

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

Отчет по заданию 2. Вариант $10(29 \bmod 20 + 1 = 10)$

Студента 3 курса 321 группы направления 09.03.01 ИВТ

Факультета компьютерных наук и информационных технологий

Чесакова Максима Евгеньевича

Задача №1 Проверить на биективность/транзитивность полиномы $f(x) = 18 + x - 7x^2$ и $g(x) = \frac{17}{19}x - \frac{1}{15}$ на \mathbb{Z}_2 . Решить задачу аналитически, затем проверить с помощью программной реализации.

Аналитическое решение.

Теорема Ларина. Многочлен F с целыми или рациональными 2-адическими коэффициентами биективен (транзитивен) на \mathbb{Z}_2 , тогда и только тогда, когда F биективен (транзитивен) по модулю 4, т. е. редукция $F \bmod 4$ является перестановкой (транзитивен по модулю 8, т. е. редукция $F \bmod 8$ одноцикловая перестановка)

Найдём редукцию $f \bmod 4$:

$$18 = (0)^\infty 10010, \quad 1 = (0)^\infty 1, \quad -7 = (1)^\infty 001, \quad \Rightarrow \quad f \bmod 4 = 2 + x + x^2.$$
$$f(0) \bmod 4 = 2, \quad f(1) \bmod 4 = 0, \quad f(2) \bmod 4 = 0, \quad f(3) \bmod 4 = 2.$$

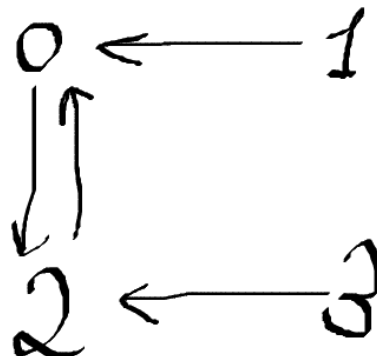


Рисунок 1 – диаграмма $f \bmod 4$

Следовательно, f не биективна на \mathbb{Z}_2 . Следовательно не транзитивна на \mathbb{Z}_2 .

Найдём редукцию $g \bmod 4$:

Для разложения дробей в 2-адические числа используем лемму Малера:

С помощью леммы имеем:

$$\implies \frac{-1}{15} = (0001)^\infty$$

$$\frac{-2}{15} = 0 + 2 \cdot \frac{-1}{15},$$

$$g \bmod 4 = 3x + 1.$$

$$g(0) \bmod 4 = 1, \quad g(1) \bmod 4 = 0, \quad g(2) \bmod 4 = 3, \quad g(3) \bmod 4 = 2.$$

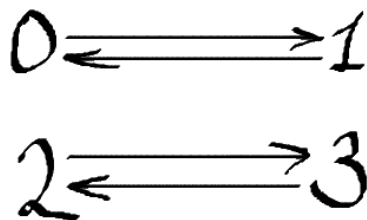


Рисунок 2 – диаграмма $g \bmod 4$

Следовательно, g биективна на \mathbb{Z}_2 . Проверим транзитивность. Найдём редукцию $g \bmod 8$:

$$g \bmod 8 = 3x + 1.$$

$$g(0) \bmod 8 = 1, \quad g(1) \bmod 8 = 4, \quad g(2) \bmod 8 = 7, \quad g(3) \bmod 8 = 2,$$

$$g(4) \bmod 8 = 5, \quad g(5) \bmod 8 = 0, \quad g(6) \bmod 8 = 3, \quad g(7) \bmod 8 = 6.$$

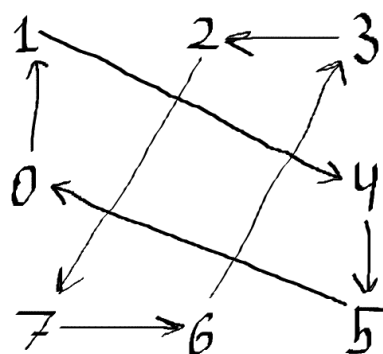


Рисунок 3 – диаграмма $g \bmod 8$

Функция $g \bmod 8$ имеет двухцикловую перестановку, следовательно g не транзитивна на \mathbb{Z}_2 .

Ответ: f не биективна, не транзитивна на \mathbb{Z}_2 , g биективна на \mathbb{Z}_2 , но не транзитивна на \mathbb{Z}_2 .

Программная реализация на Python.