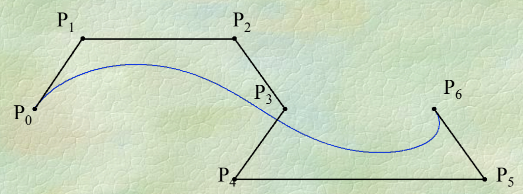
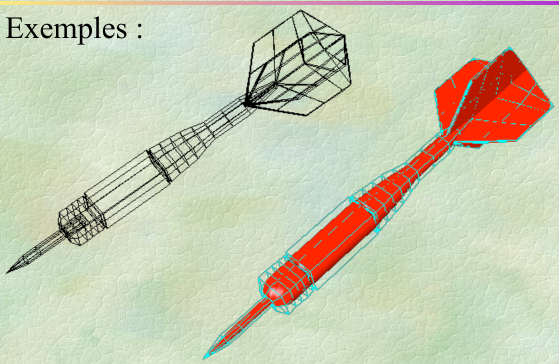
# Les courbes et surfaces splines

Master IVI,
module M3DA, cours 1

## Exemples :




## Exemples :



## Historique

Issues des travaux de Schoenberg menés dans les années 40.

Idée : Améliorer les techniques d'interpolation numérique en utilisant des *polynômes définis par morceaux.*

↓

Découverte d'une base de l'espace des polynômes par morceaux les *B-spline*.
(équivalent par morceaux de la base des polynômes de Lagrange ).

La *formulation par récurrence* date des années 60/70 et uniquement dans le domaine de la modélisation géométrique.

## Définition : préambule

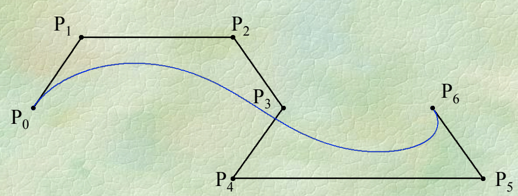
La formulation mathématique des courbes et surfaces splines n'englobe pas certains modèles dont le comportement est pourtant voisin : par exemple les courbes et surfaces de Bézier.

*Solution choisie*

Utiliser un formalisme plus général et mieux adapté au cadre de la modélisation géométrique, même si on s'éloigne du formalisme mathématique d'origine.

## Définition : généraliste

Les courbes et les surfaces spline sont des modèles mathématiques qui permettent d'associer une représentation continue (courbe ou surface) à un ensemble discret de points d'un espace affine (habituellement $IR^3$ )



## Définition : mathématique

Soit un ensemble de *points de contrôle* $P_k$ de $IR^3$
Soit un ensemble de *fonctions d'influence* $F_k$ *: [0,1]* $\longrightarrow$ IR
On appelle *courbe spline* engendrée par les couples *(*$P_k$,$F_k$*)* la courbe *C* d'équation :

$$\boxed{\forall t \in [0,1], \quad C(t) = \sum_{k=0}^{n} F_k(t)\, P_k}$$

On ne précise rien à priori sur la nature des fonctions $F_k$.
(indépendant de la définition de Schoenberg) .

*Quel type de fonctions faut-il choisir ? Pourquoi ?*

## Définition : mathématique

Soit un ensemble de *points de contrôle* $P_{ij}$ de $IR^3$
Soit un ensemble de *fonctions d'influence* $F_{ij}$ : $[0,1]^2 \longrightarrow$ IR
On appelle *surface spline* engendrée par les couples *(*$P_{ij}$,$F_{ij}$*)* la surface $S$ d'équation :

$\forall (u,v) \in [0,1]^2$ ,

$$\boxed{S(u,v) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{m} Fij(u,v)\, P_{ij}}$$

## Définition : mathématique

***Cas particulier :*** les fonctions $F_{ij}$ *sont séparables en u et v.*

$\forall i = 0 \ldots l$ , $\forall j = 0 \ldots m$ ,

$\exists F_i : [0,1]$ ® $R$, $\exists F_j : [0,1]$ ® R

$\forall (u,v) \in [0,1]^2$ ,

$$F_{ij}(u,v) = F_i(u) F_j(v)$$

## Définition : mathématique

Cas particulier : les fonctions $F_{ij}$ *sont séparables en u et v.*

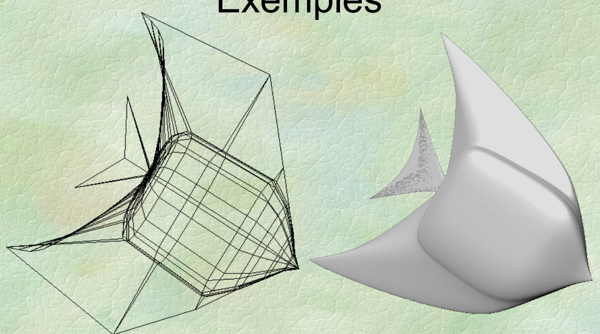
$\forall (u,v) \in [0,1]^2$ ,

$$\boxed{S(u,v) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{m} F_i(u) F_j(v) P_{ij}}$$

$\longrightarrow$ *Produit tensoriel de courbes spline.*

*Les isoparamétriques sont des courbes spline.*

## Exemples



## Propriétés

- Dans les cas favorables *(lesquels ?)*, les propriétés des surfaces splines découlent des propriétés des courbes splines.
- Les propriétés des courbes splines sont issues des propriétés de leurs fonctions d'influence.

*Conséquences ?*

## Propriétés : normalité

$$\forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n} F_k(t) = 1$$

• La forme de la courbe est indépendante du repère et des déplacements.

• On peut passer de manière continue d'une courbe à une autre en interpolant le réseau de contrôle.

*Intérêts en modélisation géométrique ?*

## Propriétés : approximation/interpolation

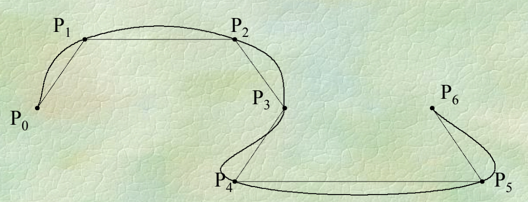
$$\exists T_k \in [0,1] \; / \; F_k(T_k) = 1 \; et \; F_{k'}(T_k) = 0 \quad \forall k' \neq k$$

Vocabulaire :

Si toutes les fonctions $F_k$ vérifient cette propriété on parle de *spline d'interpolation*, sinon il s'agit de *spline d'approximation*.

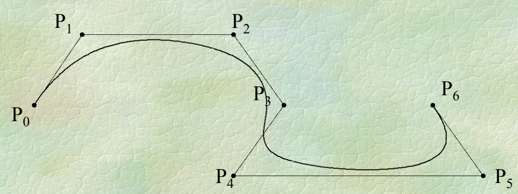
## Propriétés : approximation/interpolation

Exemple de courbe d'interpolation : Cardinale spline




## Propriétés : approximation/interpolation

Exemple de courbe d'approximation : B-spline




## Propriétés : positivité

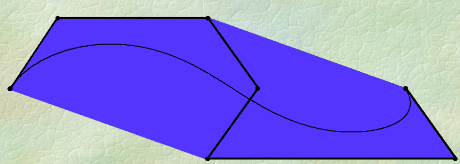
$$\forall k = 0 \ldots n, \quad \forall t \in [0,1] \; F_k(t) \geq 0$$

Positivité + Normalité $\Rightarrow$ La courbe est entièrement comprise dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.

*Intérêt en modélisation géométrique ?*

## Propriétés : positivité

$$\forall k = 0 \ldots n, \quad \forall t \in [0,1] \; F_k(t) \geq 0$$



*Intérêt en modélisation géométrique ?*

# Propriétés : régularité

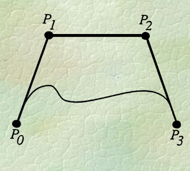
Toutes les fonctions d'influence $F_k(t)$ possèdent un maximum unique en une valeur $T_k$ du paramètre $t$.
$F_{k1}$ et $F_{k2}$ ne peuvent se croiser qu'entre $T_{k1}$ et $T_{k2}$.

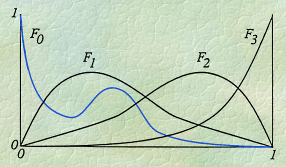
Normalité
+
Positivité
+
Régularité

→ Régularisation des oscillations.
Donc le *réseau de contrôle* est une bonne *approximation de la forme* de courbe.

# Propriétés : régularité

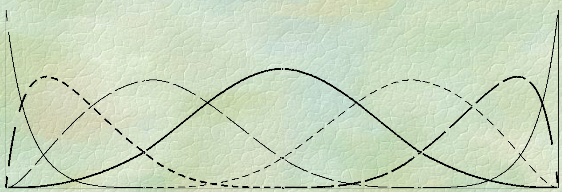
Toutes les fonctions d'influence $F_k(t)$ possèdent un maximum unique en une valeur $T_k$ du paramètre $t$.
$F_{k1}$ et $F_{k2}$ ne peuvent se croiser qu'entre $T_{k1}$ et $T_{k2}$.



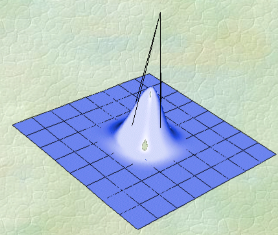

# Propriétés : localité

Chaque fonction d'influence $F_k(t)$ n'est non nulle que sur un sous-intervalle $D_k = [T_k-, T_k+]$ de $[0,1]$



→ La courbe est définie par morceaux.
Autre conséquence ?

# Propriétés : localité



# Propriétés : continuité

Lorsqu'une courbe spline est locale, il faut étudier sa continuité aux points de raccordement de 2 morceaux de la courbe.

Deux types de continuité possible :

*continuité paramétrique* notée $C^n$

*continuité géométrique* notée $G^n$

→ $C^0$, $C^1$, $C^2$, $G^0$, $G^1$ et $G^2$

# Propriétés : continuité

Définitions de la continuité paramétrique en $t_k$ :

$$C^0 : C(t_k^-) = C(t_k^+)$$

$$C^1 : C^0 \text{ et } C'(t_k^-) = C'(t_k^+)$$

$$C^2 : C^1 \text{ et } C''(t_k^-) = C''(t_k^+)$$

# Propriétés : continuité

Définitions de la continuité géométrique en $t_k$ :

$$G^0 : C(t_k^-) = C(t_k^+)$$

$$G^1 : G^0 \text{ et } \exists \beta \in R^+ / C'(t_k^+) = \beta C'(t_k^-)$$

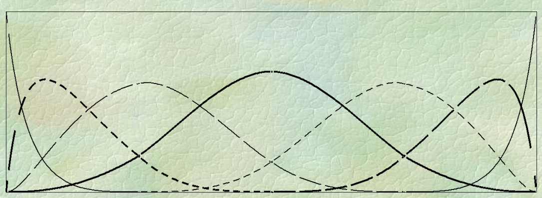
$$G^2 : G^1 \text{ et } \exists \chi \in R / C''(t_k^+) = \beta^2 C''(t_k^-) + \chi C'(t_k^-)$$

# Propriétés : continuité

- La continuité $G^2$ offre *plus de degrés de liberté* que la continuité $C^2$.
- Mais avec $G^2$ *pas d'interpolation continue entre 2 courbes* ce qui empêche d'utiliser ce type de courbes dans les outils de modélisation par coupes (lofting).
- *Quel autre problème posent les courbes de continuité $G^2$ ?*

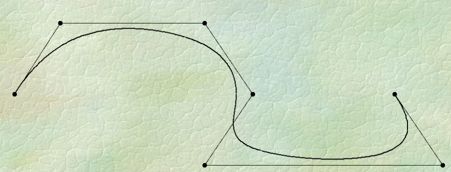
# Propriétés : conclusion

Le choix des fonctions d'influence définit les propriétés des courbes et surfaces Spline correspondantes.



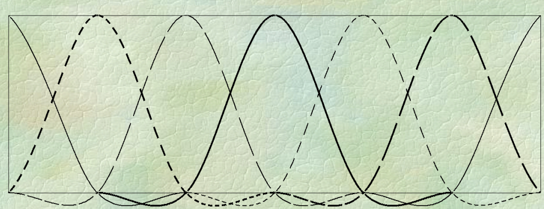
# Propriétés : conclusion

Le choix des fonctions d'influence définit les propriétés des courbes et surfaces Spline correspondantes.



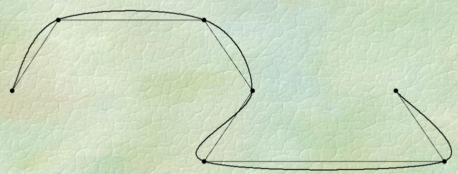
# Propriétés : conclusion

Le choix des fonctions d'influence définit les propriétés des courbes et surfaces Spline correspondantes.



# Propriétés : conclusion

Le choix des fonctions d'influence définit les propriétés des courbes et surfaces Spline correspondantes.



# Courbes et surfaces NURBS

## NURBS =

Non-Uniform

Rational

B-Splines

## Courbes B-spline :

$$C(t) = \sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) P_k$$

- $P_k$ points de contrôle définis dans $IR^3$
- $N_{k,p}$ fonctions d 'influence des B-spline

Aussi appelées fonction de Schoenberg ou fonctions de base.

## Courbes B-spline : Fonctions $N_{k,p}$

- $N_{k,p}$ *polynômes de degré p* définis par morceaux.

$\longrightarrow$ Courbes B-spline sont définies par morceaux.

Conséquences ?

- Raccordement de 2 morceaux de courbe se fait en $C(t_k)$, où $t_k$ k = 0, …, n+p+1 sont des valeurs du paramètre $t$ appelées *nœuds*. Les nœuds sont ordonnés de manière croissante dans le *vecteur nodal* : $T = (t_0, \ldots, t_{n+p+1})$.

- $N_{k,p}$ calculables de manière *récursive.*

## Courbes B-spline : Fonctions $N_{k,p}$

$$\forall t \in [0,1] \quad N_{k,0}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t_k \le t \le t_{k+1} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$N_{k,p}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+p} - t_k} N_{k,p-1}(t) + \frac{t_{k+p+1} - t}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} N_{k+1,p-1}(t)$$

## Courbes B-spline Non-Uniforme

Dans le vecteur nodal, l'intervalle entre deux nœuds successifs n'est pas nécessairement constant.

En particulier il peut même être nul.

*Qu'est-ce que cela signifie ?*

Exemple : T = ( 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7)

On dit d'un nœud dont la valeur est répétée µ fois qu'il est de *multiplicité µ.*

La continuité de la courbe en ce nœud est $C^{p-\mu}$

## Courbes B-spline Non-Unif vs Uniforme

Comment caractérise t-on une B-spline uniforme ?

Quelle est la multiplicité des nœuds d'une B-spline uniforme ?

Une B-spline dont tous les nœuds ont une multiplicité égale à 1 est-elle nécessairement uniforme ?

Quel est la continuité d'une courbe B-spline cubique uniforme ? Même question si la courbe est non-uniforme ?

## Courbes B-spline Rationnelle

Le terme rationnel utilisé dans la dénomination des NURBS signifie qu'une courbe NURBS est la projection dans l'espace cartésien $IR^3$ d'une courbe B-spline non-uniforme définie dans l'espace homogène $IR^4$ .

## Courbes B-spline Rationnelle

Soit $\hat{P}_k = (w_k x_k, w_k y_k, w_k z_k, w_k)$ les points de l'espace homogène $IR^4$ associés aux points de contrôle $P_k = (x_k, y_k, z_k)$ de $IR^3$ .

L'équation d'une B-spline non uniforme dans $IR^4$ est :

$$\hat{C}(t) = \sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t)\,\hat{P}_k$$

## Courbes B-spline Rationnelle

Un point de cette courbe sera défini par les coordonnées suivantes :

$$\left( \sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k x_k, \sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k y_k, \sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k z_k, \sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k \right)$$

La projection dans l'espace $IR^3$ d'un tel point s'obtient en divisant ses 3 premières coordonnées par la 4ème.

$$\left( \frac{\sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k x_k}{\sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k}, \frac{\sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k y_k}{\sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k}, \frac{\sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k z_k}{\sum_{k=0}^{n} N_{k,p}(t) w_k} \right)$$

## Courbes B-spline Rationnelle

L'équation d'une courbe NURBS dans l'espace cartésien $IR^3$ est donc :

$$C(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n} w_k N_{k,p}(t) P_k}{\sum_{k=0}^{n} w_k N_{k,p}(t)}$$

$w_k$ sont des *poids* réels positifs associés aux points de contrôle.

## Courbes NURBS : Propriétés

Elles sont issues des propriétés des fonctions d'influence des NURBS, notées par exemple $R_{k,p}$.

$$R_{k,p}(t) = \frac{w_k N_{k,p}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k N_{k,p}(t)}$$

Conséquences ?

## Courbes NURBS : Propriétés

Les fonctions $N_{k,p}(t)$ sont normales , positives, régulières et locales $L^{p+1}$.

Les NURBS vérifient :

- Invariance affine
- Invariance barycentrique
- Régularisation des oscillations
- Définition par morceaux et localité $L^{p+1}$
- Enveloppe convexe
- Continuité $C^{p-\mu k}$

## Courbes NURBS : Propriétés

De plus les fonctions $R_{k,p}$ (t) sont rationnelles donc les courbes NURBS vérifient :

- Invariance par projection parallèle ou perspective.

## Courbes NURBS : Rôle du poids

- Que se passe t-il lorsqu'on augmente le poids d 'un point contrôle $P_k$ ?
- Que se passe t-il lorsqu'on augmente identiquement le poids de tous les points contrôle d 'une courbe ?
- Que peut-on dire d'une courbe NURBS dont tous les points de contrôle ont un poids égal à 1 ?
- Quelle lien existe t-il entre la continuité d'une courbe NURBS et le poids de ses points de contrôle ?

## Courbes NURBS : Raffinement

***Définition*** : augmenter le nombre de points de contrôle qui servent à définir une courbe, sans modifier la forme de la courbe.

***Principe*** : insérer conjointement des points de contrôle dans le réseau de contrôle et des nœuds dans le vecteur nodal.

Deux solutions possibles :

- choisir la valeur du nouveau nœud et calculer la position du point de contrôle associé.
- choisir la position du nouveau point de contrôle sur le réseau et calculer la valeur du nouveau nœud associé.

## Courbes NURBS : Raffinement

***Algorithme***: Boehm 1980

On souhaite insérer dans le vecteur nodal $T$ un nœud $t'$ tel que :

$$t' \in \left] t_k , t_{k+1} \right]$$

On calcule :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & si \;\; i = 1, \dots, k-p \\ \dfrac{t' - t_i}{t_{i+p} - t_i} & si \;\; i = k-p+1, \dots, k \\ 0 & si \;\; i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

## Courbes NURBS : Raffinement

***Algorithme***: Boehm 1980

Les nouveaux points de contrôle du réseau sont alors :

$$P'_0 = P_0 \quad , \; P'_{n+1} = P_n \;\; et$$

$$P'_i = \frac{(1-\alpha_i)\, w_{i-1}\, P_{i-1} + \alpha_i\, w_i P_i}{(1-\alpha_i)\, w_{i-1} + \alpha_i\, w_i}$$

## Courbes NURBS : Raffinement

***Algorithme***: Piegl 1989

On souhaite insérer dans le réseau de contrôle un point $P'$ tel que :

$$P' \in ]P_k, P_{k+1}]$$

On a :
$$P' = \frac{(1-s)\, w_k\, P_k + s\, w_{k+1} P_{k+1}}{(1-s)\, w_k + s\, w_{k+1}}$$

Avec :
$$s = \frac{w_k \left\| P' - P_k \right\|}{w_k \left\| P' - P_k \right\| + w_{k+1} \left\| P' - P_{k+1} \right\|}$$

## Courbes NURBS : Raffinement

***Algorithme***: Piegl 1989

On souhaite insérer dans le réseau de contrôle un point $P'$ tel que :

$$P' \in ]P_k, P_{k+1}]$$

Il faut alors insérer le nœud :
$$t' = t_{k+1} + s\left(t_{k+p+1} - t_{k+1}\right)$$

En utilisant l'algorithme de Boehm après avoir déterminé l'entier $j$ tel que : $t' \in ]t_j, t_{j+1}]$

## Courbes NURBS : Raffinement

• Quel est l'intérêt de l'algorithme de Piegl ?

• Que se passe-t-il quand on veut raffiner une surface ?

de la lecture:

chapitre 2 de these dispo sur ma page web principale