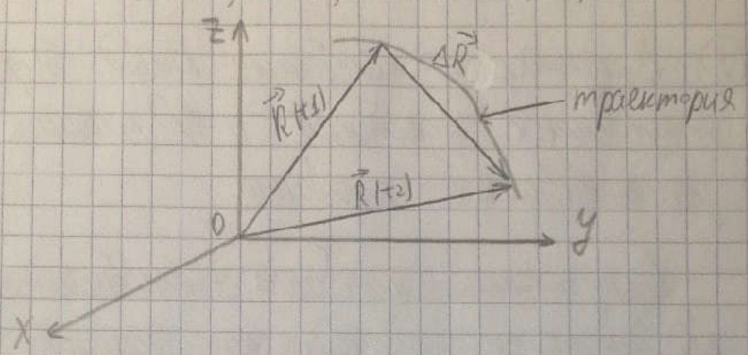
Билет №1.

№3 Понятие перемещения, скорости и ускорения (формулы, являющиеся их определениями для общего случая).

Вектором перемещения $\Delta\vec{R}$ за интервал времени $(t_1; t_2)$ называют вектор, соединяющий начальное (в момент t_1) и конечное (в момент t_2) положения точки

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(t_2) - \vec{R}(t_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (\Delta x; \Delta y; \Delta z)$$



Величиной перемещения (или просто перемещением) называют длину вектора перемещения:

$$\Delta R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

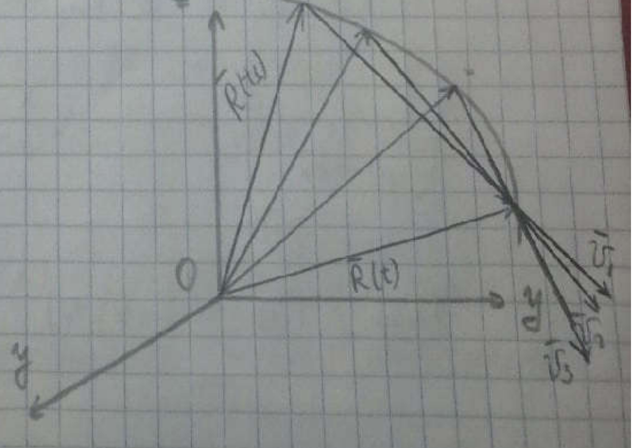
Мгновенная скорость (скорость) точки $\vec{v}$, это вектор, являющийся пределом скоростей перемещения (в некоторый момент времени) при стремлении Δt к нулю.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{перем} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}(t)$$

$V_x = \dot{x}(t)$

$V_y = \dot{y}(t)$

$V_z = \dot{z}(t)$



Вектором ускорения $\bar{a}$, это вектор, равный мгновенному изменению вектора скорости.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \dot{\bar{V}}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \dot{V}_x \\ a_y &= \dot{V}_y \\ a_z &= \dot{V}_z \\ \bar{V} &= \dot{\bar{R}}(t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_x &= \ddot{x}(t) \\ a_y &= \ddot{y}(t) \\ a_z &= \ddot{z}(t) \end{aligned}$$

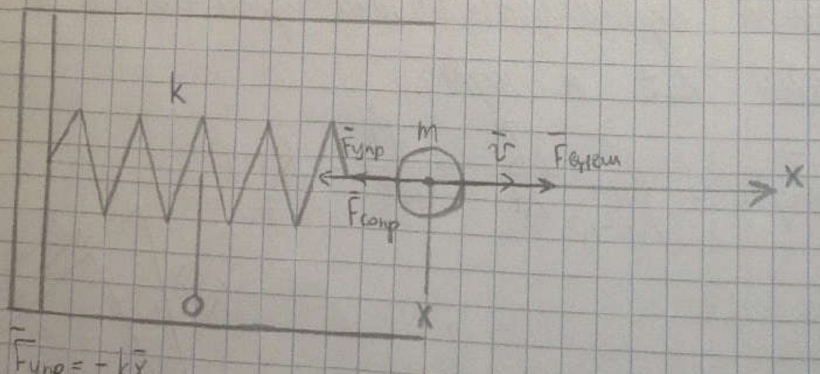
② Вынужденное колебание. Вывод дифференциального уравнения вынужденных колебаний и вид решения для случая установившихся колебаний.

Вынужденные колебания - колебания, которые происходят под действием периодических внешних сил.

Вывод дифференциального уравнения:

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы $F(t) = F_0 \cos(\Theta t + \alpha)$

Второй закон Ньютона: $ma = -kx - r\bar{V} + F(t)$.



$\bar{F}_{упр} = -k\bar{x}$

$\bar{F}_{сопр} = -r\bar{V}$

$\bar{F}_{внеш} = \bar{F}(t) = \bar{F}_0 \cos(\Theta t + \alpha)$

$$ma = -kx - r\upsilon + F_0\cos(\theta t + \alpha)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\theta t + \alpha) \quad \Big/ : m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{m} + \frac{F_0}{m}\cos(\theta t + \alpha)$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\theta t + \alpha)$$ – Уравнение вынужденных колебаний

$$2\beta = \frac{r}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

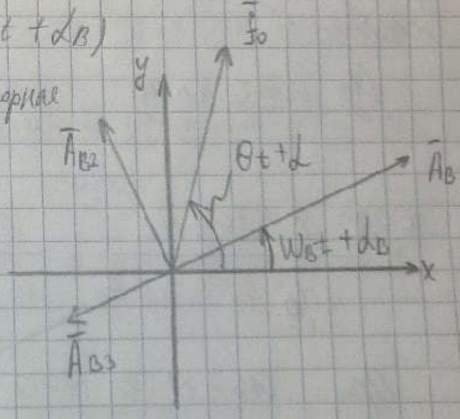
Вывод вида решения для случая установившихся колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\theta t + \alpha) \quad (1)$$

Должны получить: $x_B = A_B\cos(\omega_B t + \alpha_B)$

Амплитудно-векторная диаграмма



$$\omega_0^2 x_B = \omega_0^2 A_B\cos(\omega_B + \alpha_B)$$

$$|\bar{A}_{B1}| = \omega_0^2 A_B$$

Т.к. $\dot{x}_B = -\omega_B A_B\sin(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B A_B \cdot \cos(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2})$, то

величине $2\beta\dot{x}_B = 2\beta\omega_B A_B\cdot\cos(\omega_B t + \alpha_B + \frac{\pi}{2})$ соответствует вектор $\bar{A}_{B2}$, повернутый относительно вектора $\bar{A}_{B1}$ на угол $\frac{\pi}{2}$, длина которого $|\bar{A}_{B2}| = 2\beta\omega_B A_B$

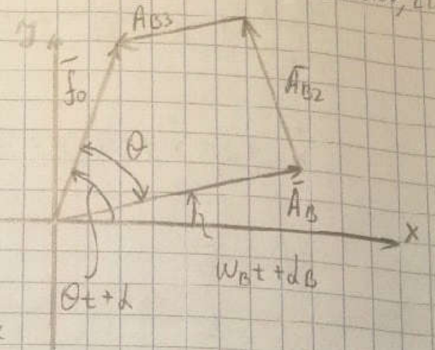
Величине $\ddot{x}_B = -\omega_B^2 A_B\cos(\omega_B t + \alpha_B) = \omega_B^2 A_B\cos(\omega_B t + \alpha_B + \pi)$ соответствует вектор $\bar{A}_{B3}$, повернутый на угол π относительно вектора $\bar{A}_{B1}$ и $|\bar{A}_{B3}| = \omega_B^2 A_B$

Величина $f_0\cos(\theta t + \alpha)$ соответствует вектор $\bar{f_0}$.

Тогда перепишем (1) уравнение в векторной записи.

$$\bar{A}_{B1} + \bar{A}_{B2} + \bar{A}_{B3} = \bar{f_0}$$

Т.к. длины векторов const, то это равенство возможно только, если $w_B = \theta$



Значит, вынужденные колебания проходят с частотой вынуждающей силы.

Из диаграммы: $f_0^2 = (A_{B1} - A_{B3})^2 + A_{B2}^2$

$$f_0^2 = (w_0^2 A_B - \theta^2 A_B)^2 + (2\beta\theta A_B)^2$$

$$A_B = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2-\theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}}$$

$\theta = \alpha - \alpha_B$ — разность фаз вынуждающей силы и вынуждающих колебаний

Из диаграммы: $tg\theta = \frac{A_{B2}}{A_{B1} - A_{B2}}$

$$tg\theta = \frac{2\beta w_B A_B}{w_0^2 A_B - w_B^2 A_B} = \frac{2\beta\theta}{w_0^2 - \theta^2}$$

При $w_0 > \theta \Rightarrow \theta > 0$ — вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы

При $w_0 < \theta$ — вынужденные колебания опережают по фазе вынуждающую силу

Следствие: Под действием периодической силы тело совершает два вида колебаний – свободное затухающее с собственной частотой ω, и вынужденные – с частотой вынуждающей силы θ. Затухающие колебания с течением времени прекратятся и останутся только вынужденные колебания – их называют установившимися.

③. Тело вращалось вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 25t + 7$ (значения всех величин даны в СИ). Найдите угловое ускорение тела в момент времени $t = 1с$ и в момент изменения направления вращения. Чему равен момент сил, действующих на тело при $t = 1с$, если момент инерции тела равен 10 кг м^2?

Дано:

$\varphi(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 25t + 7$

$I = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

$t = 1с.$

Найти:

$\varepsilon(1) - ?$

$M(1) - ?$

$\varepsilon(\varepsilon) - ?$

Решение:

1) $\varphi(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 25t + 7$

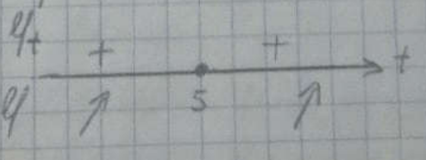
Проанализируем функцию $\varphi(t)$ и построим график.

$\varphi'_t = \left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 25t + 7\right)'_t =$

$= t^2 - 10t + 25$

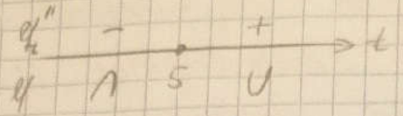
$\varphi'_t = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 25 = 0$

$(t-5)^2 = 0 \Rightarrow t = 5$



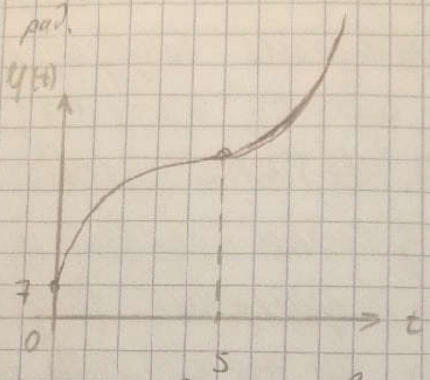
$\varphi''_t = (\varphi'_t)'_t = (t^2 - 10t + 25)'_t = 2t - 10$

$\varphi''_t = 0 \Rightarrow 2t - 10 = 0 \Rightarrow t = 5.$



$t = 5$ – точка перегиба.

$t \geq 0 \Rightarrow \varphi(0) = 7$ рад.



$t = 5$ с – момент времени, когда направление движения изменится. $\Rightarrow \varepsilon(5) = \ddot{\varphi} = 2t - 10\Big|_{t=5} = 0$ рад/с^2

2) $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = t^2 - 10t + 25$

$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = 2t - 10\Big|_{t=1c} = -8$ [рад/с^2] – угловое ускорение в момент $t = 1$с.

3) $M = I\varepsilon\Big|_{t=1c} = 10 \cdot (-8) = -80$ [Н·м] – момент силы действующее на тело в момент $t = 1$с

Ответ: 1) $\varepsilon = 0$ [рад/с^2]

2) $\varepsilon = -8$ [рад/с^2]

3) $M = -80$ [Н·м]