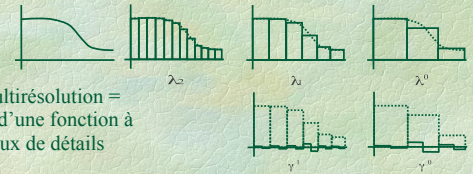


Les ondelettes et la multirésolution

Master IVI,
Module M3DA, cours 3

Principe général



Définition: Multirésolution = représentation d'une fonction à plusieurs niveaux de détails

Propriété des ondelettes: pas d'augmentation de la quantité de données.

Intérêts:

- Compression
- Infos sur la structure du signal



(images extraites de «Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes», Eck & AL., SIG. 95)

» Analyse de Fourier

- Base globale
- Sinusoïdes de fréquences variant arithmétiquement

» Fourier fenêtré et filtres de Gabor

- Base locale
- Fonctions de base: produit de sinusoïdes et de gaussiennes

» Ondelettes

- Base locale
- Fréquences variant géométriquement
- Fonction de base de forme indépendante de l'échelle
- Bien plus de degrés de libertés que pour la TF dans le choix des fonctions de base
- Gère les signaux périodiques, apériodiques de manière naturelle
- La théorie intègre de fait les signaux de support fini
- Localisation en temps ET en fréquence

Analyse multirésolution: suite d'e.v. imbriqués $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^n$

Espaces de détails: $V^i \oplus W^i = V^{i+1}$

Fonctions d'échelle: $\Phi^i = [\varphi_1^i \quad \varphi_2^i \quad \dots \quad \varphi_{n_i}^i]^T$

Raffinabilité: $\varphi_k^i(x) = \sum_j h_{k+j}^i \varphi_{k+j}^{i+1}(x) \quad \Phi^i = H^i \Phi^{i+1}$

Fonctions d'ondelettes: $\Psi^i = [\psi_1^i \quad \psi_2^i \quad \dots \quad \psi_{n_i-n_{i-1}}^i]^T$

Raffinabilité: $\psi_k^i(x) = \sum_j g_{k+j}^i \psi_{k+j}^{i+1}(x) \quad \Psi^i = G^i \Psi^{i+1}$

Mise en oeuvre: Modèle défini par un jeu de m+1 paramètres $\lambda_0, \dots, \lambda_m$

On se donne un niveau de résolution n initial: $\lambda^n = [\lambda_0^n, \dots, \lambda_m^n]^T$

Mise en oeuvre: Modèle défini par un jeu de $m+1$ paramètres $\lambda_0, \dots, \lambda_m$

On se donne un niveau de résolution n initial: $\lambda^n = [\lambda_0^n, \dots, \lambda_{m_n}^n]^T$

Représentation multirésolution: Jeu d'approximations successives mettant en œuvre des *moyennes* λ^k et des *détails* γ^k .

$\lambda^k = [\lambda_0^k, \dots, \lambda_{m_k}^k]^T$ avec $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq m_k \leq m_n$

$\gamma^k = [\gamma_0^k, \dots, \gamma_{m_{k+1}-m_k}^k]^T$

Mise en oeuvre: Modèle défini par un jeu de $m+1$ paramètres $\lambda_0, \dots, \lambda_m$

On se donne un niveau de résolution n initial: $\lambda^n = [\lambda_0^n, \dots, \lambda_{m_n}^n]^T$

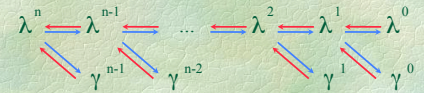
Représentation multirésolution: Jeu d'approximations successives mettant en œuvre des *moyennes* λ^k et des *détails* γ^k .

$\lambda^k = [\lambda_0^k, \dots, \lambda_{m_k}^k]^T$ avec $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq m_k \leq m_n$

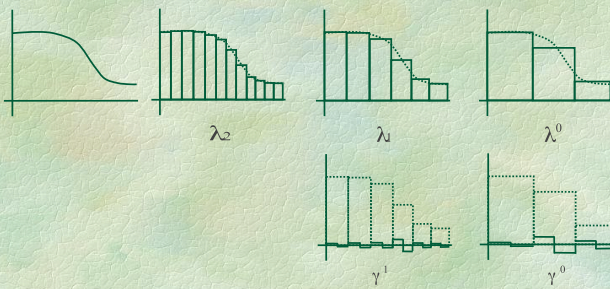
$\gamma^k = [\gamma_0^k, \dots, \gamma_{m_{k+1}-m_k}^k]^T$

analyse

synthèse



Exemple 1: ondelettes de Haar



Exemple 2: ondelettes biorthogonales B-splines

Classification au moyen de deux entiers naturels :

n : ordre des fonctions de base B-splines

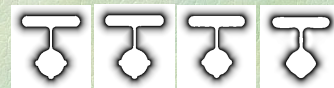
\tilde{n} : «efficacité» de la décomposition par ondelettes

Compromis: quand n ou \tilde{n} augmente, meilleure représentation mais plus coûteuse

$n=\tilde{n}=1$



$n=\tilde{n}=4$



256² coefs 64² coefs 32² coefs 16² coefs

- Classification des modèles d'ondelettes
 - interpolation/approximation
 - localité
 - symétrie
 - continuité
 - type des coefficients des filtres
 - expression analytique pour les fonctions de bases
 - gestion de l'orthogonalité
 - nombres de *moments* s'annulant

- Deux grands types de familles

- orthogonales
- bi-orthogonales

- Ondelettes orthogonales: propriétés
 - pleines orthogonalité des éléments impliqués (fonctions de bases, e.v.)
 - outils numériques puissants (évaluation de l'erreur lors de l'utilisation en compression)

13

- Ondelettes orthogonales: exemples
 - ondelettes de Haar
 - ondelettes de Shannon
 - ondelettes de battle-lemarié
 - ondelettes de daubechies

14

- Ondelettes bi-orthogonales: propriétés
 - pour chaque fonction impliquée, existence d'une fonction *duale*
 - chaque espace vectoriel défini ainsi un espace *dual*
 - cas particulier: la semi-orthogonalité
 - cadre bien plus souple que la pleine orthogonalité

15

➤ Ondelettes bi-orthogonales: mise en oeuvre

Formulation matricielle: 4 filtres $H^i, G^i, \tilde{H}^i, \tilde{G}^i$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}^i \\ \tilde{G}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}^i \\ \tilde{G}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} = I$$

Éléments de multirésolution en modélisation géométrique

16

➤ Ondelettes bi-orthogonales: mise en oeuvre

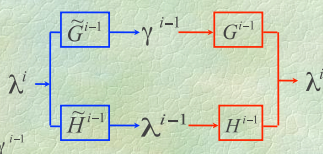
Formulation matricielle: 4 filtres $H^i, G^i, \tilde{H}^i, \tilde{G}^i$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}^i \\ \tilde{G}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}^i \\ \tilde{G}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} = I$$

Utilisation de ces filtres:

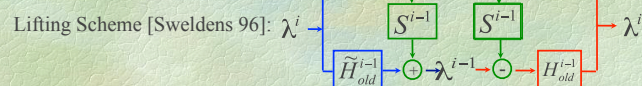
Décomposition: $\begin{cases} \lambda^{i-1} = \tilde{H}^{i-1} \lambda^i \\ \gamma^{i-1} = \tilde{G}^{i-1} \lambda^i \end{cases}$

Reconstruction: $\lambda^i = H^{i-1} \lambda^{i-1} + G^{i-1} \gamma^{i-1}$



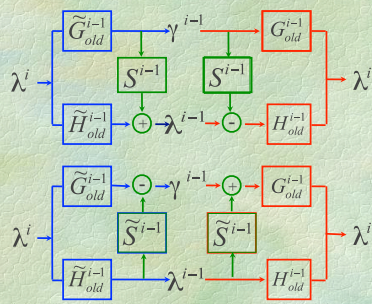
Éléments de multirésolution en modélisation géométrique

17



18

Lifting Scheme [Sweldens 96]: λ^i



Lifting Scheme Dual:

Cakewalk: construction en échelle, par application alternée du LS et du LSD.

Intérêts du Lifting Scheme:

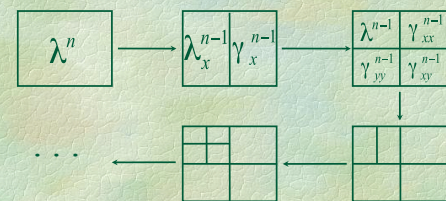
- liberté totale sur les matrices S et \tilde{S}
- implémentation simple
- inversion immédiate
- construction souple et modulaire

très utilisé ces dernières années (JPEG 2000, ondelettes sphériques, lien avec modélisation variationnelle)

Exemples d'ondelettes bi-orthogonales

- ondelettes B-splines (semi-orthogonales ou non)
- ondelettes de cohen, daubechies et feauveau
- ondelettes sphériques

Extension à des dimensions supérieures :
produit tensoriel (généralement non-standard)



Extension à des dimensions supérieures :
produit tensoriel (généralement non-standard)



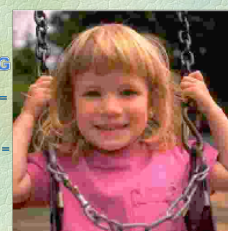
Compression de données

Au ratio 1:100

JPEG

PSNR =
26.5

Filesize =
8 KB

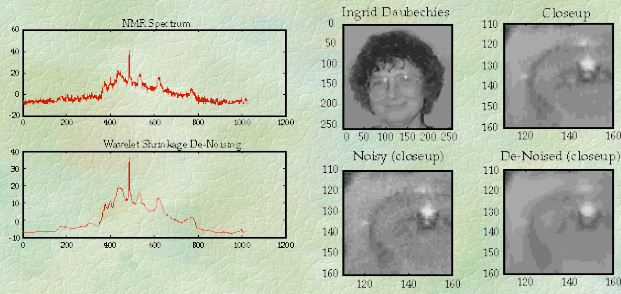


JPEG 2000

PSNR =
31.0

Filesize =
8 KB

- Ondelettes adaptées à la suppression de bruit, sans connaissance particulière de celui-ci



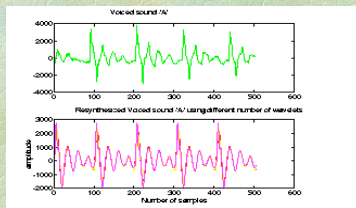
- Reconnaissance de forme: approches hiérarchiques pour la mise en correspondance de formes, le suivi de trajectoires, détection de contours (précurseurs: filtres gaussien & laplacien pyramidaux)

Systeme de stockage et de reconnaissance d'empreintes FBI (gauche original, droite 1:26):



- Synthèse vocale: fort parallèle entre les ondelettes biorthogonales et les filtres QMF

paquets d'ondelettes, ondelettes à forte composante fréquentielle (ex: Morlet)

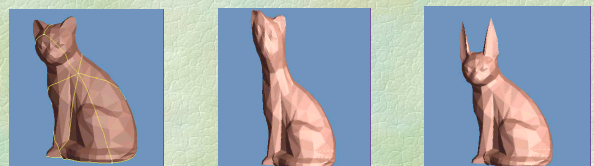


Haut: signal original (son /A/).
Bas: même son synthétisé avec 16 coefficients d'ondelettes

- Imagerie Médicale
- Astrophysique
- Analyse financière
- Analyse fractale, chaos, turbulence
- Statistiques
- Décomposition d'opérateurs linéaires (equa diff's, éq. Intégrales)
- ...

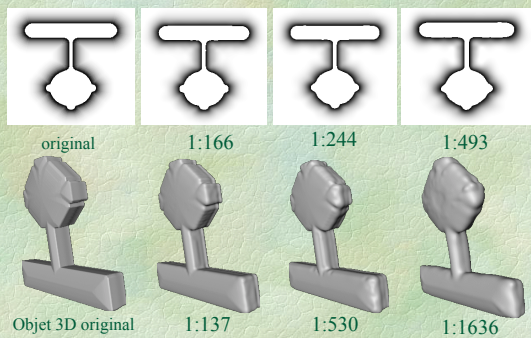
- Intérêt en informatique graphique: utilisable a priori partout où la notion de *fonction* (ou de signal, selon ce que l'on manipule) intervient

- Modélisation multirésolution



(images extraites de «Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes», Eck & Al., SIG. 95)

Compression de données



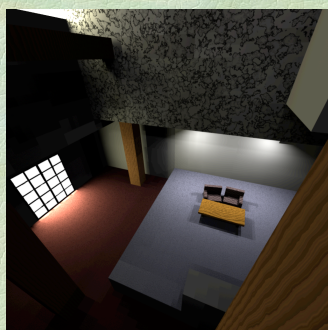
- Lien fort avec la notion de subdivision normal meshes, Guskov & al, Siggraph 2000



lifting scheme permet d'ouvrir porte vers modélisation variationnelle

- Radiosité par ondelettes base: décomposition d'opérateur linéaires

Schröder & Al, siggraph 1993



- Traitement d'image extraction multi-résolution des contours

- Interrogation automatique de base de données d'image (*image querying*)

De la lecture:

chapitre 1 de these dispo sur ma page web principale