

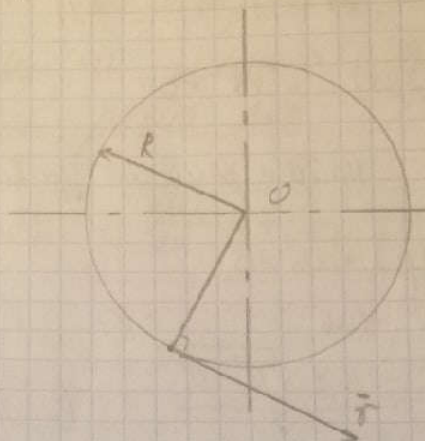
Билет № 11

№1) Угловая скорость, период и частота вращения.

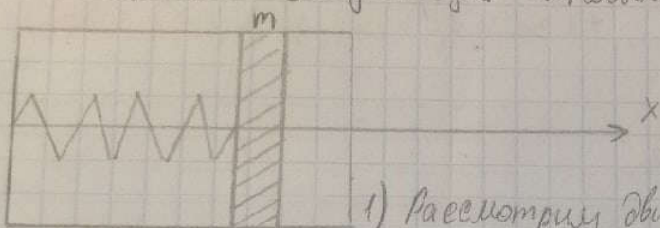
$$\omega = \frac{v}{R} \quad [\text{рад/с}]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [\text{с}]$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\text{Гц}]$$



№2) Свободные затухающие колебания. Вывод дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний и его решение. Частота свободных затухающих колебаний.



1) Рассмотрим движение тела в вязкой среде под квазиупругой силой вблизи положения равновесия.

Пусть сила сопротивления будет пропорциональна скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -\gamma \cdot \vec{V}; \quad \gamma - \text{коэффициент сопротивления.}$$

2) Уравнение движения пружины:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad - \text{уравнение свободных затухающих колебаний.}$$

$$2\beta = \frac{\gamma}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

3) при $\gamma = 0$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

4) $W_{\text{мех}} = W_{\text{пот}} + W_{\text{кин}} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = m \left(\omega_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2} \right)$

Т.к. колебание затухающее $\Rightarrow W_{\text{мех.}}$ уменьшается

$$\frac{dW_{\text{мех.}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \left(\frac{\dot{x}^2 \omega_0^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2} \right) \right) = m (\omega_0^2 \dot{x} \ddot{x} + \dot{x} \ddot{x}) = m \dot{x} (\omega_0^2 \ddot{x} + \ddot{x}) =$$
$$= m \dot{x} (-2\beta \dot{x}) = -2\beta \dot{x}^2 < 0$$

5) Пусть $x = e^{\lambda t}$. Найдём решение уравнения:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

$$D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Решение уравнения:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$
$$= e^{-\beta t} (C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}})$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

6) Формула Эйлера:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Колебания существуют при $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 \Rightarrow \sqrt{\omega^2} = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega$$

Решение уравнения:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

(13). В некоторой небольшой области пространства зависимость потенциальной энергии тела имеет вид $U = 3x - 4y + 5z$. Чему равен вектор силы, действующий на тело? Найдите модуль ускорения тела в этой области, если его масса равна 2 кг.

Дано:

$$U = 3x - 4y + 5z$$

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$\vec{F} = ?$$

$$|\vec{a}| = ?$$

$$\vec{F} = -\text{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) =$$

$$= -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{F}(-3; 4; -5)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(-\frac{3}{2}; 2; -\frac{5}{2}\right)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2} \approx 2,536 \text{ мс}^{-2}$$

$$\text{Ответ: } \vec{F}(-3; 4; -5); |\vec{a}| = 2,536 \text{ мс}^{-2}$$