Задача 4-2 для вариантов с 7 по 17

Для стержня длиной l , закреплённого, как указано на рис. 35 - 40, необходимо:

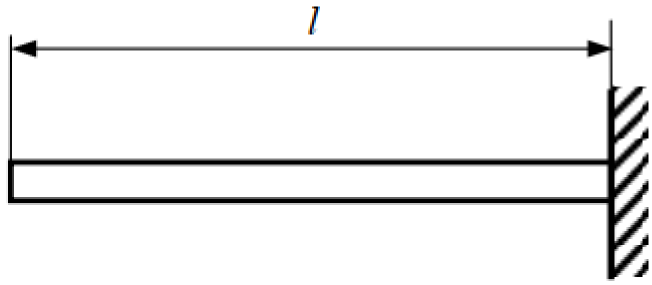

Рис. 36

- Вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна;

- Указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам);

- Определить частоту и длину волны i-ой гармоники;

- Для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественную картину:

а) Стоячей волны амплитуд смещений;

б) Стоячей волны амплитуд деформаций.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в таблице № 17.

№ вар.	**Вид крепления**	**Материал**	**Плотность ρ, 10^3 кг/м^3**	**Модуль Юнга E, 10^{10}Па**	**Длина l, м**	**Определить i-ю гармонику**
8	Рис 36.	Латунь	8,5	12	1	2

Решение

Если на левом торце стержня длиной l (см. рис. 36) будет действовать источник гармонических колебаний

$$\xi\left(t\right) = A\cos\left(\omega t\right) (1)$$

то вдоль стержня слева направо будет распространяться прямая волна

$$\xi_1\left(x,t\right) = A\cos\left(\omega t - kx\right) (2)$$

где A - амплитуда волны, $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$- волновое число, ω - циклическая частота колебаний, λ – длина волны.

При отражении прямой волны (2) от свободного противоположного правого торца стержня длиной l по стержню будет распространяться обратная отражённая волна

$$\xi_2\left(x,t\right) = A\cos\left(\omega t + kx - 2kl - \pi\right) (3)$$

При наложении прямой (2) и обратной (3) волн в стержне образуется стоячая волна

$$\begin{aligned}\xi\left(t\right) &= \xi_1\left(x,t\right) + \xi_2\left(x,t\right) = 2A\cos(kl - kx + \frac{\pi}{2})\cos(\omega t - kl - \frac{\pi}{2}) \quad (4)\\ &= -2A\sin(kl - kx)\sin(\omega t - kl)\end{aligned}$$

Амплитуда стоячей волны будет равна

$$A_{cm} = 2A\left|\sin\left(kl - kx\right)\right| (5)$$

При x=l из (5) следует, что $A_{cm} = 0$. Это означает, что на конце стержня всегда будет узел смещений частиц стержня. Чтобы на переднем торце стержня, откуда по стержню распространяется возмущение, (при x=0) была пучность, необходимо чтобы в (5) $\sin\left(kl\right) = \pm 1$. А это возможно при выполнении условия, что

$$kl = \left(2n - 1\right)\frac{\pi}{2} (6)$$

где: $n = 1, 2, 3, ...$ – целочисленный ряд значений или с учётом того, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, после преобразований получаем

$$l = \frac{\lambda(2n-1)}{4} \quad (7)$$

Из формулы (7) можно также определить частоты ν_n, при которых в стержне образуется стоячая волна. Поскольку

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (8)$$

где ν - частота колебаний, связанная с циклической частотой соотношением $\omega = 2\pi\nu$, а скорость упругой волны с определяется по формуле $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, то при подстановке (8) в (7) находим возможные частоты, при которых в стержне может образоваться стоячая волна,

$$\nu_n = \frac{c}{4l}(2n-1) \quad (9)$$

При n=1 из (9) определяем основную частоту (основной тон)

$$\nu_1 = \frac{c}{4l} \quad (10)$$

При n=2, 3, 4 находим обертоны.

Из формулы (5) при условии равенства $\sin(kl - kx) = 0$, находим координаты узлов стоячей волны

$$kl - kx = m.\pi \quad (11)$$

Отсюда при условии, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, находим

$$x_m = l - \frac{m\lambda}{2} \quad (12)$$

Частоту и длина волны 2-ой гармоники (n = 2):

$$\nu_{2(2-я\,гармоника)} = \frac{c}{4l}.(2n-1) = \frac{3c}{4l} \quad (13)$$

$$\lambda_{2(2-я\,гармоника)} = \frac{4l}{2n-1} = \frac{4l}{3} \quad (14)$$

При $\rho = 8,5.10^3 кг/м^3$, $E = 12.10^{10} Па$, $l = 1м$

Скорость упругой волны $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{12.10^{10}}{8,5.10^3}} = 3757,35 м/с$,

Формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна;

$$\nu_n = \frac{c}{4l}(2n-1) = \frac{3757,35}{4.1}(2n-1) = 939,3375.(2n-1)(Гц) \text{ при } n = 1,2,3,4,...$$

При $n = 1$, основная гармоника $\nu_1 = 939,3375(Гц)$

При $n = 2,3,4,...$, обертоны $\nu_n = 939,3375.(2n-1)(Гц)$

2-ая гармоника

Частоту и длина волны 2-ой гармоники (n = 2):

$$\nu_{2(2-я\,гармоника)} = \frac{3c}{4l} = \frac{3.3757,35}{4.1} = 2818,0125 Гц \quad (13)$$

$$\lambda_{2(2-я\,гармоника)} = \frac{4l}{3} = \frac{4.1}{3} = 1,33 м \quad (14)$$

Волновое число $k = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = 1,5\pi$

Амплитуда смещений стоячей волны

$$\begin{aligned} A_{ст} &= 2A\left|\sin(kl - kx)\right| \\ &= 2A\left|\sin(1,5\pi.1 - 1,5\pi x)\right| \\ &= 2A\left|\sin(1,5\pi - 1,5\pi x)\right| \end{aligned}$$

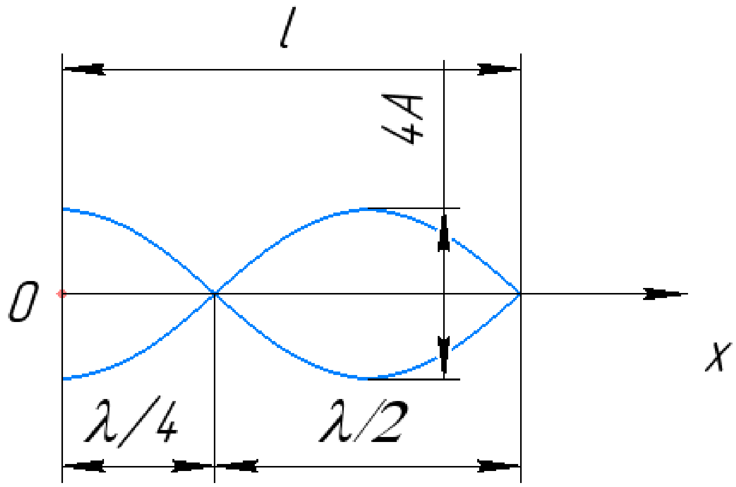

Рис.1.Качественная картина стоячей волны амплитуд смещений

Амплитуда деформаций стоячей волны

$$A_{деф} = \left|\frac{\partial A_{ст}}{\partial x}\right| = 2A.k\left|\cos\left(kl - kx\right)\right| = 3\pi A\left|\cos(1{,}5\pi - 1{,}5\pi x)\right|$$

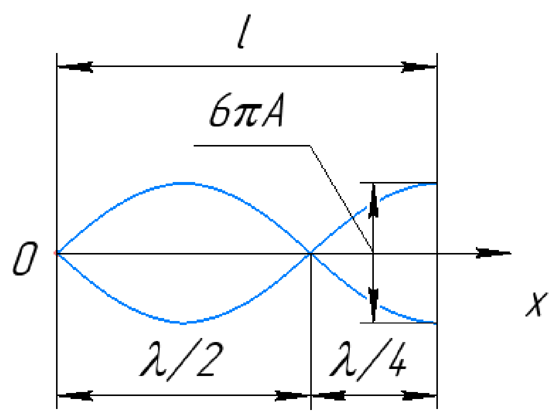

Рис.2.Качественная картина стоячей волны амплитуд деформаций