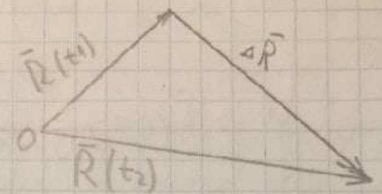
Билет №13.

№1 Понятия перемещения, скорости и ускорения.

Вектором перемещения $\Delta \vec{R}$ за интервал времени (t_1, t_2) называется вектор, соединяющий начальное (в момент t_1) и конечное (в момент t_2) положения точки

$$\Delta \bar{R} = \vec{R}(t_2) - \bar{R}(t_1)$$



Скорость $\bar{V}$, это вектор, являющийся пределом скоростей перемещения при стремлении Δt к нулю.

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta t} = \frac{d\bar{R}}{dt} = \dot{\bar{R}}(t)$$

Ускорение $\bar{a}$ - вектор, равный мгновенному изменению $\bar{V}$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{R}}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = \ddot{\bar{R}}(t)$$

№2 Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести (Общий случай и для однородного поля + вывод)

Для силы тяжести $F_т = mg$ потенциальная энергия $W_п = mgh$.

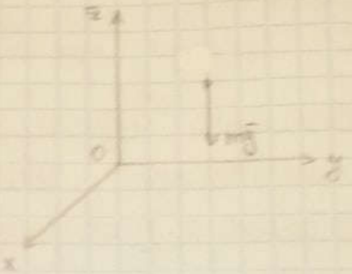
h - определяется выбором начала отсчета энергии

Проверим соотношение $F = -\mathrm{grad}\, W$

В системе отсчета, связанной с Землей, введем специальную систему координат так, чтобы ось Z была направлена вверх, тогда потенциальная энергия тела равна

$W_п = mgz + C$; C определяется началом отсчета координаты z.

$z = const \Rightarrow$ вектор силы направлен перпендикулярно плоскости z, т.е. вертикально.



Величина энергии увеличивается вверх $\Rightarrow$ вектор силы направлен вниз

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ F_y &= -\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \\ F_z &= -\frac{\partial W}{\partial z} = -mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{F}(0;0;-mg) \Rightarrow \bar{F} = -\operatorname{grad} W.$$

Найдём $W_{пот}$ для $F_{грав} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$

Пусть $\bar{R}$ в системе отсчёта связан с точкой $m_1 \Rightarrow$ $\bar{F}_{грав}$, действующий на потенциальную точку m_2, направлен противоположно: $\bar{F}_{грав} = -\frac{G m_1 m_2}{R^2}\bar{e}_{\bar{R}}$, где

$$\bar{e}_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

т.к. $\bar{F}_{грав}$ - консервативная сила, то

$\int(\bar{F}, d\bar{r}) = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон}$ - этот интеграл не должен зависеть от траектории, поэтому будет интегрировать вдоль радиус-вектора $d\bar{r} = d\bar{R}$

$\bar{F}_{грав} \uparrow\downarrow \bar{R}$

$(\bar{F}_{грав}, d\bar{r}) = -F_{грав}\, dR$

$$\int(\bar{F}_{грав}, d\bar{r}) = \int_{R_{нач}}^{R_{кон}} (-F_{грав})\, dR = \int_{R_{нач}}^{R_{кон}} \left(-\frac{G m_1 m_2}{R^2}\, dR\right) = \frac{G m_1 m_2}{R}\Bigg|_{R_{нач}}^{R_{кон}} =$$

$$= G m_1 m_2 \left(\frac{1}{R_{кон}} - \frac{1}{R_{нач}}\right)$$

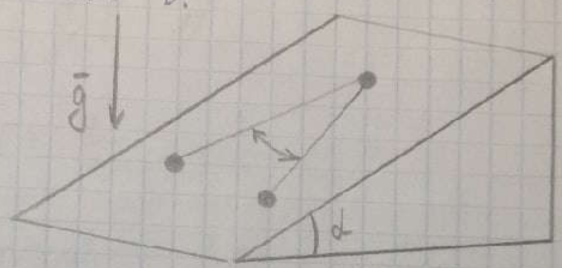
Сравним.

$$W_{нач}^{пот} - W_{кон}^{пот} = G\frac{m_1 m_2}{R_{кон}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{нач}}$$

$$W_{пот\ грав} = -\frac{G m_1 m_2}{R} + C \quad (\text{обычно } C=0)$$

№3 На идеально гладком плоском склоне горы, составляющем угол α с вертикалью, находится крюк, к которому подвешена невесомая нерастяжимая нить длиной l. К другому концу нити прикреплен груз малых размеров. Найдите период малых колебаний данного маятника.

Как изменится ответ, если нить с грузом заменить однородным стержнем длиной l?



Дано: α; l; g

$T - ?$

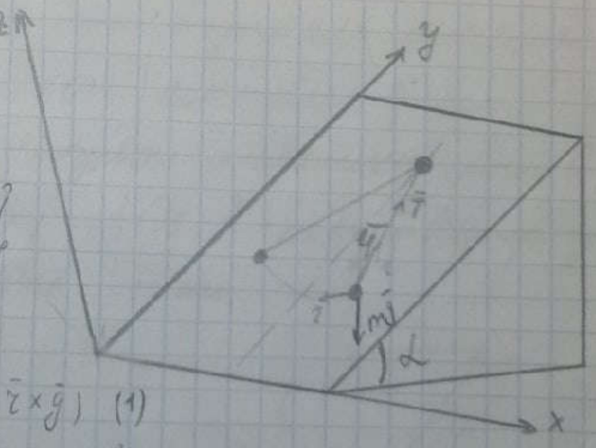
Решение.

Второй закон Ньютона:

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

$$Oz:\ T = mg\sin\alpha$$

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{T}$$



$$\bar{M} = \bar{r} \times m\bar{g}\sin\alpha = m\sin\alpha(\bar{r} \times \bar{g}) \quad (1)$$

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{dI\bar{\omega}}{dt};\ M = \frac{Id}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{Id^2\varphi}{dt^2} = I\ddot{\varphi} \quad (2)$$

$$(1,2) \Rightarrow -mg\underbrace{l\sin\varphi}_{плечо}\sin\alpha = I\ddot{\varphi}$$; $\sin\varphi \approx \varphi$ (при малых колебаниях)

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl\sin\alpha}{I}\varphi = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl\sin\alpha}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = [illegible] = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl\sin\alpha}}$$

$I = ml^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$

Если однородный стержень, то:

$I = \frac{ml^2}{12} \Rightarrow T_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{3g\sin\alpha}}$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$, $T_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{3g\sin\alpha}}$