Вопросы для подготовки к экзамену по дисциплине «Интегралы и дифференциальные уравнения»

Модуль 1. Интегралы

1 Сформулируйте определение определенного интеграла; его геометрический смысл.

Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, то он называется определенным интегралом (по Риману) от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to o}\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если функция принимает на отрезке неотрицательные значения, то *определенный интеграл можно интерпретировать как площадь под графиком функции.* В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла.*

2 Сформулируйте и докажите теорему об оценке определенного интеграла.

7°. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, а также $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $g(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (6.38)$$

◀ По условию $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a,b]$. Умножая все части этого неравенства на $g(x) \geqslant 0$, получаем

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Отсюда в силу свойства 6° и линейности определенного интеграла следует справедливость (6.38). ▶

Если $g(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$, то, очевидно, справедливо неравенство

$$M\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant m\int_a^b g(x)\,dx.$$

3 Сформулируйте и докажите свойство аддитивности определенного интеграла.

3°. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на двух других отрезках и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad (6.32)$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b и c.

Доказательство. Предположим сначала, что $a < c < b$, и составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, то мы будем разбивать отрезок $[a, b]$ на малые отрезки так, чтобы точка c была точкой деления. Разобьем далее интегральную сумму $\sum\limits_a^b$, соответствующую отрезку $[a, b]$, на две суммы: сумму $\sum\limits_a^c$, соответствующую отрезку $[a, c]$, и сумму $\sum\limits_c^b$, соответствующую отрезку $[c, b]$.

Тогда $\sum\limits_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum\limits_a^c f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum\limits_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, получим соотношение (6).

Если $a < b < c$, то на основании доказанного можем написать

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx;$$

но на основании формулы (4) § 2 имеем $\int\limits_b^c f(x)\,dx = -\int\limits_c^b f(x)\,dx$, поэтому $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

4 Сформулируйте и докажите теорему об интегрировании неравенств между функциями.

получаем $\int\limits_a f(x)dx \geqslant 0$.

7. Если на отрезке $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Так как $f(x) \geqslant g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i) \geqslant g(\varsigma_i) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\,\Delta x_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} g(\varsigma_i)\,\Delta x_i$. Переходя к пределу, получаем $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

5 Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении для определенного интеграла.

Теорема о среднем значении определенного интеграла («теорема о среднем»). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ (или $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$).

Геометрический смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своих верхней $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ граней. По теореме об оценке $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$, откуда, деля отрезок на части $b-a$, получаем

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

По второй теореме Больцано—Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c \in [a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}, \quad \text{т. е.} \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

6 Сформулируйте и докажите теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу (основная теорема математического анализа). Пусть функция $f(x)$непрерывна на отрезке $[a, b]$, пусть $x \in [a, b]$. Тогда $J'(x) = f(x)$.

Доказательство. Докажем, что

$$J'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{J(x + \Delta x) - J(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_a^x f(x)\,dx \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)(x + \Delta x - x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left(\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f(c)((x + \Delta x) - x),\ c \in (x,\ x + \Delta x) \right)$ и непрерывностью функции ($\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$).

7 Выведите формулу Ньютона-Лейбница для определенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда справедлива формула Ньютона — Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x) = f(x)$, т. е. $J(x)$ — первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных различаются на константу, т. е. $J(x) = F(x) + C$. Но $J(a) = 0$ (см. разд. 5.3, свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$. Тогда $J(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

8 Сформулируйте признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода для неотрицательных функций.

1) Признак сравнения. Пусть для всех $x \in [A, +\infty]$ (где $A > a$) выполнены неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Если расходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

2) Предельный признак сравнения. Пусть для всех $x \in [A, +\infty)$ (где $A > a$) выполняются неравенства $f(x), g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$. Тогда несобственные интегралы первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ в смысле сходимости ведут себя одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся.

9 Сформулируйте и докажите предельный признак сходимости несобственных интегралов 1-го рода для неотрицательных функций.

Предельный признак сходимости несобственных интегралов

Теорема (предельный признак для несобственных интегралов I рода)

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a;+\infty)$, и для любого $x \in [a;+\infty)$: $g(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K > 0, K \in R.$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

В частности, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Д-во: $x \in [a;+\infty)$: $g(x) > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x > \delta\ (\delta \ge a): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow (K-\varepsilon)g(x) < f(x) < g(x)(K+\varepsilon).$$

Выберем $\varepsilon > 0$, $K - \varepsilon > 0$. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда $\int\limits_\delta^{+\infty} f(x)dx$ сходится, и по признаку сравнения интеграл $\int\limits_\delta^{+\infty} (K-\varepsilon)g(x)dx$ сходится, следовательно, $\int\limits_\delta^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $\int\limits_\delta^{+\infty} f(x)dx$ расходится, и по признаку сравнения интеграл $\int\limits_\delta^{+\infty} (K+\varepsilon)g(x)dx$ расходится, следовательно, $\int\limits_\delta^{+\infty} g(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Аналогично можно доказать, что из сходимости (расходимости) интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость (расходимость) интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. **Д-но**

10 Сформулируйте и докажите предельный признак сходимости несобственных интегралов 2-го рода для неотрицательных функций.

Теорема (предельный признак для несобственных интегралов II рода)

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, b – особая точка, и для любого $x \in [a;b)$: $g(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K > 0, K \in R$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

В частности, если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Д-во: $x \in [a;b)$: $g(x) > 0$,

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x: \; b - \delta < x < b \, (b - \delta \geq a): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon \Rightarrow (K - \varepsilon) g(x) < f(x) < g(x)(K + \varepsilon).$$

Выберем $\varepsilon > 0$, $K - \varepsilon > 0$. Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Тогда $\int\limits_{b-\delta}^b f(x)dx$ сходится, и по признаку сравнения интеграл $\int\limits_{b-\delta}^b (K-\varepsilon)g(x)dx$ сходится, следовательно, $\int\limits_{b-\delta}^b g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится. Тогда $\int\limits_{b-\delta}^b f(x)dx$ расходится, и по признаку сравнения интеграл $\int\limits_{b-\delta}^b (K+\varepsilon)g(x)dx$ расходится, следовательно, $\int\limits_{b-\delta}^b g(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx$ расходится.

Аналогично можно доказать, что из сходимости (расходимости) интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость (расходимость) интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. **Д-но**

11 Сформулируйте признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода для неотрицательных функций.

1) *Признак сравнения.* Пусть для всех x из некоторого интервала вида $[b-\delta, b)$ (где $\delta > 0$) выполняются неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда если сходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, то также сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если расходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то также расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$.

2) *Предельный признак сравнения.* Пусть для всех x из некоторого интервала вида $[b-\delta, b)$ (где $\delta > 0$) выполняются неравенства $f(x), g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$.

Тогда несобственные интегралы второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся.

12 Выведите формулу площади криволинейного сектора, заданного в полярной системе координат.

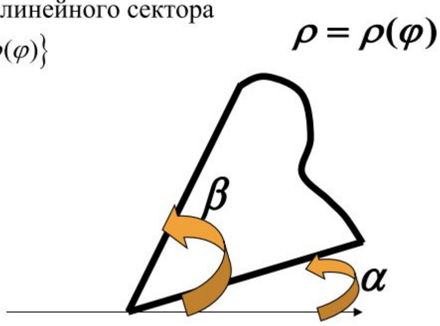
Вычисление площади криволинейного сектора

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, $\rho(\varphi) \geq 0$. Тогда площадь криволинейного сектора

$$\Phi = \left\{ (\rho; \varphi) \;\middle|\; \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi) \right\}$$

равна

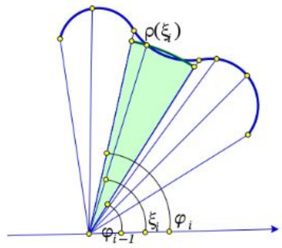
$$\boxed{S_\Phi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.}$$



Пусть τ - разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$,

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta,$$

Если $\Phi_i = \left\{ (\rho; \varphi) \;\middle|\; \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi) \right\}$, $i = 1, \ldots, n$, то площадь криволинейного сектора Φ складывается из площадей его i-ых частей, т.е. $S_\Phi = \sum_{i=1}^n S_{\Phi_i}$. Выберем произвольные точки разбиения $\xi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i], i = 1, \ldots, n.$ Рассмотрим круговые секторы P_i с радиусами $\rho(\varphi_i)$:



$P_i = \left\{ (\rho; \varphi) \;\middle|\; \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i, 0 \leq \rho \leq \rho(\xi_i) \right\}$, $i = 1, \ldots, n.$ Для достаточно мелкого разбиения τ, т.е. при $\Delta\tau = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta\varphi_i \approx 0$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, имеем $S_{\Phi_i} \approx S_{P_i} = \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$.

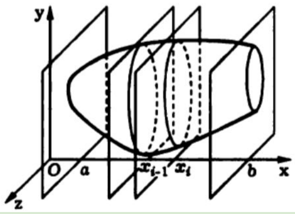
Отсюда получаем $S_\Phi = \sum_{i=1}^n S_{\Phi_i} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$. Поскольку функция $\rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, то существует $\lim_{\Delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$, что и принимаем за площадь криволинейного сектора Φ, и $S_\Phi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$.

13 Выведите формулу для вычисления объема по известным площадям поперечных сечений и формулу для вычисления объема тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX .

Объемы пространственных тел

Объём тела с заданными площадями параллельных сечений

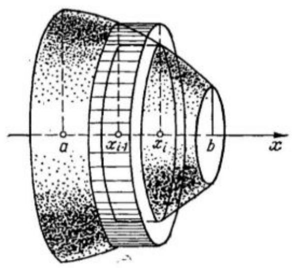
Теорема. Пусть $S(x)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x, $x \in [a;b]$, функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, и два различных сечения, спроецированных на какую-либо плоскость, перпендикулярную к оси Ox, содержатся одно в другом. Тогда объем тела

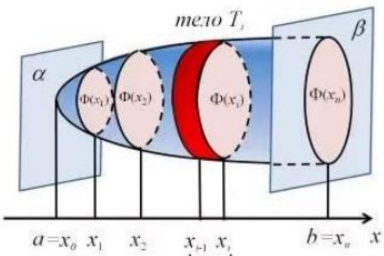


$$V = \int_a^b S(x)dx,$$

где a и b – абсциссы крайних сечений тела (сечения могут вырождаться в точку).

Док-во. Пусть τ - разбиение отрезка $[a;b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$,





$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$V_T = \sum_{i=1}^{k} V_{T_i}$$

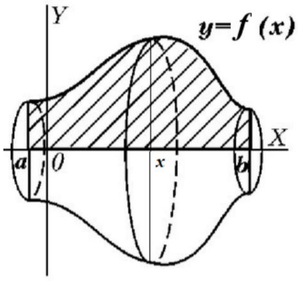
Выберем произвольные точки разбиения $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. На сечениях $\Phi(\xi_i)$ тела T плоскостями $x = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$, построим прямые цилиндры P_i высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда объем цилиндра P_i можно вычислить по формуле $V_{P_i} = S(\xi_i)\Delta x_i$. Для достаточно мелкого разбиения τ, т.е. при $\Delta\tau = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \approx 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, имеем $V_{T_i} \approx V_{P_i} = S(\xi_i)\Delta x_i$. Отсюда получаем $V_T = \sum\limits_{i=1}^{k} V_{T_i} \approx \sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$. Поскольку функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, то существует $\lim\limits_{\Delta_\tau \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx$, что и принимаем за объем тела T, и $V_T = \int_a^b S(x)dx$. **Д-но.**

Объём тела вращения

Вращение вокруг оси Ox

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, и $f(x) \geq 0$. Тогда тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $\Phi = \{(x;y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, имеет объем

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$$



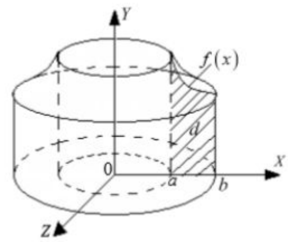
Док-во. Для тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $f(x)$, выполняются условия предыдущей теоремы. Для любого $x \in [a;b]$ в поперечном сечении имеем круг радиуса $r = f(x)$, площадь которого $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$. Таким образом, $V_{Ox} = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Д-но.

14 Выведите формулу объема тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OY .

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $a>0$, и $f(x)\ge 0$. Тогда тело *T*, образованное вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции $\Phi=\{(x;y)\mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$, имеет объем

$$\boxed{V_{Oy}=2\pi\int_a^b xf(x)dx.}$$



Док-во.

Пусть τ - разбиение отрезка $[a;b]$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$,

Выберем произвольные точки разбиения $\xi_i\in[x_{i-1};x_i], i=1,\ldots,n$. Цилиндр P_i (цилиндрический слой) образован вращением вокруг оси *Oy* прямоугольника с основанием $[x_{i-1},x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, T_i - тело, образованное вращением *i*-ой части криволинейной трапеции с таким же основанием. Тогда объем цилиндра P_i можно вычислить по формуле $V_{P_i}=\pi f(\xi_i)(x_i^2-x_{i-1}^2)$. Для достаточно мелкого разбиения τ, т.е. при $\Delta\tau=\max\limits_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i\approx 0$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, имеем $V_{T_i}\approx V_{P_i}$. Отсюда получаем $V_T=\sum\limits_{i=1}^{k}V_{T_i}\approx\pi\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i^2-x_{i-1}^2)$.

$$V_P(\tau)=\sum_{i=1}^{n}V_{P_i}=\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i^2-x_{i-1}^2)=\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i+x_{i-1})\Delta x_i=$$

$$=2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\xi_i\,\Delta x_i+\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-\xi_i)\Delta x_i+\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_{i-1}-\xi_i)\Delta x_i=$$

$$=2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\xi_i\,\Delta x_i+\Sigma_1(\tau)+\Sigma_2(\tau),$$

$$\Sigma_1(\tau)=\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-\xi_i)\Delta x_i\le\pi\max_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\to 0,$$

$$\Delta_\tau=\max_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i\to 0,$$

$$|\Sigma_2(\tau)|=\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,|\,x_{i-1}-\xi_i\,|\,\Delta x_i\le\pi\max_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\to 0,$$

$$\Delta_\tau=\max_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i\to 0.$$

$\lim\limits_{\Delta_\tau\to 0}V_P=2\pi\lim\limits_{\Delta_\tau\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\xi_i\,\Delta x_i=2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$, что и принимаем за объем тела *T*, и $V_T=2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$. **Д-но.**

15 Дайте определение длины дуги плоской кривой. Напишите формулы длины дуги кривой, заданной в декартовой и полярной системах координат.

Определение. Если существует конечный предел $L_{AB} = \lim\limits_{\substack{\max l_i \to 0 \\ i=1,\dots,n}} \sum_{i=1}^{n} l_i$, то говорят, что кривая AB имеет **длину** L_{AB}. В этом случае кривую AB называют **спрямляемой**.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную $f'(x)$, то длина кривой AB вычисляется по формуле

$$\boxed{L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.}$$

Итак, для кривой, заданной в полярной системе координат, верна формула для вычисления ее длины

$$\boxed{L_{AB} = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,dt}$$

16 Напишите формулу площади поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси OX .

Теорема. Если неотрицательная функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную $f'(x)$, то площадь поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$\boxed{S_{Ox} = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.}$$

Модуль 2. Дифференциальные уравнения

1 Сформулируйте и докажите теоремы о свойствах частных решений линейных однородного и неоднородного дифференциальных уравнений.

Теоремы о свойствах решений.

1. Сумма или разность решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения.

2. Разность решений неоднородного уравнения есть решение однородного уравнения.

3. Сумма решений однородного и неоднородного уравнений есть решение неоднородного уравнения.

Докажем эти теоремы:

1) $L(y_{о1} + y_{о2}) = Ly_{о1} + Ly_{о2} = 0;$

2) $L(y_{н1} - y_{н2}) = Ly_{н1} - Ly_{н2} = f(x) - f(x) = 0;$

3) $L(y_о + y_н) = Ly_о + Ly_н = 0 + f(x) = f(x).$

ТЕОРЕМА. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения ([redacted]), то $y_1(x) + y_2(x)$ и $C \cdot y_1(x)$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ тоже является решениями уравнения ([redacted]).*

2 Сформулируйте и докажите теорему о вронскиане линейно зависимой системы функций.

Определение. Систему функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$, определенную на отрезке $[a;b]$, называют линейно зависимой на этом отрезке в том случае, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, одновременно не равные нулю, т.е. $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$, такие, что на отрезке $[a;b]$ $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \equiv 0$. Если для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$, найдется точка $x \in [a;b]$, такая, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \neq 0$, то систему функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ называют линейно независимой на $[a;b]$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$.

Доказательство. Так как функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы, то какая-либо из них линейно выражается через остальные, например, $y_1(x) \equiv \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x)$. Тождество можно дифференцировать, поэтому $y_1^{(k)}(x) \equiv \lambda_2 y_2^{(k)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Тогда первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные столбцы, поэтому определитель Вронского тождественно равен нулю.

(дополнить доказательство тем, что лин. зав. ф-ции непрерывны и (n-1) раз дифференцируемы на рассматриваемом промежутке)

3 Сформулируйте и докажите теорему о вронскиане линейно независимой системы частных решений линейного однородного дифференциального уравнения.

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0. \qquad (\bigstar)$$

ТЕОРЕМА (условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения). *Если n решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного уравнения ($\bigstar$) линейно независимы на $[a;b]$, то определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0)=0.$$

Обозначим

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0)=y_{10}, & y_2(x_0)=y_{20}, & \ldots, & y_n(x_0)=y_{n0}; \\ y_1'(x_0)=y_{10}^{(1)}, & y_2'(x_0)=y_{20}^{(1)}, & \ldots, & y_n'(x_0)=y_{n0}^{(1)}; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)=y_{10}^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}(x_0)=y_{20}^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0)=y_{n0}^{(n-1)}. \end{array}$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{i0}, y_{i0}^{(k)}$:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} + C_2 y_{20}^{(1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(1)} = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы **M** системы

$$\det \mathbf{M} = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0)=0.$$

Следовательно, система (14.6) имеет ненулевые решения.

Пусть $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$ – одно из ненулевых решений системы

Функция $\widetilde{y}=\widetilde{C}_1 y_1+\widetilde{C}_2 y_2+\ldots+\widetilde{C}_n y_n$ в силу следствия будет являться решением уравнения ($\bigstar$), причем

$\widetilde{y}(x_0)=0$ из 1-го уравнения системы

$\widetilde{y}'(x_0)=0$ из 2-го уравнения системы

………………………………………………

$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0)=0$ из n-го уравнения системы

Но начальным условиям

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ y''(x_0)=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0$$

удовлетворяет и тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$\widetilde{y}=\widetilde{C}_1 y_1+\widetilde{C}_2 y_2+\ldots+\widetilde{C}_n y_n \equiv 0,$$

причем среди коэффициентов $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]. \ \blacksquare$$

4 Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n го порядка.

Теорема о структуре общего решения однородного уравнения. Общее решение линейного однородного уравнения есть линейная комбинация решений фундаментальной системы:

$$y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Доказательство. Покажем, что линейная комбинация $y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является общим решением. То есть она удовлетворяет следующим пунктам определения общего решения (см. разд. 12).

1. Функция $y_{oo}(x)$ — решение линейного однородного уравнения как линейная комбинация решений.

2. Зададим произвольные начальные условия $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$, покажем, что можно подобрать константы $C_1, \ldots, C_n$ такие, что $y_{oo}(x)$ удовлетворяет этим начальным условиям:

$$\begin{aligned}
&y_{oo}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0;\\
&y_{oo}'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0';\\
&y_{oo}''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \ldots + C_n y_n''(x_0) = y_0'';\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{oo}^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Получена система линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1, \ldots, C_n$. Определитель этой системы — определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x), \ldots, \ldots, y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1, \ldots, C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям — правым частям системы единственным образом.

Следовательно, $y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ — общее решение.

5 Дайте определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n го порядка. Сформулируйте и докажите теорему о существовании фундаментальной системы решений для указанного уравнения.

Определение. Любая линейно независимая на отрезке $[\alpha; \beta]$ система решений уравнения $Ly = 0$ с непрерывными на $[\alpha; \beta]$ коэффициентами, состоящая из n функций называется **фундаментальной системой решений (ФСР).**

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ly = 0,$$

Теорема (о существовании ФСР для ЛОДУ). Для любого линейного однородного дифференциального уравнения $Ly = 0$ с непрерывными на $[\alpha; \beta]$ коэффициентами существует ФСР.

Док-во. Зададим n^2 чисел: $y_k^{(l)}(x_0)$, $k = 1, \ldots, n$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, (обозначения этих чисел) с условием:

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(0)}(x_0) & y_2^{(0)}(x_0) & \cdots & y_n^{(0)}(x_0) \\ y_1^{(1)}(x_0) & y_2^{(1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(1)}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решим n задач Коши:

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y^{(l)}(x_0) = y_k^{(l)}(x_0), \, l = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n, \;\; x_0 \in [\alpha; \beta].$$

Поскольку выполнены условия теоремы Коши о существовании и единственности решения любой задачи Коши, то все эти n задач Коши имеют единственные решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Поскольку определитель Вронского этой системы решений в точке x_0 совпадает с определителем $W \neq 0$, то система функций $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ - ФСР, т.е. n линейно независимых решений уравнения $Ly = 0$. Док-но.

6 Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n го порядка.

Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения. Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения линейного неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x)$ — общее решение неоднородного уравнения (см. разд. 12), т. е. удовлетворяет пунктам определения общего решения.

1. Функция $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x)$ — решение неоднородного уравнения как сумма решений однородного и неоднородного уравнений (теоремы о свойствах решений).

2. Зададим произвольные начальные условия $x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ \ldots y_0^{(n-1)}$. Вычислим начальные условия для выбранного частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}(x_0),\ y_{\text{чн}}'(x_0),\ \ldots,\ \ldots y_{\text{чн}}^{(m-1)}(x_0)$. Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант:

$$\begin{aligned}
&y_{\text{оо}}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{чн}}(x_0);\\
&y_{\text{оо}}'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{\text{чн}}'(x_0);\\
&y_{\text{оо}}''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \ldots + C_n y_n''(x_0) = y_0'' - y_{\text{чн}}'(x_0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{\text{оо}}^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) =\\
&= y_0^{(n-1)} - y_{\text{чн}}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Определитель этой системы — определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1, \ldots, C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям — правым частям системы единственным образом. Следовательно, $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x)$ — общее решение неоднородного уравнения.

7 Выведите формулу Остроградского - Лиувилля для линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка: $a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$. Здесь формулу Остроградского — Лиувилля можно вывести проще. Введем $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два частных решения в виде $a_0(x)\,y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1 = 0$; $a_0(x)\,y_2'' + a_1(x)\,y_2' + a_2(x)\,y_2 = 0$. Умножим первое уравнение на y_2, а второе на y_1 и вычтем первое уравнение из второго, тогда

$$a_0(x)\left(y_1y_2'' - y_2y_1''\right) + a_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = 0.$$

Так как $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$, то $W'(x) = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$.

Теперь исходное уравнение можно переписать в виде $a_0(x) \times W'(x) + a_1(x)\,W(x) = 0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского — Лиувилля $W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$.

Формула для построения второго частного решения по известному (построение фундаментальной системы) имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Разделим обе части уравнения на $y_1^2(x) \neq 0$ и запишем

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Отсюда $\dfrac{y_2}{y_1} = \displaystyle\int C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx + C_1$. Нам надо найти частное решение, поэтому выберем $C = 1$, C_1=0, получим $y_2 = y_1 \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2} \times$

$\times e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx$. Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы и составляют фундаментальную систему решений уравнений второго порядка.

8 Сформулируйте и докажите теорему о наложении частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения (принцип суперпозиции).

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad Ly = f(x),$$

Теорема (принцип суперпозиции или наложения решений). Пусть функции $y_i = y_i(x), i = 1, \ldots, m,$ являются решениями неоднородных уравнений $Ly = f_i(x)$ с непрерывными на отрезке $[\alpha; \beta]$ коэффициентами $a_k(x), k = 1, \ldots, n,$ и правыми частями $f_i(x)$ соответственно. Тогда для любых чисел $\lambda_i, i = 1, \ldots, m,$ функция $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i(x)$ является решением уравнения $Ly = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$

Док-во. Согласно условию, для любых $x \in [\alpha; \beta]$ верны равенства $Ly_i(x) = f_i(x), i = 1, \ldots, m.$ Тогда, учитывая линейность оператора L, для любых $x \in [\alpha; \beta]$ и любых чисел $\lambda_i, i = 1, \ldots, m,$ получаем

$L\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L y_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x),$ и $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i(x)$ является решением уравнения $Ly = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$. **Д-но.**

9 Дайте обоснование метода вариации произвольных постоянных (метода вариации Лагранжа) для линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных Лагранжа

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (2)$$

то можно найти и общее решение неоднородного уравнения (1).

Действительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Далее полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения, т. е. имеет вид

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i, \qquad (4)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции.

Для определения n неизвестных $C_i(x)$ есть пока только одно обязательное условие – функция (4) должна удовлетворять неоднородному уравнению (1). Следовательно, $(n-1)$ условие для выбора функций $C_i(x)$ можно задать произвольно, лишь бы полученная система условий оказалась совместной. Например, можно потребовать, чтобы *производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (4) структурно совпадали с производными функции (3), т. е. чтобы они получались из соответствующих производных функции (3) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$*. Так как для функции (3)

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i',$$

а для функции (4)

$$y' = \left[C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1'\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n + C_n(x)y_n'\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i',$$

то такое требование приведет к первому произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0. \qquad (a_1)$$

Далее, для функции (3)

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'' ,$$

а для функции (4) (при условии a_1)

$$y'' = \left[C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1''\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n' + C_n(x)y_n''\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i'' ,$$

что приводит ко второму произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 . \qquad (a_2)$$

Продолжая этот процесс, в качестве $(n-1)$-го произвольного условия получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)} = C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 . \qquad (a_{n-1})$$

Так как согласно нашим предположениям производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (4) имеют вид

$$y^{(k)} = C_1(x)y_1^{(k)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(k)} \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

то $\quad y^{(n)} = \left[C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_1(x)y_1^{(n)}\right] + \ldots + \left[C_n'(x)y_n^{(n-1)} + C_n(x)y_n^{(n)}\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)} ,$$

и из обязательного условия получаем:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)}}_{y^{(n)}} + a_1(x)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)}}_{y^{(n-1)}} + \ldots + a_n(x)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i}_{y} = f(x),$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\underbrace{\left[y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_i\right]}_{0} = f(x) ,$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x) . \qquad (a_n)$$

Итак, требование, чтобы производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (4) получались из соответствующих производных функции (3) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$ дало для функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ условия (a_1), (a_2), …, (a_n), т. е. систему

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}} \qquad (5)$$

Система (5) – система n линейных уравнений с n неизвестными. Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Так как функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, то по теореме их определитель Вронского отличен от нуля при любом x. Поэтому система (5) совместна и имеет единственное решение. Решая ее, находим

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1, n}) .$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \widetilde{C}_i ,$$

где $\widetilde{C}_i$ – произвольные постоянные. Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \widetilde{C}_i\right) y_i .$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

10 Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ly = 0,$$

(Рассмотреть для двух функций. В вронскиане останется 4 элемента)

1) Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

имеет n различных действительных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$ образуют линейно независимую систему решений, и, следовательно ФСР уравнения. Действительно,

$$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\textit{определитель Вандермонда})$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n - \lambda_{n-2})\cdots(\lambda_n - \lambda_1) \neq 0$$

Следовательно, $y_{опо}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}$.

11 Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ly = 0,$$

2) Все корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексные. Докажем для случая $n = 2$. Пусть для уравнения $y'' + py' + qy = 0$ характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет пару комплексно сопряженных корней: $\lambda_{1/2} = a \pm ib$. Тогда ФСР будет состоять из функций: $y_1 = e^{(a+ib)x}, y_2 = e^{(a-ib)x}$. Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Имеем

$y_1 = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx), y_2 = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx).$

Функции $\tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos bx, \tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$ образуют линейно независимую систему действительных решений дифференциального уравнения, т.е. ФСР. Следовательно, $y_{оро}(x) = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx.$

12 Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ly = 0,$$

3) Среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Докажем для случая $n = 2$. Пусть для уравнения $y'' + py' + qy = 0$ характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет один действительный корень кратности 2. В этом случае дискриминант уравнения равен нулю, т.е. $D = p^2 - 4q = 0,\ \lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} = \lambda_0$. Имеем решение $y_1 = e^{\lambda_0 x}$. Будем искать общее решение в виде $y = z(x)e^{\lambda_0 x}$. Подставим в уравнение $y'' + py' + qy = 0$, учитывая, что

$$y' = z'(x)e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 z(x)e^{\lambda_0 x}, \quad y'' = z''(x)e^{\lambda_0 x} + 2\lambda_0 z'(x)e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 z(x)e^{\lambda_0 x}.$$

Получаем

$$y' = z'(x)e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 z(x)e^{\lambda_0 x}, \quad y'' =$$

$$z''(x)e^{\lambda_0 x} + 2\lambda_0 z'(x)e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 z(x)e^{\lambda_0 x} + p(z'(x)e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 z(x)e^{\lambda_0 x}) + qz(x)e^{\lambda_0 x} = 0,$$

$$z''(x) + (2\lambda_0 + p)z'(x) + (\lambda_0^2 + p\lambda_0 + q)z(x) = 0,\ 2\lambda_0 + p = 0,\ \lambda_0^2 + p\lambda_0 + q = 0,$$

$$z''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = C_1 + C_2 x \quad \Rightarrow$$

$$y_{opo} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}, \quad ФСР: y_1 = e^{\lambda_0 x},\ y_2 = xe^{\lambda_0 x}.$$