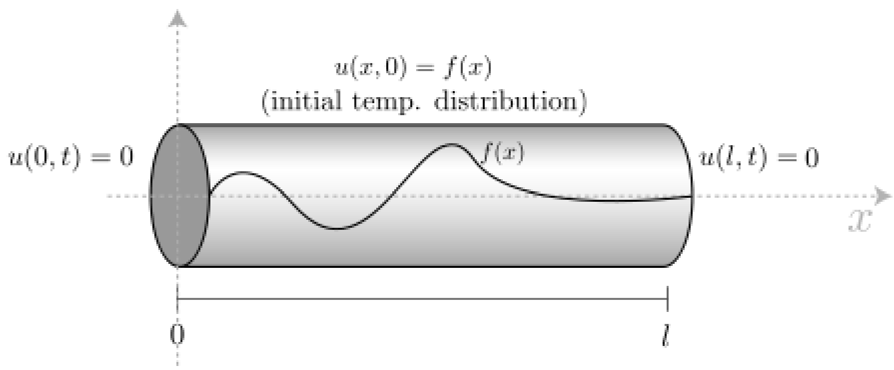
RÓWNANIE CIEPŁA

January 26, 2023

1 Rozwiązywanie równania ciepła metodą "Rozdzielenia zmiennych"

1.1 Opis problemu



Rozważmy walec o długości L. Zakładamy, że temperatura jest stała w każdym punkcie przekroju dla każdego x. Innymi słowy rozważamy walec tylko w jednym wymiarze. Oprócz tego załóżmy, że powierzchnia walca jest idealnie izolowana. Zatem ciepło może się pojawić tylko na końcach oraz może się poruszać tylko z prawa na lewo lub w odwrotnym kierunku.

Definicja
Ciepło właściwe – ciepło potrzebne do zmiany temperatury ciała w jednostkowej masie o jedną jednostkę.
Jest wielkością charakterystyczną dla danej substancji w danej temperaturze.
$c = \dfrac{\Delta Q}{m\Delta T} \left[\dfrac{J}{kg * K}\right]$

Definicja
Strumień cieplny(Heat/thermal flux) - strumień energii na jednostkę powierzchni na jednostkę czasu.
$\phi = \dfrac{Q}{At} \left[\dfrac{W}{m^2 * sec}\right]$

Dane wejściowe:
$u(x,t)$-temperatura w punkcie x w moment czasu t
$c(x)$- Ciepło właściwe(specific heat)
$\rho(x)\left[\dfrac{kg}{m^2}\right]$-Gęstość
$\phi(x,t)$-strumień cieplny("heat flux")
$Q(x,t)$- energia z zewnętrznych źródeł oraz wycieki. $Q > 0$ =>energia dodawana do systemu

Równanie wejściowe:

$$c(x)\rho(x)\frac{du}{dt} = -\frac{d\phi}{dx} + Q(x,t) \tag{1}$$

Żeby usunąć z równania "heat flux", skorzystajmy z prawa przewodzenia ciepła Fouriera

Prawo przewodzenia ciepła Fouriera
Gęstość strumienia przewodzonego ciepła w określonym punkcie ciała jest proporcjonalna do gradientu temperatury w tym punkcie.
$\phi(x,t) = -K_0(x)\dfrac{du}{dx}, gdzie\ K_0(x) > 0$-Przewodność cieplna materiału lub próbki

$c(x)\rho(x)\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{d}{dx}\left(K_0\dfrac{du}{dx}\right)+Q(x,t) = -K_0\dfrac{d^2u}{dx^2} + Q(x,t)$
Załóżmy również, że powierzchnia walca jest jednorodna, czyli że
$K_0(x) = K_0 \wedge phi(x) = \phi \wedge c(x) = c$
Trochę przekształcimy

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{Q(x,t)}{cp}$$

,gdzie $k = -\dfrac{K_0}{cp}\left[\dfrac{m^2}{sec}\right]$−"thermal diffusivity".
Tak jak nie bierzemy pod uwagę zewnętrznych źródeł ciepłą oraz zakładamy, że nasz walec jest idealnie izolowany, to $Q(x,t) = 0$. Zatem

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2} \tag{2}$$

1.2 Warunek początkowy oraz brzegowe

Żeby dało się rozwiązać nasze równanie, musimy ograniczyć go przez warunek początkowy oraz 2 warunki graniczne(tyle, ile wynosi najwyższy stopień pochodnej).
Warunek początkowy:

$u(x,0)=f(x)$-funkcja opisuje początkowy rozkład temperatury
Warunki brzegowe:

1. Wyznaczona temperatura(warunek Dirichleta)
   $u(0,t)=g_1(t)\wedge u(L,t)=g_2(t)$

2. Wyznaczony "heat flux"(warunek Neumanna)
   $-K_0(0)\dfrac{du}{dx}(0,t)=\phi_1(t)\wedge -K_0(L)\dfrac{du}{dx}(L,t)=\phi_2(t)$
   Jeżeli oba końce są idealnie izolowane, to nie ma zmiany temperatury na nich
   $\dfrac{du}{dx}(0,t)=0\wedge\dfrac{du}{dx}(L,t)=0$

3. Prawo stygnięcia Newtona (warunek Robinsa)

   Prawo stygnięcia Newtona
   Szybkość z jaką układ stygnie jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy układem a otoczeniem.
   $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-T_R)$
   T-temperatura ciała
   T_R-temperatura otoczenia

   $-K_0(0)\dfrac{du}{dx}(0,t)=-H[u(0,t)-g_1(t)]\wedge -K_0(L)\dfrac{du}{dx}(L,t)=-H[u(L,t)-g_2(t)]$
   H-dodatnia stała wyliczona eksperymentalnie
   $g_1(t)$i$g_2(t)$-temperatura otaczającego płynu na odpowiednich końcach.

Definicja
Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś T oznacza pewien jej endomorfizm, tzn. przekształcenie liniowe tej przestrzeni w siebie. Jeśli dla pewnego niezerowego wektora x przestrzeni spełniony jest warunek
$Tx=\lambda x$, gdzie λ-pewien skalar,
to x nazywa się wektorem własnym, a λ nazywa się wartością własną przekształcenia T

Znajdziemy funkcje i wartości własne dla BVP

Zagadnienie brzegowe(BVP) - równanie różniczkowe wraz z warunkami brzegowymi.

Teraz rozwiążmy za pomocą wartości własnych drugie równanie naszego systemu.
$\varphi'' +\lambda\varphi=0' \wedge\varphi(0)=0\wedge\varphi(L)=0$
Rozpatrzmy 3 przypadki:

1. Warunek okresowy
   $u(-L,t)=u(L,t)\wedge\dfrac{du}{dx}(-L,t)=\dfrac{du}{dx}(L,t)$

W naszym modelu będziemy rozważali tylko warunek Dirichleta.

1.3 Metoda rozdzielenia zmiennych

Metoda ta jest powszechnie używana do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych(PDE), chocaiaż nie do wszystkich da się ją zastosować.

Defincja
Równanie różniczkowe cząstkowe(PDE) – równanie, w którym występuje niewiadoma funkcja dwóch lub więcej zmiennych oraz niektóre z jej pochodnych cząstkowych.

Np. jest stosowana do 1-D równania ciepła, 1-D równania fali, 2-D równania Laplace'a. Warunek konieczny dla tej metody - **równanie wraz z warunkami brzegowymi powinny być liniowe oraz homogeniczne**.

Definicja
Różniczkowe liniowe równanie drugiego stopnia, które ma ogólną postać
$p(x)y\prime\prime + q(x)y\prime + r(x)y = g(x)$
jest homogeniczne, jeśli $g(x) = 0, \forall x$

Założenie metody:
Funkca postacji $u(x,t) = \varphi(x) * G(t)$ będzie rozwiązaniem wejściowego równania.
Nasze dotychczasowe równanie (2) wraz z warunkami:

$$\frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}, u(x,0) = f(x), u(0,t) = 0, u(L,t) = 0 \tag{3}$$

Korzystamy z założenia$u(x,t) = \varphi(x)G(t) \rightarrow \dfrac{d\varphi(x)G(t)}{dt} = k\dfrac{d^2\varphi(x)G(t)}{dx^2} \rightarrow \varphi(x)\dfrac{dG}{dt} = kG(t)\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} \rightarrow \dfrac{dG}{dt}\dfrac{1}{kG(t)} = \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}\dfrac{1}{\varphi(x)} = -\lambda$
- stała rozdzielenia.
Nie możemy na razie rozwiązać, bo nie znamy wartości lambda
Warunki brzegowe:
$\varphi(x) * G(0) = f(x)$-wynika z założenia
$\varphi(0) * G(t) = 0 \rightarrow \varphi(0) = 0$-dla rozwiązań nietrywialnych
$\varphi(L) * G(t) = 0 \rightarrow \varphi(L) = 0$-analogicznie
Stąd mamy system równań:

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{dt} = -k * \lambda * G(t) \\ \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda * \varphi(x) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

1.4 Funkcje i wartości własne

- $\lambda > 0$
  Wielomian charakterystyczny jest postaci
  $r^2 + \lambda = 0 => r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{\lambda}i$

Rozwiązanie jest postaci(bez dowodu):

$$\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Wykorzystamy warunki graniczne:
$\varphi(0) = c_1 = 0$
$\varphi(L) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) => c_2 = 0 \vee \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$
dla $c_1 = c_2 = 0$ mamy rozwiązania trywialne, zatem załóżmy, że $c_2 \neq 0$
$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 => \sqrt{\lambda}L = n\pi, n \in \mathbb{Z} => \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$
$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L}), n \in \mathbb{Z}$

- $\lambda = 0$
  $\varphi'' = 0 => \varphi(x) = c_1 + c_2 x$
  $\varphi(0) = c_1 = 0$
  $\varphi(L) = c_2 L = 0 => c_2 = 0$
  Wszystkie rozwiązania są trywialne, więc $\lambda = 0$ nie jest wartością własną danego BVP

- $\lambda < 0$
  Tak samo jak dla $\lambda > 0$, ma 2 pierwiastki $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.Tak jak $\lambda < 0$, to $r_{1,2} \in \mathbb{R}$
  Rozwiązanie jest postaci(bez dowodu):

$$\varphi(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

Przekształcamy to
$\varphi(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} = \frac{c_1}{2}e^{\alpha x} + \frac{c_1}{2}e^{\alpha x} + \frac{c2}{2}e^{-\alpha x} + \frac{c2}{2}e^{-\alpha x} = \frac{c_1}{2}e^{\alpha x} + \frac{c_1}{2}e^{\alpha x} + \frac{c2}{2}e^{-\alpha x} + \frac{c2}{2}e^{-\alpha x} + (\frac{c_1}{2}e^{-\alpha x} - \frac{c_1}{2}e^{-\alpha x}) + (\frac{c_2}{2}e^{\alpha x} - \frac{c_2}{2}e^{\alpha x}) =$
$= \frac{1}{2}(c_1 e^{\alpha x} + c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}) + \frac{1}{2}(c_1 e^{\alpha x} - c_1 e^{-\alpha x} - c_2 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x})$
$= (c_1 + c_2)\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} + (c_1 - c_2)\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$
Tak jak $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,to dostajemy

$$\varphi(x) = \overline{c_1}\cosh(\alpha x) + \overline{c_2}\sinh(\alpha x)$$

, gdzie $\overline{c_1} = c_1 + c_2$,$\overline{c_2} = c_1 - c_2$
Wykorzystamy warunki graniczne:
$\varphi(0) = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1 * 1 + c_2 * 0 = c_1 = 0$
$\varphi(L) = c_2 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) = 0 \wedge \sinh > 0 => c_2 = 0$
Analogicznie dostajemy same rozwiązanie trywialne, zatem $\lambda \not< 0$

W końcu mamy:

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2 \wedge \varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L}), n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

1.5 Rozwiązanie końcowe równania

Teraz rozwiążemy równanie $\frac{dG}{dt} = -k\lambda_n G$. Podstawmy wcześniej wyliczoną λ (4)
$G(t) = ce^{-k\lambda_n t} = ce^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$
Dostajemy

$$u_n(x,t) = B_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$$

Zasada superpozycji
Jeśli $y_1(t)$ oraz $y_2(t)$ są rozwiązaniami liniowego, homogenicznego równania różniczkowego, to
$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ - też jest jego rozwiązaniem.

Zasadę superpozycji można rozszerzyć na więcej niż dwa rozwiązania. Zauważmy, że poniższe równanie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{5}$$

Spełnia wszystkie warunki
$u(0,t) = u(L,t) = 0$
$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) = f(x)$
Możemy dany warunek początkowy rozwinąć w szereg Fouriera

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx, n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

zakładając, że funkcja $f(x)$-"piecewise smooth" na odcinku od 0 do L.

1.6 Modyfikacja - niezerowe warunki brzegowe

Załóżmy, że $u(0,t) = T_1$ oraz $u(L,t) = T_2$.Teraz rozdzielenie zmiennych nie zadziała, bo dla $x = 0, L$ równanie nie jest homogeiczne($\neq 0$).
Tak jak w naszym systemie nie ma źródeł zewnętrznych ciepła oraz warunki graniczne są stałe(nie zależą od czasu), to rozkład ciepła za jakiś czas powinien się ustabilizować. Zatem

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_E(x) \tag{7}$$

$u_E(x)$-jest nazywane "equilibrium temperature".
Dla $u_E(x)$ powinny zachodzić warunki:

1. $u_E(0) = T_1 \wedge u_E(L) = T_2$
2. $\frac{d^2u_E}{dx^2} = 0,\ bo\ \frac{du_E}{dt} = 0$

$u_E(x) = \int\int \frac{d^2u_E}{dx^2}dx = \int(\frac{du_E}{dx} + c_1)dx = c_1x + c_2 = 0$
Podstawiając warunki brzegowe dostajemy:
$c_1 * 0 + c_2 = T_1 => c_2 = T_1$
$c_1 * L + T_1 = T_2 => c_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$
$u_E(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$
Zdefiniujmy funkcję $v(x,t) = u(x,t) - u_E(x)$
Zauważmy, że poochodne funkcji v
$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{du_E}{dt} = \frac{dv}{dt}$, analogicznie dla drugiej pochodnej. Z czego można wywnioskować, że funkcja $v(x,t)$ spełnia to samo równanie.
Policzmy warunki dla tej funkcji:
$v(x,0) = u(x,0) - u_E(x) = f(x) - u_E(x)$
$v(0,t) = u(0,t) - u_E(0) = T_1 - T_1 = 0$
$v(L,t) = u(L,t) - u_E(L) = T_2 - T_2 = 0$
Są one homogeniczne!
Równanie końcowe funkcji v będzie takie same, ale różny będzie wzór na współczynnik B_n

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) - u_E(x))\sin(\frac{n\pi x}{L})dx, n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Znając funkcję v możemy łatwo przejść na szukaną funkcję u:

$$u(x,t) = u_E(x) + v(x,t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \tag{9}$$

1.7 Symulacja w MatLab

Najpierw zapiszmy warunki początkowe.
Walec jest o długości 10m, składa się z aluminium.
Z warunkiem początkowym - $f(x) = x(x^2 - 3Lx + 2L^2)$(pasuje, bo jest ciągła)

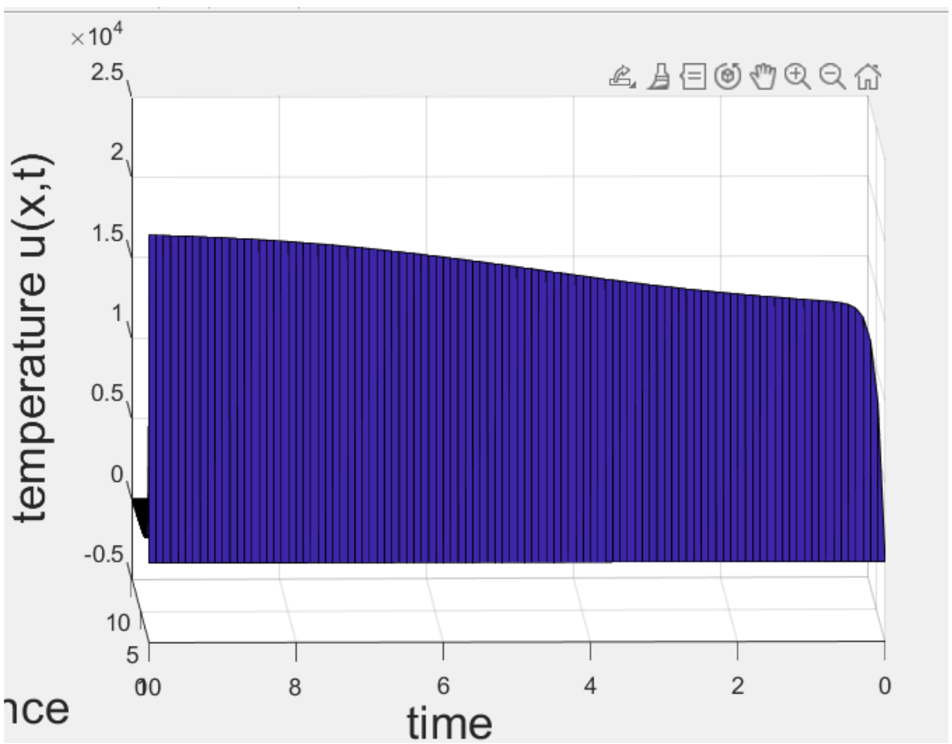
```
%aluminium
density=2700;%kg/m3
heat_cap=897;%J/(kg*K)
thermal_cond=237;%W/(m·K)
k=thermal_cond/(heat_cap*density);%m^2/c

N = 1000;%stała, do której liczymy końcowe równanie
L=10;%długość walca
dx = 0.1;%krok z jakim liczymy wartości dla odległości
dt = 0.1;%krok z jakim liczymy wartości dla czasu
X = 0:dx:L;%wektor odległości
T = (0:dt:L)';%wektor czasu
u = zeros(length(T),length(X));%szukana funkcja temperatury
fx=@(x) x.*(x.^2-3.*L.*x+2.*L.^2);%warunek początkowy
```

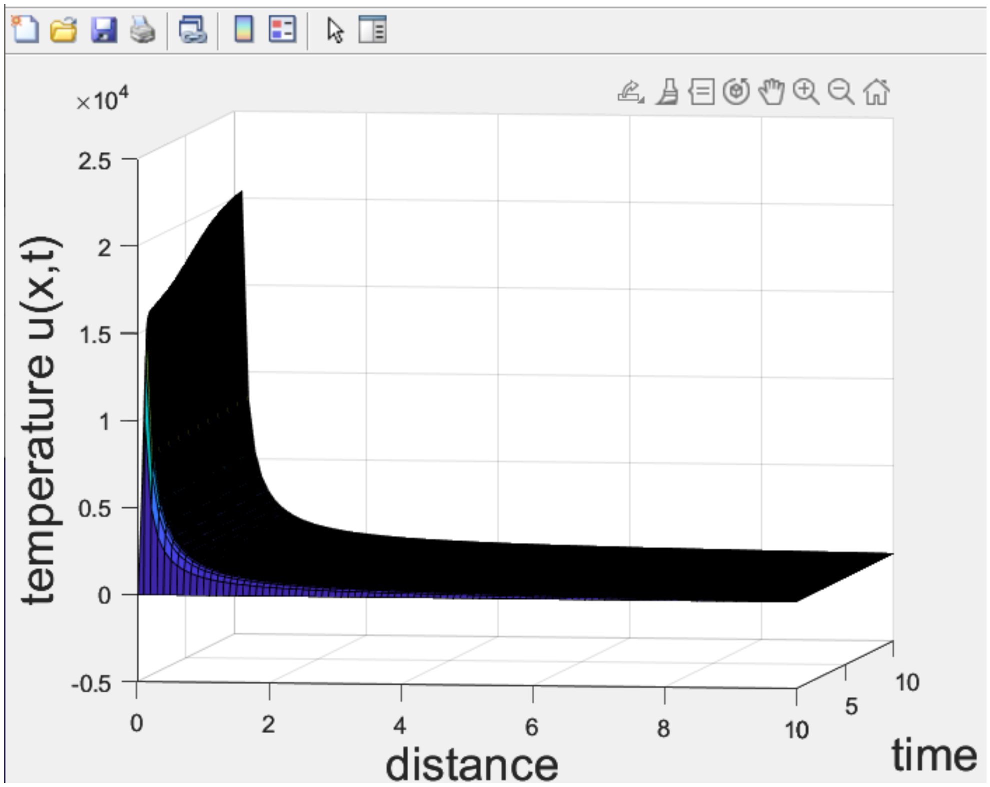
Następnie rozwiązujemy równanie

```
for n=1:1:N
    expr=@(x) fx(x).*sin(n.*pi.*x./L);
    Bn=(2/L)*integral(fx,0,L);
    u=u+Bn.*sin(n.*pi.*X./L).*exp(-k.*(n.*pi./L).^2.*T);
end
```

W końcu rysujemy wykres 3D za pomocą funkcji *surf*

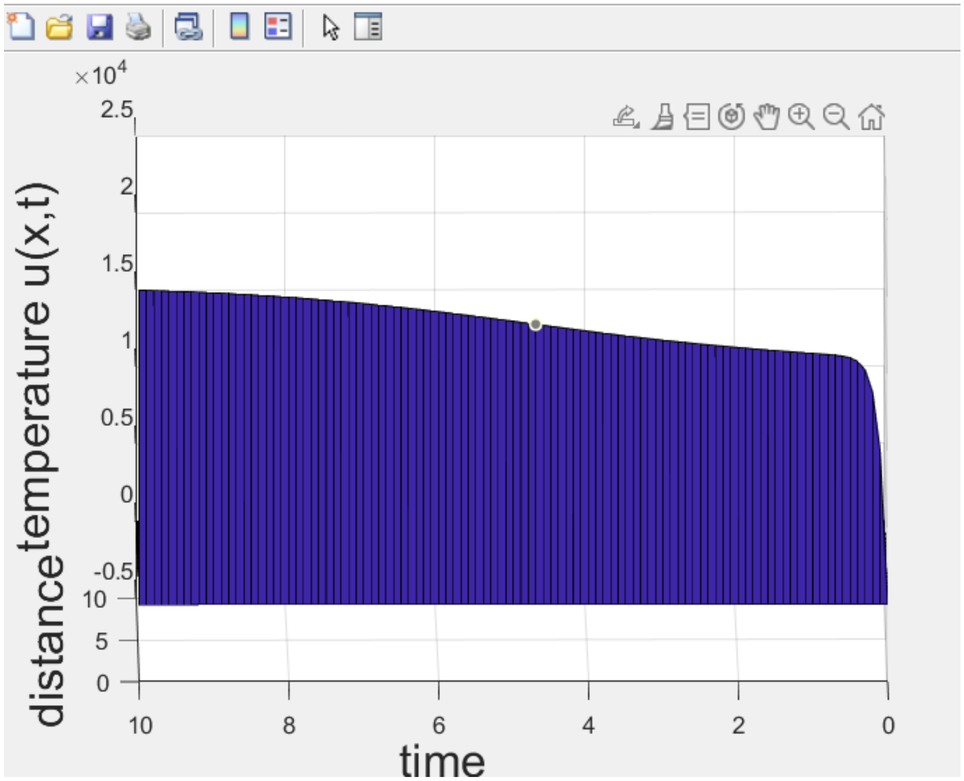
```
% Rysujemy wykres 3D
surf(X,T,u)
xlabel('distance','Fontsize',20);
ylabel('time','Fontsize',20);
zlabel('temperature u(x,t)','Fontsize',20);
```

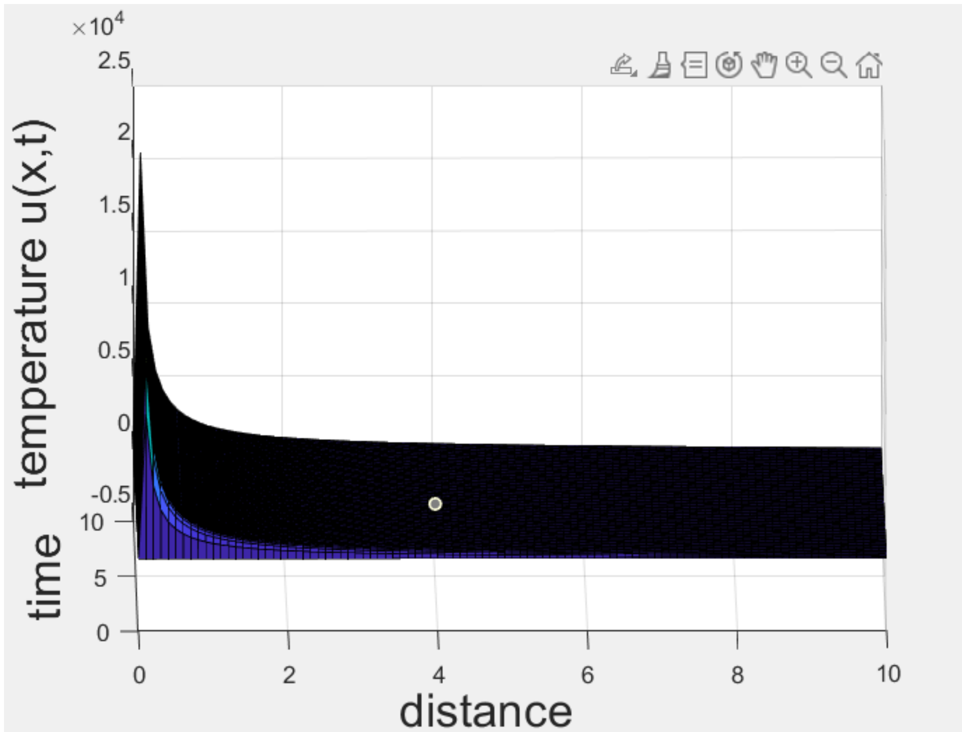

×10^4
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
temperature u(x,t)
10
5
0
10
8
6
4
2
0
nce
time



Analogicznie zróbmy dla warunków niezerowych(0 oraz 100 K)

```matlab
%aluminium
density=2700;%kg/m3
heat_cap=897;%J/(kg*K)
thermal_cond=237;%W/(m·K)
k=thermal_cond/(heat_cap*density);%m^2/c

N = 1000;%stała, do której liczymy końcowe równanie
L=10;%długość walca
dx = 0.1;%krok z jakim liczymy wartości dla odległości
dt = 0.1;%krok z jakim liczymy wartości dla czasu
X = 0:dx:L;%wektor odległości
T = (0:dt:L)';%wektor czasu
u = zeros(length(T),length(X));%szukana funkcja temperatury
fx=@(x) x.*(x.^2-3.*L.*x+2.*L.^2);%warunek początkowy
T0=0;
TL=100;
uEx=@(x) T0+(TL-T0)*x/TL;%"equilibrium temperature"

for n=1:1:N
    expr=@(x) (fx(x)-uEx(x)).*sin(n.*pi.*x./L);
    Bn=(2/L)*integral(fx,0,L);
    u=u+Bn.*sin(n.*pi.*X./L).*exp(-k.*(n.*pi./L).^2.*T);
end

% Rysujemy wykres 3D
surf(X,T,u)
xlabel('distance','Fontsize',20);
ylabel('time','Fontsize',20);
zlabel('temperature u(x,t)','Fontsize',20);
```


×10^4
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
10
5
0
10
8
6
4
2
0
temperature u(x,t)
distance
time



References

[1] https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/IntroPDE.aspx

[2] https://www.youtube.com/watch?v=uLkuEr6M40o&t=903s