Билет №4.

(1) Импульс тела. Импульс механической системы. Уравнение механической системы. Закон сохранения импульса.

Импульс тела – векторная величина, равная произведению массы тела m на его скорость $\bar{v}$.

$\bar{p} = m\bar{v}$

Единица измерения [кг·м/с]

Импульс тела направлен в ту же сторону, что и скорость тела, по касательной к траектории.

Импульс механической системы:

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p_i} \quad (1)$$

$\bar{p}_i$ – импульс i-ой частицы

Импульс механической системы равен сумме импульсов её отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.

$$(1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\bar{P_i}}{dt} \\ \frac{d\bar{p_i}}{dt} &= \sum_{k=1}^{m} F_{ik} + F_i \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \bar{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \\ &\text{по III закону Ньютона:} \\ &\bar{F}_{ik}^{\,внут} = -\bar{F}_{ik}^{\,внеш} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

F_{ik} – внутренние силы

F_i = внешние силы

$$\Rightarrow (2) \quad \frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}_{внеш}$$ – производная импульса системы по времени равна векторной системе всех внешних сил, действующих на частицы системы.

$\bar{F}_{внеш}$ – результирующая всех внешних сил

$$\bar{F}_{внеш} = \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_i$$

(2) $\Rightarrow$ $P_2 - P_1 = \int_0^t F_{внешн} dt$ — приращение импульса системы равно импульсу результирующей всех внешних сил за соответствующий промежуток времени.

Закон сохранения импульса.

Запишем II Закон Ньютона в импульсном виде (для инерциальной системы отсчета):

$$\bar{P}_c'(t) = \bar{F}^{внеш}$$

Проекции в пространстве V^3:

$$\begin{cases} P_{cx}'(t) = F_x^{внеш} \\ P_{cy}'(t) = F_y^{внеш} \\ P_{cz}'(t) = F_z^{внеш.} \end{cases}$$

1. Рассмотрим случай, когда на систему вообще не действуют внешние силы (т.е. в замкнутой системе) или равнодействующая внешних сил равна нулю. $\bar{F}_{внеш} = 0$.

$\bar{P}_c'(t) = 0$ $\Rightarrow$ вектор суммарного импульса (замкнутой) системы остается постоянным.

$$\bar{P}_c = m_1 \bar{V}_1 + \ldots + m_n \bar{V}_n = const$$

В проекциях.

$$\begin{cases} P_{cx}(t) = m_1 V_{1x} + \ldots + m_n V_{nx} = const \\ P_{cy}(t) = m_1 V_{1y} + \ldots + m_n V_{ny} = const \\ P_{cz}(t) = m_1 V_{1z} + \ldots + m_n V_{nz} = const \end{cases}$$

Итог: Если $\bar{F}_{внеш} = 0 \Rightarrow \bar{P}_c(t) = const.$

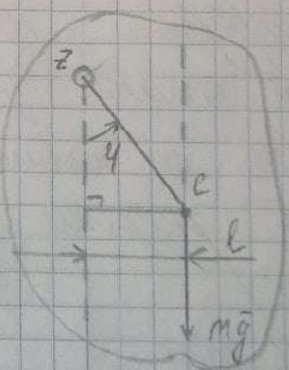
2. Рассмотрим такое направление в пространстве, на которое проекция силы $\vec{F}$ равна нулю.
Введем систему координат так, чтобы ось X совпадала с этим направлением.

$$\begin{cases} p'_{cx}(t)=0 \\ p'_{cy}(t)=F_y^{внеш} \\ p'_{cz}(t)=F_z^{внеш.} \end{cases}$$

В этом случае о сохранении вектора импульса в этом случае говорить нельзя. – сохраняется только одна координата p_x вектора импульса системы.

② Вывод выражения для собственной частоты малых колебаний физического маятника.

1) Проведем из центра масс тела C перпендикуляр к оси z вращения.
Длина перпендикуляра равна l.



2) Положение тела задаем углом отклонения от вертикали этого перпендикуляра – φ
Если $\angle\varphi$ увеличивается, то $\vec{L}$ направлен вдоль горизонтальной оси z направлен от нас. ($\vec{L}$ - момент импульса)
Момент внешних сил тяжести относительно оси z направлен от нас.

3) Проекция на ось z: $L_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi}$

$M_z(m\vec{g}) = -mg\,l\sin\varphi$

Уравнение вращения вокруг оси z: $\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внеш.}$

$I_z \ddot{\varphi} = -mg\,l\sin\varphi.$

Если выполняется условие малости колебаний: $\sin\varphi \approx \varphi$, то уравнение колебаний имеет вид: $\ddot{\varphi} = -\frac{mgl}{I_z}\varphi$

С учётом выражения для циклической частоты $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}$ получаем выражение для периода колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}$

3) Сидящий на скамье Жуковского студент вращался с угловой скоростью $1\ c^{-1}$ и поймал летящий ему навстречу мяч массой 1кг. Скорость мяча 10 м/с. Момент инерции студента $3 кг\cdot м^2$, а скамьи Жуковского – $2 кг\cdot м^2$. Первоначально мяч летел в горизонтальном направлении так, что его траектория была перпендикулярна оси вращения скамьи и расположена на расстоянии 50 см от неё.
Какой стала угловая скорость студента после того, как он поймал мяч. Какое количество механической энергии превратилось в тепловую?

Дано:

$w_1 = 1$ рад/с

$m_2 = 10$ кг

$V_2 = 10$ м/с

$I_1 = 3\ кг\cdot м^2$

$I_0 = 2\ кг\cdot м^2$

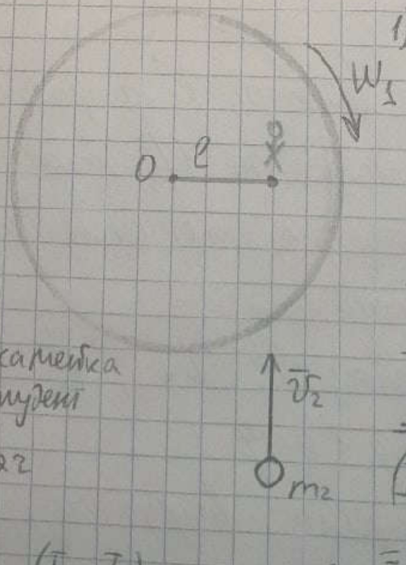
$l = 50 см = 0{,}5 м.$

Найти:

$w - ?$

$Q - ?$

Решение.



0 – скамейка
1 – студент
2 – мяч

1) Закон сохранения момента импульса.

$L_{до} = L_{после}.$

$L_{до} = I_a w_1 - m_2 V_2 l$

$L_{после} = I_б w$

$I_a = I_1 + I_0$

$I_б = I_1 + I_0 + m_2 l^2$

$(I_1 + I_0) w_1 - m_2 V_2 l = (I_1 + I_0 + m_2 l^2) w$

$$w = \frac{(I_1 + I_0) w_1 - m_2 V_2 l}{I_1 + I_0 + m_2 l^2}$$

$$\omega = \frac{(3+2)\cdot 1 - 10\cdot 10\cdot 0{,}5}{3+2 + 10\cdot 0{,}5^2}$$

$$\omega = \frac{-45}{7{,}5}$$

$\omega = -6$ рад/с.

Закон сохранения энергии:

$$Q = E_{нач} - E_{кон}$$

$$E_{нач} = \frac{I_a \omega_1^2}{2} + \frac{v_2^2 m_2}{2}$$

$$E_{кон} = \frac{I_б \omega_1^2}{2}$$

$$I_a = I_1 + I_0$$

$$I_б = I_1 + I_0 + m_2 l^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{(I_1 + I_0)\omega_1^2}{2} + \frac{v_2^2 m_2}{2} - \frac{(I_1 + I_0 + m_2 l^2)\omega_1^2}{2}$$

$$Q = \frac{v_2^2 m_2 - m_2 l^2 \omega_1^2}{2}$$

$$Q = \frac{10^2 \cdot 10 - 10\cdot 0{,}5^2 \cdot 1^2}{2}$$

$$Q = \frac{997{,}5}{2}$$

$Q = 498{,}75$ Дж.

Ответ: $\omega = -6$ рад/с

$Q = 498{,}75$ Дж.