоуль в 1843 г. провел опыт, в котором вода нагревалась в результате перемешивания, т.е. совершения механической работы.

При совершении механической работы внешними телами над адиабатической системой меняется внутренняя энергия системы, о чём свидетельствует изменение температуры

$$A_{\text{ВНЕШ}} = U_2 - U_1$$

### Первое начало термодинамики

Изменение внутренней энергии системы может быть осуществлено путём совершения работы и теплопередачей количества теплоты  $Q$ :

$$\Delta U = A_{\text{ВНЕШ}} + Q$$

Работа системы над внешними телами  $A = -A_{\text{ВНЕШ}}$

$$Q = \Delta U + A$$



*Первое начало термодинамики:* Количество теплоты, переданное системе, идет на изменение внутренней энергии и на совершение этой системой работы над внешними телами.

Физический смысл – это закон сохранения энергии.

Для элементарных количеств

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Так как внутренняя энергия – это однозначная функция состояния, то  $dU$  - полный дифференциал. Например, в результате кругового процесса  $\Delta U = \oint dU = 0$ . Но количество теплоты и работа не являются функциями состояния системы, поэтому вообще говоря  $\oint \delta Q = \oint \delta A \neq 0$ , следовательно, для них выбирается другое обозначение.

Работа газа против внешних тел

$$\delta A = F \cdot dr \cdot \cos \alpha.$$

С учетом выражения  $F = p \cdot S$  и изменения объема  $dV = S \cdot dr \cdot \cos \alpha$

$$\delta A = p \cdot S \cdot dr \cdot \cos \alpha = p \cdot dV.$$

При конечных изменениях объема

$$A = \int_{\Delta V} p dV$$

Замечание. Первое начало термодинамики запрещает создание вечных двигателей первого рода - бесконечно совершающих работу без подвода внешней энергии. Действительно, если  $Q=0$ , то  $A = -\Delta U$ . Система совершает работу за счет уменьшения внутренней энергии. В конце концов, вся внутренняя энергия будет исчерпана и двигатель остановится.

**Лекция 11.**

*Уравнение состояния термодинамической системы. Уравнение Клапейрона-Менделеева. Идеально-газовый термометр. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Равномерное распределение энергии по степеням свободы молекул. Внутренняя энергия идеального газа. Эффективный диаметр и средняя длина свободного пробега молекул газа. Экспериментальные подтверждения молекулярно-кинетической теории.*

Уравнение состояния термодинамической системы описывает зависимость между параметрами системы. Сами параметры являются функциями состояния, т.е. их значения не зависят от того, каким образом система пришла в это состояние, а только от самого состояния. Параметрами состояния являются – давление, объём, температура, количество вещества. В общем виде уравнение состояния – это функциональная зависимость  $F(p, V, T) = 0$ .

Для большинства газов, как показывает опыт, при комнатной температуре и давлении около  $10^5$  Па достаточно точно выполняется уравнение Клапейрона-Менделеева

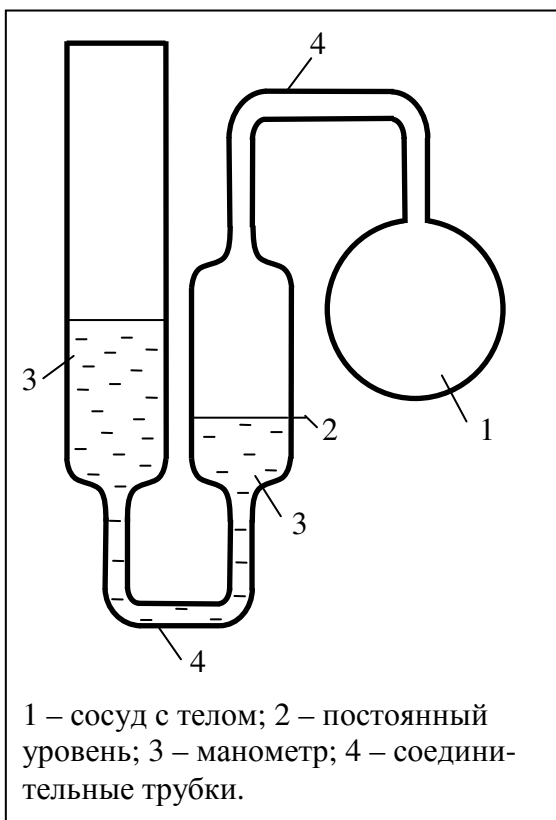
$$pV = \nu RT$$

$p$  – давление (Па),  $V$  – занимаемый объём ( $\text{м}^3$ ),  $R = 8,31$  Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура (К).

Моль вещества – количества вещества, содержащее число атомов или молекул, равное числу Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  (Столько атомов содержится в 12 г изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ ). Пусть  $m_0$  – масса одной молекулы (атома),  $N$  – количество молекул, тогда  $m = Nm_0$  – масса газа,

$$\mu = N_A m_0 \text{ – молярная масса вещества. Количество молей вещества } \nu = \frac{N}{N_A} = \frac{Nm_0}{N_A m_0} = \frac{m}{\mu}.$$

Газ, параметры которого удовлетворяют уравнению Клапейрона-Менделеева, является идеальным газом. Наиболее близкие по свойствам к идеальному – водород и гелий.

Идеально-газовый термометр.

Газовый термометр постоянного объема состоит из термометрического тела – порции идеального газа, заключенного в сосуд, который с помощью трубки соединен с манометром. Измеряемая физическая величина (термометрический признак), обеспечивающая определение температуры, и давление газа при некотором фиксированном объеме. Постоянство объема достигается тем, что вертикальным перемещением левой трубки манометра уровень в его правой трубке доводят до опорной метки и измеряют разность высот уровней жидкости в манометре. Учет различных поправок (например, теплового расширения стеклянных деталей термометра, адсорбции газа и т.д.) позволяет достичь точности измерения температуры газовым термометром постоянного объема, равной 0,001 К.

Газовые термометры имеют то преимущество, что определяемая с их помощью температура при малых плотностях газа не зависит от его природы, а шкала такого термометра хорошо совпадает с абсолютной шкалой температур, определяемой с помощью идеально-газового термометра.

Таким способом определённая температура связана с температурой в градусах Цельсия соотношением  $T = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15$  К.

*Нормальные условия состояния газа* – давление  $p = 101325$  Па  $\approx 10^5$  Па и температура  $T = 273,15$  К.

Объем 1 моля газа при нормальных условиях  $V = \frac{\nu RT}{p} \approx 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ .

### Основы МКТ

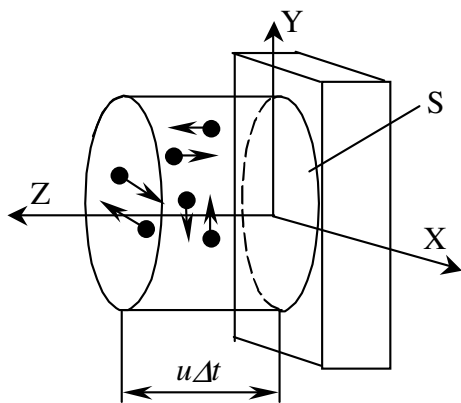
Молекулярно-кинетическая теория (МКТ) рассматривает термодинамические свойства газов с точки зрения их молекулярного строения. Молекулы находятся в постоянном беспорядочном тепловом движении, при котором они обмениваются импульсом и энергией.

### Давление газа.

Рассмотрим механическую модель газа, находящегося в термодинамическом равновесии со стенками сосуда. При этом молекулы упруго сталкиваются со стенками сосуда.

Молекулы заменим материальными точками, которые движутся с одинаковой скоростью. Потенциальной энергии взаимодействия между точками нет. Пусть  $n$  – концентрация молекул газа (количество молекул, содержащихся в единице объема газа),  $T$  – температура газа,  $u$  – средняя скорость поступательного движения молекул. Выберем систему координат таким образом, что стенка сосуда лежит в плоскости  $XY$ , а ось  $Z$  перпендикулярна стенке.

После упругого удара о стенку импульс молекулы меняет направление на обратное не



изменяя своей длины. За период времени  $\Delta t$  до стенки долетят только те молекулы, которые находятся от стенки на расстоянии не далее, чем  $L = u\Delta t$ . Общее число молекул в цилиндре, с площадью основания  $S$  и высотой  $L$  (объем которого равен  $LS = u\Delta t S$ ) равно  $N = nu\Delta t S$ .

В данной точке пространства можно условно выделить три различных направления движения молекул, например, вдоль осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Молекула может двигаться вдоль каждого из направлений «вперед» и «назад».

Поэтому, в направлении к стенке, могут двигаться не все молекулы, а только шестая часть от их общего числа. Следовательно, количество молекул, которые за время  $\Delta t$

ударятся о стенку:

$$N_1 = N/6 = nu\Delta t S/6.$$

Изменение импульса молекул равно импульсу силы, действующей на молекулы со стороны стенки (с такой же силой молекулы действуют на стенку)

$$\Delta P_Z = P_{2Z} - P_{1Z} = F\Delta t,$$

или

$$N_1 \cdot m_0 V - (-N_1 \cdot m_0 V) = F\Delta t,$$

$$2N_1 \cdot m_0 u = F\Delta t,$$

$$\frac{n \cdot u \cdot \Delta t \cdot S}{6} \cdot 2 \cdot m_0 u = F \cdot \Delta t,$$

$$\frac{1}{3} n \cdot m_0 u^2 = \frac{F}{S}.$$

Поэтому давление газа на стенку:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} n \cdot m_0 u^2 = \frac{2}{3} n \cdot W_K^{пост},$$

где  $W_K^{пост} = \frac{m_0 u^2}{2}$  – кинетическая энергия материальной точки (поступательного движения молекулы), т.е. давление пропорционально кинетической энергии

$$p = \frac{2}{3} n W_K^{пост}.$$

Это уравнение называется *основным уравнением МКТ* (молекулярно-кинетической теории).

### Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

*Количеством степеней свободы* тела  $i$  называется минимальное число координат, которые надо задать для однозначного определения положения тела.

Для материальной точки – это три координаты ( $x, y, z$ ) – поэтому количество степеней свободы для материальной точки равно  $i=3$ .

Для двух материальных точек, соединенных жестким стержнем постоянной длины, необходимо задать 5 координат: 3 координаты для одной точки и 2 угла для определения положения второй точки относительно первой. Поэтому в этом случае количество степеней равно  $i=5$ .

Максимально возможно количество степеней свободы равно 6.

Вещество	Химическое обозначение	Молярная масса $\mu$ , Кг/моль	Число степеней свободы одной молекулы $i$
Атомарный водород	H	$1 \cdot 10^{-3}$	3
Молекулярный водород	H <sub>2</sub>	$2 \cdot 10^{-3}$	5
Гелий	He	$4 \cdot 10^{-3}$	3
Неон	Ne	$20 \cdot 10^{-3}$	3
Атомарный азот	N	$14 \cdot 10^{-3}$	3
Молекулярный азот	N <sub>2</sub>	$28 \cdot 10^{-3}$	5
Атомарный кислород	O	$16 \cdot 10^{-3}$	3
Молекулярный кислород	O <sub>2</sub>	$32 \cdot 10^{-3}$	5
Аргон	Ar	$40 \cdot 10^{-3}$	3

*Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы:* средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы при тепловом движении равна  $\frac{1}{2}kT$ .

где постоянная Больцмана определяется соотношением  $k = \frac{R}{N_A} \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Поэтому полная кинетическая энергия одной молекулы, у которой число степеней свободы равно  $i$

$$W_k = \frac{i}{2} kT.$$

*Замечание.* При колебательных степенях свободы надо учитывать и потенциальную и кинетическую энергии, поэтому на одну *колебательную* степень свободы приходится энергия  $kT$ .

Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну молекулу:

$$\langle W_k^{пост} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения, приходящаяся на одну молекулу:

$$\langle W_k^{вращ} \rangle = \frac{i-3}{2} kT.$$

Подставим в основное уравнение МКТ выражение для  $\langle W_k^{пост} \rangle$

$$p = \frac{2}{3} n W_k^{пост} = nkT.$$

Т.к. концентрация молекул  $n = \frac{N}{V}$ , число молекул  $N = \nu N_A$ , постоянная Больцмана  $k = \frac{R}{N_A}$ , то

получаем уравнение  $p = \frac{\nu N_A}{V} \frac{R}{N_A} T$  или  $pV = \nu RT$ .

Это уравнение Клапейрона-Менделеева для идеального газа. Следовательно, механическая модель газа, в котором молекулы заменены материальными точками, не взаимодействующими на

расстоянии друг с другом, являются идеальным газом. Поэтому *идеальный газ состоит из материальных точек, не взаимодействующих друг с другом на расстоянии.*

Средний квадрат скорости всех молекул можно определить из

$$\langle W_K^{пост} \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2},$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0}.$$

Средняя квадратичной скоростью называется величина

$$v_{KB} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Так как у идеального газа отсутствует потенциальная энергия взаимодействия молекул, то внутренняя энергия равна суммарной кинетической энергии всех молекул.

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \sum_N W_K = N W_K = v \cdot N_A \cdot \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} v \cdot RT.$$

$$U = v \cdot \frac{i}{2} RT = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} RT.$$

Поэтому температура – это мера внутренней энергии идеального газа.

#### Закон Дальтона.

Пусть газ представляет смесь различных идеальных газов с концентрациями  $n_1, n_2, n_3$ , находящихся при одинаковой температуре. Тогда суммарная концентрация смеси равна сумме концентраций каждого из газов  $n = n_1 + n_2 + n_3$ .

$$\text{Действительно, } n = \frac{N}{V} = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{V} = \frac{n_1 \cdot V + n_2 \cdot V + n_3 \cdot V}{V} = n_1 + n_2 + n_3.$$

*Парциальным давлением газа* называется давление газа, которое он имел бы в отсутствии других газов при том же объеме и температуре.

**ЗАКОН ДАЛЬТОНА.** Давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений газов смеси.

$$p = nkT = (n_1 + n_2 + n_3)kT = n_1 kT + n_2 kT + n_3 kT = p_1 + p_2 + p_3.$$

Давление газовой смеси определяется только концентрацией газов и температурой смеси:

*Пример.* Определить среднюю молярную массу смеси, состоящей из  $\alpha_1 = 75\%$  азота и  $\alpha_2 = 25\%$  кислорода.

*Решение.* По закону Дальтона давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений каждого из газов  $p = p_1 + p_2$ . С другой стороны, из уравнения Менделеева – Клапейрона для смеси:

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}, \text{ где } m = m_1 + m_2 - \text{суммарная масса смеси,}$$

$$\text{и для каждого из газов можно найти парциальное давление } p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V}, \quad p_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}.$$

$$\text{Откуда } \frac{m_1 + m_2}{\mu} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} \cdot \frac{RT}{V}. \text{ Следовательно,}$$

$$\mu = \frac{(m_1 + m_2) \mu_1 \mu_2}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1} = \frac{m \mu_1 \mu_2}{\alpha_1 m \mu_2 + \alpha_2 m \mu_1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1}.$$

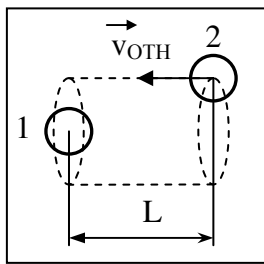
$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1} = \frac{28 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{0,75 \cdot 32 \cdot 10^{-3} + 0,25 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} \approx 28,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}. \clubsuit$$

*Замечание.* Смесь газов, приведенная в задаче близка по составу к обычному воздуху. Поэтому

$$\text{можно для воздуха принять } \mu_{\text{воздуха}} \approx 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

#### Длина свободного пробега молекулы.

**Длина свободного пробега молекулы** - Это среднее расстояние, которое пролетает молекула между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами. Обозначим его  $\lambda$ .



**Замечание.** Если молекула чаще сталкивается с другими молекулами, чем со стенками сосуда, то это означает, что размеры сосуда много больше длины свободного пробега.

Рассмотрим газ состоящий из одинаковых молекул. Две молекулы столкнутся, если центр одной из них находится на расстоянии не большем, чем  $d=2r$  от центра другой при их встречном движении ( $r$  – радиус молекулы).

Пусть одна из них покоится, а вторая налетает с относительной скоростью  $v_{OTN}$ . Рассмотрим прямой цилиндр, связанный с этой покоящейся

молекулой, определяемый условием, что внутри цилиндра не должно быть других молекул. Если объём этого цилиндра  $V_0 = L\pi d^2$  ( $L$  – расстояние до соседней молекулы), то объём всего газа

можно определить как  $V = N \cdot V_0$ , где  $N$  – количество молекул концентрация молекул. Тогда концентрация молекул  $n = \frac{N}{V} = \frac{N}{NV_0} = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{L\pi d^2}$ . Следовательно  $L = \frac{1}{\pi d^2 n}$ .

Если  $\lambda$  - длина свободного пробега, то время между двумя последовательными столкновениями не зависит от системы отсчета. Пусть  $\langle v \rangle$  - средняя скорость молекул, тогда

$$\Delta t = \frac{L}{v_{OTN}} = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \text{ откуда } \lambda = \frac{\langle v \rangle}{v_{OTN}} L$$

Относительная скорость двух молекул  $\vec{v}_{OTN} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , откуда

$$(\vec{v}_{OTN})^2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1) = v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha$$

Усредняем это выражение

$$\langle (\vec{v}_{OTN})^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - 2\langle v_1 v_2 \rangle \langle \cos \alpha \rangle$$

Для среднего значения должно выполняться  $\int_0^{2\pi} \langle \cos \alpha \rangle d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0$ , откуда  $\langle \cos \alpha \rangle = 0$ .

Поэтому  $\langle (\vec{v}_{OTN})^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle = 2\langle v^2 \rangle$ , так как, очевидно,  $\langle v_2^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$ .

Вообще-то,  $\langle v^2 \rangle \neq \langle v \rangle^2$ , но приближенно можно записать  $\langle v_{OTN} \rangle \approx \sqrt{2} \langle v \rangle$ .

Окончательно, для длины свободного пробега молекул  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ .

Величина  $\sigma = \pi d^2$  называется **эффективным сечением взаимодействия** молекул, эта величина слабо зависит от температуры.

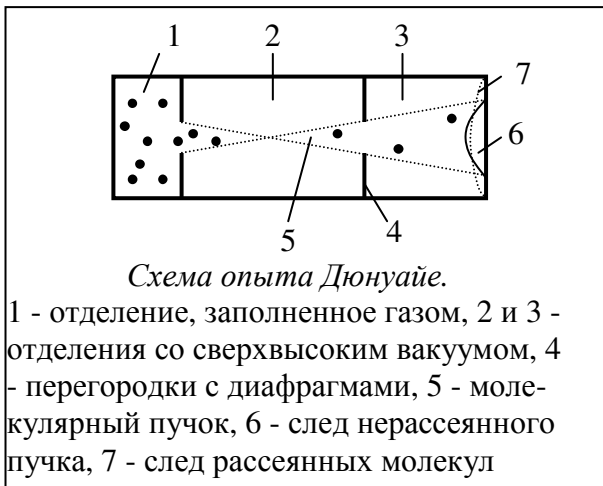
Длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна концентрации молекул

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

Средняя частота соударений молекул газа между собой  $\nu = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \sqrt{2}\sigma n \langle v \rangle$ .

### Экспериментальные подтверждения молекулярно-кинетической теории.

Наиболее известными экспериментами, демонстрирующими молекулярную структуру вещества и подтверждающими молекулярно-кинетическую теорию, являются опыты Джонса и Отто Штерна (1888 - 1969), выполненные соответственно в 1911 и 1920 годах. В этих опытах молекулярные пучки создавались путем испарения различных металлов, и поэтому молекулы исследуемых газов представляли собой атомы этих металлов. Такие эксперименты позволили проверить предсказания молекулярно-кинетической теории, которые она дает для случая газов, молекулы которых можно рассматривать как материальные точки, то есть для одноатомных газов.



пролетать их без столкновений с молекулами воздуха.

Нерассеянный молекулярный пучок оставлял на торцевой стенке сосуда след 6. Но даже в случае сверхвысокого вакуума имело место рассеяние молекулярного пучка на краях диафрагм 4. Поэтому на торцевой стенке сосуда имела область «полутени» 7, в которой оставляли следы частицы, претерпевшие рассеяние. По мере ухудшения вакуума в отделении 3 область 7 увеличивалась. По величине размытости следа рассеянных атомов натрия можно было оценить длину их свободного пробега. Такие оценки были проведены Максом Борном (1882 - 1970) на основании результатов опытов, аналогичных опыту Дюнуайе.

Одними из самых знаменитых опытов с молекулярными пучками были эксперименты **Штерна**, в которых впервые удалось осуществить прямые измерения молекулярных скоростей.



Наиболее известная схема опыта Штерна показана на рис. Платиновая нить 1, на которую была нанесена капля серебра, находилась на оси двух коаксиальных цилиндров 2 и 3, причём в цилиндре 2 имела щель, параллельная его оси. Цилиндры могли вращаться вокруг своей оси. В опытах Штерна угловая скорость их вращения составляла 2...3 тысячи оборотов в минуту.

При пропускании через платиновую нить электрического тока она разогревалась до максимальной температуры порядка 1200 °С. В результате этого серебро начинало испаряться, его атомы пролетали через щель 4 цилиндра 2 и оседали на поверхности цилиндра 3, оставляя на нём след 5. Для не вращающихся цилиндров, атомы серебра, двигаясь прямолинейно, более-менее равномерно оседали на поверхности внешнего цилиндра, внутри сектора, соответствующего прямолинейному их распространению. Вращение цилиндров приводило к искривлению траектории молекул в системе отсчёта, связанной с цилиндрами и, как следствие, к изменению положения атомов серебра, осевших на внешний цилиндр.

Анализируя плотность осевших молекул, можно было оценить характеристики распределения молекул по скоростям, в частности, максимальную и минимальную скорости, соответствующие краям следа, а также найти наиболее вероятную скорость, соответствующую максимуму плотности осевших молекул.

При температуре нити 1200 °С среднее значение скорости атомов серебра, полученное после обработки результатов опытов Штерна, оказалось близким к 600 м/с, что вполне соответствует значению средней квадратичной скорости, вычисленному по формуле

$$v_{KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

**Лекция 12.**

*Теплоёмкость газа при изопроцессах. Адиабатический процесс, уравнение Пуассона. Политропический процесс. Теплоёмкость и работа в политропических процессах. Газ Ван-дер-Ваальса. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса.*

Теплоемкостью тела называется коэффициент пропорциональности между изменением его температуры и количеством подведённой теплоты

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \text{ (Дж/К)}.$$

Удельной теплоемкостью вещества называется теплоемкость единицы массы этого вещества  $C_{уд} = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta T}$  (Дж/К·кг).

Молярной (молярной) теплоемкостью называется теплоемкость одного моля вещества  $C_M = \frac{C}{\nu} = \frac{Q}{\nu\Delta T}$  (Дж/моль·К).

Из размерности теплоемкости можно понять, о какой из них идет речь.

Итак, для того чтобы изменить температуру тела от начальной  $T_H$  до конечной  $T_K$ , ему надо сообщить количество теплоты

$$Q = mC_{уд}(T_K - T_H),$$

где  $m$  – масса вещества,  $C_{уд}$  – удельная теплоемкость (Дж/кг·К),  $T_K - T_H$  – разность конечной и начальной температур. (Аналогичные формулы и для обычной и молярной теплоемкости).

$$Q = \nu C_M(T_K - T_H),$$

$\nu$  – количество молей вещества,  $C_M$  – молярная теплоемкость вещества

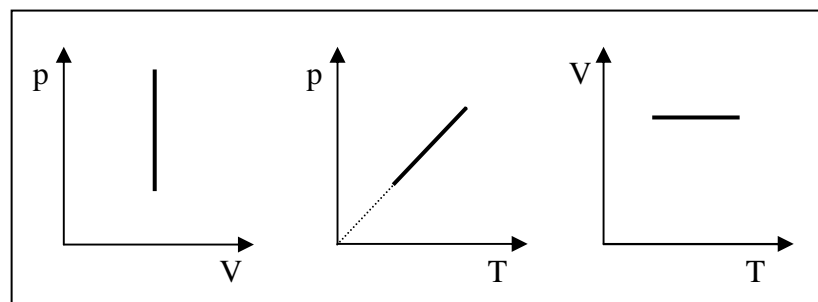
*Замечание:* Поскольку в выражение для количества теплоты входит разность температур, то температуру можно брать хоть в градусах Цельсия, хоть в Кельвинах.

Из формулы видно, что если температура тела увеличивается, то количество теплоты считается положительным, а если уменьшается, то отрицательным.

Рассмотрим различные процессы.

1) **Изохорический (изохорный) процесс** – процесс изменения состояния газа, при котором

объем газа остается постоянным  $V = \text{const}$ . Для изохорического процесса  $\frac{p}{T} = \text{const}$ .



Так как объем газа постоянный, то работа газа равна нулю  $A=0$ , следовательно все подводимое тепло идет на изменение внутренней энергии  $Q = \Delta U$ .

По определению внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = U_K - U_H = \nu \cdot \frac{i}{2} R (T_K - T_H) = \nu \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T.$$

Если обозначим молярную теплоемкость газа для изохорического процесса как  $C_V$ , то тогда  $Q = \nu C_V \Delta T$ . Поэтому первое начало термодинамики примет вид:

$$Q_{V=\text{const}} = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T = \nu \cdot \frac{i}{2} R \cdot \Delta T.$$

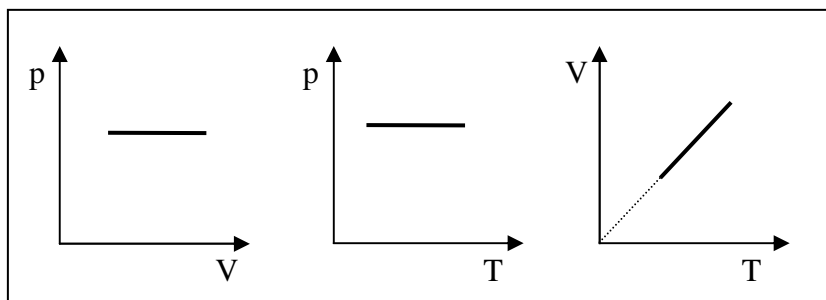


Отсюда для *изохорной молярной теплоемкости*  $C_V = \frac{i}{2}R$ .

*Следствие:* изменение внутренней энергии идеального газа:  $\Delta U = \nu \cdot C_V \cdot \Delta T$ .

	Одноатомный $i=3$	Двухатомный $i=5$	Многоатомный $i=6$
$C_V$	$C_V = \frac{3}{2}R$	$C_V = \frac{5}{2}R$	$C_V = 3R$

**2) Изобарический (изобарный) процесс** - процесс изменения состояния газа, при котором давление газа остается постоянным  $p=\text{const}$ . Для изобарного процесса  $\frac{V}{T} = \text{const}$ .



В этом случае работа равна  $A=p(V_K - V_H)$ .

Первое начало термодинамики для этого процесса:  $Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + p(V_K - V_H)$ .

Из уравнения Менделеева-Клапейрона  $p(V_K - V_H) = \frac{m}{\mu} R (T_K - T_H) = \frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T = \nu \cdot R \cdot \Delta T$ .

Поэтому  $Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + p(V_K - V_H) = \nu C_V \Delta T + \nu \cdot R \cdot \Delta T = \nu (C_V + R) \Delta T$ .

Если обозначить через  $C_p$  - молярную теплоемкость для изобарического процесса, то

$$Q_{p=\text{const}} = \nu C_p \Delta T = \nu (C_V + R) \Delta T.$$

Отсюда для *молярной изобарной теплоемкости*:

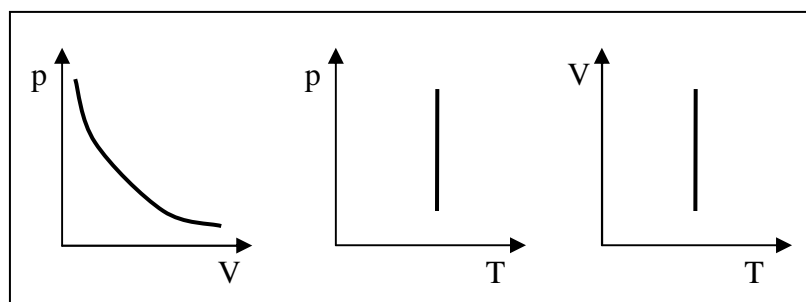
$$C_p = C_V + R$$

- это равенство называется *соотношением Майера*.

Следовательно,  $C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R$ .

	Одноатомный $i=3$	Двухатомный $i=5$	Многоатомный $i=6$
$C_p$	$C_p = \frac{5}{2}R$	$C_p = \frac{7}{2}R$	$C_p = 4R$

**3) Изотермический процесс** – процесс изменения состояния газа, при котором температура газа остается постоянной  $T=\text{const}$ . Для изотермического процесса  $pV = \text{const}$ .



Так как температура газа постоянная, то изменение внутренней энергии равно нулю  $\Delta U = 0$  и все подводимое к газу тепло на совершение газом работы:  $Q=A$  – это первое начало термодинамики для изотермического процесса.

Работа газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Теплоемкость газа в этом процессе не определена (говорят, что теплоемкость изотермического процесса бесконечно большая).

4) **Адиабатический (адиабатный) процесс.** Это процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой  $Q=0$ . Теплоёмкость адиабатического процесса равна нулю. Первое начало термодинамики для адиабатического процесса:  $0=\Delta U + A$  или  $-\Delta U = A$  - газ совершает положительную работу за счет уменьшения внутренней энергии.

Для малых изменений параметров  $dU + p dV = 0$ ,

$$dU = \nu C_V dT, \quad d(pV) = d(\nu RT) \quad \text{или} \quad V dp + p dV = \nu R dT, \quad \text{откуда} \quad dT = \frac{V dp + p dV}{\nu R}$$

$$\text{Тогда} \quad \nu C_V dT + p dV = 0, \quad \nu C_V \frac{V dp + p dV}{\nu R} + p dV = 0, \quad C_V V dp + (C_V + R) p dV = 0$$

Из соотношения Майера  $C_V + R = C_P$ . Делим на  $pV$

$$C_V \frac{dp}{p} + C_P \frac{dV}{V} = 0, \quad d(\ln p) + d\left(\ln V^{\frac{C_P}{C_V}}\right) = 0, \quad d\left(\ln \left(p V^{\frac{C_P}{C_V}}\right)\right) = 0,$$

Уравнение для адиабатического процесса  $pV^\gamma = \text{const}$  (Уравнение Пуассона).

Коэффициент  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  называется показателем адиабаты (или коэффициентом Пуассона).

Для идеального газа  $\gamma = \frac{i+2}{i}$ .

	Одноатомный $i=3$	Двухатомный $i=5$	Многоатомный $i=6$
$\gamma$	$\gamma = \frac{5}{3}$	$\gamma = \frac{7}{5}$	$\gamma = \frac{4}{3}$

#### Следствия

1. Уравнения адиабатического процесса  $pV^\gamma = \text{const}$ .

С учетом  $p = \frac{\nu RT}{V}$  получаем уравнение  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ .

С учетом  $V = \frac{\nu RT}{p}$  получаем уравнение  $\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const}$ .

2. Работа газа при адиабатическом процессе равна убыли внутренней энергии

$$A = -\Delta U = \nu C_V (T_1 - T_2).$$

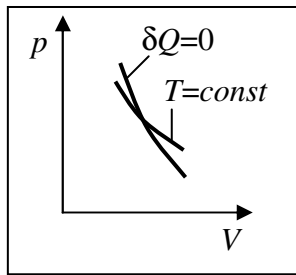
С другой стороны, если  $pV^\gamma = \text{const}$ , то, например,  $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma$ , откуда  $p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right).$$

3. В координатах  $(V, p)$  график адиабаты идет круче, чем график изотермы.

Для изотермического процесса:  $p = \frac{\text{const}}{V}$ ,  $\frac{dp}{dV} = -\frac{\text{const}}{V^2}$  - тангенс угла наклона касательной.

Для адиабатического процесса  $p = \frac{const}{V^\gamma}$ ,  $\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{const}{V^{\gamma+1}}$  - тангенс угла наклона касательной.



В точке пересечения графиков адиабата убывает быстрее, чем изотерма.

*Замечания.*

1. Скорость звуковых колебаний в газе  $v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ . Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{const}{V}.$$

Звуковые колебания в воздухе можно считать адиабатическим процессом, для которого

$pV^\gamma = const$ , откуда  $\frac{p}{\rho^\gamma} = const$ . Следовательно,  $d\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = \frac{dp}{\rho^\gamma} - \gamma \frac{p}{\rho^{\gamma+1}} d\rho = 0$ . Тогда  $\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$  и

$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ . Для идеального газа из уравнения Менделеева-Клапейрона  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ ,  $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$

$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$ . Для воздуха  $\gamma \approx 1,4$ . При  $T=300$  К скорость звука в воздухе  $v \approx 347$  м/с.

2. Теплоёмкость, вообще говоря, не является постоянной величиной, а зависит, например, от температуры. Для водорода  $H_2$  при  $T \approx 50$  К  $C_V = \frac{3}{2}R$ , а в диапазоне  $T \approx 300 \dots 400$  К  $C_V = \frac{5}{2}R$ , при высокой температуре  $C_V = \frac{7}{2}R$ . Это говорит о влиянии колебательных степеней свободы для реального газа.

### Политропический процесс

*Политропический процесс* – термодинамический процесс, протекающий при постоянной теплоёмкости  $C = const$ . Вывод уравнения для политропического процесса (аналогично для адиабатического процесса)

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad \nu C dT = \nu C_V dT + p dV, \quad dT = \frac{V dp + p dV}{\nu R}, \quad \nu(C - C_V) \frac{V dp + p dV}{\nu R} = p dV,$$

$$(C - C_V) V dp + (C - C_V - R) p dV = 0$$

Показатель политропического процесса  $n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$ .

Уравнение политропического процесса  $pV^n = const$ .

Работа при политропическом процессе  $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right)$ .

Частные случаи политропического процесса

1) Пусть  $C \rightarrow C_V$ . Тогда  $n \rightarrow \infty$ . Уравнение политропического процесса можно записать в виде

$$p^{\frac{1}{n}} V = const, \quad \text{тогда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^{\frac{1}{n}} V = V = const \quad - \text{изохорический процесс.}$$

2) Пусть  $C = C_P$ , тогда  $n=0$  и  $pV^0 = p = const$  - изобарический процесс.

3) Пусть  $C=0$ , тогда  $n = \frac{-C_P}{-C_V} = \gamma$  и  $pV^\gamma = const$  - адиабатический процесс.

4) Пусть  $C=\infty$ , тогда  $n=1$ ,  $pV = \nu RT = const$  - изотермический процесс.

### Приближение Ван-дер-Ваальса (газ Ван-дер-Ваальса)

В реальном газе молекулы взаимодействуют между собой. Это приводит к уменьшению давления. Для примера рассмотрим небольшой сосуд, полностью заполненный водой при температуре  $T = 300$  К. Давление в воде мало отличается от атмосферного. Предположим, что молекулы воды перестали взаимодействовать друг с другом, т.е. вода превратилась в идеальный газ. Так как плотность газа в сосуде будет равна плотности воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, то давление газа в сосуде будет равно  $p = \frac{\rho RT}{\mu} = \frac{1000 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,018} = 1385 \cdot 10^5$  Па, т.е. в 1385 раз больше атмосферного. Конечно, у реальных газов отличие не будет таким большим, как у жидкости.

Как показывает основное уравнение МКТ  $p = \frac{2}{3} n W_{кин}^{полн}$  давление идеального газа пропорционально кинетической энергии молекул. В реальном газе молекулы взаимодействуют между собой. Из-за притяжения между молекулами кинетическая энергия будет уменьшаться с увеличением расстояния между молекулами. Поэтому давление будет уменьшаться тоже. В сильно разреженном газе можно пренебречь взаимодействием между молекулами. Для учёта уменьшения давления для реального газа надо ввести поправку к давлению идеального газа

$$p = p_{ид} - \frac{a \cdot v^2}{V^2}, \text{ откуда } p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} = p_{ид}.$$

Идеальный газ состоит из материальных точек, не имеющих размеров. Поэтому объем молекул можно не учитывать. Объем реального газа будет больше на величину суммарного объема молекул  $V = V_{ид} + b \cdot v$ , откуда  $V_{ид} = V - b \cdot v$ .

Рассмотрим уравнение Менделеева-Клапейрона  $p_{ид} V_{ид} = \nu RT$  и подставим в него указанные величины

$$\left( p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} \right) (V - b \cdot v) = \nu RT.$$

Это уравнение в 1873 г. предложил Ван-дер-Ваальс для описания неидеального газа.

Здесь,  $a$ ,  $b$  – константы, определяемые для каждого газа экспериментально,  $\nu$  – количество молей. Газ, для которого справедливо уравнение Ван-дер-Ваальса называется газом Ван-дер-Ваальса.

Перепишем уравнение в виде

$$pV^3 - \nu(bp + RT)V^2 + av^2 \cdot V - ab \cdot v^3 = 0.$$

Это уравнение при  $T = \text{const}$  для заданного давления  $p$  может иметь три корня – значения объема. Температура, при которой уравнение имеет три одинаковых корня, называется *критической*. Для определения критических параметров запишем уравнение в виде

$$p_{кр} (V - V_{кр})^3 = 0$$

Затем раскрывая, получаем  $p_{кр} V^3 - 3p_{кр} V_{кр} V^2 + 3p_{кр} V_{кр}^2 V - p_{кр} V_{кр}^3 = 0$ , откуда следует система уравнений

$$3p_{кр} V_{кр} = \nu(bp_{кр} + RT_{кр}), \quad 3p_{кр} V_{кр}^2 = av^2, \quad p_{кр} V_{кр}^3 = ab \cdot v^3.$$

Делим последнее уравнение на второе  $\frac{p_{кр} V_{кр}^3}{3p_{кр} V_{кр}^2} = \frac{ab \cdot v^3}{av^2}$  или  $V_{кр} = 3b \cdot v$ .

Из второго уравнения следует  $p_{кр} = \frac{av^2}{3V_{кр}^2} = \frac{a}{27b^2}$ .

Из первого уравнения  $T_{кр} = \frac{3p_{кр} V_{кр} - \nu b p_{кр}}{\nu R} = \frac{8a}{27Rb}$ .

Примерные значения констант и критических параметров

Газ	$a$ , Па·м <sup>3</sup> /моль <sup>2</sup>	$b$ , м <sup>3</sup> /моль	$p_{кр}$ , Па	$V_{кр}$ , м <sup>3</sup> /моль	$T_{кр}$ , К
He	0,00346	0,0000237	$2,28 \cdot 10^5$	$7,11 \cdot 10^{-5}$	5,20
Ne	0,02135	0,00001709	$2,71 \cdot 10^6$	$5,13 \cdot 10^{-5}$	44,54
H <sub>2</sub>	0,02476	0,00002661	$1,30 \cdot 10^6$	$7,98 \cdot 10^{-5}$	33,18
Ar	0,1363	0,00003219	$4,87 \cdot 10^6$	$9,66 \cdot 10^{-5}$	150,97
N <sub>2</sub>	0,1408	0,00003913	$3,41 \cdot 10^6$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	128,30
O <sub>2</sub>	0,1378	0,00003183	$5,04 \cdot 10^6$	$9,55 \cdot 10^{-5}$	154,36
H <sub>2</sub> O	0,5536	0,00003049	$2,21 \cdot 10^7$	$9,15 \cdot 10^{-5}$	647,39

Вводим переменные  $\bar{T} = \frac{T}{T_{кр}}$ ,  $\bar{V} = \frac{V}{V_{кр}}$ ,  $\bar{p} = \frac{p}{p_{кр}}$ .

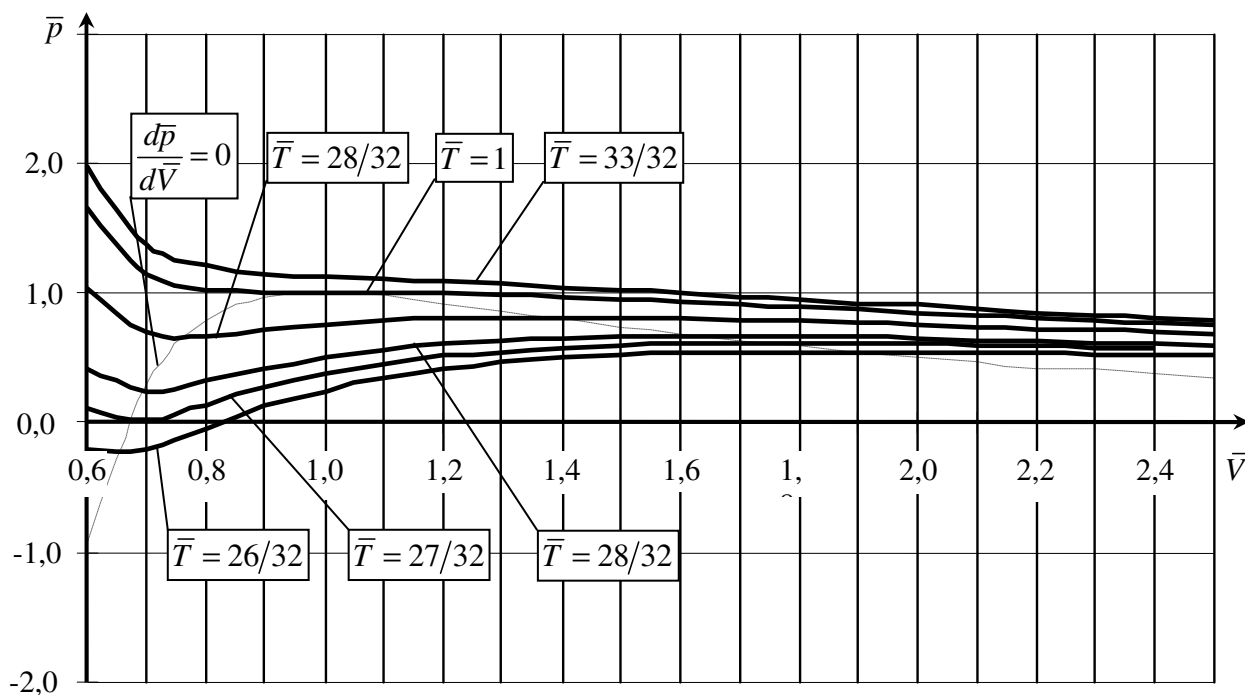
Выполняем преобразования

$$\left( \bar{p} \bar{p}_{кр} + \frac{a \cdot v^2}{\bar{V} \bar{V}_{кр} \bar{V}_{кр}} \right) (\bar{V} \bar{V}_{кр} - b \cdot v) = v R \bar{T} T_{кр}, \quad \left( \bar{p} \frac{a}{27 b^2} + \frac{a \cdot v^2}{\bar{V} 3 b \cdot v \bar{V} 3 b \cdot v} \right) (\bar{V} 3 b \cdot v - b \cdot v) = v R \bar{T} \frac{8a}{27 R b},$$

$$\left( \frac{\bar{p}}{27} + \frac{1}{9 \bar{V}^2} \right) (3 \bar{V} - 1) = \bar{T} \frac{8}{27}, \text{ и получаем}$$

$$\left( \bar{p} + \frac{3}{\bar{V}^2} \right) (3 \bar{V} - 1) = 8 \bar{T}.$$

Полученное уравнение не зависит от параметров  $a$ ,  $b$ . Поэтому оно справедливо для всех газов, которые описываются уравнением Ван-дер-Ваальса. Его называют *приведённым уравнением Ван-дер-Ваальса*. Из уравнения следует, что любые два безразмерных параметра однозначно определяют третий независимо от свойств газа даже для газов, не являющихся идеальными. Эти состояния называются *соответственными*. Приведённое уравнение Ван-дер-Ваальса описывает закон *соответственных состояний*.



Нулевая производная  $\frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} = 0$  описывается линией  $\bar{p} = \frac{3\bar{V} - 2}{\bar{V}^3}$ . Из графика видно, что при

$T > T_{кр}$  изотермы газа Ван-дер-Ваальса монотонно убывают с ростом объема. При меньших температурах изотерма имеет участок возрастания давления с увеличением объема газа, чего в реальных газах не наблюдается. Отметим ещё одну особенность газа Ван-дер-Ваальса.

Из приведенного уравнения выражаем давление  $\bar{p} = \frac{8\bar{T}}{3\bar{V} - 1} - \frac{3}{\bar{V}^2}$ .

Простая арифметика показывает, что *возможны* такие положительные значения параметров  $\bar{T}$  и  $\bar{V}$  при которых давление *отрицательно*. Например, при  $\bar{V} = 0,3$  и любой температуре  $\bar{T}$ :

$\bar{p} = \frac{8\bar{T}}{-0,1} - \frac{3}{0,09} < 0$ . Следовательно, уравнение Ван-дер-Ваальса применимо *не во всем диапазоне*

*изменения параметров*. Опыт показывает, что уравнение достаточно точно описывает поведение некоторых реальных газов вблизи их критической точки. При этом, также, качественно точно описываются фазовые переходы жидкость - газ.

### Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса.

Внутренняя энергия неидеального газа – это сумма кинетической энергии движения молекулы и потенциальной энергии их взаимодействия

$$U = W_{кин} + W_{пот}.$$

Кинетическая энергия зависит от температуры. Потенциальная энергия взаимодействия отрицательная. При увеличении объема газа расстояние между молекулами увеличивается, поэтому абсолютное значение потенциальной энергии убывает и, в пределе бесконечного объема, обращается в ноль. Поэтому в этом случае  $U \xrightarrow{V \rightarrow \infty} U_{ид} = \nu C_V T$ .

Для любой адиабатически изолированной системы изменение внутренней энергии  $dU = -\delta A$ . Для идеального газа  $dU_{ид} = -p_{ид} dV_{ид}$ .

Для газа Ван-дер-Ваальса  $dU_{ид} = -\left(p + \frac{a \cdot \nu^2}{V^2}\right) d(V - b \cdot \nu) = -\left(p dV + \frac{a \cdot \nu^2}{V^2} dV\right)$

$$dU_{ид} = dU - \frac{a \cdot \nu^2}{V^2} dV.$$

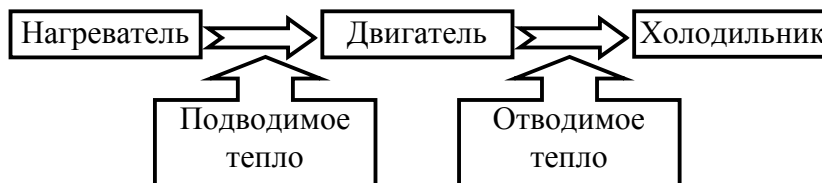
$$U = \nu C_V T - \frac{a \cdot \nu^2}{V}$$

Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса зависит от объема. Если газ расширяется при постоянной внутренней энергии  $U = \text{const}$ , то температура газа уменьшается. Это, в частности происходит, если теплоизолированный газ расширяется без совершения работы против внешних сил, т.е. при адиабатном расширении в пустоту. (Это процесс расширения необратим). Явление понижения температуры неидеального газа при адиабатном расширении в пустоту называется эффектом Джоуля-Томсона и наблюдается из-за того, что газ не является идеальным.

**Лекция 13.**

*Тепловые и холодильные машины. Второе начало термодинамики. Цикл Карно. Теорема Карно. Термодинамическая шкала температур. Неравенство Клаузиуса. Термодинамическая энтропия. Закон возрастания энтропии. Третье начало термодинамики.*

Тепловые машины или тепловые двигатели, предназначены для получения полезной работы за счет теплоты, выделяемой вследствие химических реакций (сгорания топлива), ядерных превращений или по другим причинам. Для функционирования тепловой машины обязательно необходимы следующие составляющие: нагреватель, холодильник и рабочее тело.



Иногда холодильником является окружающая среда.

В дальнейшем будет применяться понятие *термостата*, под которым подразумевается тело, находящееся при постоянной температуре и обладающее бесконечной теплоёмкостью — любые процессы получения или отдачи теплоты не меняют температуру этого тела.

**Циклический (круговой) термодинамический процесс.**

Нагреватель передает рабочему телу теплоту  $Q_H$ , вызывая повышение его температуры. Рабочее тело совершает работу и затем отдает тепло холодильнику  $Q'_X$ .

*Замечание.* Наличие штриха означает, что берется абсолютное значение указанной величины, т.е.  $Q'_X = |Q_X|$ .

Такой круговой процесс называется *прямым*. В прямом процессе теплота забирается у более нагретого тела и после совершения работы системой над внешними телами остаток теплоты отдается менее нагретому телу. *Тепловые машины* ра-

ботают по прямому циклу.

Процесс, в котором теплота забирается у менее нагретого тела и отдается более нагретому телу в результате совершения работы над системой внешними телами, называется *обратным*. По обратному циклу *работают холодильные машины*.

Теплота, полученная системой, считается положительной  $Q_H > 0$ , а отданная — отрицательной  $Q_X < 0$ . Если  $Q'_X > 0$  — теплота полученная холодильником, то можно записать  $Q'_X = -Q_X$ .

Внутренняя энергия — это функция состояния, поэтому при круговом (циклическом) процессе, когда система возвращается в исходное состояние, внутренняя энергия не изменяется. Из первого начала термодинамики следует

$$Q_{\text{цикл}} = \Delta U_{\text{цикл}} + A_{\text{цикл}}.$$

Но так как  $\Delta U_{\text{цикл}} = 0$ , то

$$Q_{\text{цикл}} = Q_{\text{получ}} + Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}} - Q'_{\text{отд}}$$

так как  $Q_{\text{получ}} > 0$ ,  $Q_{\text{отд}} < 0$ .

Коэффициент полезного действия (КПД) прямого цикла

$$\eta = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_{\text{получ}} + Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_{\text{получ}} - Q'_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}} = 1 + \frac{Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}} = 1 - \frac{Q'_{\text{отд}}}{Q_{\text{получ}}}$$

определяется для циклических (повторяемых) процессов. (Для нециклического процесса подобное отношение называется *полезным выходом*.)

*Замечание.* Передача теплоты холодильнику является обязательной для циклического процесса. Иначе рабочее тело придет в тепловое равновесие с нагревателем и передача теплоты

от нагревателя будет невозможной. Поэтому КПД любой тепловой машины всегда меньше единицы

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{отд}|}{Q_{получ}} < 1.$$

В холодильной машине внешние тела совершают работу  $A_{внеш}$  по отводу теплоты от охлаждаемого тела  $Q_2$  и передачи теплоты к тепловому резервуару (обычно – это окружающая среда)  $Q_1'$ . КПД холодильной машины или холодильный коэффициент – это отношение отданного количества теплоты к затраченной работе

$$\eta_{хм} = \frac{Q_2}{A_{внеш}} = \frac{Q_2}{Q_1' - Q_2}$$

Вообще говоря, этот коэффициент может быть как меньше единицы, так и больше единицы – всё зависит от работы внешних тел.

*Тепловой насос* - устройство, «перекачивающее» теплоту от холодных тел к нагретым и предназначенное, например, для обогрева помещения. При этом тепло  $Q_2$  отбирается у окружающей среды, имеющей меньшую температуру, и воздух в помещении отдается теплота  $Q_1'$ . Тепловой насос работает по обратному тепловому циклу. (Этот принцип обогрева называется динамическим отоплением).

КПД теплового насоса равен отношению теплоты, переданной помещению к затраченной работе

$$\eta_{тн} = \frac{Q_1'}{A_{внеш}} = \frac{Q_1'}{Q_1' - Q_2}.$$

Так как теплота, отводимая от окружающей среды больше 0, то КПД теплового насоса больше единицы. Но для КПД этого же прямого цикла  $Q_{получ} = -Q_1'$ ,  $Q_{отд} = -Q_2$ , поэтому

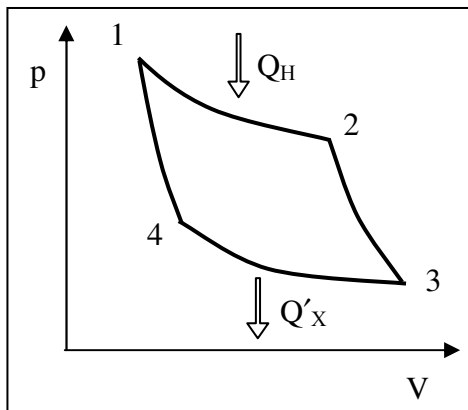
$$\eta_{тн} = \frac{Q_1'}{Q_1' - Q_2} = \frac{-Q_{получ}}{-Q_{получ} + |Q_{отд}|} = \frac{1}{1 - \frac{|Q_{отд}|}{Q_{получ}}} = \frac{1}{\eta}$$

т.е. *КПД теплового насоса равен обратной величине КПД прямого цикла.*

### Цикл Карно

Реальные процессы в тепловых машинах являются необратимыми (всегда есть потери). Максимальный КПД имеет тепловая машина, у которой цикл состоит только из равновесных состояний.

*Замечание.* Для возникновения теплопередачи необходима разность температур. Однако, возникающие тепловые потоки вызывают неравновесность процессов. В идеальном случае процесс должен протекать (при постоянной температуре) бесконечно долго.



Цикл Карно состоит из:

*процесс 1-2* – изотермический. В этом процессе газ получает тепло от нагревателя-термостата, расширяясь при постоянной температуре  $T_H$ .

*Процесс 2-3* – адиабатический – газ расширяется без теплообмена.

*Процесс 3-4* – газ отдает тепло холодильнику-термостату, сжимаясь при постоянной температуре  $T_X$ .

*Процесс 4-1* – адиабатический – газ сжимается без теплообмена. Цикл в последовательности 1-2-3-4-1 является

**прямым циклом.** Обратный цикл осуществляется в *холодильной машине*.

Найдем КПД цикла Карно.



$Q_{пол} = Q_H = A_{12} > 0$  так как газ расширяется,  $Q_{отд} = Q_X = A_{34} < 0$  так как сжимается.

Для изотермических процессов  $A_{12} = \nu RT_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ ,  $A_{34} = \nu RT_X \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$

Для адиабатических процессов  $T_H V_2^{\gamma-1} = T_X V_3^{\gamma-1}$  и  $T_H V_1^{\gamma-1} = T_X V_4^{\gamma-1}$ , поэтому

$$\frac{T_H V_2^{\gamma-1}}{T_H V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_X V_3^{\gamma-1}}{T_X V_4^{\gamma-1}}, \text{ откуда } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} > 1.$$

$$\text{КПД цикла Карно } \eta = 1 - \frac{|Q_{отд}|}{Q_{получ}} = 1 - \frac{\left| \nu RT_X \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \right|}{\nu RT_H \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_X}{T_H}.$$

$$\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$$

### Второе начало термодинамики.

Первое начало термодинамики не накладывает никаких ограничений на направление протекания термодинамического процесса, в то время как опыт показывает, например, на невозможность самопроизвольной передачи тепла от менее нагретого тела к более нагретому телу.

*Формулировка Клаузиуса второго начала термодинамики.*

Теплота сама по себе, без изменения в окружающих телах, не может перейти от менее нагретого тела к более нагретому.

*Формулировка Томсона второго начала термодинамики.*

В природе невозможен круговой процесс, единственным результатом которого была бы механическая работа, совершаемая за счет отвода теплоты от теплового резервуара.

*Эти формулировки эквивалентны.*

1) Пусть не выполняется постулат Клаузиуса, т.е. возможен самопроизвольный переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Рассмотрим циклически процесс, при котором машина получает тепло  $Q_1$  от нагревателя, совершает работу и передает теплоту  $Q'_2$  холодильнику. При этом тепло может самопроизвольно переходить от холодильника к нагревателю. Тогда можно так подобрать параметры процесса, что вся теплота  $Q'_2$ , отданная холодильнику возвращается к нагревателю. Нагреватель при этом потеряет количество теплоты равное работе машины  $A = Q_1 - Q'_2$ . Остальных изменений в окружающих телах не происходит. Следовательно, нарушается постулат в формулировке Томсона.

2) Пусть не выполняется постулат Томсона. Тогда тепловая машина забирает тепло у холодильника и полностью превращает её в работу. Эту работу можно направить на нагрев более горячего тела. Нарушается формулировка Клаузиуса, так как в окружающих телах нет никаких изменений.

*Замечание.* Второе начало термодинамики запрещает создание вечного двигателя второго рода, полностью превращающего в работу всю полученную энергию. (Вечный двигатель первого рода совершает работу без получения энергии).

### Теоремы Карно.

#### 1-я теорема Карно.

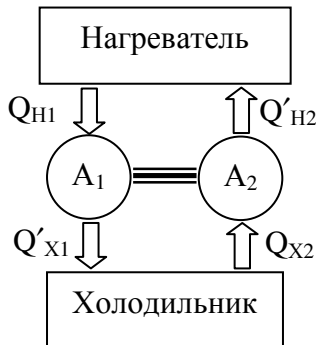
КПД любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температур нагревателя и холодильника.

#### 2-я теорема Карно

КПД любой тепловой машины, работающей по необратимому циклу, меньше КПД тепловой машины с обратимым циклом Карно при условии равенства температур их нагревателей и холодильников.

$$\eta_{\text{НЕОБР}} < \eta_{\text{ОБР}}$$

Докажем 1-ю теорему Карно.



Возьмем две тепловые машины, возможно, разной конструкции и использующие разные рабочие тела, но имеющие общие нагреватель и холодильник и работающие по циклу Карно.

Пусть КПД 1й машины больше чем КПД 2й машины

$$\eta_1 > \eta_2$$

Это означает, что  $1 - \frac{Q'_{X1}}{Q_{H1}} > 1 - \frac{Q'_{X2}}{Q_{H2}}$ .

Запустим 1ю машину по прямому циклу, а вторую по – обратному. Учитывая, что для прямого и обратного цикла выполняется равенст-

во  $\eta_{\text{пр}} = \frac{1}{\eta_{\text{обр}}}$ , поэтому соотношение для КПД примет вид

$$1 - \frac{Q'_{X1}}{Q_{H1}} > 1 - \frac{Q_{X2}}{Q'_{H2}} \quad \text{или} \quad \frac{Q_{X2}}{Q'_{H2}} > \frac{Q'_{X1}}{Q_{H1}}$$

Установим связь между обеими машинами так, чтобы первая совершала работу над второй и при этом  $Q'_{X1} = Q_{X2}$ . Тогда  $Q_{H1} > Q'_{H2}$  или  $Q_{H1} - Q'_{X1} > Q_{H2} - Q'_{X2}$ . Но это означает, что работа первой машины больше чем работа, которую надо совершить над второй машиной. Поэтому

$$A_{\text{ОБЩ}} = A_1 + A_2 = Q_{H1} - Q'_{X1} - (Q_{H2} - Q'_{X2}) > 0.$$

Итак, общая теплота, получаемая холодильником, будет равна нулю, а у нагревателя будет отобрана теплота  $Q_H = Q_{H1} - Q'_{H2} > 0$  и при этом совершена работа  $A_{\text{ОБЩ}} > 0$ . Противоречие со вторым началом термодинамики в формулировке Томсона. Следовательно, неравенство  $\eta_1 > \eta_2$  не выполняется.

Пусть теперь  $\eta_1 < \eta_2$ . Запустим первую машину по обратному циклу, а вторую – по прямому. И повторим рассуждения.

Отсюда следует, что машины имеют одинаковые КПД. Однако если рабочим телом одной из машин является идеальный газ, то КПД такого процесса известен.

В итоге, для любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно

$$\eta = 1 - \frac{Q'_X}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}.$$

Отсюда следует полезное равенство  $\frac{Q'_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H}$ .

Докажем 2-ю теорему Карно. В необратимых процессах неизбежны потери энергии, вызванные неравновесностью. Например, наличие трения приводит к дополнительному выделению тепла и уменьшению работы. Наличие потоков вещества приводит к потерям на кинетическую энергию и т.д. Следовательно,  $Q_{\text{НЕРАВ}_X} < Q_{\text{РАВ}_X}$  и  $\eta_{\text{НЕРАВ}_X} < \eta_{\text{РАВ}_X}$ . Т.е.

$$1 - \frac{Q'_{\text{НЕРАВ}_X}}{Q_{\text{НЕРАВ}_H}} < 1 - \frac{Q'_{\text{РАВ}_X}}{Q_{\text{РАВ}_H}} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$$

Отсюда следует полезное равенство  $\frac{Q'_{\text{НЕРАВ}_X}}{T_X} > \frac{Q_{\text{НЕРАВ}_H}}{T_H}$ .

### Термодинамическая шкала температур

Температура  $T$  была вначале введена эмпирическим путем с помощью газового термометра исходя из зависимости между давлением и температурой идеального газа. Но уравнение для идеального газа справедливо в ограниченном интервале значений давлений и температур.

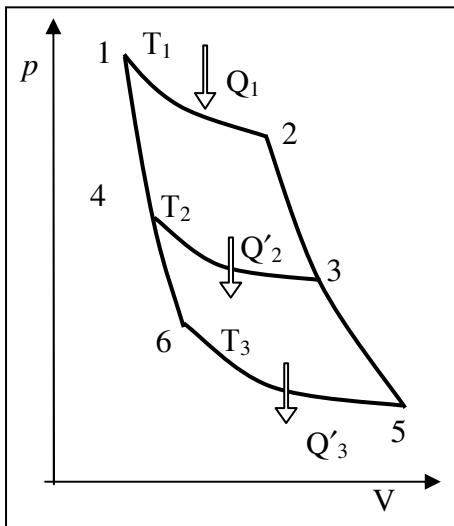
Из выражения для КПД машины, работающей по циклу Карно, следует, что

$$\frac{Q_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H}.$$

Вообще говоря, это соотношение позволяет опытным путём ввести новую абсолютную шкалу температур, которая *не зависит от свойств рабочего тела* и такую, что КПД для цикла Карно будет зависеть только от новых температур и будет выполняться равенство

$$\frac{Q_X}{Q_H} = \Phi(T_X, T_H) = \frac{T_X}{T_H}.$$

Рассмотрим цикл Карно 1-2-5-6 с температурами нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_3$ , состоящий из двух «подциклов» 1-2-3-4 и 3-5-6-4 с промежуточной температурой  $T_2$ .



Для всех трех циклов можно записать

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = \Phi(T_2, T_1), \quad \frac{Q'_3}{Q_2} = \Phi(T_3, T_2), \quad \frac{Q'_3}{Q_1} = \Phi(T_3, T_1).$$

Так как  $\frac{Q'_3}{Q_1} = \frac{Q'_3}{Q_2} \frac{Q_2}{Q_1}$ , то при этом должно выполняться

$$\Phi(T_3, T_1) = \Phi(T_2, T_1) \Phi(T_3, T_2).$$

Но левая часть не зависит от  $T_2$ . Это возможно в случае, когда  $\Phi(T_3, T_1) = \frac{\Theta(T_3)}{\Theta(T_1)}$ ,  $\Phi(T_3, T_2) = \frac{\Theta(T_3)}{\Theta(T_2)}$  и  $\Phi(T_2, T_1) = \frac{\Theta(T_2)}{\Theta(T_1)}$

где  $\Theta(T)$  искомая температура.

В области, где выполняется приближение идеального газа должно выполняться равенство  $\Theta(T) = T$  в реперных точках (например, в «тройной точке» для воды). Поэтому введенная ранее температура совпадает с абсолютной термодинамической температурой.

### Неравенство Клаузиуса.

Из второй теоремы Карно следует  $\frac{Q'_{\text{НЕРАВ}_X}}{T_X} > \frac{Q_{\text{НЕРАВ}_H}}{T_H}$ . Перепишем его в виде

$$\frac{Q'_X}{T_X} \geq \frac{Q_H}{T_H}$$

подразумевая, что для обратимых процессов выполняется равенство, а для необратимых - неравенство. По договоренности об обозначениях  $Q'_X = |Q_X|$ , т.е.  $Q_X = -Q'_X$ , откуда  $Q'_X = -Q_X$ .

Следовательно

$$0 \geq \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q'_X}{T_X} = \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_X}{T_X}$$

В общем случае циклический процесс можно разделить на некоторое множество участков, на которых подводится или отводится теплота.

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Величина  $\frac{Q}{T}$  называется *приведённым количеством теплоты* (Дж/К)

В пределе для элементарных количеств

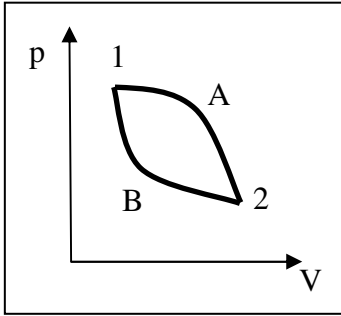
$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} \leq 0.$$

(Кружок в интеграле показывает, что процесс круговой.)

Это *неравенство Клаузиуса*: суммарное количество приведенной теплоты в любом замкнутом цикле для любой термодинамической системы не может быть больше нуля.

Знак равенства можно поставить только для обратимых процессов.

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$



Для произвольного обратимого циклического процесса

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1A2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

С учетом того, что при смене направления процесса

$$\int_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = - \int_{1B2} \frac{\delta Q}{T},$$

получаем  $\int_{1A2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1B2} \frac{\delta Q}{T},$

т.е. значение интеграла не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний.

Поэтому элементарное количество приведенной теплоты для обратимого процесса является полным дифференциалом некоторой функции равновесного состояния системы

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

изменение которой

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

Это величина называется *термодинамической энтропией*  $S$ , измеряется в Дж/К.

Энтропия является аддитивной величиной – энтропия системы равна сумме энтропий частей, входящих в систему.

Теперь рассмотрим циклический процесс, одна половина которого 1A2 – необратимый процесс, а вторая половина 2B1 – обратимый процесс. Тогда

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

или, как и выше, получаем

$$\oint_{\text{цикл}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1A2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2B1} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1A2} \frac{\delta Q}{T} - \int_{1B2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1A2} \frac{\delta Q}{T} - (S_2 - S_1) \leq 0$$

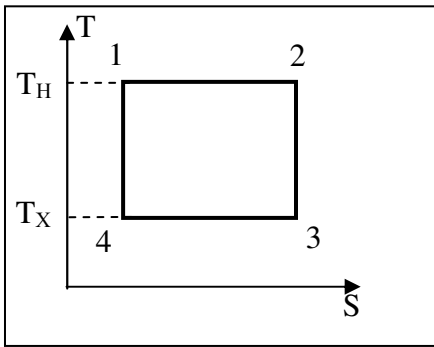
$$\text{т.е. } S_2 - S_1 \geq \int_{1A2} \frac{\delta Q}{T}.$$

Если система адиабатически изолирована то  $\delta Q = 0$ , поэтому

$$S_2 - S_1 \geq 0$$

В адиабатически изолированной системе энтропия не убывает. Это закон возрастания энтропии для адиабатически замкнутой системы. Отсюда следует смысл энтропии – энтропия служит мерой необратимости процесса. Она показывает направление протекания необратимого процесса.

**Пример.** Наша Вселенная является адиабатически изолированной системой (в силу единственности). Поэтому суммарная энтропия Вселенной возрастает. Рано или поздно она достигнет максимального значения и все тепловые процессы прекратятся. Как говорят, наступит *тепловая смерть Вселенной*.



**Пример.** Цикл Карно в переменных температура – энтропия.  
*процесс 1-2* – изотермический. В этом процессе  $T_H = \text{const}$ .  
*Процесс 2-3* – адиабатический – газ расширяется без теплообмена  $\delta Q = 0$ , следовательно  $dS = 0$ , откуда  $S = \text{const}$ .  
*Процесс 3-4* – газ отдает тепло холодильнику-термостату  $T_X = \text{const}$ .  
*Процесс 4-1* – адиабатический – газ сжимается без теплообмена  $S = \text{const}$ .

### Третье начало термодинамики (теорема Нернста).

Энтропия определена с точностью до произвольного слагаемого

$$S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_1.$$

Если этому слагаемому придать какое-то конкретное значение, то можно говорить об абсолютном значении энтропии.

*Теорема Нернста.* (Справедлива только для равновесных систем.)

При стремлении температуры любой равновесной системы к абсолютному нулю её энтропия стремится к постоянной величине, которую можно принять равной нулю. Теплоёмкости тоже стремятся к нулю.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{T \rightarrow 0} C_V = \lim_{T \rightarrow 0} C_P = 0.$$

*Следствие:* невозможно достичь состояния с абсолютным нулем температуры 0 К.

Теплоёмкость системы также стремится к нулю, что делает процесс отвода теплоты невозможным. Можно лишь асимптотически приближаться к 0 К.

*Следствие:* Уравнение Менделеева-Клапейрона неприменимо для описания идеального газа при  $T \rightarrow 0$  К.

Действительно,  $\delta Q = dU + p dV = \nu C_V dT + \frac{\nu RT}{V} dV$

$$\text{Тогда } S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_1 = \int_1^2 \left( \nu C_V dT + \frac{\nu RT}{V} dV \right) + S_1 = \nu C_V \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \nu RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) + S_1$$

Получаем, что при  $T \rightarrow 0$   $S_2 \rightarrow -\infty$ .

**Лекция 14.**

*Основное неравенство и основное уравнение термодинамики. Понятие о термодинамических потенциалах. Эффект Джоуля-Томпсона. Принцип Ле-Шателье-Брауна. Введение в термодинамику необратимых процессов.*

**Основное неравенство и основное уравнение термодинамики**

Для энтропии  $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$ . Используя первое начало термодинамики, получаем основное неравенство термодинамики

$$TdS \geq dU + pdV$$

Знак равенства соответствует равновесным процессам

Основное уравнение равновесных (обратимых) процессов

$$TdS = dU + pdV.$$

С помощью этого уравнения можно рассчитать любые равновесные термодинамические процессы.

**Метод термодинамических потенциалов.**

Применение законов термодинамики дает возможность описывать многие свойства макросистем. Для такого описания исторически сложились два пути: метод циклов и метод термодинамических функций. Первый основан на анализе обратимых циклов, а второй – на применении термодинамических функций (потенциалов), введенных Гиббсом.

Исходным для вывода всех термодинамических потенциалов является основное равенство термодинамики

$$TdS = dU + pdV,$$

связывающим между собой пять величин ( $T, S, U, p, V$ ), которые могут быть параметрами состояния или рассматриваться как функции состояния.

Для определения состояния простейшей термодинамической системы достаточно задать значения двух независимых параметров. Поэтому для нахождения значений остальных трех параметров необходимо определить ещё три уравнения, одним из которых является основное уравнение термодинамики, а остальные два могут быть, например, уравнением состояния и дополнительным уравнением, вытекающим из свойств конкретного состояния системы.

$$TdS = dU + pdV; \quad p = p(V, T); \quad U = U(V, T).$$

В общем случае к термодинамическим потенциалам может относиться любая функция состояния (например, внутренняя энергия или энтропия), если она определена как независимая функция параметров состояния. Поэтому число термодинамических функций очень велико. Обычно рассматривают те, которые обладают следующим свойством: частные производные функции по соответствующим параметрам равны тому или иному параметру состояния системы.

*Термодинамические потенциалы (термодинамические функции)* – это определённые функции объёма, давления, температуры, энтропии, числа частиц системы и других макроскопических параметров, характеризующих состояние системы, обладающие следующим свойством: если известен термодинамический потенциал, то путём его дифференцирования по отмеченным выше параметрам можно получить все другие параметры, определяющие состояние системы.

**Примеры термодинамических потенциалов.**

1) Выбираем в качестве независимых параметров объём  $V$  и энтропию  $S$ . Тогда из основного уравнения вытекает

$$dU = TdS - pdV.$$

$$\text{Находим } T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V=\text{const}}, \quad p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S=\text{const}}$$

Поэтому *внутренняя энергия*  $U = U(V, S)$  - потенциал.

Смысл внутренней энергии: при  $V=\text{const}$  получаем  $dU = TdS = \delta Q_{V=\text{const}}$ , т.е. изменение внутренней энергии равно количеству теплоты, подведенной при изохорном процессе.

Если процесс необратимый, то  $TdS > dU + pdV$  или  $TdS - pdV > dU$ .

2) Выбираем в качестве независимых параметров давление  $p$  и энтропию  $S$ .

С учетом равенства  $d(pV) = pdV + Vdp$  и основного уравнения  $TdS = dU + pdV$ , получаем, что из  $TdS + Vdp = dU + pdV + Vdp$  следует  $TdS + Vdp = d(U + pV)$ .

Введем обозначение  $H = U + pV$ . Тогда  $dH = TdS + Vdp$  и  $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p=\text{const}}$ ,  $V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S=\text{const}}$ .

Значит, функция  $H = U + pV$  является термодинамическим потенциалом и носит название: *энтальпия*.

Смысл энтальпии: при  $p=\text{const}$  получаем  $dH = TdS = \delta Q_{p=\text{const}}$ , т.е. изменение энтальпии равно подведенному количеству теплоты при изобарном процессе.

Если процесс необратимый, то  $TdS > dU + pdV$  или  $TdS + Vdp > dU + pdV + Vdp$ ,  $dH < TdS + Vdp$ .

3) Выбираем в качестве независимых параметров объем  $V$  и температуру  $T$ .

Перепишем основное уравнение  $TdS = dU + pdV$  в виде  $-pdV = dU - TdS$  и с учётом равенства  $d(TS) = TdS + SdT$  получаем  $-pdV - SdT = dU - TdS - SdT$  или  $-pdV - SdT = d(U - TS)$

Вводим обозначение  $\Psi = U - TS$ , тогда  $d\Psi = -pdV - SdT$ ,  $p = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial V}\right)_{T=\text{const}}$ ,  $S = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_{V=\text{const}}$ .

Таким образом,  $\Psi = U - TS$  - термодинамический потенциал, который называется *свободной энергией* или *термодинамическим потенциалом Гельмгольца*.

Смысл свободной энергии: при  $T=\text{const}$  получаем  $d\Psi = -pdV = -\delta A_{T=\text{const}}$ , т.е. уменьшение свободной энергии равно работе совершенной системой в изотермическом процессе.

Если процесс необратимый, то  $TdS > dU + pdV$  или  $-pdV - SdT > dU - TdS - SdT$ , т.е.  $d\Psi < -pdV - SdT$ .

При необратимом изотермическом и изохорном процессе  $d\Psi < 0$  - свободная энергия уменьшается до тех пор, пока система не придет в термодинамическое равновесие - в этом случае свободная энергия принимает минимальное значение.

4) Выбираем в качестве независимых параметров давление  $p$  и температуру  $T$ .

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} G &= H + \Psi - U = U + pV + U - TS - U = U + pV - TS \\ dG &= dH + d\Psi - dU = TdS + Vdp - pdV - SdT - TdS + pdV \\ dG &= Vdp - SdT \end{aligned}$$

Так как  $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T=\text{const}}$  и  $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}$ , то  $G = U + pV - TS$  - потенциал, который носит на-

звание *энергия Гиббса (термодинамический потенциал Гиббса)*.

Если процесс необратимый, то,  $d\Psi < -pdV - SdT$  и  $dH < TdS + Vdp$ , поэтому

$$dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT < TdS - pdV + pdV + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT$$

Т.е.  $dG < Vdp - SdT$ .

Для изобарного изотермического необратимого процесса энергия Гиббса убывает и при достижении равновесия принимает минимальное значение. Между термодинамическими потенциа-

лами можно установить соотношения. Из  $\Psi = U - TS$ ,  $S = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_{V=\text{const}}$  получаем

уравнение Гиббса-Гельмгольца  $U = \Psi - T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{V=const}$ .

Зависимость энтальпии от потенциала Гиббса  $H = G - T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p=const}$ .

Внутренняя энергия система с переменным числом частиц изменяется не только за счет сообщения теплоты и совершения работы системой, но и за счет изменения числа частиц в системе, поэтому

$$dU = \delta Q - \delta A + \sum_k \mu_k dN_k$$

здесь  $k$  – сорт частиц,  $dN_k$  – изменение числа частиц  $k$ -го сорта. При этом изменение массы системы  $dm = \sum_k m_{0k} dN_k$ , где  $m_{0k}$  – масса частиц  $k$ -го сорта.

Для равновесных процессов  $dU = TdS - pdV + \sum_k \mu_k dN_k$ .

Величина  $\mu_k = \left( \frac{\partial U}{\partial N_k} \right)_{V=const, S=const}$  называется *химическим потенциалом* частиц  $k$ -го сорта.

По смыслу – это энергия, приходящаяся на одну частицу.

Найдем как связан химический потенциал с другими термодинамическими потенциалами.

1) Энтальпия  $H = U + pV$ ,

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS - pdV + \sum_k \mu_k dN_k + pdV + Vdp = TdS + Vdp + \sum_k \mu_k dN_k.$$

$$\text{Откуда } \mu_k = \left( \frac{\partial H}{\partial N_k} \right)_{p=const, S=const}.$$

2) Свободная энергия (Гельмгольца)  $\Psi = U - TS$ ,

$$d\Psi = dU - TdS - SdT = TdS - pdV + \sum_k \mu_k dN_k - TdS - SdT = -pdV - SdT + \sum_k \mu_k dN_k$$

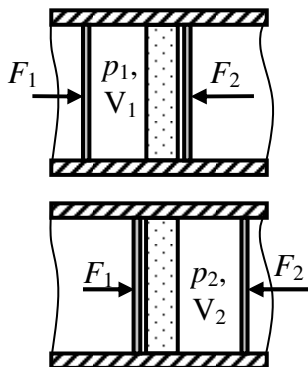
$$\text{Откуда } \mu_k = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial N_k} \right)_{V=const, T=const}.$$

3) Энергия Гиббса  $G = U + pV - TS$

$$dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT + \sum_k \mu_k dN_k$$

$$\text{Откуда } \mu_k = \left( \frac{\partial G}{\partial N_k} \right)_{p=const, T=const}.$$

$$\text{Итак } \mu_k = \left( \frac{\partial U}{\partial N_k} \right)_{V=const, S=const} = \left( \frac{\partial H}{\partial N_k} \right)_{p=const, S=const} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial N_k} \right)_{V=const, T=const} = \left( \frac{\partial G}{\partial N_k} \right)_{p=const, T=const}.$$



### Эффект Джоуля-Томсона

Изменение температуры газа при необратимом адиабатном расширении происходит из-за отклонения реальных газов от идеальности и называется *эффектом Джоуля-Томсона*.

Рассмотрим теплоизолированную систему, состоящую из двух поршней, заключенных в трубу, между которыми находится газ. Поршни медленно движутся с постоянной скоростью внутри трубы. При этом газ просачивается через пористую перегородку. Силы, действующие на поршни постоянные. Движение газа через пористую перегородку настолько медленное, что потерями на трение можно пренебречь. При этом процесс является необратимым.



Так как процесс адиабатный, то  $\Delta U = -A_{ГАЗА} = A_{ВНЕШ}$ .

Работа внешних сил

$$A_{ВНЕШ} = F_1 x_1 - F_2 x_2$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – перемещение каждого из поршней. Если  $S_1$  и  $S_2$  – площади сечения трубы слева и справа, то

$$A_{ВНЕШ} = p_1 S_1 x_1 - p_2 S_2 x_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – объёмы, а  $p_1$  и  $p_2$  – давления газа до и после просачивания.

В итоге,

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

откуда

$$U_2 + p_2 V_2 = U_1 + p_1 V_1$$

или

$$H_1 = H_2,$$

т.е. процесс протекает с *сохранением энтальпии*.

При падении давления газа происходит изменение температуры.

При небольшом перепаде давления  $\frac{|\Delta p|}{p_1} \ll 1$  это явление называется *дифференциальным эффектом Джоуля-Томсона*, а при большом перепаде – *интегральным эффектом*.

При дифференциальном эффекте коэффициент Джоуля-Томсона определяется как  $\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p}$

$$\Delta H = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} \Delta T + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_{T=\text{const}} \Delta p = 0,$$

откуда  $\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = - \frac{\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_{T=\text{const}}}{\left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p=\text{const}}}.$

Но  $dH = TdS + Vdp$ , поэтому  $\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_{T=\text{const}} = T \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T=\text{const}} + V$

Так как при  $p=\text{const}$   $dH = TdS = \delta Q_{p=\text{const}}$ , т.е. изменение энтальпии равно подведенному количеству теплоты при изобарном процессе, то  $\left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} = C_p$ . Следовательно

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = - \frac{T \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T=\text{const}} + V}{C_p}.$$

Так как  $V = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_{T=\text{const}}$  и  $S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p=\text{const}}$ , то  $\left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T=\text{const}} = - \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T} = - \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right) = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}}.$

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = - \frac{-T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} + V}{C_p} = \frac{T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} - V}{C_p}.$$

Для идеального газа

$$pV = \nu RT, \quad \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} = \frac{\nu R}{p} = \frac{V}{T}, \quad \mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{V - V}{C_p} = 0$$

при необратимом процессе расширения температура *не меняется*.

Для газа Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a \cdot v^2}{V^2}\right)(V - b \cdot v) = vRT$$

Раскрываем это уравнение  $p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} = \frac{vRT}{V - b \cdot v}$ ,  $pV - pb \cdot v + \frac{a \cdot v^2}{V} - \frac{ab \cdot v^3}{V^2} = vRT$ .

Находим производную по  $T$  при  $p = \text{const}$ :

$$p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} - \frac{a \cdot v^2}{V^2} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} + 2 \frac{ab \cdot v^3}{V^3} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} = vR,$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} = \frac{vR}{p - \frac{a \cdot v^2}{V^2} + 2 \frac{ab \cdot v^3}{V^3}} = \frac{vR}{p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} - 2 \frac{a \cdot v^2}{V^2} + 2 \frac{ab \cdot v^3}{V^3}} = \frac{vR}{p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} - 2 \frac{a \cdot v^2}{V^3} (V - bv)}.$$

Учтем, что  $p + \frac{a \cdot v^2}{V^2} = \frac{vRT}{V - b \cdot v}$ ,

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} = \frac{R(V - bv)}{RT - 2 \frac{a \cdot v}{V^3} (V - bv)^2} = \frac{R(V - bv)}{RT \left( 1 - 2 \frac{a \cdot v}{RTV^3} (V^2 - 2bvV + b^2v^2) \right)}.$$

Если объём газа не очень мал (газ не плотный), то  $b \ll V$  и можно пренебречь малыми величинами

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} \approx \frac{V - bv}{T \left( 1 - 2 \frac{a \cdot v}{RTV} \right)} \approx \frac{V - bv}{T} \left( 1 + 2 \frac{a \cdot v}{RTV} + \dots \right) \approx \frac{1}{T} \left( V - bv + 2 \frac{a \cdot v}{RT} \right).$$

Тогда

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} \approx \frac{2 \frac{a \cdot v}{RT} - bv}{C_p}.$$

Отсюда следует, что изменение температуры вызвано отклонением газа от идеального.

Существует некоторая критическая температура  $T_{\text{инв}} = 2 \frac{a}{Rb}$  при которой  $\mu = 0$ . Она называется

температурой инверсии. Если  $T > T_{\text{инв}}$ , то  $\frac{\Delta T}{\Delta p} < 0$ , т.е.  $\Delta T > 0$  при  $\Delta p < 0$  - газ нагревается, а если

$T < T_{\text{инв}}$ , то  $\frac{\Delta T}{\Delta p} > 0$ , т.е.  $\Delta T < 0$  при  $\Delta p < 0$  - газ охлаждается. Нагревание газа называется отрица-

тельным эффектом Джоуля-Томсона, а охлаждение - положительным.

Газ	$a$	$b$	$T_{\text{инв}}, \text{K}$	$T_{\text{кр}}, \text{K}$
He	0,00346	0,0000237	35,11	5,20
Ne	0,02135	0,00001709	300,67	44,54
H <sub>2</sub>	0,02476	0,00002661	223,94	33,18
Ar	0,1363	0,00003219	1019,07	150,97
N <sub>2</sub>	0,1408	0,00003913	866,01	128,30
O <sub>2</sub>	0,1378	0,00003183	1041,94	154,36
H <sub>2</sub> O	0,5536	0,00003049	4369,86	647,39

Температура инверсии больше критической температуры.

*Замечание.* Расчет температуры без введения предположений о малости приводит к выводу о наличии двух температур инверсии.

### Принцип Ле Шателье-Брауна.

Из закона возрастания энтропии следует, что энтропия системы возрастает до тех пор, пока не затихнут все необратимые процессы.

*Условие устойчивости состояния термодинамической системы:* если энтропия адиабатически изолированной системы достигает максимального значения, то состояние системы термодинамически устойчиво.

*Принцип Ле Шателье-Брауна:* если на систему действуют внешние факторы, выводящие её из состояния устойчивого равновесия, то в системе возникают процессы, стремящиеся ослабить это воздействие. Принцип является термодинамическим аналогом закона индукции Ленца. Значение принципа состоит в том, что он позволяет предсказывать направление, в котором под влиянием внешнего воздействия, изменится термодинамический процесс.

**Например,** если равновесной смеси воды и льда при  $0^\circ\text{C}$  сообщать теплоту, то лёд начнет таять с поглощением этой теплоты. Если наоборот, отводить теплоту, то вода начнет замерзать с выделением теплоты.

### Введение в термодинамику необратимых процессов.

В равновесных процессах термодинамической системы, давление, температура во всех точках системы должны быть одинаковыми. Иначе эти процессы протекают необратимым образом.

При описании необратимых процессов используют гипотезу локального равновесия – предполагают, что внутри малого объема выполняется основное уравнение термодинамики равновесных процессов. Поэтому рассматривают удельные величины: внутренняя энергия малого объема  $u$ , энтропия  $s$ , удельный объем  $v = \frac{1}{\rho}$ , ( $\rho$  - локальная плотность в точке, задаваемой

радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ ), для которых выполняется  $Tds = du + Pdv$ .

Внутренняя энергия некоторого выделенного объема  $U = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) \cdot u(\vec{r}, t) dV$ ,

энтропия  $S = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) \cdot s(\vec{r}, t) dV$ .

Рассматривают производство энтропии для единичного объема адиабатически изолированной системы:  $\sigma_s = \frac{d}{dt}(\rho s)$ . Если состояние системы описывается несколькими параметрами, то

$$\sigma_s = \frac{d}{dt}(\rho s) = \sum_i \frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt}$$

где соответственно:

$X_i = \frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i}$  называются термодинамическими силами,

а  $j_i = \frac{da_i}{dt}$  - плотностями термодинамических потоков.

С учётом этих обозначений

$$\sigma_s = \sum_i X_i j_i.$$

В равновесном состоянии  $\sigma_s = \frac{d}{dt}(\rho s) = \sum_i \frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} = 0$ .

При небольших отклонениях от равновесного состояния между термодинамическими потоками и термодинамическими силами может быть установлена линейная зависимость

$$j_i = \sum_k L_{ik} X_k$$

что соответствует наиболее простому случаю термодинамики *линейных* необратимых процессов. Таким образом,

$$\sigma_s = \sum_i X_i j_i = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k .$$

Коэффициенты  $L_{ik}$  называются *кинетическими коэффициентами*. Соотношение взаимности Онсагера гласит, что эти коэффициенты симметричны относительно перестановки индексов

$$L_{ik} = L_{ki}$$

*Принцип минимума производства энтропии Пригожина*: стационарное состояние системы, в которой происходит необратимый процесс, характеризуется тем, что скорость возникновения энтропии имеет минимальное значение при данных внешних условиях, препятствующих достижению системой равновесного состояния.

Принцип минимума производства энтропии позволяет установить критерий отбора реализующихся в природе необратимых процессов от реально не наблюдавшихся и, таким образом, из возможных процессов реально существующие.

Исследование необратимых стационарных процессов показывает, что в системе могут существовать динамические структуры, которые также называемые диссипативными, образование которых приводит к уменьшению производства энтропии. Примерами являются ячейки Бенара или колебательные химические реакции Белоусова.

**Лекция 15.**

*Статистическое описание равновесных состояний. Функция распределения. Барометрическая формула. Распределение Больцмана. Принцип детального равновесия. Распределение Максвелла. Экспериментальная проверка распределения Максвелла. Фазовое пространство. Распределение Максвелла-Больцмана. Равновесные флуктуации. Статистическое обоснование второго начала термодинамики. Формула Больцмана для статистической энтропии.*

**Математическое отступление.**

Пусть при каком-то эксперименте было проведено  $N$  испытаний, в результате чего был получен ряд значений искомой величины  $x$ :  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N\}$ . Составим таблицу (или как говорят, распределение значений).

Значение $x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
Количество	$N_1$	$N_2$	...	$N_k$

При этом  $N = \sum_{i=1}^k N_i$ .

Определим частоту появления величины  $x_1$  как отношение  $\tilde{p}_i = \tilde{p}(x_i) = \frac{N_i}{N}$ .

Среднее значение величины  $\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{N_i}{N} = \sum_{i=1}^k p_i x_i$ .

В случае повторных экспериментов в тех же условиях можно ожидать, что новое значение средней величины будет несильно отличаться от прежнего значения. В предельном случае бесконечного числа испытаний величина

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

называется *вероятностью* появления значения  $x_i$ .

Предположим, что вероятность  $p_i$  уже известна для данного эксперимента. Тогда можно рассчитывать, что при проведении  $N$  испытаний величина  $x_i$  выпадет  $N_i = p_i N$  раз.

В некоторых случаях математический анализ условий проведения эксперимента даёт оценку для вероятности появления величины  $x$  в виде определённого интеграла

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

- это вероятность того, что числовое значение величины  $x$  (которая называется случайной величиной) находится в пределах  $x_1 < x < x_2$ .

Если интервал  $\Delta x = x_2 - x_1$  имеет малую величину, то  $p(x_1 < x < x_2) \approx f(x_0) \cdot \Delta x$ , где  $x_1 < x_0 < x_2$ .

Среднее значение величины в этом случае ищется в виде  $\langle x \rangle = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x) dx$ .

Функция  $f(x)$  называется плотностью распределения. Для неё выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Например, нормальное распределение (распределение Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$

Если задана какая-то функция от случайной величины  $\Phi(x)$ , то среднее значение этой функции

$$\langle \Phi \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x) \cdot f(x) dx$$

Если при измерениях получаются две случайные величины  $x$  и  $y$ , то вероятность задается с помощью двумерной функции распределения

$$p(x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy.$$

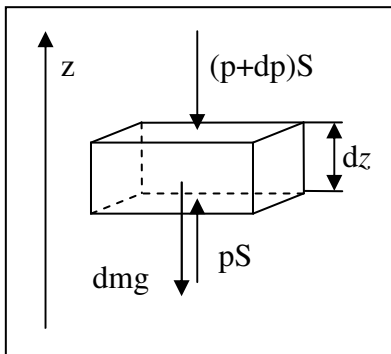
Если случайные величины  $x$  и  $y$  независимы друг от друга, то  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_1(y)$ .

Замечание. В случае если случайная величина задается функцией распределения, то вероятность того, что она примет конкретное значение равна нулю  $p(x = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$ .

### Распределение Больцмана.

Пусть идеальный газ находится во внешнем поле силы тяжести.

Рассмотрим равновесие малого объёма газа



$$pS - dm g - (p + dp)S = 0$$

$$-dpS = \rho S dz g$$

где плотность газа  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$

$$-dp = \frac{p\mu}{RT} dz g, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz, \quad p = C e^{-\frac{\mu g z}{RT}}$$

Задавая давление при  $z=0$   $p=p_0$ , получаем  $p = p_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}$ .

Делим числитель и знаменатель на число Авогадро:  $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$

масса молекулы,  $k = \frac{R}{N_A}$  - постоянная Больцмана

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$$

это *барометрическая формула* для изотермического столба газа в однородном поле силы тяжести.

Замечание. Хотя температура атмосферы и уменьшается с высотой, эта формула достаточно хорошо согласуется с экспериментом.

С учётом основного уравнения МКТ  $p=nkT$  получаем  $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$ , где  $n_0$  – концентрация молекул при  $z=0$ . Если учесть, что  $W_{II} = m_0 g z$  – потенциальная энергия молекул в поле сил тяжести, то получаем распределение Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{W_{II}}{kT}}$$

Замечание. Отсюда следует, что при  $T \rightarrow 0$  молекулы собираются вблизи  $z=0$ .

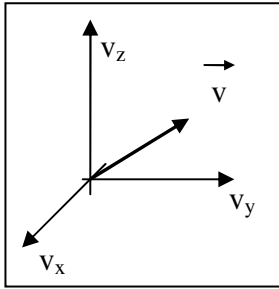
Найдем среднее значение потенциальной энергии молекул по высоте  $\langle W_{II} \rangle = \frac{\sum W_i}{N}$ .

$$\begin{aligned} W_{\Sigma} &= \int_0^{\infty} W \cdot n \cdot dz = \int_0^{\infty} m_0 g \cdot z \cdot n_0 e^{-\frac{m_0 g \cdot z}{kT}} dz = \frac{n_0 (kT)^2}{m_0 g} \int_0^{\infty} \frac{m_0 g \cdot z}{kT} \cdot e^{-\frac{m_0 g \cdot z}{kT}} d\left(\frac{m_0 g z}{kT}\right) = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{m_0 g z}{kT} \\ z = \frac{kT}{m_0 g} t \end{array} \right\} = \\ &= \frac{n_0 (kT)^2}{m_0 g} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt = \frac{n_0 (kT)^2}{m_0 g} \left[ -t \cdot e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt \right] = \frac{n_0 (kT)^2}{m_0 g} \end{aligned}$$

$$N = \int_0^\infty n \cdot dz = \int_0^\infty n_0 e^{-\frac{m_0 g \cdot z}{kT}} dz = \frac{n_0 kT}{m_0 g} \int_0^\infty e^{-\frac{m_0 g \cdot z}{kT}} d\left(\frac{m_0 g z}{kT}\right) = \begin{cases} t = \frac{m_0 g z}{kT} \\ z = \frac{kT}{m_0 g} t \end{cases} = \frac{n_0 kT}{m_0 g} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{n_0 kT}{m_0 g}$$

$$\langle W_{II} \rangle = \frac{\sum_i W}{N} = \frac{\left( \frac{n_0 (kT)^2}{m_0 g} \right)}{\left( \frac{n_0 kT}{m_0 g} \right)} = \frac{n_0 (kT)^2}{m_0 g} \frac{m_0 g}{n_0 kT} = kT.$$

### Распределение Максвелла.



Скорость любой молекулы  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  можно задать с помощью координат в трехмерном пространстве скоростей так, чтобы каждому вектору соответствовала одна точка.

Вероятность того, что координаты скорости молекулы будут находиться в определенных интервалах должна определяться через плотность распределения

$$p(v_{1x} < v_x < v_{2x}, v_{1y} < v_y < v_{2y}, v_{1z} < v_z < v_{2z}) = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} \int_{v_{1y}}^{v_{2y}} \int_{v_{1z}}^{v_{2z}} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Должны быть выполнены условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1.$$

Так значения вероятностей  $p(v_{1x} < v_x < v_{2x})$ ,  $p(v_{1y} < v_y < v_{2y})$ ,  $p(v_{1z} < v_z < v_{2z})$  не зависят друг от друга, то плотность распределения должна иметь вид

$$f(v_x, v_y, v_z) = \phi(v_x) \cdot \phi(v_y) \cdot \phi(v_z).$$

$$\text{где } p(v_{1x} < v_x < v_{2x}) = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} \phi(v_x) dv_x, \quad p(v_{1y} < v_y < v_{2y}) = \int_{v_{1y}}^{v_{2y}} \phi(v_y) dv_y,$$

$$p(v_{1z} < v_z < v_{2z}) = \int_{v_{1z}}^{v_{2z}} \phi(v_z) dv_z.$$

Должны быть также выполнены условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v_x) dv_x = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v_y) dv_y = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v_z) dv_z = 1.$$

Во всех интегралах считается, что проекция скорости принимается любые значения, вплоть до бесконечных. Очевидно, что это не так. Но если подынтегральные функции быстро убывают с ростом значений проекций скорости, то эта добавка будет вносить малую погрешность. Таким образом, к искомой функции предъявляется требование «быстрого убывания на бесконечности».

Для поиска вида функции

$$f(v_x, v_y, v_z) = \phi(v_x) \cdot \phi(v_y) \cdot \phi(v_z)$$

мы применим принцип *детального равновесия*: в равновесной системе вероятность протекания прямого и обратного процесса одинаковы. Т.е. если формально обратить направление течения времени, то это не повлияет на протекание процессов в системе. Например, если в системе молекула движется в каком-то направлении, то при обращении времени она должна будет двигаться в обратную сторону. Но так как обращение не должно изменить состояния системы, то должна быть такая же молекула, которая до обращения времени уже двигалась в обратном на-

правлении, следовательно, после обращения времени она будет двигаться в прямом направлении.

Это означает, что искомая функция может зависеть только от величины скорости молекул, т.е. от  $v = \sqrt{v^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

Но в пространстве все направления равноправны. Если повернуть систему координат, то изменятся координаты вектора скорости, но не изменится длина вектора. Потребуем, чтобы функция  $f$  не меняла своё значение при повороте системы координат.

Таким образом, при  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \text{const}$  должно быть

$$f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) = \text{const}$$

соответственно

$$\text{grad}f = \left( \frac{\partial \varphi(v_x)}{\partial v_x} \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z); \varphi(v_x) \cdot \frac{\partial \varphi(v_y)}{\partial v_y} \cdot \varphi(v_z); \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \frac{\partial \varphi(v_z)}{\partial v_z} \right).$$

Рассмотрим вектор, параллельный градиенту (учтем, что  $f(v_x, v_y, v_z) \neq 0$ ):

$$\frac{\text{grad}f}{f} = \left( \frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{\partial \varphi(v_x)}{\partial v_x}; \frac{1}{\varphi(v_y)} \frac{\partial \varphi(v_y)}{\partial v_y}; \frac{1}{\varphi(v_z)} \frac{\partial \varphi(v_z)}{\partial v_z} \right).$$

Если считать, что  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  является функцией координат, то  $\text{grad}(v^2) = (2v_x, 2v_y, 2v_z)$ .

Так как в трехмерном пространстве скоростей поверхности уровней функций  $v^2$  и  $f$  являются концентрическими сферами с центром в начале координат, то их векторы-градиенты параллельны в каждой точке, следовательно, пропорциональны друг другу:

$$\frac{\text{grad}f}{f} = \lambda \cdot \text{grad}(v^2).$$

В итоге из покоординатных равенств векторов получили систему уравнений

$$\frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{\partial \varphi(v_x)}{\partial v_x} = \lambda 2v_x, \quad \frac{1}{\varphi(v_y)} \frac{\partial \varphi(v_y)}{\partial v_y} = \lambda 2v_y, \quad \frac{1}{\varphi(v_z)} \frac{\partial \varphi(v_z)}{\partial v_z} = \lambda 2v_z.$$

После интегрирования

$$\varphi(v_x) = C_1 e^{\lambda v_x^2}, \quad \varphi(v_y) = C_2 e^{\lambda v_y^2}, \quad \varphi(v_z) = C_3 e^{\lambda v_z^2}.$$

Используем условие нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{\lambda v_x^2} dv_x = 1$ . Этот интеграл несобственный. Он сходится

только в случае, если число  $\lambda$  - отрицательное  $\lambda = -|\lambda|$ . Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda|v_x^2} dv_x$  является «табличным»  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda|v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}$ , поэтому  $C_1 \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} = 1$  или  $C_1 = \sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}}$ .

На каждую степень свободы приходится энергия  $\frac{kT}{2}$ . Для идеального газа средняя кинетическая энергия одномерного движения

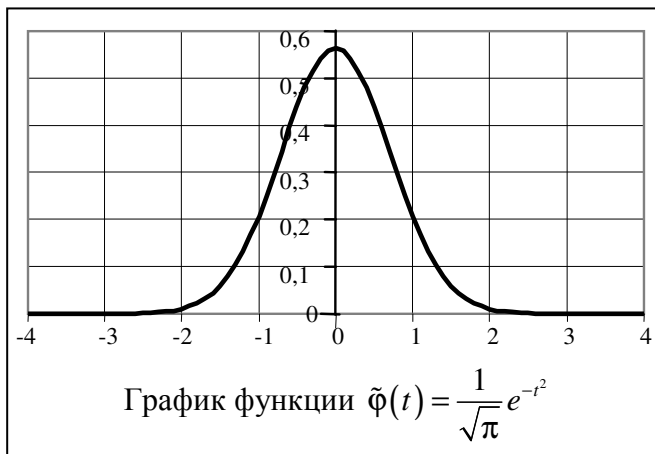
$$\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2}.$$

С другой стороны

$$\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} C_1 \frac{mv_x^2}{2} e^{-|\lambda|v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{|\lambda|}{\pi}} \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-|\lambda|v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| v_x^2 e^{-|\lambda|v_x^2} d(v_x \sqrt{|\lambda|}) =$$



$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{|\lambda|} \frac{m}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{m}{4|\lambda|} = \frac{kT}{2}.$$



Откуда  $|\lambda| = \frac{m}{2kT}$ ,  $C_1 = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$ . Поэтому

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}.$$

Аналогично  $\varphi(v_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}},$

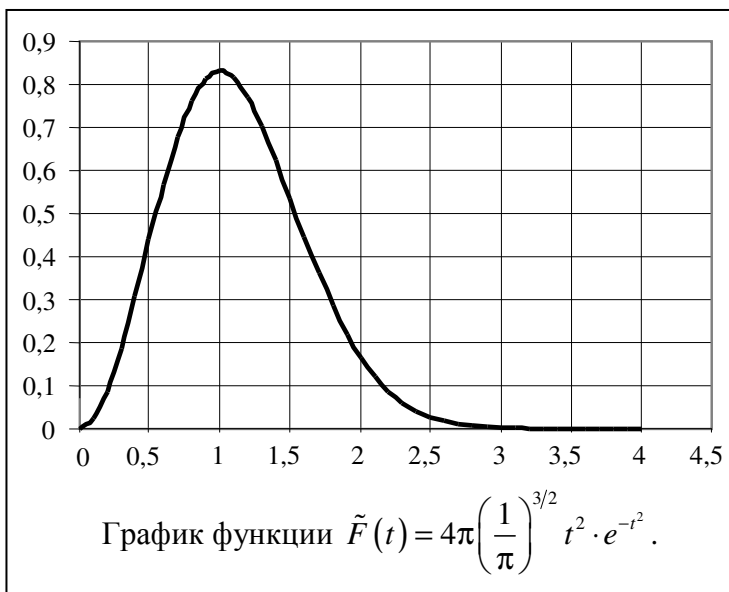
$$\varphi(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

В итоге

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{W_K}{kT}}.$$

### Распределение молекул по абсолютному значению скорости.

Вероятность того, что величина скорости молекулы находится в каких-то пределах



$$p(v_1 < v < v_2) = \iiint_{V_v} f(v) \cdot dV_v$$

не зависит от направления вектора скорости. Поэтому в пространстве скоростей неравенство  $v_1 < v < v_2$  выделяет шаровой слой. В этом случае объем тонкого шарового слоя имеет вид

$$dV_v = 4\pi v^2 dv, \text{ поэтому}$$

$$p(v_1 < v < v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot 4\pi v^2 dv.$$

Подынтегральная функция

$$F(v) = 4\pi v^2 \cdot f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

называется функцией распределения мо-

лекул по абсолютным значениям скоростей.

Максимум этой функции соответствует наиболее вероятной скорости.

$$F'(v) = \left( 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right)' = 0$$

$$2v \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} - 2 \frac{mv}{2kT} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 2v \left( 1 - \frac{m}{2kT} v^2 \right) \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0$$

Приемлемое решение называется *наиболее вероятной скоростью молекулы*

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

*Среднее значение скорости*

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= \int_0^\infty v \cdot 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 2\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d(v^2) = \\
&= 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty \frac{mv^2}{2kT} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\left(\frac{mv^2}{2kT}\right) = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \int_0^\infty t \cdot e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} dp = e^{-t} dt, p = -e^{-t} \\ q = t, dq = dt \end{array} \right\} = \\
&= 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \left( -te^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt \right) = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \left( -e^{-t} \Big|_0^\infty \right) = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \\
\langle v \rangle &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.
\end{aligned}$$

Средний квадрат скорости

$$\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle &= \int_0^\infty v^2 \cdot 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty \left( \sqrt{\frac{m}{2kT}} v \right)^4 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\left( \sqrt{\frac{m}{2kT}} v \right) = \\
&= \frac{8kT}{m\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^4 \cdot e^{-t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} dp = t \cdot e^{-t^2} dt, p = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \\ q = t^3, dq = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \frac{8kT}{m\sqrt{\pi}} \left( \cancel{-\frac{1}{2} t^3 e^{-t^2} \Big|_0^\infty} + \frac{3}{2} \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t^2} dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} dp = t \cdot e^{-t^2} dt, p = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \\ q = t, dq = dt \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \frac{8kT}{m\sqrt{\pi}} \left( \cancel{-\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_0^\infty} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \right) = \frac{3}{4} \frac{8kT}{m\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3kT}{m}.
\end{aligned}$$

Поэтому средняя квадратичная скорость  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  (совпадает с уже известным выражением).

Распределение молекул по кинетической энергии  $p(W_{K1} < W_K < W_{K2}) = \int_{W_{K1}}^{W_{K2}} f(W_K) dW_K$  можно

получить, используя формулу распределения по скоростям, если учесть, что  $W_K = \frac{mv^2}{2}$  и

$v = \sqrt{\frac{2W_K}{m}}$ , то

$$\begin{aligned}
p(v_1 < v < v_2) &= \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{2W_K}{m} \cdot e^{-\frac{W_K}{kT}} d\left( \sqrt{\frac{2W_K}{m}} \right) = \\
&= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{2W_K}{m} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{mW_K}} e^{-\frac{W_K}{kT}} dW_K = \int_{v_1}^{v_2} \frac{2}{kT} \sqrt{\frac{1}{\pi kT}} \sqrt{W_K} e^{-\frac{W_K}{kT}} dW_K
\end{aligned}$$

Поэтому

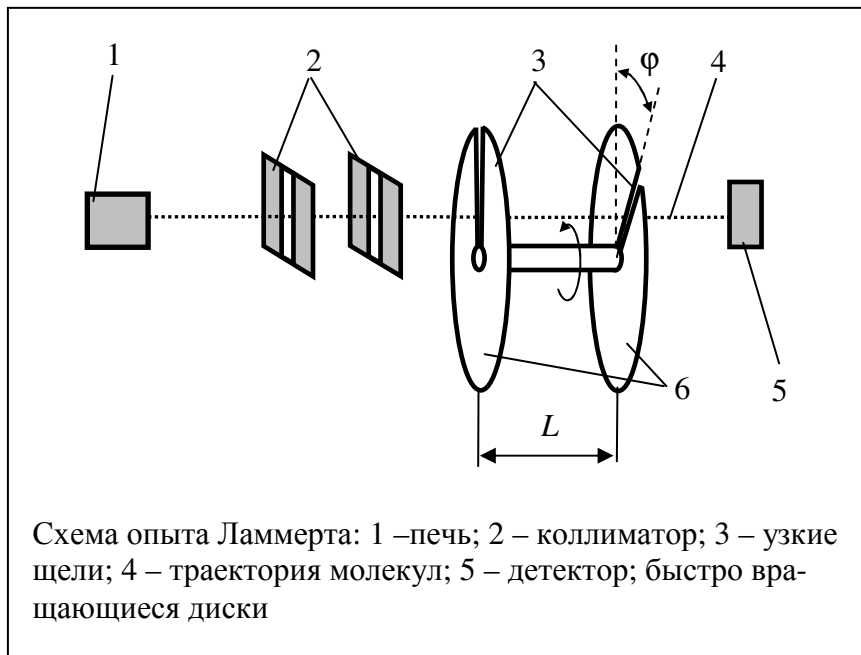
$$F_W(W_K) = \frac{2}{kT} \sqrt{\frac{1}{\pi kT}} \sqrt{W_K} e^{-\frac{W_K}{kT}}.$$

Откуда наиболее вероятная кинетическая энергия

$$\begin{aligned}
F'_W(W_K) &= \frac{2}{kT} \sqrt{\frac{1}{\pi kT}} \left( \frac{1}{2\sqrt{W_K}} e^{-\frac{W_K}{kT}} - \frac{1}{kT} \sqrt{W_K} e^{-\frac{W_K}{kT}} \right) = \frac{2}{kT} \sqrt{\frac{1}{\pi kT}} \left( \frac{1}{2\sqrt{W_K}} - \frac{1}{kT} \sqrt{W_K} \right) e^{-\frac{W_K}{kT}} = 0 \\
W_{K\text{вер}} &= \frac{kT}{2}.
\end{aligned}$$

### Экспериментальная проверка распределения Максвелла

Первым экспериментальным подтверждением существования распределения молекул по скоростям можно считать результаты опыта Штерна, описанного выше. Но точность этого опыта бы-



ла недостаточной для установления конкретного вида распределения.

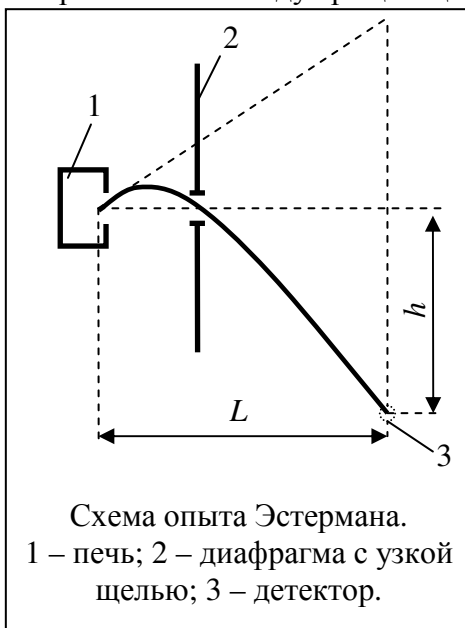
Прямые измерения скорости атомов ртути в пучке были выполнены в 1929 году Ламмертом.

Атомы легкоплавкого металла, разогретого до высокой температуры, вылетали из печи 1, проходили коллиматор (направляющие щели) 2 и по траектории 4 попадали на соосные быстро вращающиеся диски 6, в которых сделаны щели 3, повернутые на угол  $\varphi$ , а затем регистрировались детектором 5. (В дисках было сделано несколько щелей для увеличения интенсивности). Вся система находилась в вакуумированной камере.

Атомы могли пролететь щели в дисках, если величина их скорости попадала в определённый интервал  $[v_0 - \Delta v_1, v_0 + \Delta v_2]$ , где скорость  $v_0$ , определялась из равенства

$$\frac{L}{v_0} = \frac{\varphi}{\omega}$$

$L$  – расстояние между вращающимися дисками, а величины  $\Delta v_1$ ,  $\Delta v_2$  определялись размерами щелей, геометрией пучка и т.д.



Изменяя угловую скорость вращения дисков  $\omega$  можно было отбирать из пучка молекулы, имеющие определенную скорость  $v$ , и по регистрируемой детектором интенсивности судить об относительном содержании их в пучке.

Таким способом удалось экспериментально проверить статистический закон распределения молекул по скоростям. Позже, когда при создании ядерного оружия возникла необходимость выделения нейтронов с определенной кинетической энергией, подобная схема была применена в устройстве, названном нейтронным монохроматором, позволяющим получать энергетические спектры нейтронов.

Несколько иначе был организован эксперимент по определению распределения по скоростям для атомов цезия, выполненный в 1947 году немецким физиком - экспериментатором Иммануэлем Эстерманом (1900 - 1973) совместно с О. Симпсоном и Штерном. Пучок атомов цезия вылетал че-

рез отверстие в печи 1 с некоторой скоростью  $v$  и под действием силы тяжести начинал двигаться по параболе. Атомы, прошедшие через узкую щель в диафрагме 2, улавливались детектором 3, который можно было располагать на различных высотах  $h$ . Величина отклонения  $h$  пучка в гравитационном поле Земли зависела от скорости атома. В этих опытах отклонение  $h$  составляло величину порядка нескольких долей миллиметра при расстоянии  $L$  от печи до детектора равном 2 метрам. Перемещая датчик и регистрируя количество атомов цезия, попадающих в детектор за единицу времени, можно было построить зависимость интенсивности пучка от величины  $h$ . Последующий пересчет, с учетом известной зависимости высоты  $h$  от скорости атома  $v$ , давал распределение по скоростям атомов цезия.

Все проведенные эксперименты подтвердили справедливость полученного Максвеллом распределения по скоростям для атомных и молекулярных пучков.

### Распределение Максвелла-Больцмана.

Если ввести 6-мерное пространство, координатами молекулы в котором являются величины  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ , то функция распределения в таком пространстве будет зависеть от этих шести переменных:  $n_f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ . Считая пространственные переменные  $(x, y, z)$  и компоненты скорости  $(v_x, v_y, v_z)$  статистически независимыми друг от друга, можно записать:

$$n_f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = n(x, y, z) \cdot f(v_x, v_y, v_z)$$

Откуда получаем распределение Максвелла-Больцмана

$$n_f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{W_{II} + W_K}{kT}}.$$

При получении закона распределения Максвелла-Больцмана предполагалось, что температура газа не зависит от координаты точки. В частности, температура газа на всех высотах над поверхностью Земли при термодинамическом равновесии должна быть одинакова. С этим утверждением связан парадокс, всесторонне рассмотренный Максвеллом. Дело в том, что при движении вверх молекулы газа должны затрачивать свою кинетическую энергию на преодоление силы тяжести, и поэтому их средняя кинетическая энергия (а, следовательно, и температура) должна уменьшаться. Но этого не происходит вследствие того, что при этом не все молекулы, из-за недостатка их кинетической энергии, смогут преодолеть силу тяжести. Молекулы, имеющие недостаточную кинетическую энергию, не могут подняться высоко, что приведет, в соответствии с распределением Больцмана, к уменьшению их концентрации с высотой. Поэтому температура газа останется неизменной.

Функция распределения в случае, когда кинетическая энергия зависит только от скорости  $\vec{v}$ , а потенциальная - только от радиус-вектора  $\vec{r}$  частицы, имеет вид:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{\Theta} \exp \left( -\frac{W_{II}(\vec{r}) + W_K(\vec{v})}{kT} \right)$$

$$\text{где } \Theta = \int_{V_v} \int_V \exp \left( -\frac{W_{II}(\vec{r}) + W_K(\vec{v})}{kT} \right) dV dV_v.$$

Здесь:  $V$  - объем, занимаемый системой в координатном пространстве,  $V_v$  - соответствующий объем в пространстве скоростей. Формула позволяет описывать равновесное распределение для достаточно произвольной термодинамической системы.

Полученные выше функции распределения описывают случай, когда полная энергия частицы  $W$  принимает непрерывный ряд значений. При статистическом описании системы, частицы которой могут принимать только некоторый дискретный набор значений энергии  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_m$ , необходимо использовать вместо функции распределения вероятность  $P(W_i)$  нахождения частицы в состоянии со значением энергии  $W_i$ ; В случае дискретных состояний можно записать следующее выражение для этой вероятности  $P(W_i)$ :

$$P(W_i) = \frac{1}{\Theta} \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right)$$

где  $\Theta = \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right)$ . Формула называется распределением Больцмана для дискретных состояний. Если полное число частиц в системе равно  $N$ , то число частиц  $N_i$  в состоянии с энергией  $W_i$  определяется по формуле:  $N_i = P(W_i) N$ .

### Равновесные флуктуации.

*Флуктуации* – это случайные отклонения какого-либо параметра термодинамической системы от его среднего значения. Флуктуации возникают из-за хаотического теплового движения частиц термодинамической системы. В любой, даже равновесной системе существуют случайные отклонения от средних значений параметров, которые можно экспериментально наблюдать при долговременных измерениях. Например, флуктуации давления проявляются в броуновском движении малых твёрдых частичек, взвешенных в жидкости.

Если среднее значение некоторого параметра  $x$  равно  $\langle x \rangle$ , то флуктуация этого параметра определяется как отклонение значения от среднего

$$\Delta x = x - \langle x \rangle$$

Очевидно, что среднее значение флуктуации равно нулю  $\langle \Delta x \rangle = \langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$ .

Однако средний квадрат уже, вообще говоря, не равен нулю

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

Аналогично, для некоторой функции параметра  $\varphi(x)$

$$\langle (\Delta \varphi(x))^2 \rangle = \langle (\varphi(x))^2 \rangle - \langle \varphi(x) \rangle^2.$$

Величина  $\sqrt{\langle (\Delta \varphi(x))^2 \rangle}$  называется *средней квадратичной флуктуацией*, а  $\frac{\sqrt{\langle (\Delta \varphi(x))^2 \rangle}}{\langle \varphi(x) \rangle}$  – *средней квадратичной относительной флуктуацией*.

Флуктуациям в равновесном состоянии подвержены и внутренняя энергия, и давление, и температура и т.д. Для всех термодинамических параметров их относительные флуктуации обратно пропорциональны корню из числа частиц в системе:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}}{\langle x \rangle} = \frac{\beta}{\sqrt{N}}.$$

Коэффициент можно принимать за единицу  $\beta=1$  при оценочных расчетах.

**Пример.** Оценить относительные равновесные флуктуации температуры газового термометра, содержащего один моль газа.

**Решение.** Для одного моля  $N = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Тогда  $\frac{\sqrt{\langle (\Delta T)^2 \rangle}}{\langle T \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \approx 1,29 \cdot 10^{-12}$ . Очевидно, это очень малая величина.

### Статистическое обоснование второго начала термодинамики.

Для равновесных систем вероятность возникновения флуктуации обратно пропорциональна её величине – чем больше величина отклонения, тем меньше вероятность её возникновения. Например, вероятность того, что все молекулы газа соберутся в одной части сосуда очень мала, т.е. процесс самопроизвольного перехода в неравновесное состояние маловероятен,

что согласуется со вторым началом термодинамики. Всякий самопроизвольный необратимый процесс переводящий систему из неравновесного состояния в равновесное, с гораздо большей вероятностью протекает в природе, чем обратный ему процесс. Необратимыми являются те процессы, вероятность протекания которых в прямом направлении выше, чем в обратном. Это приводит к возникновению в природе преимущественного направления протекания термодинамических процессов. Термодинамической величиной, характеризующей направление протекания процесса, является энтропия.

Пусть в сосуде, объем которого  $V_0$  находится одна молекула. Тогда вероятность того, что она будет находиться в части сосуда, объём которой  $V$ , равна  $p(V) = \frac{V}{V_0}$ . Если молекул две, то

$p(V) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$ , а если их число равно  $N$ , то  $p(V) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^N$ . Поэтому отношение вероятностей для разных объёмов равно  $\frac{p(V_2)}{p(V_1)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$ .

С другой стороны, рассмотрим изотермическое расширение идеального газа от объёма  $V_1$  до объёма  $V_2$ . В этом случае  $dU=0$ , поэтому  $\delta Q = \delta A = \nu RT \cdot dV$ . Следовательно,

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \nu R \frac{dV}{V} = \nu R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Однако,  $\nu R = \frac{N}{N_A} R = Nk$ , поэтому  $S_2 - S_1 = k \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^N = k \ln \left( \frac{p(V_2)}{p(V_1)} \right)$ .

Из этой формулы следует, что энтропия состояния пропорциональна вероятности того, что система придет в это состояние.

*Статистическим весом*  $G$  макроскопического состояния называется величина, численно равная количеству равновесных микросостояний, с помощью которых может быть реализовано рассматриваемое макросостояние. Статистический вес пропорционален вероятности  $G \sim p$ . Если система состоит из  $N$  частиц, каждая из которых может находиться в одном из  $K$  дискретных состояниях, то статистический вес системы равен  $G = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_K!}$ , а соответствующая веро-

ятность  $p = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_K!} K^{-N}$ , где  $N_i$  – число частиц в состоянии с номером  $i$ , и  $\sum_{i=1}^K N_i = N$ .

Формула Больцмана для статистической энтропии системы:

$$S = k \ln G.$$

*Замечание.* Для статистической энтропии также выполняется закон аддитивности: если систему разбить на две не взаимодействующие между собой части, то  $G = G_1 \cdot G_2$  и

$$S = k \ln G = k \ln G_1 + k \ln G_2 = S_1 + S_2.$$

*Замечание.* С законом возрастания энтропии связана «тепловая смерть» Вселенной, т.е. состояние с максимальной энтропией и максимальным статистическим весом. Но в такой системе должны происходить флуктуации. Сегодняшнее состояние вселенной является такой флуктуацией.

## Лекция 16.

*Термодинамические потоки. Явления переноса в газах: диффузия, теплопроводность и вязкость. Эффузия в разреженном газе. Физический вакуум. Броуновское движение. Производство энтропии в необратимых процессах.*

**Явления переноса**

Термодинамические потоки, связанные с переносом вещества, энергии или импульса из одной части среды в другую возникают в случае, если значения тех или иных физических параметров отличаются в объеме среды, т.е. когда система находится в неравновесном состоянии. В результате система стремится к равновесию.

При кинетическом описании потоков исследуют зависимости от времени статистических характеристик или функций распределения, описывающих движение исследуемых частиц. Полученные функции используются для нахождения локальных значений параметров среды и термодинамических потоков.

При гидродинамическом описании рассматривают поток физической величины  $F$ , численно равный количеству физической величины, переносимой за 1 сек через выбранную поверхность

$$J_F = \iint_S (\vec{j}_F, d\vec{S}),$$

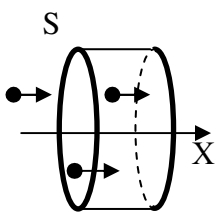
где  $\vec{j}_F$  - вектор плотности термодинамического потока.

При описании термодинамических потоков предполагается, что в среде не происходит макроскопического перемешивания и перенос осуществляется только благодаря хаотическому движению микрочастиц среды. Таким образом, физические параметры переносятся микрочастицами.

Хоть каждая микрочастица и движется хаотически, но для неё рассматривается некоторый малый объём, в пределах которого физические величины в данный момент времени считаются постоянными. Параметры каждой частицы могут измениться при столкновениях, поэтому если  $\lambda$  длина свободного пробега молекул, то за такой малый объём следует принять  $\lambda^3$ . Соответственно, при этом все физические величины рассматриваются усредненными по времени движения частицы в пределах этого объема, а все протекающие процессы характеризуются временем, большим, чем время усреднения.

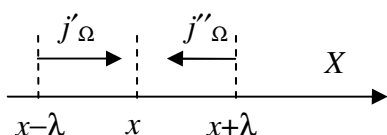
**Поток количества частиц.**

Пусть частицы движутся прямолинейно вдоль ос  $X$  со скоростью  $v_x$ . Все частицы, которые пройдут через перпендикулярную площадку  $S_{\perp}$  за время  $\Delta t$ , окажутся в фигуре, объём которой  $V = S v_x \Delta t$ . Если концентрация частиц равна  $n$ , то количество частиц  $N = nV = nS v_x \Delta t$ .



Потому поток частиц вдоль данного направления  $X$   $j_x = \frac{N}{S_{\perp} \Delta t} = n v_x$ .

Так как микрочастицы совершают хаотическое тепловое движение, при этом вероятность движения частицы в любом направлении одинаковая. Но вдоль каждой из  $3x$  координатных осей возможны движения в двух направлениях, поэтому для одного направления  $v_x = \frac{1}{6} \langle v \rangle$ , где средняя скорость теплового движения. Тогда плотность потока числа частиц вдоль любого  $i$ -го направления  $j_i = \frac{1}{6} \langle v \rangle n$ .

**Поток физической величины.**

Пусть физическая величина, переносимая частицами, описывается некоторой функцией  $\Omega$ , непрерывно-дифференцируемой во всём пространстве. Так как частицы хаотически движутся в разных направлениях, то

поток физической величины определяется векторной суммой потоков этой величины в разных направлениях. Рассмотрим поток величины  $\Omega$  вдоль некоторой оси X.

Плотность потока некоторой величины в сечении с координатой X определяется суммой двух встречных потоков  $j_{\Omega} = j'_{\Omega} - j''_{\Omega}$ . Так как величина  $\Omega$  переносится молекулами, то

$$j'_{\Omega} = j \cdot \Omega(x - \lambda) \text{ и } j''_{\Omega} = j \cdot \Omega(x + \lambda)$$

но  $j = \frac{1}{6} \langle v \rangle n$ ,  $\Omega(x \pm \lambda) \approx \Omega(x) \pm \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_x \lambda$ , откуда

$$j_{\Omega} = j \cdot [\Omega(x - \lambda) - \Omega(x + \lambda)] = \frac{1}{6} \langle v \rangle n \cdot \left[ \Omega(x) - \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_x \lambda - \Omega(x) - \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_x \lambda \right] = -\frac{1}{3} \langle v \rangle n \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_x \lambda$$

$$j_{\Omega} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle n \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_x \lambda.$$

Соответственно, поток величины  $\Omega$  через площадку S перпендикулярную оси

$$J_{\Omega} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle n \cdot S \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_x \lambda$$

Отсюда следует, что поток направлен в сторону уменьшения величины  $\Omega$ .

1) *Диффузия* – процесс самопроизвольного выравнивания концентраций веществ в смесях.

Например, для смеси двух газов суммарное давление постоянно – это условие отсутствия перемешивания. По закону Дальтона  $p = p_1 + p_2 = n_1 kT + n_2 kT = \text{const}$ , поэтому для концентрации  $n = n_1 + n_2 = \text{const}$ . Введем физическую величину – относительную концентрацию молекул одного из газов  $\Omega_1 = \frac{n_1}{n}$ , тогда для потока концентрации

$$j_{n_1} = -\frac{1}{3} \langle v_1 \rangle n \cdot \lambda_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{n_1}{n} \right) = -\frac{1}{3} \langle v_1 \rangle \lambda_1 \frac{dn_1}{dx}$$

Или  $j_{n_1} = -D_1 \frac{dn_1}{dx}$ ,  $J_{n_1} = -D_1 S \frac{dn_1}{dx}$  где  $D_1 = \frac{1}{3} \langle v_1 \rangle \lambda_1$  – коэффициент диффузии.

Если  $m_1$  – масса молекулы, то плотность газа  $\rho_1 = m_1 n_1$ , поэтому для потока плотности получается уравнение

$$J_{\rho_1} = -D_1 S \frac{d\rho_1}{dx}$$

которое называется первым законом Фика (1855).

2) *Теплопроводность* – выравнивание температуры в различных точках среды. Молекулы газа, находясь в постоянном хаотическом движении, при упругих соударениях обмениваются кинетической энергией поступательного движения, что приводит к выравниванию температуры.

Введем физическую величину  $\Omega = \frac{3}{2} kT$  – энергия теплового движения центра масс молекулы,

тогда получится уравнение теплопроводности

$$j_Q = -\frac{1}{3} \langle v \rangle n \frac{3}{2} k \lambda \frac{dT}{dx}$$

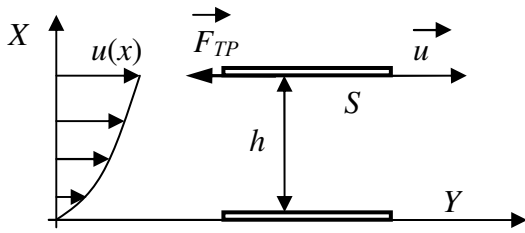
но  $n \frac{3}{2} k = \frac{N}{V} \frac{3}{2} k = \frac{\nu N_A}{V} \frac{3}{2} k = \frac{\nu}{V} \frac{3}{2} R = \frac{m}{V} \frac{\nu C_v}{m} = \rho \cdot C_{\nu d - \nu}$ , поэтому  $j_Q = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \rho \cdot C_{\nu d - \nu} \lambda \frac{dT}{dx}$

Если обозначить  $\frac{1}{3} \langle v \rangle \rho \cdot C_{\nu d - \nu} \lambda = \alpha$  – коэффициент теплопроводности, то плотность потока

теплоты  $j_Q = -\alpha \frac{dT}{dx}$ , поток теплоты  $J_Q = -\alpha S \frac{dT}{dx}$ .

3) *Вязкость (внутреннее трение)* приводит к появлению силы сопротивления при движении тела в жидкости или газе. Вызвана переносом импульса молекулами (при их хаотическом дви-





жении) между слоями газа (жидкости) скорость которых неодинаковая. В частности, это проявляется в следующем опыте. Рассмотрим две одинаковые тонкие достаточно длинные пластинки, расположенные в газе параллельно друг другу на расстоянии  $h$ . Пусть одна из них движется относительно другой с небольшой по величине скоростью  $u$ , тогда на каждую из пластин будет действовать сила трения, величина которой

$$F_{TP} = \eta S \frac{u}{h}.$$

Параметр  $\eta$  называется *коэффициентом вязкости*.

Для вывода уравнения вязкости, рассмотрим поток газа вдоль горизонтальной оси  $Y$ , при этом скорость потока меняется в поперечном направлении  $X$ . Молекулы в газе движутся хаотически, но у каждой из них можно выделить некоторую среднюю скорость, равную скорости газа  $u$ .

В качестве физической величины  $\Omega$  рассмотрим импульс молекул газа  $\Omega = mu(x)$ . Тогда плот-

ность потока импульса  $j_p = -\frac{1}{3}\langle v \rangle nm \lambda \frac{du}{dx} = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \rho \lambda \frac{du}{dx}$  поток импульса  $J_p = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \rho \lambda S \frac{du}{dx}$ .

С учетом равенства  $F_{TP} = |J_p|$ , заменяя при небольших  $h > \lambda$   $\frac{du}{dx} \approx \frac{u}{h}$ , получаем  $\eta = \frac{1}{3}\langle v \rangle \rho \lambda$ .

Тогда  $j_p = -\eta \frac{du}{dx}$ ,  $J_p = -\eta S \frac{du}{dx}$ .

Замечание. Между коэффициентами переноса существует зависимость

$$\alpha = \eta \cdot C_{уд\_v} = D \cdot \rho \cdot C_{уд\_v}.$$

Явления диффузии, теплопроводности, вязкого трения обусловлены взаимодействием молекул в газе и проявляются в случае, когда длина свободного пробега молекул много меньше характерных размеров протекающих процессов.

При увеличении длины свободного пробега молекул все более значимыми становятся явления, связанные со свойствами самих молекул, так процессы столкновения играют меньшую роль.

Состояние газа, при котором длина свободного пробега молекул  $\lambda$  сравнима с размерами сосуда  $L$ , в котором находится газ, называется *вакуумом*. Различают низкий вакуум  $\lambda \ll L$ , средний  $\lambda \sim L$  и высокий (глубокий) вакуум  $\lambda \gg L$ .

*Замечание.* В определении вакуума важен размер сосуда, например, для воздуха в обычных условиях  $\lambda \approx 10^{-6}$  м, поэтому в любой микроцарапине или микротрещине газ будет находиться в состоянии среднего вакуума.

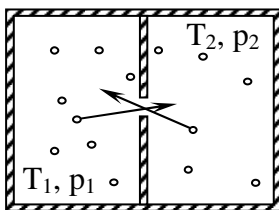
*Эффузия* – это медленное истечение газа из малого отверстия. Различают эффузию двух видов. В первом случае размер отверстия много меньше длины свободного пробега молекул – эффузия в разреженном газе.

Во втором случае давление газа в сосуде настолько велико, что истечение газа достаточно точно описывается уравнениями гидродинамики.

### Эффузия в разреженном газе.

Так как длина свободного пробега много больше размера отверстия, то процессы столкновения молекул играют незначительную роль, поэтому такое истечение становится молекулярным.

Рассмотрим сосуд с газом, в котором есть перегородка с отверстием, меньшим по размеру, чем длина свободного пробега молекул в сосуде. Пусть левая часть находится при постоянной температуре  $T_1$ , а правая при  $T_2$ .



Суммарная плотность потока молекул через отверстие

$$j = j_1 - j_2 = \frac{1}{6} \langle v_1 \rangle n_1 - \frac{1}{6} \langle v_2 \rangle n_2 = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8kT_1}{\pi m}} \cdot \frac{p_1}{kT_1} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8kT_2}{\pi m}} \cdot \frac{p_2}{kT_2} = \sqrt{\frac{2}{9\pi mk}} \cdot \left( \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} \right)$$

Предположим, что вначале давления газа с обеих сторон были одинаковые, но температуры разные, тогда поток молекул будет направлен в сторону части с большей температурой - *тепловая эффузия*.

При равновесии  $j = \sqrt{\frac{2}{9\pi mk}} \cdot \left( \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} \right) = 0$ , поэтому  $\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$ .

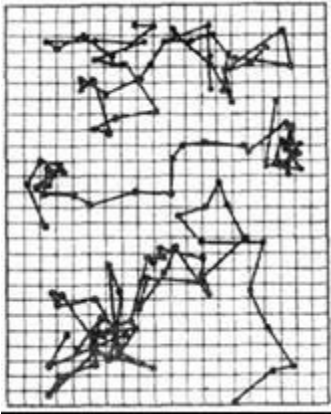
Как видно, условие равновесия для разреженного газа не является равенством давлений.

Из формулы для плотности потока  $j = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{9\pi km}} \cdot \frac{p}{\sqrt{T}}$  следует, что молекулы с большей массой

в меньшем количестве проходят через отверстие, чем молекулы с меньшей массой. Таким образом, если в сосуде находится смесь газов, то возможно разделение смеси газов, находящихся при одинаковой температуре – *изотермическая эффузия*.

### Броуновское движение.

Броуновское движение (иногда называют Брауновское движение) – беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в жидкости или, происходящее под действием молекул окружающей среды. Исследовано в 1827 г. Броуном (Браун; Brown), который наблюдал в микроскоп



движение цветочной пыльцы, взвешенной в воде. Наблюдаемые частицы размером около 1 мкм и менее совершают неупорядоченные независимые движения, описывая сложные зигзагообразные траектории. Интенсивность броуновского движения не зависит от времени, но возрастает с увеличением температуры, уменьшением вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы.) Теория броуновского движения была построена независимо друг от друга Эйнштейном и Смолуховским в 1905-1906 гг. Причиной броуновского движения является тепловое движение молекул среды, проявляющееся в некомпенсированных ударах молекул о частицу, т.е. флуктуациями давления. Эти удары приводят частицу в беспорядочное движение. Если отмечать положения частицы через равные небольшие промежутки времени, то траектория окажется сложной и запутанной.

Квадрат смещения частицы из начального положения в проекции на любую ось  $\langle x^2 \rangle$  за время наблюдения  $\tau$ , в отсутствие внешних сил определяется выражением  $\langle x^2 \rangle = 2D\tau$ ,

где коэффициент диффузии броуновской (сферической) частицы  $D = \frac{kT}{6\pi\eta a}$ ,  $a$  – радиус частицы,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

При описании броуновского движения частицы в одномерном случае будем считать, что на частицу действует сила случайная сила, среднее значение которой равно нулю

$$ma_x = F_x - F_c, \quad \langle F_x \rangle = 0$$

величина силы сопротивления  $F_c = r \cdot v_x$ , где  $r$  – коэффициент вязкого трения броуновской частицы в жидкости.

$$m\ddot{x} + r\dot{x} = F_x$$

Умножаем это уравнение на  $x$  и используем равенство  $x\ddot{x} = \frac{d(x\dot{x})}{dt} - \dot{x}^2$

$$m \frac{d(x\dot{x})}{dt} - m\dot{x}^2 + rx\dot{x} = xF_x$$

Проводим усреднение по времени

$$m \left\langle \frac{d(x\dot{x})}{dt} \right\rangle - m \langle \dot{x}^2 \rangle + r \langle x\dot{x} \rangle = \langle xF_x \rangle$$

Тогда  $\langle xF_x \rangle = 0$ ,  $\frac{m \langle \dot{x}^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$  - для одномерного движения, заменяем  $\left\langle \frac{d(x\dot{x})}{dt} \right\rangle = \frac{d \langle x\dot{x} \rangle}{dt}$  и получаем уравнение  $m \frac{d \langle x\dot{x} \rangle}{dt} + r \langle x\dot{x} \rangle = kT$ , откуда  $\langle x\dot{x} \rangle = \frac{kT}{r} \left( 1 - e^{-\frac{m}{r}t} \right)$ .

Для установившегося движения  $\langle x\dot{x} \rangle = \frac{kT}{r}$ . Так как  $x\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dt}$ , то  $\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{r}$ . После интегрирования по времени  $\langle x^2 \rangle = 2 \frac{kT}{r} t$ . Для сферической броуновской частицы, радиус которой равен  $a$ :  $r = 6\pi\eta a$ , поэтому  $D = \frac{kT}{6\pi\eta a}$ .

Полученные выше формулы были экспериментально проверены в 1908 году Перреном, который измерял с помощью микроскопа перемещения броуновских частиц за одинаковые промежутки времени. Ему удалось на основании своих опытов с помощью этих формул определить постоянную Больцмана  $k$  и вычислить значение постоянной Авогадро  $N_A$ , совпадающие по величине с их значениями, полученными другими методами.

*Замечание.* Теория броуновского движения нашла широкое применение не только для описания случайного движения частицы в жидкости, но и для решения целого ряда прикладных задач. Этой теории подчиняются случайные тепловые колебания высокоточных механических и электрических измерительных устройств, таких, например, как крутильные весы и гальванометры. Кинетические уравнения, полученные в теории броуновского движения, используются для анализа точности работы различных систем управления. Они позволяют рассчитать случайные ошибки, возникающие при управлении техническими устройствами и провести оптимизацию их параметров.

### Производство энтропии в необратимых процессах.

При протекании необратимых термодинамических процессов энтропия возрастает. Производство энтропии в единичном объёме в случае протекания  $N$  различных процессов

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^N X_i j_i$$

где:  $X_i$  - термодинамические силы,  $j_i$  - соответствующие им плотности термодинамических потоков. Тогда производство энтропии внутри выделенного объема среды  $V$  определяется с помощью формулы  $\frac{dS}{dt} = \iiint_V \sigma_s dV$ .

Получим, например, выражения позволяющие рассчитывать производство энтропии при протекании необратимых процессов в газах: переноса теплоты (теплопроводности) и переноса импульса (вязкости). В соответствии с полученными выражениями, плотности термодинамических потоков в указанных процессах имеют вид:

$$j_Q = -\alpha \frac{dT}{dx} \text{ и } j_p = -\eta \frac{du}{dx}.$$

где:  $\alpha$  и  $\eta$  - коэффициенты теплопроводности и вязкости,  $T$  и  $u$  - температура и скорость течения газа соответственно.

В линейной модели необратимых процессов  $j_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} X_k$ , где коэффициенты  $L_{ik}$  «показывают» влияние  $i$ -го процесса на  $k$ -й процесс. По принципу Онсагера  $L_{ik} = L_{ki}$ , т.е. это влияние равно-

правное. Если не учитывать взаимное влияние различных процессов друг на друга, то  $L_{ik} = L_{ki} = 0$  и соотношение между термодинамическими силами и потоками примет вид

$$j_Q = L_{QQ} X_Q, \quad j_p = L_{pp} X_p$$

Расчёты приводят к выражениям  $L_{QQ} = \alpha T^2$ ,  $L_{pp} = \eta T$ .

Откуда

$$X_Q = \frac{j_Q}{L_{QQ}} = \frac{-\alpha \frac{dT}{dx}}{\alpha T^2} = -\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx}, \quad X_p = \frac{j_p}{L_{pp}} = \frac{-\eta \frac{du}{dx}}{\eta T} = -\frac{1}{T} \frac{du}{dx}.$$

Поэтому

$$\sigma_s = X_Q j_Q + X_p j_p = -\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx} \left( -\alpha \frac{dT}{dx} \right) - \frac{1}{T} \frac{du}{dx} \left( -\eta \frac{du}{dx} \right) = \frac{\alpha}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + \frac{\eta}{T} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \geq 0$$

Видим, что при протекании необратимых процессов теплопроводности и вязкости производство энтропии является положительной величиной. Если газ находится в равновесном состоянии, которое характеризуется постоянством параметров состояния  $T=\text{const}$ ,  $u=\text{const}$ , то в такой среде будут отсутствовать термодинамические потоки и производство энтропии станет равным нулю.

## Лекция 17.

*Агрегатные состояния вещества. Условия равновесия фаз. Явления на границе раздела газа, жидкости и твердого тела. Капиллярные явления. Фазовые переходы первого и второго рода. Диаграммы состояния. Критические явления при фазовых переходах.*

**Агрегатные состояния.**

Если части термодинамической системы образованы различными веществами, то явления на границах раздела частей кроме теплопередачи и обмена веществом могут быть связаны с протеканием тех или иных химических реакций. Если части системы образованы одним и тем же веществом, находящимся в разных состояниях, то переход этого вещества через границы раздела не будет сопровождаться протеканием химических реакций, но при этом состояние вещества может изменяться.

Одно и то же вещество может находиться в состояниях, отличающихся друг от друга по своим физическим, в первую очередь механическим свойствам. Эти состояния одного и того же вещества называются *агрегатными состояниями*. Выделяют три основных агрегатных состояния: твердое, жидкое и газообразное. Примерами агрегатных состояний окиси водорода являются: лед, вода и водяной пар.

Четвертым основным агрегатным состоянием вещества считается *плазма*. Так называют сильно ионизированный газ с высокой относительной концентрацией заряженных частиц, который в целом электрически нейтрален. Плазма является самым распространенным состоянием вещества во Вселенной, так как из неё состоит большинство звезд. Примером низкотемпературной плазмы, наблюдаемой в земных условиях, является пламя, представляющее собой сильно разогретый, частично ионизированный газ, возникающий в процессе горения.

Кроме плазмы во Вселенной встречаются такие специфические состояния вещества как нейтронная жидкость (из неё состоят нейтронные звезды) и вырожденная плазма (состоящая из полностью ионизированных ядер и электронов). Эти состояния встречаются при сверхвысоких давлениях и температурах.

Твердое, жидкое и газообразное состояния веществ различаются, прежде всего, подвижностью атомов и молекул, из которых состоят эти вещества. В газах и жидкостях частицы совершают хаотическое поступательное движение, а в твердых веществах - колебательное движение около положений равновесия. Различие между газами и жидкостями заключается в том, что в жидкостях расстояние между молекулами сравнимо с их размерами, и поэтому потенциальная энергия взаимодействия молекул сравнима по величине с энергией их теплового движения. Это приводит к тому, что тепловое движение молекул жидкости затруднено по сравнению с молекулами газа. Но потенциальной энергии взаимодействия молекул жидкости недостаточно для сохранения устойчивой межмолекулярной структуры. Поэтому в жидкостях наблюдается только некоторое упорядочение положения близлежащих частиц, то есть *ближний порядок*, в отличие от твердых кристаллических тел, в которых существует *дальний порядок*, - упорядоченная межатомная структура - кристаллическая решетка. По этой причине жидкость легко принимает форму сосуда, предоставленного ей.

Среди твердых тел существует особый класс тел - аморфные тела, занимающие промежуточное положение между кристаллическими телами и жидкостями. Для них характерно длительное сохранение формы, но при этом их атомы не образуют упорядоченную кристаллическую решетку.

Среди жидкостей так же выделяется особый класс - жидкие кристаллы, механические свойства которых близки к свойствам жидкости, но у них, так же как и у твердых кристаллических тел, характерно наличие анизотропии свойств. Такое состояние возможно у веществ с большими протяжёнными молекулами, например у органических соединений. Молекулы жидких кристаллов могут достаточно легко совершать поступательные перемещения, сохраняя при этом свою ориентацию в пространстве. Анизотропия жидких кристаллов особенно проявляется в их оптических свойствах, что позволяет использовать их в устройствах формирования изображения.

Одному и тому же агрегатному состоянию могут соответствовать несколько различных по своим свойствам состояний одного и того же вещества. Например, это различные модификации кристаллической решетки у твердых тел, отличающиеся симметрией, или состояния жидкого гелия - He I и He II, первое из которых обладает вязкостью, а второе - сверхтекучее.

### Условия равновесия фаз

При описании пространственно неоднородных сред их разбивают на некоторое число однородных по своему составу частей, разделенных границами раздела. Макроскопическая часть среды (вещества), имеющая однородный физико-химический состав, называется *фазой*.

Если среда однородна во всех своих точках, то такая термодинамическая система будет *однофазной*, а если система состоит из двух (или более) граничащих между собой однородных сред, то это *двухфазная* (или *многофазная*) термодинамическая система.

Примером двухфазной системы может служить стеклянный сосуд с налитой в него водой. В этом случае в системе имеется жидкая фаза (вода) и твердая фаза (стекло). Если в состав системы включить окружающий сосуд воздух, то система станет трехфазной. Третья фаза при этом будет газообразной (воздух). При этом смесь газов является однофазной системой, так как в этом случае нет границы раздела.

Находящиеся в равновесии термодинамические системы не обязательно должны представлять собой однородную среду, то есть быть однофазными. В состоянии равновесия может находиться система, состоящая из нескольких различных по своим физико-химическим свойствам фаз, пространственно разделенных не изменяющимися с течением времени (или для квазиравновесного случая бесконечно медленно изменяющимися) *границами раздела* фаз. Если через эти границы не происходит макроскопический перенос, а сами фазы находятся в состоянии термодинамического равновесия, то такая термодинамическая система, несмотря на свою неоднородность, будет находиться в состоянии *термодинамического равновесия*.

Для равновесия фаз необходимо, чтобы между ними наблюдалось тепловое и механическое равновесие.

**Первое** из этих условий означает равенство температур  $T_1$  и  $T_2$  с разных сторон границы раздела фаз:  $T_1 = T_2 = T$ .

**Второе** условие имеет вид:

$$p_2 = p_1 + \Delta p_{12}$$

где:  $\Delta p_{12}$  - дополнительное давление, создаваемое межфазовой границей. Если считать границы раздела фаз плоскими, то  $\Delta p_{12}=0$  и это условие станет эквивалентным предположению о равенстве давлений по обе стороны границы раздела фаз:  $p_2 = p_1 = p$ .

В качестве многофазной системы может выступать система, состоящая из фаз одного и того же вещества, находящегося в различных агрегатных состояниях. Например, система, состоящая из воды, в которой плавает кусочек льда. В состоянии равновесия количество воды и льда в системе неизменно. Но если к такой системе подвести теплоту, то начнется процесс таяния льда, который приведет к изменению границы раздела различных агрегатных состояний, то есть к движению границ раздела фаз. При этом будет происходить процесс превращения вещества из одного агрегатного состояния в другое, то есть *фазовое превращение*.

Необходимо отметить, что как в случае равновесия различных фаз, так и при фазовых превращениях, процессы на границе раздела носят статистический характер. На границе раздела воды и пара происходит постоянный процесс перехода молекул из воды в пар и обратно. В равновесном состоянии эти встречные процессы взаимно компенсируют друг друга, а при подводе или отводе теплоты один из этих процессов (переход молекул из воды в пар или наоборот) начинает преобладать и это приводит к изменению количества вещества в различных агрегатных состояниях.

Для устойчивого равновесия многофазной системы одного и того же вещества, необходимо потребовать отсутствия макроскопического переноса молекул этого вещества из одной фазы в другую. Возникновение потоков вещества через границу раздела фаз возможно при на-

личии различных значений удельного термодинамического потенциала  $\varphi(p, T)$  (или химического потенциала  $\mu(p, T)$ ) с разных сторон относительно этой границы.

*Удельным термодинамическим потенциалом* называется отношение термодинамического потенциала Гиббса данной фазы термодинамической системы к массе этой фазы

$$\varphi(p, T) = \frac{G(p, T)}{m}.$$

Введение понятия удельного термодинамического потенциала связано с тем, что при фазовых превращениях каждая из фаз является системой с переменной массой.

Состояние термодинамического равновесия системы, состоящей из двух фаз, находящихся при одинаковых значениях давления и температуры, каждая из которых имеет соответственно массы  $m_1$  и  $m_2$ , характеризуется минимумом термодинамического потенциала

$$G(p, T) = m_1 \cdot \varphi_1(p, T) + m_2 \cdot \varphi_2(p, T)$$

где:  $\varphi_1(p, T)$  и  $\varphi_2(p, T)$  - удельные термодинамические потенциалы первой и второй фаз соответственно.

Так как при фазовых переходах общая масса вещества  $m = m_1 + m_2$  остается неизменной, а происходит только переход частиц из одной фазы в другую, то условие минимума термодинамического потенциала эквивалентно условию его неизменности при изменении массы фаз. Если масса первой фазы уменьшается на величину  $\Delta m$ , то одновременно возрастает масса второй фазы на эту же величину  $\Delta m$ :

$$G(p, T) = (m_1 - \Delta m) \cdot \varphi_1(p, T) + (m_2 + \Delta m) \cdot \varphi_2(p, T).$$

Если  $\varphi_1 > \varphi_2$ , то минимум функции  $G(p, T)$  достигается при равенстве нулю массы первой фазы, а при  $\varphi_1 < \varphi_2$  - соответственно, в случае равенства нулю массы второй фазы. В обоих этих случаях система переходит в однофазное состояние и условие равновесия двух фаз нарушается.

Таким образом, в дополнение к указанным выше условиям равенства в соприкасающихся фазах температуры и давления, для обеспечения устойчивого равновесия двух фаз необходимо потребовать равенства их удельных термодинамических потенциалов:

$$\varphi_1(p, T) = \varphi_2(p, T).$$

Это уравнение может быть разрешено относительно переменной  $p$  и представлено в виде:

$$p = p(T).$$

Это уравнение описывает *кривую равновесия двух фаз*. Если рассматривается граница раздела жидкости и газа, то это уравнение описывает *кривую испарения*. При описании границы раздела жидкости и твердого тела - рассматриваемое уравнение дает *кривую плавления*.

Однако даже если величины удельных термодинамических потенциалов на границе раздела фаз одинаковы при фазовых превращениях, то производные этих потенциалов в различных фазах могут быть различными.

1. Если **первые производные** удельных термодинамических потенциалов для различных фаз не равны между собой:

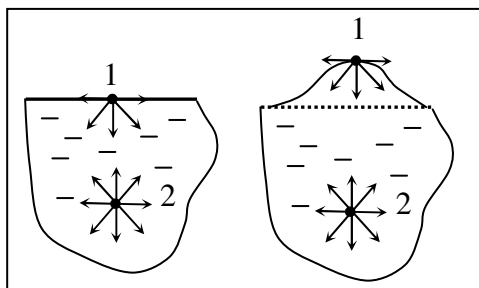
$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial T} \right)_p \neq \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial T} \right)_p \text{ и } \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \right)_T \neq \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial p} \right)_T$$

то такое фазовое превращение называется фазовым переходом *первого рода*. Характерной особенностью фазовых переходов первого рода является поглощение или выделение теплоты при их осуществлении. К фазовым переходам первого рода относятся превращения при испарении, конденсации, плавлении и кристаллизации вещества.

2. Если при фазовом превращении первые производные удельных термодинамических потенциалов для различных фаз одинаковы, а **вторые производные** различны, то такие превращения называются фазовыми переходами *второго рода*. При таких переходах теплота не

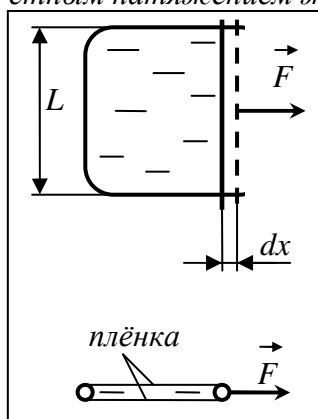
выделяется и не поглощается, но для них характерны скачкообразные изменения теплоемкости, температурного коэффициента расширения и сжимаемости вещества. Примерами фазовых переходов второго рода являются превращение магнитного сплава из ферромагнитного состояния в парамагнитное, переход металла или сплава в сверхпроводящее состояние и переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние.

### Явления на границе раздела газа, жидкости и твердого тела



Опыт показывает, что поверхность жидкости стремится принять такую форму, чтобы иметь минимальную площадь. Это явление связано с воздействием на поверхность жидкости механических сил, стремящихся уменьшить площадь этой поверхности. Указанные силы называются силами поверхностного натяжения.

Между молекулами жидкости действуют силы взаимного притяжения. Это приводит к тому, что на молекулы, находящиеся на поверхности жидкости (1) действует усредненная результирующая сила со стороны остальных молекул жидкости, стремящаяся втянуть их внутрь. Для молекул находящихся в глубине (2) эта усредненная результирующая сила равна нулю. Если изменить форму поверхности жидкости (например, точку 1 поднять вверх), то придется совершить положительную работу против межмолекулярных сил. Оказывается, существует прямая зависимость между величиной работы внешних сил и изменением площади поверхности жидкости:  $\delta A' = \sigma \cdot dS$ . Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется *поверхностным натяжением жидкости* и измеряется в Н/м.



Рассмотрим явления, возникающие на границе раздела жидкости и газа. Пусть имеется тонкая пленка жидкости (например, мыльная пленка), натянутая на рамку с одной подвижной перемычкой. При медленном перемещении перемычки под действием силы  $F$  на величину  $dx$ , площадь поверхности пленки увеличивается на величину  $dS_{нов} = 2L \cdot dx$ .

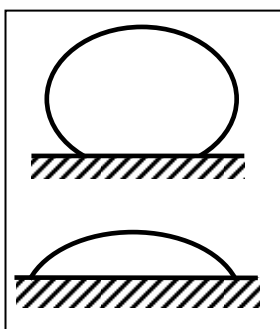
Двойка в формуле означает, что пленка жидкости имеет две поверхности (жидкость заключена между пленками) и если её толщина много больше межмолекулярного расстояния, то происходит независимое воздействие двух поверхностей пленки на перемычку. Требование медленности перемещения перемычки позволяет считать рассматриваемый процесс изотермическим и квазистатическим (обратимым).

Элементарная работа  $\delta A'$ , которую необходимо совершить против сил поверхностного натяжения, тогда определяется по формуле

$$\delta A' = F \cdot dx = \sigma \cdot dS_{нов} = \sigma \cdot 2L \cdot dx$$

Из этой формулы следует, что величина силы, приложенной к рамке, определяется по формуле

$$F = 2\sigma \cdot L.$$



В случае, когда имеется одна пленка жидкости сила поверхностного натяжения равна  $F = \sigma \cdot L$ .

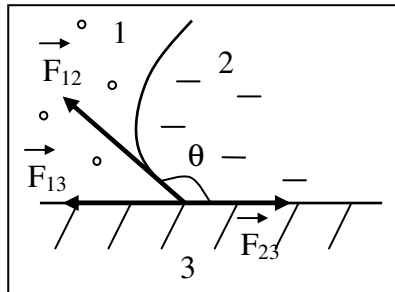
Рассмотрим теперь явления, происходящие с каплей жидкости, помещенной на поверхность твердого тела. В этом случае имеются три границы раздела между фазами: газ-жидкость, жидкость – твердое тело и газ – твердое тело. Поведение капли жидкости будет определяться значениями поверхностного натяжения на указанных границах раздела.

Если сила поверхностного натяжения на границе раздела жидкости и газа будет стремиться придать капле сферическую форму, то это значит, что поверхностное натяжение на границе раздела жидкости и твердого тела будет больше поверхностного натяжения на границе раздела газа и твердого тела. В этом случае наблюдается *несмачивание* поверхности твердого тела жидкостью. Форма капли будет



определяться равнодействующей сил поверхностного натяжения и силы тяжести. Если капля большая, то она будет растекаться по поверхности, а если маленькая - стремиться к шарообразной форме.

Если поверхностное натяжение на границе раздела жидкости и твердого тела меньше поверхностного натяжения на границе раздела газа и твердого тела, то капля приобретет такую форму, чтобы уменьшить площадь поверхности границы раздела газ - твердое тело, то есть будет растекаться по поверхности тела. В этом случае наблюдается *смачивание* жидкостью твердого тела.



Для количественного описания смачивания жидкостью твердого тела рассмотрим равновесие сил, действующих на элемент  $dL$  контура, образованного пересечением трех границ раздела фаз: газа 1, жидкости 2 и твердого тела 3.

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \vec{0}.$$

Учитывая, что  $F_{12} = \sigma_{12}dL$ ,  $F_{13} = \sigma_{13}dL$ ,  $F_{23} = \sigma_{23}dL$ , где  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  - поверхностные натяжения на границах раздела газ-жидкость, газ - твердое тело и жидкость - твердое тело, условие равновесия вдоль горизонтальной поверхности

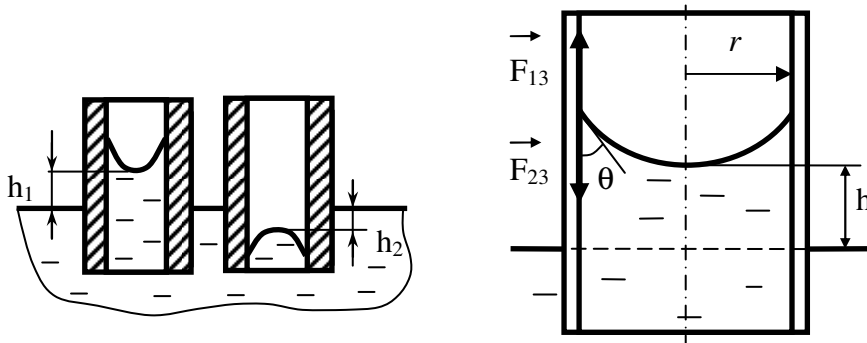
$$\sigma_{12} \cos \theta + \sigma_{23} - \sigma_{13} = 0.$$

Откуда  $\cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}}.$

Как следует из этой формулы, равновесию жидкости на поверхности твердого тела соответствует вполне определенный угол  $\theta$  (отсчитываемый со стороны жидкости), который называется *краевым углом*. Этот угол может принимать значения от 0 до  $\pi$ .

При  $\theta=0$  наблюдается явление *полного смачивания* твердого тела жидкостью (например, капля керосина на поверхности стекла), а при  $\theta=\pi$  - полное несмачивание (например, капля воды на поверхности парафина). Если краевой угол  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , то имеет место частичное смачивание, а при  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  - частичное несмачивание.

Явление смачивания (или несмачивания) твердого тела жидкостью приводит к появлению капиллярного эффекта. *Капилляром* называется тонкая трубка, вставленная в сосуд с жидкостью.



Капиллярный эффект связан с тем, что в зависимости от того, смачивает жидкость стенки капилляра или нет, внутри капилляра поверхность жидкости приобретает соответственно вогнутую или выпуклую форму (мениск). В первом случае давление внутри жидкости уменьшается по сравнению с внешним, и она поднимается внутри капилляра. А во втором - это давление возрастает, что приводит к опусканию уровня жидкости в капилляре по отношению к её уровню в сосуде.

Подъем жидкости в капилляре и дополнительное давление могут быть определены из условия равновесия жидкости в капилляре

$$F_{13} - F_{23} = mg.$$

Здесь:  $F_{13} = \sigma_{13}L$ ,  $F_{23} = \sigma_{23}L$ , где  $L$  – длина периметра границы мениска. Масса жидкости в капилляре  $m = \rho V$ . Для цилиндрического капилляра радиуса  $r$ :  $L = 2\pi r$ . Объем жидкости можно приближенно оценить  $V = \pi r^2 h$ , поэтому

$$(\sigma_{13} - \sigma_{23}) 2\pi r = \rho \pi r^2 h g$$

Но  $\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \theta$ , где  $\sigma_{12}$  – поверхностное натяжение на границе раздела газа и жидкости. Отсюда следует, что высота подъема жидкости в капилляре определяется выражением

$$h = \frac{2\sigma_{12} \cos \theta}{\rho g r}.$$

Из этой формулы следует, что при частичном смачивании уровень жидкости в капилляре повышается, а при несмачивании – соответственно понижается.

Так как капилляр сообщается с основной жидкостью, то на уровне поверхности основной жидкости  $p_0 = p_1 + \rho g h$ , где  $p_1$  – давление под мениском. Поэтому дополнительное давление, создаваемое искривлённой поверхностью жидкости

$$p_0 - p_1 = \rho g h = \rho g \frac{2\sigma_{12} \cos \theta}{\rho g r} = \frac{2\sigma_{12} \cos \theta}{r}.$$

Если ввести радиус сферической поверхности жидкости (мениска)  $R = \frac{r}{\cos \theta}$ , то

$$\Delta p = \frac{2\sigma_{12}}{R}.$$

Эта формула называется *формулой Лапласа*.

В случае если поверхность имеет произвольную форму и характеризуется двумя главными радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , то получаем обобщение формулы Лапласа

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

### Фазовые переходы первого рода

Для описания фазового перехода первого рода необходимо определить зависимость давления от температуры в точках фазового перехода:  $p = p(T)$ , то есть форму кривой равновесия двух фаз. Применение методов равновесной термодинамики позволяет определить первую производную этой зависимости, или наклон кривой равновесия.

Предположим, что при подводе к одной из фаз двухфазной среды некоторого количества теплоты  $Q_1$ , происходит переход части вещества, массой  $M$ , из первой фазы во вторую. Так как рассматриваемый переход считается квазиравновесным, то давление и температура при его осуществлении постоянны:  $p = \text{const}$  и  $T = \text{const}$ . Удельный объем, определяемый как отношение объема фазы к её массе для первой фазы равен  $v_1$ , а для второе – соответственно  $v_2$ . Количество вещества массой  $M$  занимает в первой фазе объем  $V_1 = v_1 M$ , а во второй – объем  $V_2 = v_2 M$ .

Фазовые переходы первого рода количественно характеризуются *величиной удельной теплоты фазового перехода*, которая численно равна количеству теплоты сообщаемой единице массы вещества для осуществления фазового перехода  $q_{12} = \frac{Q_1}{M}$ .

Так как производные удельного термодинамического потенциала для обеих фаз одинаковые, то при изменении параметров на малые величины  $dp$  и  $dT$

$$d\phi_1(p, T) = d\phi_2(p, T) \text{ или } -s_1 dT + v_1 dp = -s_2 dT + v_2 dp$$

где:  $s_1$  и  $s_2$  – удельные энтропии первой и второй фаз соответственно. Откуда

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}.$$

Так как процесс перехода вещества из одной фазы в другую считается равновесным и происходящим при постоянной температуре, то разность удельных энтропий этих фаз можно определить следующим образом  $s_2 - s_1 = \frac{q_{12}}{T}$ . Откуда

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2 - v_1)}$$

Это выражение называется *уравнением Клапейрона-Клаузиуса*. Оно позволяет определить производную давления от температуры при равновесном фазовом переходе первого рода в зависимости от удельной теплоты перехода, его температуры и удельных объемов начальной и конечной фаз.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Клаузиуса знак производной  $\frac{dP}{dT}$  зависит от соотношения удельных объем фаз. Если при подводе теплоты жидкость переходит в газообразное состояние, что сопровождается увеличением удельного объема:  $v_2 > v_1$ , то производная  $\frac{dP}{dT} > 0$ . Поэтому при таком переходе повышение давления приводит к увеличению температуры кипения. Аналогичная зависимость наблюдается и при плавлении большинства твердых тел. Исключение составляют вещества, для которых плавление сопровождается уменьшением их удельного объема:  $v_2 < v_1$ . Примером такого вещества является вода, которая при переходе из замерзшего состояния в жидкое уменьшает свой удельный объем (плотность воды больше плотности льда). Для таких веществ характерно понижение температуры плавления при повышении давления.

### Диаграммы состояния

При описании состояния вещества и его фазовых переходов обычно используются переменные  $p$  и  $T$ , в которых изображаются кривые равновесия при фазовых переходах данного вещества. Диаграмма, построенная в этих переменных, называется *диаграммой состояния*.

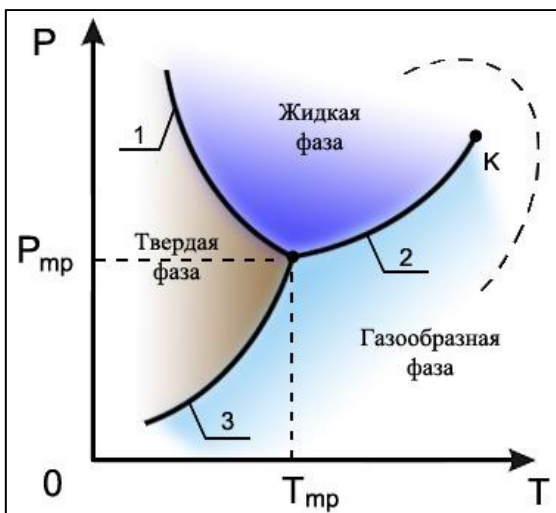
Рассмотрим случай термодинамической системы, в которой в равновесии находятся сразу три фазы однородного по физико-химическим свойствам вещества (например: лед, вода и пар). Равновесие такой системы будет наблюдаться при одновременном выполнении трех условий, соответствующих равновесию этих фаз между собой. Эти условия в общем виде можно записать в форме

$$\varphi_1(p, T) = \varphi_2(p, T) = \varphi_3(p, T).$$

Эти равенства приводят к системе из двух независимых уравнений

$$\varphi_1(p, T) = \varphi_2(p, T), \quad \varphi_2(p, T) = \varphi_3(p, T)$$

Решение этой системы уравнений при условии отсутствия химических превращений дает совершенно определенные значения давления  $p_{тр}$  и температуры  $T_{тр}$ , при которых три фазы могут существовать одновременно.



Точка на диаграмме состояния в переменных  $p$  и  $T$ , соответствующая указанным значениям давления и температуры, называется *тройной точкой*. В этой точке встречаются **кривая плавления 1**, разделяющая твердую и жидкую фазы, **кривая испарения 2**, разделяющая жидкую и газообразную фазы, и **кривая возгонки 3**, разделяющая твердую и газообразную фазы. Кривая испарения 2 заканчивается критической точкой (К), в которой исчезают отличия жидкой и газообразной фаз. Если фазовый переход осуществляется в обход критической точки, как показано пунктирной линией на рис., то пересечения кривой испарения не происхо-

дит и фазовое превращение проходит путем непрерывных изменений без образования границы раздела фаз.

Для однородного по своим физико-химическим свойствам вещества в равновесии одновременно могут находиться не более трех фаз. Это означает, что для равновесной системы могут существовать только точки, в которых сходятся **три фазы вещества**, например, соответствующие трем его агрегатным состояниям. Точки, в которых могли бы одновременно существовать более трех фаз, **не реализуемы**.

Вещество в трех различных агрегатных состояниях может наблюдаться и при значениях температуры и давления, не соответствующих тройной точке. Например, в природе при различных погодных условиях наблюдаются одновременно лед, вода и водяной пар (последний, как правило, косвенным образом). Однако, в отличие от состояния в тройной точке, указанные состояния не являются равновесными, и для них характерен постоянный переход вещества из одной фазы в другую.

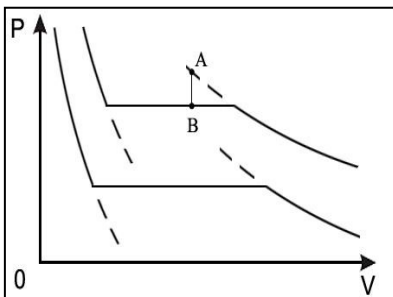
Значения давления и температуры в тройной точке для различных веществ очень стабильны, что позволяет использовать тройную точку для калибровки различных температурных шкал. Тройная точка воды используется в качестве основной реперной точки для температурных шкал Кельвина и Цельсия.

Как правило, все твердые вещества имеют несколько фазовых состояний, обусловленных различными кристаллическими модификациями, структурно отличающимися между собой. Эти фазы могут точно так же находиться в состоянии равновесия между собой, как и фазы, связанные с различными агрегатными состояниями. На диаграмме состояния условиям равновесия этих фаз соответствуют кривые равновесия при фазовых переходах. Существуют тройные точки, в которых могут одновременно находиться в равновесии три фазы, две из которых представляют собой кристаллические модификации, а одна либо жидкая, либо газообразная. У некоторых веществ тройные точки наблюдаются при равновесии трех различных кристаллических модификаций.

Свойство вещества иметь несколько кристаллических модификаций называется *полиморфизмом*. Этим свойством, например, обладают сера, углерод, олово и железо. Лед имеет несколько кристаллических модификаций. Фазовый переход из одной кристаллической модификации в другую называется *полиморфным превращением*, которое в большинстве случаев является фазовым переходом первого рода и сопровождается поглощением или выделением теплоты.

Для различных кристаллических модификаций характерно существование *метастабильных состояний*, то есть таких состояний, при которых одна фаза существует в области температур и давлений другой фазы. Такие же метастабильные состояния существуют и для фазовых переходов из одного агрегатного состояния в другое вблизи тройной точки.

Если изобразить изотермы двухфазной системы жидкость-газ, то горизонтальная часть

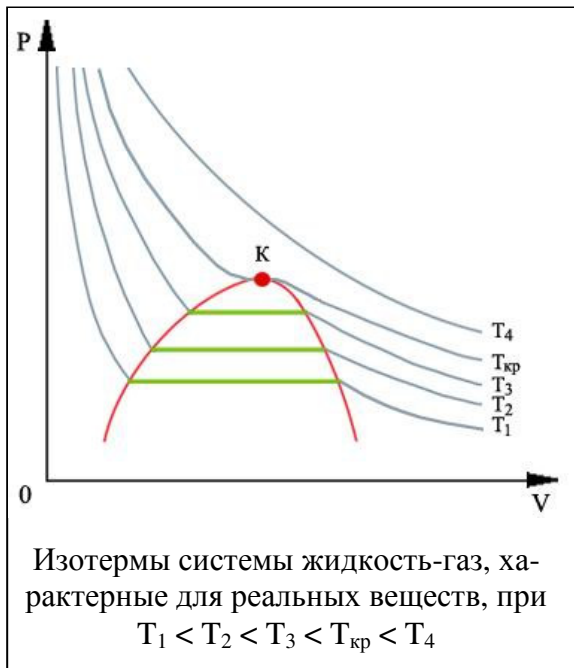


изотерм будет соответствовать фазовому переходу вещества, справа от горизонтальной части лежат изотермы газовой фазы, а слева - жидкой. Пунктирные линии соответствуют метастабильным состояниям. Справа - переохлажденный пар, слева - перегретая жидкость. Эти состояния будут возникать в том случае, если зародыши другой фазы (капли и пузырьки соответственно) отсутствуют или у них имеется тенденция к исчезновению. Так как образованию зародышей способствуют всякого рода примеси и неоднородности, то метастабильные состояния свойственны

хорошо очищенным веществам.

Метастабильные состояния системы жидкость-газ наблюдаются в областях параметров, близких к кривой испарения. С повышением температуры плотность насыщенного пара возрастает и при некоторой температуре плотность пара становится равной плотности жидкости. Как в 1860 году установил Менделеев, при достижении этой температуры поверхностное натяжение обращается в нуль. Температура, при которой это происходит, называется температурой *абсо-*

лутного кипения. При этом исчезает различие между жидкой и газообразной фазами, и кривая испарения заканчивается критической точкой К. Такое состояние, которое характеризуется оп-



ределенным набором значений температуры  $T_{кр}$ , давления  $p_{кр}$  и объема  $V_{кр}$ , получило название *критического* состояния.

На рис. изображены изотермы системы жидкость-газ, характерные для реальных веществ и подтвержденные многочисленными опытами. Горизонтальный участок этих изотерм, соответствующий одновременному существованию жидкой и газообразной фаз, с ростом температуры уменьшается. Точка, где длина горизонтального участка обращается в нуль и есть критическая точка К, а соответствующая ей температура - критическая температура  $T_{кр}$ .

При температурах выше критической происходит постепенный переход одной фазы в другую без образования двухфазной системы.

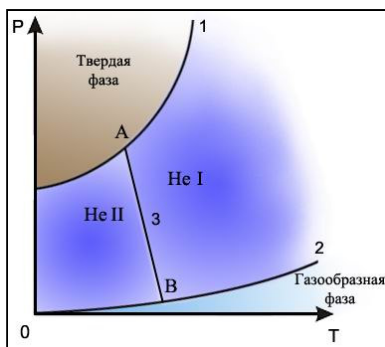
Переход из жидкого состояния в газообразное (или, наоборот, из газообразного в жидкое) может быть осуществлен по траектории, огибающей критическую точку без пересечения кривой испаре-

ния. В этом случае фазового перехода первого рода с характерным для него скачком первых производных удельного термодинамического потенциала наблюдаться не будет. Переход из жидкого в газообразное состояние будет происходить путем непрерывных изменений без образования границы раздела фаз. При этом среда представляет собой однородную структуру, которая постепенно превращается из жидкости в газ или наоборот. То есть свойства фазы в этом случае меняются непрерывным образом.

Однако между твердыми телами и жидкостями существует принципиальная разница. Твердые тела обладают упорядоченной, как правило, анизотропной структурой. В твердом агрегатном состоянии, как указывалось выше, возможны фазовые переходы, обусловленные изменением кристаллической решетки. Вследствие такого принципиального различия не может существовать непрерывного перехода из жидкого в твердое состояние, и, поэтому, критической точки для кривой плавления не существует.

При переходе жидкости в твердое состояние может наблюдаться метастабильное состояние - переохлажденная жидкость. В таком состоянии в частности может находиться вода, охлажденная до температуры ниже  $0^\circ\text{C}$ . Если в таком состоянии в воде возникают зародыше твердой фазы, например, вследствие резкого изменения внешнего давления (при ударе по сосуду, в котором находится переохлажденная вода), то наблюдается очень быстрое превращение воды в лед.

Кривая возгонки стремится к точке с нулевыми значениями давления и температуры (начало координат диаграммы состояния). Это означает, что вещества отвердевают при стремлении к абсолютному нулю температуры. В качестве исключения можно привести гелий, у которого твердое состояние реализуется только при достаточно большом внешнем давлении.



### Фазовые переходы второго рода

Примером фазового перехода второго рода является превращение жидкого He I в жидкий He II при температуре 2,2 К и ниже. С этим фазовым переходом связано квантовое явление сверхтекучести, возникающее в He II. Отсутствие вязкости приводит к тому, что He II может проникать даже через **очень** узкие капилляры.

К фазовым переходам второго рода относятся также пере-

ход некоторых веществ в сверхпроводящее состояние при низких температурах. Такой переход сопровождается падением до нуля электрического сопротивления сверхпроводников.

Примером фазового перехода второго рода является переход железа из ферромагнитного в парамагнитное состояние в точке Кюри. К ним относятся также переходы, связанные с изменением симметрии кристаллической решетки, в тех случаях, когда тип симметрии решетки при переходе становится другим (например, переход от кубической к тетрагональной решетке).

При фазовом переходе второго рода все свойства вещества изменяются непрерывным образом во всем объеме вещества. Поэтому при фазовых переходах второго рода невозможно существование метастабильных состояний, характерных для фазовых переходов первого рода.

### **Критические явления при фазовых переходах**

Как показывают экспериментальные данные при приближении к критической точке при фазовом переходе жидкость-газ, наблюдается резкое возрастание флуктуаций, что приводит к неограниченному увеличению вторых производных удельного термодинамического потенциала. Указанные аномально большие флуктуации реально наблюдаются на опыте, например, путем исследования рассеяния света средой, находящейся в критическом состоянии. Аналогичное стремление к бесконечности вторых производных удельного термодинамического потенциала характерно и для переходов второго рода, например, для перехода железа из ферромагнитного состояния в парамагнитное.

Происходящие при таких переходах явления получили названия *критических явлений*. Экспериментальные и теоретические исследования критических явлений позволили сделать вывод о том, что в малой окрестности критической точки поведение параметров, характеризующих термодинамические свойства вещества, описывается простой степенной зависимостью

$$f(x) \sim |x|^\lambda$$

где малая величина  $x$  описывает близость температуры к критическому значению:

$$x = \frac{T - T_{кр}}{T_{кр}}$$

а показатель степени  $\lambda$  называется *критическим индексом*.

Экспериментально определенные значения критических индексов для различных веществ близки между собой. Между этими индексами для различных термодинамических величин, описывающих среду, установлены соотношения, позволяющие определять индексы одних величин через индексы других.