Билет №9.

№1 Кинетическая энергия твердого тела , вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае вращения твердого тела, для любой точки:

$V_i = \omega r_{i1}$

r_{i1} - расстояние от этой точки до оси вращения

$$W_{кин}^{вращ} = \sum_{i=1} \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1} \frac{m_i \omega^2 r_{i1}^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1} m_i r_{i1}^2 = \frac{\omega^2 I_z}{2}$$

I_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

№2 Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот. (вывод выражения для амплитуды и фазы результирующего колебания).

Векторная диаграмма.

Рассмотрим радиус-вектор точки M, вращающегося вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω.

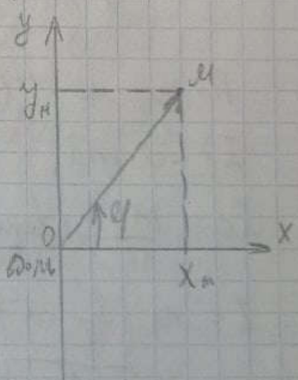
$\varphi = \omega t + \varphi_0$

φ_0 - начальное значение.

$|OM| = A$. Координаты точки M:

$$\boxed{y_M = A\sin(\omega t + \varphi_0)\ ;\ x_M = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

описывают колебания осцилляторов вдоль осей X и Y



Данная форма представления колебания называется амплитудной (векторной) диаграммой.

Сложение гармонических колебаний одинакового направления равных частот

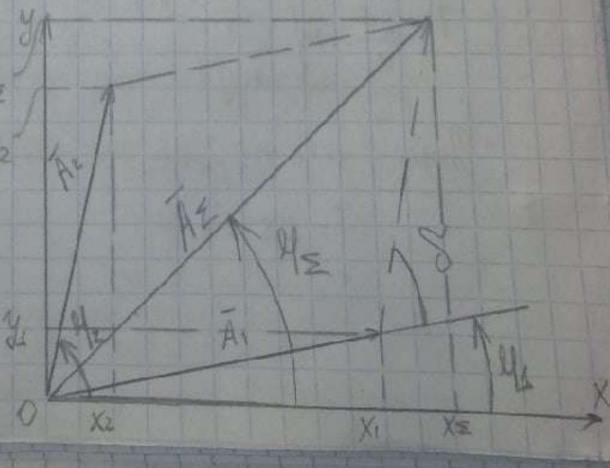
$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \Rightarrow \varphi_1 = \omega t + \alpha_1$

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \Rightarrow \varphi_2 = \omega t + \alpha_2$

Результирующему колебанию

$x_\Sigma = x_1 + x_2$, сопоставим вектор

$\bar{A}_\Sigma = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$, с фазой $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$



По теореме косинусов:

$A_{\Sigma}^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \delta)$, где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega - \omega)t + \alpha_2 - \alpha_1$

$A_{\Sigma}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos($ $\alpha_2 - \alpha_1)$

№3. Тонкий однородный стержень длиной 1 м может колебаться относительно горизонтальной оси, расположенной на расстоянии 25 см от его центра. Найдите собственную частоту и период малых колебаний.

Задача похожа на физический маятник

Дано:
$L = 1$ м
$d = 0{,}25$ м
Найти:
ω - ?
T - ?

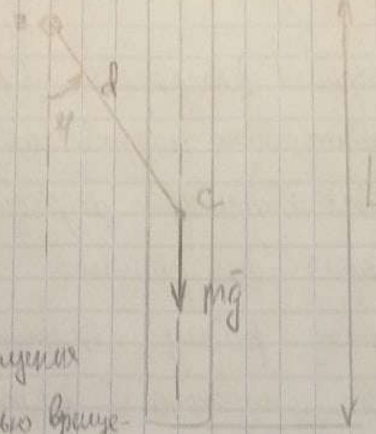
Решение

$\omega = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$

ω - собственная частота колебаний

I - момент инерции относительно точки вращения

d - расстояние между осью вращения и центром масс.



По теореме Штейнера.

$I = I_c + md^2$ $\qquad I_c$ - момент инерции относительно центра масс

$I_c = \dfrac{ml^2}{12}$ (тонкий стержень)

$I = m\left(\dfrac{l^2}{12} + d^2\right)$

$\omega = \sqrt{\dfrac{gd \cdot 12}{l^2 + 12d^2}} = \sqrt{\dfrac{9{,}81 \cdot 0{,}25 \cdot 12}{1^2 + 12 \cdot 0{,}25^2}} = 4{,}1$ рад/с

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l^2 + 12d^2}{12gd}} = \pi\sqrt{\dfrac{l^2 + 12d^2}{3gd}} = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{1^2 + 12 \cdot 0{,}25^2}{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25}} = 1{,}532$ с.

Ответ: $\omega = 4{,}1$ рад/с

$T = 1{,}532$ с.