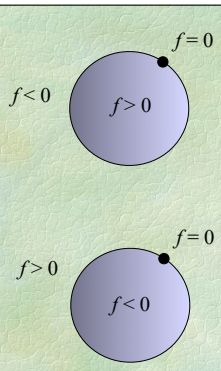
# Surfaces implicites

Master IVI,
module M3DA, cours 4

## definition

- Fonction réelle $f(x,y,z)$
- Fourni une classification des points de l'espace
- Exemple de classification (en IS)
  - intérieur $f > 0$
  - extérieur $f < 0$
  - surface $f = 0$
- En CAO: intérieur $f < 0$, extérieur $f > 0$




## Intérêt de l'implicite

- Par rapport aux polygones
  - Continuité de surface garantie
  - représentation compacte, moins de primitives haut niveau
  - Plus délicat à afficher en temps réel
- Par rapport aux patches polygonaux
  - Plus faciles a mélanger
  - Plus de pb de topologie
  - Degré d'evaluation souvent plus faible
  - Plus difficile a paramétrer
  - Plus facile a visualiser en lancer de rayon

## conversion

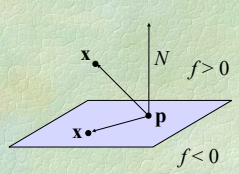
- Implicitisation: parametric->implicit
  - Trouver f à partir de p(s,t) telle que $f(\mathbf{p}(s,t)) = 0$
  - Utilisation des résultants [Sederberg 83]
  - Technique des « moving surfaces » (level sets)
  - Problème: polygones??
- Parametrisation: implicite -> parametrique
  - trouver $\mathbf{p}$ étant donné $f$ tel que $f(\mathbf{p}(s,t)) = 0$
  - Crée patchs paramétriques
  - Polygonization
  - Texture mapping

## Normales à la surface

- Donnée par le gradient de f
  $\nabla f(x,y,z) = (\delta f/\delta x, \delta f/\delta y, \delta f/\delta z)$
- Gradient non unitaire
- Gradient pointe dans la direction des f croissants
  - Vers l'exterieur si $f < 0$ désigne l'interieur
  - Vers l'intérieur si $f > 0$ désigne l'intérieur

## Exemple: un plan

- Plan vu comme limite d'un demi-espace
- Plan défini par un point $\mathbf{p}$ et une normale $N$
- Points $\mathbf{x}$ du plan sont tous orthogonaux à $N$
- $f$ est une fonction de distance si $||N|| = 1$




$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot N$$

# Quadriques

$f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Dx + Ey^2 + 2Fyz + 2Gy + Hz^2 + 2Iz + J$

- Ellipsoide (Sphere): $Ax^2 + Ey^2 + Hz^2 - 1 = 0$
- Cylindre: $Ax^2 + Ey^2 - 1 = 0$
- Hyperboloide (Cone): $Ax^2 + Ey^2 - Hz^2 + J = 0$
- Paraboloide: $Ax^2 + Ey^2 - 2Iz = 0$

# Quadriques en coordonées homogènes

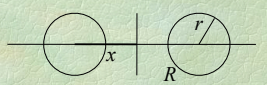
$\boxed{f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q\, \mathbf{x}}$ $\quad f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & E & F & G \\ C & F & H & I \\ D & G & I & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

Homogeneous coordinates

- $[x\ y\ z\ w]$
- Divide by w to find actual coords: $[x/w\ y/w\ z/w\ 1]$

Intéret: transformations:
$\mathbf{x}\, Q\, \mathbf{x}^T = 0, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}T$
trouver $Q'$ tq $\mathbf{x}' Q' \mathbf{x}'^T = 0$
$\mathbf{x} = \mathbf{x}' T^*$
$\mathbf{x}' T^*\, Q\, (\mathbf{x}' T^*)^T = 0$
$\mathbf{x}' (T^*\, Q\, T^{*T})\, \mathbf{x}'^T = 0$
$Q' = T^*\, Q\, T^{*T}$

# Tore

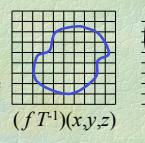



2 étapes:

- Produit de deux cercles implicites
  $(x - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$
  $(x + R)^2 + z^2 - r^2 = 0$
  $((x - R)^2 + z^2 - r^2)((x + R)^2 + z^2 - r^2) = 0$
  $(x^2 - Rx + R^2 + z^2 - r^2)\,(x^2 + Rx + R^2 + z^2 - r^2) = 0$
  $x^4 + 2x^2z^2 + z^4 - 2x^2r^2 - 2z^2r^2 + r^4 + 2x^2R^2 + 2z^2R^2 - 2r^2R^2 + R^4 = 0$
  $(x^2 + z^2 - r^2 - R^2)^2 + 4z^2R^2 - 4r^2R^2 = 0$
- Surface de rotation
  on remplace $x^2$ par $x^2 + y^2$ pour avoir rotation autour de z
  $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2)^2 + 4R^2(z^2 - r^2)$

# Déformations

- $f$ défini dans l'espace non déformé
- Transformations affines
  - Scale: $(ax,by,cz)$
  - etirement: $(x + ay + bz,\ y + cz,\ z)$
- Non-Affine (Barr S84)
  - Ecrasement (taper): $(z\,x,\ z\,y,\ z)$
  - Twist: $(x \cos z - y \sin z,\ x \sin z + y \cos z,\ z)$
  - Courbure (bend)

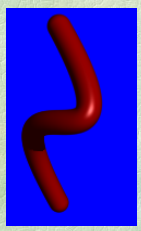



# Surfaces de distances

- Sphere: $d(\mathbf{x}, \text{point}) - r$
- Cylindre: $d(\mathbf{x}, \text{ligne}) - r$
- Cylindre fini: $d(\mathbf{x}, \text{segment}) - r$
- Tore: $d(\mathbf{x}, \text{cercle}) - r$
- Cylindre generalisé: $d(\mathbf{x}, \text{courbe}) - r$
- Décalage de surface: $d(\mathbf{x}, \text{surface}) - r$

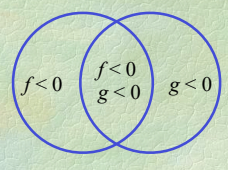
$d(\mathbf{x},A) = \min \{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in A\}$

Nb: offset à partir de paramétrique ne génère pas forcément une surface paramétrique



# CSG

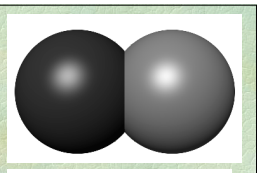
- Hypothèse: $f < 0$ à l'intérieur
- CSG par opération min/max:
  - Union: $\min f,g$
  - Intersection: $\max f,g$
  - Complement: $-f$
  - Soustraction: $\max f,-g$
- Probleme: discontinuité $C^1$
- Peut-on lisser les zones de mélange?

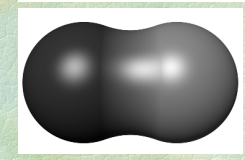


## Mélange (blend)

- Surface lisse qui interpole deux surfaces séparées
- utilisation:
  - Image de synthèse: Blobs, soft objects, metaballs
  - CAO: surfaces algebriques, Pseudonorme
- portée
  - Globale: modifie toute la surface
  - Locale: modifie une région donnée

## Blobs





- Blinn 1982
- Somme de gaussiennes

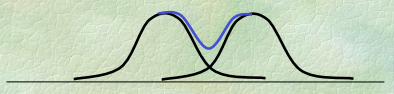
  $r_i^2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

  $f(\mathbf{x}) = -1 + \Sigma \exp(-(B_i/R_i^2)r_i^2 + B_i)$

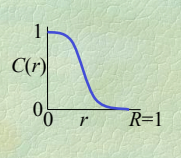
  B – "blobbiness" (coef. positif)

  R – rayon du blob au repos

  $r$ – rayon de la fonction



## Soft Objects



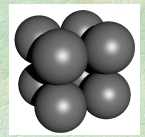

- Wyvill, McPheeters & Wyvill 86
- Exponentielle: couteuse, non locale
- Approximation polynomiale de $\exp(-r^2)$

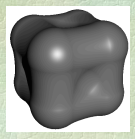
  $C(0) = 1$, $C(R) = 0$, $C'(0) = 0$, $C'(R) = 0$

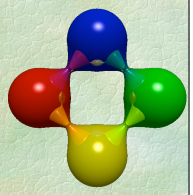
  $C(r^2) = -(4/9)r^6/R^6 + (17/9)r^4/R^4 - (22/9)r^2/R^2 + 1$

  $C(r) = 2r^3/R^3 - 3r^2/R^2 + 1$

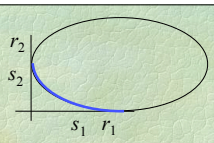
  $C(r) = (1 - r^2/R^2)^3$ (continuité $G^2$)



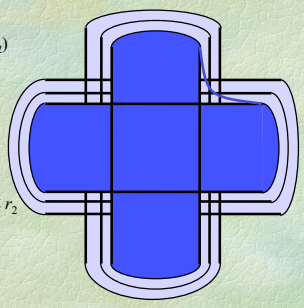




## Mélanges algébriques




- Hoffman & Hopcroft 85
- Mélanger $f^{-1}(0)$ avec $g^{-1}(0)$
- On considère $f^{-1}(s_1)$, $g^{-1}(s_2)$
- Mélange quand $f^{-1}(s_1)$ intersecte $g^{-1}(s_2)$
- Defini h tel que $h(s_1,s_2) = 0$
- $h(s_1,s_2) = (s_1 - r_1)^2/r_1^2 + (s_2 - r_2)^2/r_2^2 - 1$ (ellipse)
- Mélange: $H(\mathbf{x}) = h(f(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}))$
- Si $f,g$ quadriques, alors H quartique, généralement tore
- Evaluation du mélange: si $f < r_1$ et $g < r_2$ alors H sinon min $f,g$

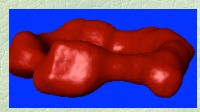


## Conséquence sur normales

- $H(\mathbf{x}) = h(f(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}))$
- $h(f,g) = A(f) + B(g) + C$, classiquement
- $\nabla H = A'(f)\,\nabla f + B'(g)\,\nabla g$
- Ex: mélange algebrique
  - $h(f,g) = (f-a)^2/a^2 + (g-b)^2/b^2 - 1$
  - $\nabla H = (2(f-a)/a^2)\nabla f + (2(g-b)/b^2)\,\nabla g$

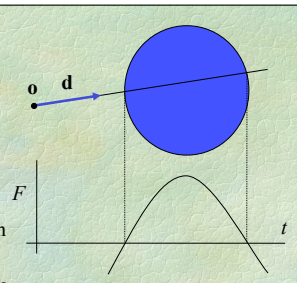
## Hypertexture

- Bruit
  - Perlin S85
  - Interpolation de valeurs pseudo-aléatoires
- Deformation du bruit
  - $f(x,y,z) + N(x,y,z)$
  - Possibilité de « débris »
- Déformation du domaine de bruitage
  - $f((x,y,z) + DN(x,y,z))$
  - Pas de « débris »



# Lancer de rayons

- Rayon paramétrique
  - $\mathbf{r}(t) = \mathbf{o} + t\mathbf{d}$
  - Point d'origine **o**
  - Direction (unitaire) **d**
- Résolution implicite sur le rayon
  - $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$
  - Fonction réelle à une variable
  - Recherche de racine de F




# Recherche de racine

- Surfaces algébriques
  - DesCartes [Hanrahan S'84]
- Surfaces de Lipschitz
  - LG-Surfaces [Kalra & Barr S'89]
  - Sphere Tracing [Hart 96]
- Surfaces quelconques
  - Arithmétique par interval [Mitchell 89]
  - Incrémental (marching) [Perlin & Hoffert 89]

# Polygonalisation

- Conversion d'une surface implicite vers maillage
- Visualisation utilise polygones
- approximation
- Deux étapes
  - Partition de l'espace en cellules
  - Approximation polygonale locale à chaque cellule

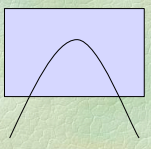
# Partitionnement spatial

- Division de l'espace en reseau de cellules
  - Cubes
  - Tetrahedres
  - Adaptatif
- Trois techniques
  - Enumeration (toutes les cellules)
  - Subdivision (octree, k-d tree)
  - Surface tracking (à partir d'un point de départ)

# Critère de subdivision

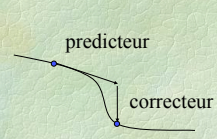
Comment savoir que la surface passe dans une cellule donnée?

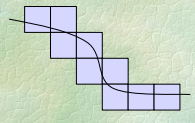
- Cellules d'intersections
  - Au moins un sommet à l'exterieur, et un sommet intérieur
  - Condition suffisante mais non-necessaire
- Critères théoriques
  - Analyse par interval
  - Conditions de Lipschitz



# Techniques de tracking

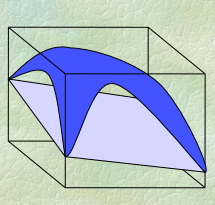
- Prediction-correction
  - Extrapolation sur la tangente
  - Calcul de la position de la surface
- Approximation linéaire
  - On suit les faces des cubes
  - Traitement en file plutot qu'en pile



# Polygonalisation d'une cellule

- Cellule contient un bout de la surface
- Approximation à l'interieur de cette cellule
- Approximation linéaire par morceaux (polygone)

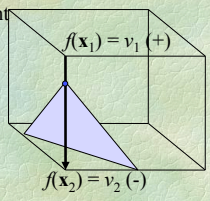


# Calcul des sommets de la surface

- On determine sur quelle arete la surface intersecte la cellule
- Interpolation pour determiner le point d'intersection
- Ou bien recherche numérique de la racine $f(\mathbf{r}(t))$

  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2\text{-}\mathbf{x}_1)$

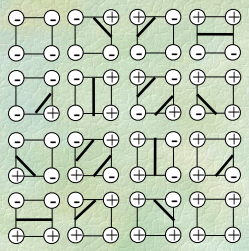
  $0 \le t \le 1$



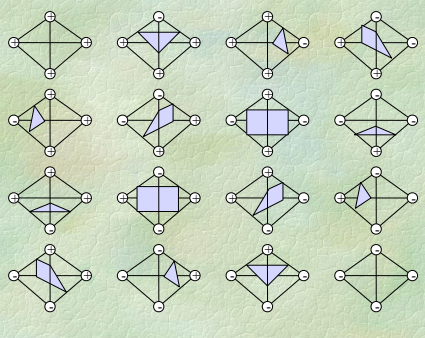

$$\mathbf{x} = \frac{v_1}{v_1 + v_2}\mathbf{x}_1 + \frac{v_2}{v_1 + v_2}\mathbf{x}_2$$

# Type de polygone

- Table de référence indexée par les états binaires des sommets
- On affecte arbitrairement + à 1, - à 0
- Taille indicative de la table
  - Cellules tetrahedriques: 16 entrées
  - Cellules cubiques: 256 entrées
- Ex: 2-D - 16 cellules carrées

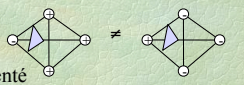


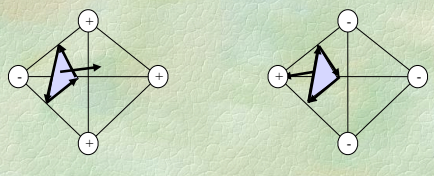
# Polygones de cellules tetrahedriques



# Orientation

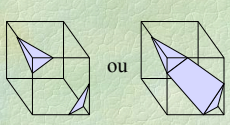
- Chaque polygone peut etre orienté localement
- Backface culling eventuellement

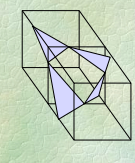




# Probleme: ambiguité

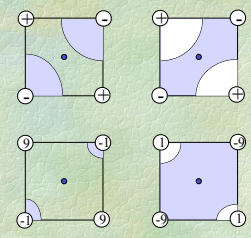
- Certaines configurations de cellules peuvent generer plusieurs configurations polygonales possibles
- Seulement pour cubes, pas pour tetrahedres
- Peut générer trous en 3D dans la surface
- Comment résoudre les ambiguités?



# Argument topologique

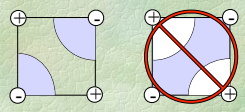
- Échantillonage d'un point sur la face ambiguë
- En cas d'echantillonage discret, interpolation bilinéaire




$$p(s,t) = (1-s)(1-t)\,a + s\,(1-t)\,b + (1-s)\,t\,c + s\,t\,d$$

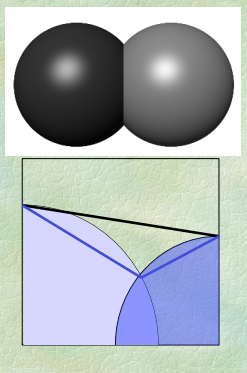
# Preference

- Suppose qu'une ambiguité est toujours levée par la même configuration + (ou -)
- Preference peut être codée en dur dans la table



# Polygonalisation CSG

- Une polygolisation brutale peut absorber les aretes crées par l'arbre CSG
- Création d'arétes vives « en force »



# Subdivision

- Quand il y a un doute
- Division en sous-cubes
  - Ambiguité potentiellement non-résolue
- En tetrahedres
  - Peut servir de cellule de base

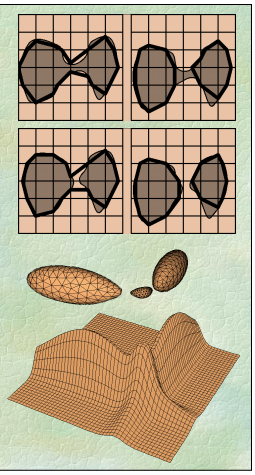
# Systemes à particules

- Witkin Heckbert Siggraph 94
- Maintien de particules sur la surface par le biais d'une contrainte
- Les particules exercent sur les autres des forces de répulsion pour s'ecarter les unes des autres
- Les particules se divisent pour remplir les trous
- Les particules fusionnent si sur-population
- Chaque particule est visualisée comme un disque orienté
- Representation par point (*surfel*)

Using Particles
to
Sample and Control
Implicit Surfaces

# Maillage particulaire

- Stander Hart Siggraph 97
- Maintien de la cohérence topologique
- Lien entre le maillage et l'objet implicite
- questions:
  - Quels sommets doivent etre reliés?
  - Comment lier les sommets si la surface evolue dans le temps?
- Solution: théorie de morse
- Recherche et mise à jour des points critiques de la fonction pour reperer les changements topologiques



# Shrinkwrapping

- Examen des surfaces $f^{-1}(s)$ for $s > 0$
- Pour $s$ grand, $f^{-1}(s)$ “a peu prés” sphériques
- Polygonalisation de cette surface
- Reduction itérative de la surface jusqu’au zéro
  - Suivi de la surface par les points
  - Subdivision des polygones quand la courbure locale augmente
  - Reperage des points critiques si besoin