

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

Отчет по заданию 2. Вариант 10( $29 \bmod 20 + 1 = 10$ )

Студента 3 курса 321 группы направления 09.03.01 ИВТ

Факультета компьютерных наук и информационных технологий

Чесакова Максима Евгеньевича

**Задача №1** Проверить на биективность/транзитивность полиномы  $f(x) = 18+x-7x^2$  и  $g(x) = \frac{17}{19}x - \frac{1}{15}$  на  $\mathbb{Z}_2$ . Решить задачу аналитически, затем проверить с помощью программной реализации.

**Аналитическое решение.**

**Теорема Ларина.** Многочлен  $F$  с целыми или рациональными 2-адическими коэффициентами биективен (транзитивен) на  $\mathbb{Z}_2$ , тогда и только тогда, когда  $F$  биективен (транзитивен) по модулю 4, т. е. редукция  $F \bmod 4$  является перестановкой (транзитивен по модулю 8, т. е. редукция  $F \bmod 8$  одноцикловая перестановка)

Найдём редукцию  $f \bmod 4$ :

$$18 = (0)^\infty 10010, \quad 1 = (0)^\infty 1, \quad -7 = (1)^\infty 001, \quad \Rightarrow \quad f \bmod 4 = 2 + x + x^2.$$
$$f(0) \bmod 4 = 2, \quad f(1) \bmod 4 = 0, \quad f(2) \bmod 4 = 0, \quad f(3) \bmod 4 = 2.$$

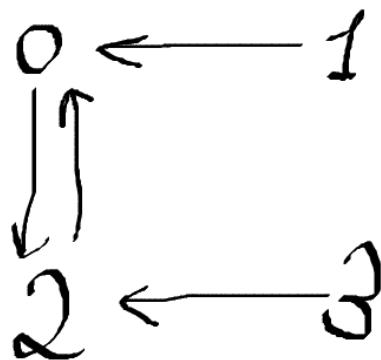


Рисунок 1 – диаграмма  $f \bmod 4$

Следовательно,  $f$  не биективна на  $\mathbb{Z}_2$ . Следовательно не транзитивна на  $\mathbb{Z}_2$ .

Найдём редукцию  $g \bmod 4$ :

Для разложения дробей в 2-адические числа используем лемму Малера:

**Лемма Малера.** Пусть  $r, s, p \in \mathbb{Z}$ ;  $s \geq 1$  и пусть  $p \geq 2$ ,  $\text{НОД}(p, s) = 1$ . Тогда существуют уникальные  $A, R \in \mathbb{Z}$  такие, что  $\frac{r}{s} = A + p\frac{R}{s}$ , где  $0 \leq A \leq p - 1$ . С помощью леммы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{17}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-1}{19}, \\ \frac{-1}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-10}{19}, \\ \frac{-10}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-5}{19}, \\ \frac{-5}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-12}{19}, \\ \frac{-12}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-6}{19}, \\ \frac{-6}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-3}{19}, \\ \frac{-3}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-11}{19}, \\ \frac{-11}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-15}{19}, \\ \frac{-15}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-17}{19}, \quad \Rightarrow \quad \frac{17}{19} = (0000110101111001011)^{\infty} \\ \frac{-17}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-18}{19}, \\ \frac{-18}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-9}{19}. \\ \frac{-9}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-14}{19}, \\ \frac{-14}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-7}{19}, \\ \frac{-7}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-13}{19}, \\ \frac{-13}{19} &= 1 + 2 \cdot \frac{-16}{19}, \\ \frac{-16}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-8}{19}. \\ \frac{-8}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-4}{19}, \\ \frac{-4}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-2}{19}. \\ \frac{-2}{19} &= 0 + 2 \cdot \frac{-1}{19}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{15} &= 1 + 2 \cdot \frac{-8}{15}, \\ \frac{-8}{15} &= 0 + 2 \cdot \frac{-4}{15}, \\ \frac{-4}{15} &= 0 + 2 \cdot \frac{-2}{15}, \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{15} = (0001)^{\infty} \end{aligned}$$

$$\frac{-2}{15} = 0 + 2 \cdot \frac{-1}{15},$$

---

$$g \pmod{4} = 3x + 1.$$

$$g(0) \pmod{4} = 1, \quad g(1) \pmod{4} = 0, \quad g(2) \pmod{4} = 3, \quad g(3) \pmod{4} = 2.$$

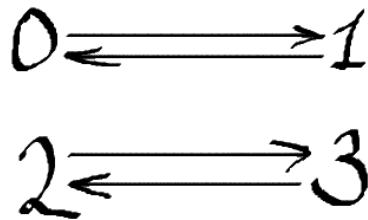


Рисунок 2 – диаграмма  $g \pmod{4}$

Следовательно,  $g$  биективна на  $\mathbb{Z}_2$ . Проверим транзитивность. Найдём редукцию  $g \pmod{8}$ :

$$g \pmod{8} = 3x + 1.$$

$$g(0) \pmod{8} = 1, \quad g(1) \pmod{8} = 4, \quad g(2) \pmod{8} = 7, \quad g(3) \pmod{8} = 2,$$

$$g(4) \pmod{8} = 5, \quad g(5) \pmod{8} = 0, \quad g(6) \pmod{8} = 3, \quad g(7) \pmod{8} = 6.$$

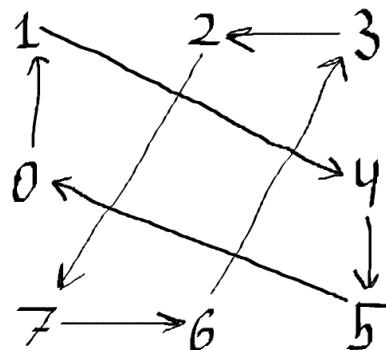


Рисунок 3 – диаграмма  $g \pmod{8}$

Функция  $g \pmod{8}$  имеет двухцикловую перестановку, следовательно  $g$  не транзитивна на  $\mathbb{Z}_2$ .

**Ответ:**  $f$  не биективна, не транзитивна на  $\mathbb{Z}_2$ ,  $g$  биективна на  $\mathbb{Z}_2$ , но не транзитивна на  $\mathbb{Z}_8$ .

**Программная реализация на Python.**