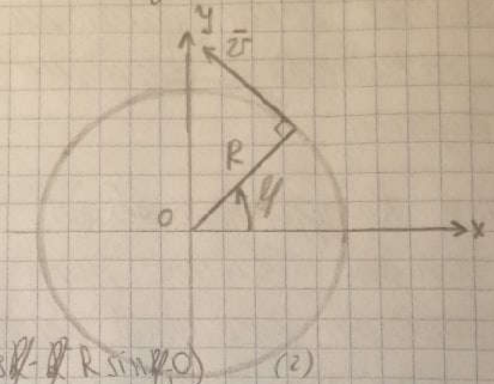
Билет №.

① Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела при вращательном движении. Их связь между с линейными величинами.



$\bar{R} = (R\cos\varphi; R\sin\varphi; 0)$

$\bar{V} = \dot{\bar{R}} = (-\dot\varphi R\sin\varphi; \dot\varphi R\cos\varphi; 0)$ (1)

$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = (-\ddot\varphi R\sin\varphi - \dot\varphi^2 R\cos\varphi; \ddot\varphi R\cos\varphi - \dot\varphi^2 R\sin\varphi; 0)$ (2)

$\angle\varphi$ – угловая координата

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость (3)

$\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение (4)

1) $(1;3) \Rightarrow \bar{V} = (-\omega R\sin\varphi; \omega R\cos\varphi; 0) \Rightarrow |\bar{V}| = |\omega| R$

$\bar{\tau}_R = \dfrac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = (\cos\varphi; \sin\varphi; 0)$

$(\bar{a}; \bar{\tau}_R) = (\bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \bar{\tau}_R) = (\bar{a}_n; \bar{\tau}_R)$

$(\bar{a}_n; \bar{\tau}_R) = (-\ddot\varphi R\sin\varphi - \dot\varphi^2 R\cos\varphi)\cos\varphi + (\ddot\varphi R\cos\varphi - \dot\varphi^2 R\sin\varphi)\sin\varphi$

$(\bar{a}_n; \bar{\tau}_R) = -\dot\varphi^2 R\cos\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2 R\sin^2\varphi = -\omega^2 R$

$|\bar{a}_n| = |\omega|^2 R = \dfrac{|V|^2}{R}$

2) $\bar{\tau}_V = \dfrac{\bar{V}}{|V|} = \dfrac{\omega}{|\omega|}(-\sin\varphi; \cos\varphi; 0)$

$a_\tau = (\bar{a}, \bar{\tau}_V) = (\bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \bar{\tau}_V) = (\bar{a}_\tau, \bar{\tau}_V)$

$a_\tau = \dfrac{\omega}{|\omega|}(\sin\varphi(\varepsilon R\sin\varphi + \omega^2 R\cos\varphi) + (\varepsilon R\cos\varphi - \omega^2 R\sin\varphi)\cos\varphi)$

$a_\tau = \dfrac{\omega}{|\omega|}\varepsilon R \Rightarrow |a_\tau| = |\varepsilon| R$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

② Работа консервативной силы. Полная механическая энергия. Закон изменения полной механической энергии механической системы. Закон сохранения полной механической энергии.

Работа консервативной силы не зависит от пути, вдоль которого двигалось тело, а только от него начального и конечного положений. Следовательно, работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю.

$$\int(\vec{F}, d\vec{l}) = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон}.$$

Для замкнутого пути $W_{пот}^{нач} = W_{пот}^{кон}$, поэтому $\oint(\vec{F}, d\vec{l}) = 0$.

Замечание: Нельзя сказать, что если работа силы по замкнутому контуру равна нулю, то эта сила – – консервативная.

Рассмотрим две близкие точки в пространстве, смещенные друг от друга на малый вектор $d\vec{r} = (dx; dy; dz)$, координаты которых $(x; y; z)$ и $(x+dx; y+dy; z+dz)$

Работа консервативной силы $\vec{F}$ при перемещении между точками можно записать в виде:

$$A \approx F_x dx + F_y dy + F_z dz = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон} = -(W_{пот}^{кон} - W_{пот}^{нач})$$

$$W_{пот}^{кон} - W_{пот}^{нач} \approx (\mathrm{grad}\, W, d\vec{r}) = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

Получаем:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial W}{\partial x}dx - \frac{\partial W}{\partial y}dy - \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}$$

Т.е для консервативной силы должно выполняться это равенство: $\overline{F} = -\text{grad}\, W$

Полная механическая энергия.

Опр: Полной механической энергией тела (системы) называется энергия, определяемая движением и положением тела относительно других тел, т.е. сумма потенциальной и кинетической энергии.

$$W_{механ} = W_{пот} + W_{кин}.$$

Рассмотрим тело, на которое действуют консервативные силы. Изменение кинетической энергии тела равно суммарной работе действующих на нее сил:

$$W_{кин\_конеч} - W_{кин\_начал} = A$$

Но, т.к. в системе только консервативные силы, то для них можно ввести потенциальную энергию и выразить работу через уменьшение потенциальной энергии.

$$A = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон} \Rightarrow W_{кин}^{кон} - W_{кин}^{нач} = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон}.$$

или.

$$W_{кин}^{кон} + W_{пот}^{кон} = W_{пот}^{нач} + W_{кин}^{нач} \Leftrightarrow W_{механ}^{нач} = W_{механ}^{кон}.$$

Закон сохранения механической энергии:

Если на тело или в системе тел действуют только консервативные силы, то механическая энергия тела или системы тел остается постоянной.

Закон изменения полной механической энергии.

Пусть в системе действуют консервативные и неконсервативные силы:

$$W_{кин}^{кон} - W_{кин}^{нач} = A_{конс} + A_{неконс}$$

Для консервативных сил: $A_{конс} = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон.} \Rightarrow$

$$W_{кин}^{кон} - W_{кин}^{нач} = W_{пот}^{нач} - W_{пот}^{кон} + A_{неконс}.$$

$$\Downarrow$$

$$(W_{кин}^{кон} + W_{пот}^{кон}) - (W_{кин}^{нач} + W_{пот}^{нач}) = A_{неконс}$$

$$\Downarrow$$

$W_{механ}^{кон} - W_{механ}^{нач} = A_{неконс}$ – изменение механической энергии системы равно работе неконсервативных сил.

(3) Точечное тело двигалось вдоль оси x по закону $x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t + 7$ (Значение всех величин даны в СИ). Найдите ускорение тела в момент времени $t = 1c$ и в моменты разворота. В какой момент времени ускорение тела равно нулю?

Дано:

$X(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t + 7$

$t = 1[c]$

Найти:

$a_{(1)} - ?$

$a(t_1) - ?$

$t_2 - ?$

Решение.

Проанализируем $X(t)$ как функцию и построим график

1) $X(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 6t + 7$ (1)

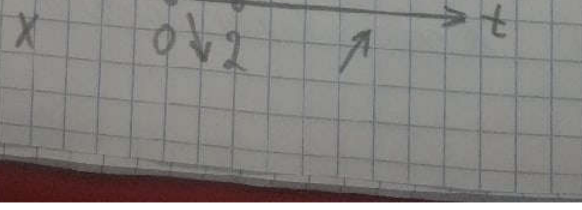
$X'_t = t^2 + t - 6$ (2)

$X'_t = 0.$

$t^2 + t - 6 = 0.$

$(t + 3)(t - 2) = 0$

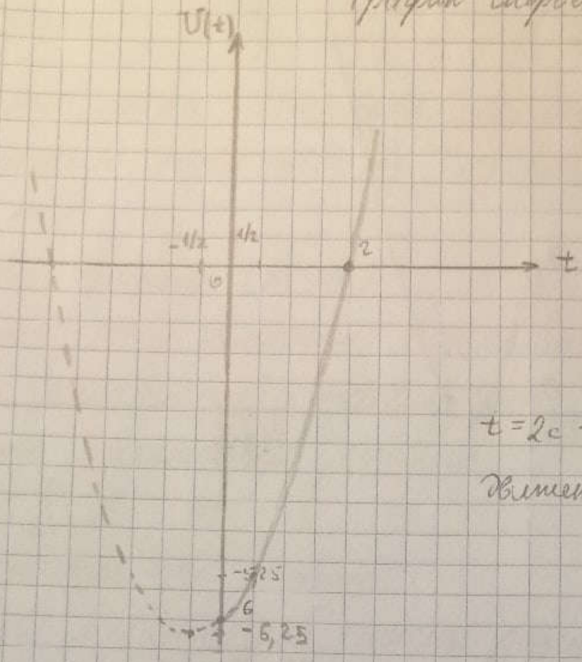
$t = 2 \qquad t \neq -3 \qquad t \geq 0.$



перепишем (1) уравнение как: $x'_t = (t + \frac{1}{2})^2 - 6,25$ - парабола

$V_{(t)} = \dot{x}(t) = x'_t = (t + \frac{1}{2})^2 - 6,25$ $\qquad y(x) = ax^2 + bx + c$

График скорости



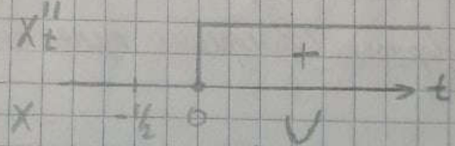
$t = 2c$ - тело сменило направление движения

$x''_t = (x'_t)'_t = 2t + 1$

$x''_t = 0$

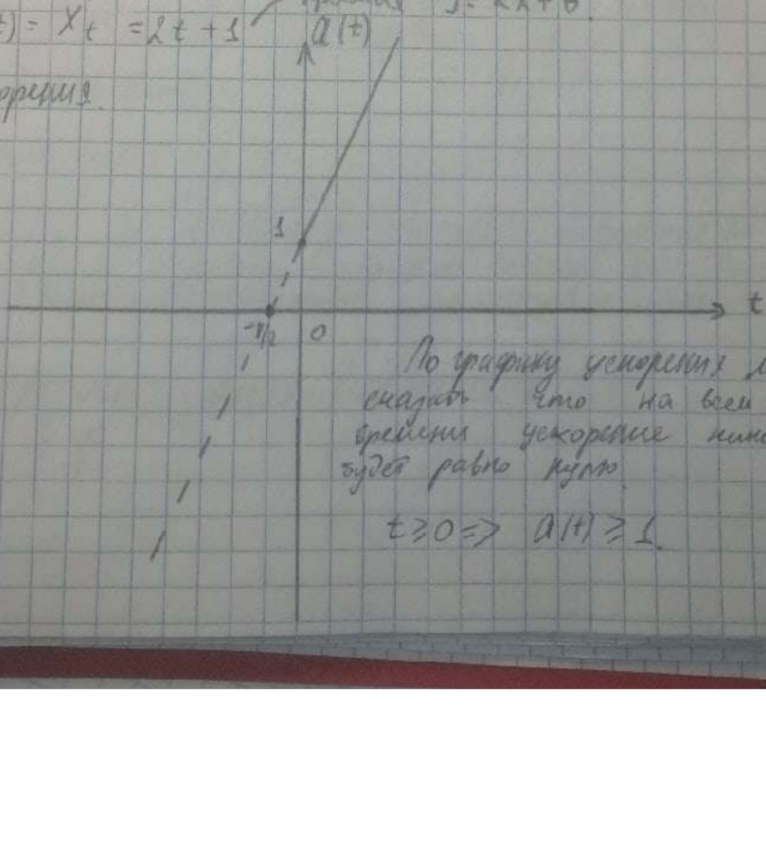
$2t + 1 = 0$

$t \neq -\frac{1}{2}$; $t \geq 0$



$a(t) = \ddot{x}(t) = x''_t = 2t + 1$ - прямая $y = kx + b$

График ускорения



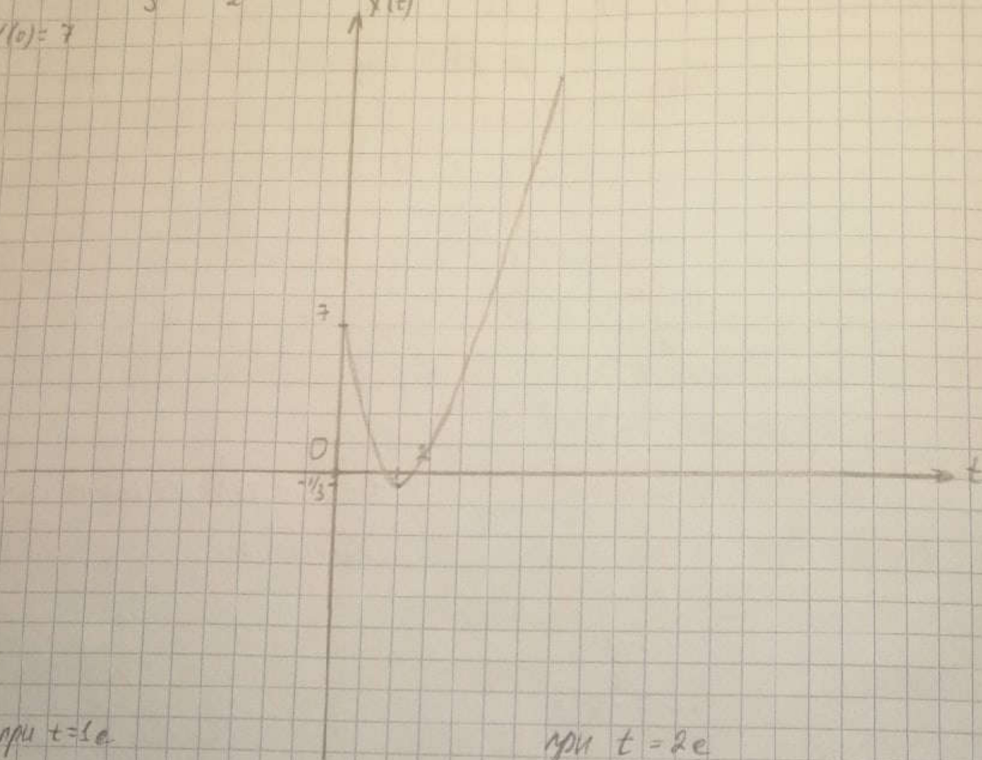
По графику ускорения можно сказать что на всем промежутке времени ускорение никогда не будет равно нулю.

$t \geq 0 \Rightarrow a(t) \geq 1$.

Траектория тела.

$x(2) = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12 + 7 = -\frac{1}{3}$

$x(0) = 7$



при $t = 1с$

$a = 2t + 1 \Big|_{t=1с} = 3\ м/с^2.$

при $t = 2с$

$a = 2t + 1 \Big|_{t=2} = 5\ м/с^2$

Ответ: $a(1) = 3\ м/с^2$; $a(2) = 5\ м/с^2$

Ускорения тела никогда не будет равно 0.