

Механическая система для этой задачи расположена на горизонтальной плоскости и представлена на рис. 18. Значения массы шариков, длина и жёсткость, соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл.9.

Определить:

- положение центра масс MC ;
- жёсткость левой и правой частей пружины, длины которых равны l_{10} и l_{20} ;
- приведённую массу MC ;
- круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний.

Трением шариков о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

Общие исходные данные: $m^* = 0,1 \text{ кг}$, $k^* = 10 \text{ Н / м}$, $l^* = 0,1 \text{ м}$, $r^* = 0,2 \text{ кг / с}$, $u^* = 0,1 \text{ м / с}$, $\rho^* = 1000 \text{ кг / м}^3$, $S^* = 0,001 \text{ м}^2$, $\varphi^* = \frac{\pi}{6}$.

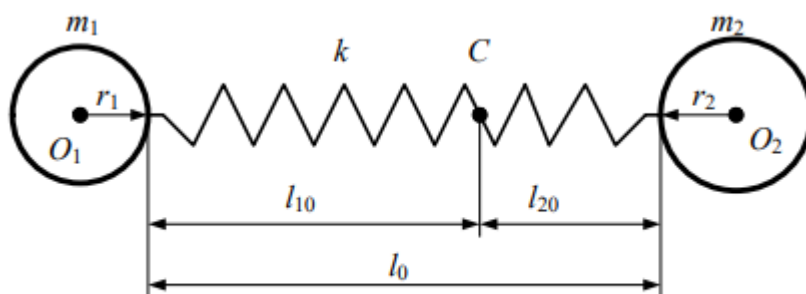


Рис. 18

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задачи 3) рассчитать все требуемые величины и вывести уравнение затухающих колебаний вертикального пружинного маятника (см. рис. 27), у которого масса шарика равна $m = m_1$, а длина и жёсткость пружины равны соответственно l_0 и k (см. табл.9). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной l , а затем кратковременным воздействием сообщают скорость v_1 или v_2 . В результате система приходит в колебательное

движение в вертикальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

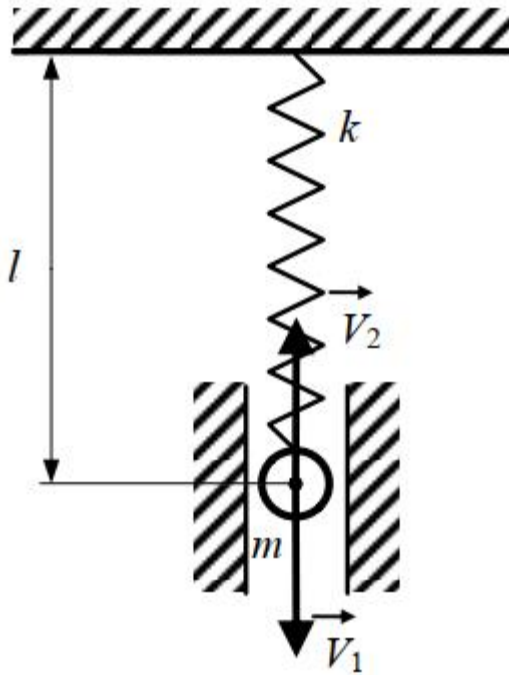


Рис. 27

Вар	m_1	m_2	k	l_0	l	r	v_1	v_2
8	$0,6m^*$	$0,5m^*$	$1,4k^*$	$1,6l^*$	$1,2l^*$	$1,6r^*$	0	$0,7u^*$

Решение

1.

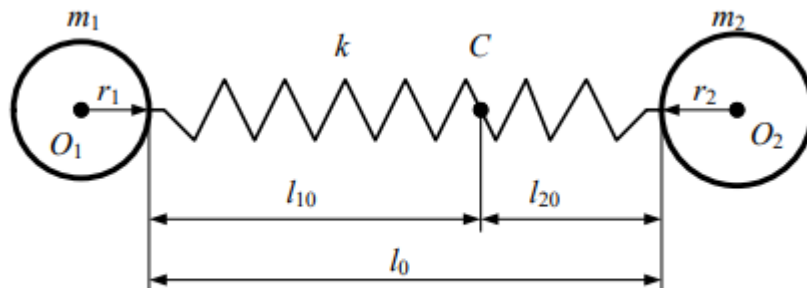


Рис. 18

Чтобы исключить влияние силы тяжести на данную МС, будем рассматривать движение этой системы на горизонтальной плоскости. При

этом трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать. Поскольку данная МС является замкнутой, то колебания этих шариков вдоль линии O_1O_2 , проходящей через центры шариков, можно рассматривать как колебания каждого шарика относительно неподвижного центра масс МС (т. С). В этом случае круговые (циклические) частоты колебаний 1-го и 2-го шариков будут равными $\omega_1 = \omega_2$ и соответственно будут определять частоту колебаний МС $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Данный тезис подтверждается соответствующими расчётами. Из формулы, определяющей координату центра масс МС, получаем следующие равенство:

$$m_1(r_1 + l_{10}) = m_2(r_2 + l_{20}) \quad (1)$$

где: r_1 и r_2 - радиусы 1-го и 2-го шариков. В дальнейшем будем полагать, что $l_{10} \gg r_1$ и $l_{20} \gg r_2$, и тогда вместо (1) получаем:

$$m_1 l_{10} = m_2 l_{20} \quad (2)$$

Поскольку $l_0 = l_{10} + l_{20}$, то в соответствии с (2) находим величины

$$l_{10} = l_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$l_{20} = l_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Известно, что жёсткость пружины обратно пропорциональна её длине. Поэтому можно написать, что

$$kl_0 = k_1 l_{10} = k_2 l_{20} = \text{const} \quad (5)$$

где const зависит от упругих свойств материала пружины и её геометрии, k_1 и k_2 – это жёсткости левой и правой частей пружины, определяемых соответственно длинами l_{10} и l_{20} . Что касается циклических частот колебаний 1-го и 2-го шариков, то они, согласно (5), будут равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{10} m_1}} \quad (6)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{20} m_2}} \quad (7)$$

Поскольку формула (2) остаётся справедливой в любой момент времени, то из (6) и (7) следует, что

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (8)$$

Если подставить (3) в (6), а (4) в (7), то с учётом (8) получаем формулу, определяющую круговую частоту колебаний рассматриваемой МС:

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \quad (9)$$

Величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

в формуле (3.9) называется приведённой массой КС. Следовательно, круговая частота данной КС запишется так:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (11)$$

Период собственных незатухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (12)$$

При $m_1 = 0,6m^*$, $m_2 = 0,5m^*$, $k = 1,4k^*$, $m^* = 0,1\text{кг}$, $l_0 = 1,6l^*$, $k^* = 10\text{Н} / \text{м}$, $l^* = 0,1\text{м}$

$$l_{10} = l_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1,6 \cdot 0,1 \cdot \frac{0,5m^*}{(0,6 + 0,5)m^*} = \frac{4}{55} \text{ м}$$

$$l_{20} = l_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1,6 \cdot 0,1 \cdot \frac{0,6m^*}{(0,6 + 0,5)m^*} = \frac{24}{275} \text{ м}$$

$$k_1 = \frac{k l_0}{l_{10}} = \frac{1,4 \cdot 10 \cdot 1,6 \cdot 0,1}{\frac{4}{55}} = 30,8 \text{ Н} / \text{м}$$

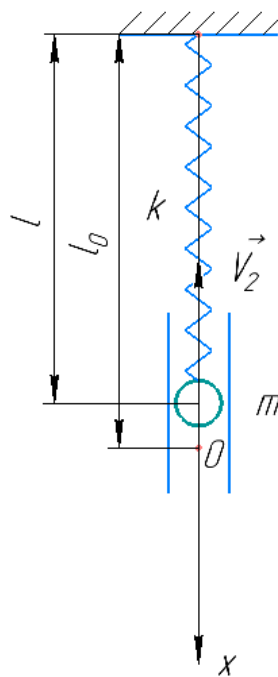
$$k_2 = \frac{kl_0}{l_{20}} = \frac{1,4 \cdot 10^1 \cdot 6,0 \cdot 1}{\frac{24}{275}} = \frac{77}{3} \text{ Н / м}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,6 \cdot 0,5 \cdot (m^*)^2}{(0,6 + 0,5)m^*} = \frac{3}{11} m^* = \frac{3}{11} \cdot 0,1 = \frac{3}{110} \text{ кг}$$

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^1}{\frac{3}{110}}} = \sqrt{\frac{1540}{3}} (\text{с}^{-1})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1540}{3}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{385}{3}}} (\text{с})$$

2.



По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \quad (12)$$

Проецируя (12) на ось x

$$\begin{aligned}
ma_x &= -F_{\text{уп}} + F_{\text{мп}} + mg \\
\Leftrightarrow mx'' &= -kx - r.x' + mg \\
\Leftrightarrow x'' + 2.\left(\frac{r}{2m}\right)x' + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 \left(x - \frac{mg}{k}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Полагая $x - \frac{mg}{k} = x_n$ тогда (13) имеет вид

$$x_n'' + 2.\left(\frac{r}{2m}\right)x_n' + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 x_n = 0 \tag{14}$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний запишется так:

$$x_n'' + 2.\beta x_n' + \omega_0^2 x_n = 0 \tag{15}$$

Где: $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - круговая частота свободного незатухающего колебания

Тогда период свободного незатухающего колебания равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{16}$$

Круговая частота ω и период T свободного затухающего колебания

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{17}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{18}$$

Логарифмический декремент затухания вычисляется по формуле

$$\delta = \beta.T \tag{19}$$

Решение уравнения (15) при $\omega_0 > \beta$ имеет вид

$$x_n = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (20)$$

Из (20)

$$x_n' = -A_0 \beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - A_0 \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (21)$$

В начальный момент времени

$$\begin{aligned} x_{n0} = x_0 - \frac{mg}{k} = l - l_0 - \frac{mg}{k} = A_0 \cos \varphi_0 \\ \Leftrightarrow \cos \varphi_0 = \frac{l - l_0 - \frac{mg}{k}}{A_0} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_n' = x' = -V_2 = -A_0 \beta \cos(\varphi_0) - A_0 \omega \sin(\varphi_0) \\ \Leftrightarrow V_2 = A_0 \beta \frac{l - l_0 - \frac{mg}{k}}{A_0} + A_0 \omega \sin(\varphi_0) \quad (23) \\ \Leftrightarrow \sin(\varphi_0) = \frac{-\beta \left(l - l_0 - \frac{mg}{k} \right) + V_2}{A_0 \omega} \end{aligned}$$

Из (22), (23) и $\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 = 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{l - l_0 - \frac{mg}{k}}{A_0} \right)^2 + \left(\frac{-\beta \left(l - l_0 - \frac{mg}{k} \right) + V_2}{A_0 \omega} \right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow A_0^2 = \left(l - l_0 - \frac{mg}{k} \right)^2 + \left(\frac{-\beta \left(l - l_0 - \frac{mg}{k} \right) + V_2}{\omega} \right)^2 \quad (24) \\ \Leftrightarrow A_0 = \sqrt{\left(l - l_0 - \frac{mg}{k} \right)^2 + \left(\frac{-\beta \left(l - l_0 - \frac{mg}{k} \right) + V_2}{\omega} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Из (19) } \varphi_0 = \arccos \frac{l - l_0 - \frac{mg}{k}}{A_0} \quad (25)$$

$$\text{При } m = m_1 = 0,6m^*, \quad k = 1,4k^*, m^* = 0,1\kappa z, \quad k^* = 10H / \mathcal{M}, \quad l^* = 0,1\mathcal{M}, \\ r^* = 0,2\kappa z / c, \quad u^* = 0,1\mathcal{M} / c, l_0 = 1,6l^*, \quad l = 1,2l^*, r = 1,6r^*, V_2 = 0,7u^*$$

$$\beta = \frac{r}{2m} = \frac{1,6.0,2}{2.0,6.0,1} = \frac{8}{3}(c^{-1})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1,4.10}{0,6.0,1}} = 10\sqrt{\frac{7}{3}}(c^{-1})$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\pi}{5\sqrt{\frac{7}{3}}}(c)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{700}{3} - \frac{64}{9}} = \frac{2\sqrt{509}}{3}(c^{-1})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\sqrt{509}}{3}} = \frac{3\pi}{\sqrt{509}}c$$

$$\delta = \beta.T = \frac{8}{3} \cdot \frac{3\pi}{\sqrt{509}} = \frac{8\pi}{\sqrt{509}}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \sqrt{\left(l - l_0 - \frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{-\beta\left(l - l_0 - \frac{mg}{k}\right) + V_2}{\omega}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(1,2.0,1 - 1,6.0,1 - \frac{0,6.0,1.9,81}{1,4.10}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{8}{3}\left(1,2.0,1 - 1,6.0,1 - \frac{0,6.0,1.9,81}{1,4.10}\right) + 0,7.0,1}{\frac{2\sqrt{509}}{3}}\right)^2} \\
 &= 0,08426(\text{м})
 \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1,2.0,1 - 1,6.0,1 - \frac{0,6.0,1.9,81}{1,4.10}}{0,08426} = 2,91 \text{ рад}$$

Уравнение колебания

$$\begin{aligned}
 x_n'' + 2 \cdot \frac{8}{3} x_n' + \frac{700}{3} x_n &= 0 \\
 \Leftrightarrow x'' + 2 \cdot \frac{8}{3} x' + \frac{700}{3} \left(x - \frac{0,6.0,1.9,81}{1,4.10}\right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x'' + 2 \cdot \frac{8}{3} x' + \frac{700}{3} (x - 0,04204) &= 0
 \end{aligned}$$

Его решение

$$\begin{aligned}
 x_n &= 0,08426 e^{-\frac{8}{3}t} \cos\left(\frac{2\sqrt{509}}{3}t + 2,91\right) \\
 \Leftrightarrow x &= 0,04204 + 0,08426 e^{-\frac{8}{3}t} \cos\left(\frac{2\sqrt{509}}{3}t + 2,91\right)
 \end{aligned}$$