Einführung

Aktionen → Konsequenzen ← Umweltzustände

Konsequenzen → Nutzen

- **aleatoric:** Unsicherheit in Systemen, die wirklich zufällig sind (Lotterie, Würfel, ...)
- **epistemic:** Wissensbezogen; Unsicherheit kommt daher, dass ich etwas nicht weiß (z.B. wurde mein Paket geliefert?)

Grundlegende Einschränkungen:

- Homogene Entscheidungsträger
- Einmalige Entscheidung (kann aus vielen Einzelentscheidungen bestehen)
- mehrere Umweltzustände (bei nur einem -> Lösung klar)

Grundlagen

Verschiedene Typen von Unsicherheiten

- Typ I Umweltzustände sind das Ergebnis eines perfekten <u>Zufallsmechanismus</u> mit bekannter Wktsvtlg. → „Lotterien"
- Typ I' Entscheidungsträger kann subjektive Wkt. für die Zustände angeben (Bayes-Entscheidungssituation)
- Typ II Umweltzustände durch Handlungen eines feindlichen Gegenspielers erzeugt
- Typ II' Unsicherheitssituation im strengen Sinn, „Ungewissheitssituation" (man kann keine Wkten angeben)

wenn wir keine Wkt. angeben ~~können~~ nehmen wir eher die Spieltheorie (ungenau!)

↳ klassische Entscheidungstheorie: behandle I' wie I und II' wie II

Datenfreies Entscheidungsproblem

Nutzenform $(\mathbb{A}, \Theta, u(.))$

- Aktionenmenge $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$
- Zustandsmenge $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_j, \dots, \vartheta_m\}$
- Nutzenfunktion: $u: \mathbb{A} \times \Theta \to \mathbb{R}$, $(a, \vartheta) \mapsto u(a, \vartheta)$

Verlustform $(\mathbb{A}, \Theta, \ell(.))$ — Verlustfunktion

Konsequenzenfkt.

manchmal als Zwischenschritt sinnvoll

$$u(a,\vartheta) = u_c(c(a,\vartheta))$$

Konsequenzenfkt.: $\mathbb{A} \times \Theta \to C$

$C \to \mathbb{R}$ Nutzenbewertung

Man spricht von einem Entscheidungsproblem, wenn gilt:

1) $\mathbb{A}$ sei bekannt
2) Θ sei bekannt (Closed-World-Assumption)
3) Die Ergebnisse / Konsequenzen sind eindeutig. Dabei können Konsequenzen durchaus Wktsvtlg. sein.
4) Es lässt sich eine eindeutig bestimmte reellwertige Nutzen-/Verlustfkt. angeben, die die individuellen Präferenzen des Entscheidungsträgers vollständig widerspiegelt.
   - Nutzentheorie: Konstruktion von Nutzenfkt. aus Präferenzordnungen
   - -> Annahme: vollständige Ordnung der Präferenzen möglich -> eindimensional
     ↳ keine untersch. nichtabbildbaren „Nutzendimensionen" (mehrdimensionale Nutzenbewertungen)
   - Nutzen wird als abstrakte Größe gesehen (Wertdispositionen sind mitintegriert)
   - Vorsicht: Nutzen ≠ Geldmenge (Nutzenfkt. nicht unbedingt linear in Geldbeträgen)

5) Aktionen und Zustände sind wertfrei
6) Typ (I, I', II, II') der Unsicherheit ist bekannt
7) Keine zusätzliche Information (Informationsgewinn über Strategien formulieren)
8) Umwelt nicht beeinflussbar: Handlungsunabhängigkeit der Zustände
9) Einmalige Wahl der Entscheidung
10) Keine Wiederholung der Entscheidungssituation (sondern als Entscheidungsstrategie formulieren)

Typische Beispiele

Omelettenproblem von Savage

-> Ziel: Omelett essen ; 6 Eier, 1 davon vllt. schlecht

Umweltzustände; Nutzen

Aktionen		ϑ_1 Ei gut	ϑ_2 Ei schlecht
A1	Ei verwenden	12	-12
A2	Ei überprüfen	10	6
A3	Ei wegwerfen	8	8
A4	Ei kaputt machen	2	2

-> stark / strikt dominiert

Ausflugsproblem nach Chernoff & Moses

-> Ziel: Bergwanderung ; Wetter könnte plötzlich schlecht werden

		ϑ_1 gutes Wetter	ϑ_2 schlechtes Wetter
a_1	leichte Kleidung	5	0
a_2	-"- + ☂	3	1
a_3	wetterfeste Kleidung	2	3

Einbettung statistischer Tests

Verluste

		ϑ_0 H_0 richtig	ϑ_1 H_1 richtig
a_1	für H_0 entscheiden	0	c_1
a_2	für H_1 entscheiden	c_2	0

Verluste untersch. groß

Randomisierte Aktionen

randomisierte (gemischte) Aktion

$$(\mathbb{A}, \sigma(\mathbb{A})) = \mathcal{M}(\mathbb{A})$$
$$\tilde{a}(\{a_i\}) \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$$

$$\tilde{a} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \tilde{a}(\{a_1\}) & \tilde{a}(\{a_2\}) & \dots & \tilde{a}(\{a_n\}) \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{mögliche Aktionen} \\ \text{Wählwkten} \end{array}$$

↳ Nutzen / Verlust muss noch definiert werden (z.B. als Erwartungswert)

gemischte Erweiterung

$$(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$$

$$\tilde{u}(\cdot): \mathcal{M}(\mathbb{A}) \times \Theta \to \mathbb{R}$$
$$(\tilde{a}, \vartheta) \longmapsto \tilde{u}(\tilde{a}, \vartheta)$$

↳ $\tilde{u}(\tilde{a}, \vartheta) := \mathbb{E}_{\tilde{a}}[u(a, \vartheta)]$ $\quad \mathbb{E}$ bzgl. der Aktionen

=> lässt sich also wie ein „normales" datenfreies Entscheidungsproblem behandeln

reine Aktion

$$\tilde{a}(\cdot) = \underbrace{\delta_{\{a\}}}_{}$$

Dirac-Maß

-> Wkt. 1

Datengestützte Entscheidungstheorie

Entscheiden auf Datenbasis

-> Abbildung der Daten in die ursprüngliche Aktionenmenge
↳ überlegen, bevor man Daten gesehen hat

„wenn ..., dann Aktion ..."

Informationsbeschaffungsexperiment = Informationsstruktur

liefert unsichere Information (als Wkten)
die Wkten sind abhängig von den Umweltzuständen

	x_1	x_2	x_3
ϑ_1	0.6	0.3	0.1
ϑ_2	0.2	0.4	0.4
ϑ_3	0.1	0.4	0.5

} Wkt

Likelihood

allgemein:

	x_1	x_2	x_3
ϑ_1	$p_{\vartheta_1}(X=x_1)$	$p_{\vartheta_1}(X=x_2)$	$p_{\vartheta_1}(X=x_3)$
ϑ_2	$p_{\vartheta_2}(X=x_1)$	$p_{\vartheta_2}(X=x_2)$	$p_{\vartheta_2}(X=x_3)$
ϑ_3	$p_{\vartheta_3}(X=x_1)$	$p_{\vartheta_3}(X=x_2)$	$p_{\vartheta_3}(X=x_3)$

↳ probabilistische Struktur sei bekannt

Beispiele

- diagnostischer Test beim Arzt
- Parameterschätzung (anhand der Stichprobe Parameter wählen)
- Hypothesentest
- ML-Prädiktion

Entscheidungsfunktion

wenn x beobachtet wird, wählt man Aktion d(x)

$d: \mathcal{X} \to \mathbb{A};\ x \mapsto d(x)$

Wertebereich des Informationsbeschaffungsexperiments

↳ Ziel: für beste Entscheidungsfkt. entscheiden

-> **Erwarteter Nutzen**

Menge von Entsch.fkt.

$U: \mathcal{D} \times \Theta \to \mathbb{R}$

$(d, \vartheta) \mapsto U(d,\vartheta) = \mathbb{E}_{p_\vartheta} u(d(x), \vartheta)$

Erwartungswert bzgl. der x

Datengestütztes Entscheidungsproblem

↳ auch nur Spezialfall: Aktionen sind versch. Entsch.fkt, Nutzen sind Erwartungswerte

$$(\underbrace{(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))}_{\text{datenfreies Entscheidungsproblem}}; \underbrace{(\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}), (p_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})}_{\text{Informationsstruktur}})$$

Aktionen, „gain"

$(\mathcal{D}, \Theta, U)$ Nutzenform

Risikofkt.

$(\mathcal{D}, \Theta, R)$ Verlustform

Randomisierte Entscheidungsfunktionen

1. Möglichkeit: „echte randomisierte Entscheidungsfkt"
$\mathbb{A} \to \mathcal{D} \to \mathcal{M}(\mathcal{D})$
ausschließlich reine Aktionen; es wird zwischen Entschfkt. randomisiert

2. Möglichkeit: „behavioristische Entschfkt"
$\mathbb{A} \to \mathcal{M}(\mathbb{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{M}(\mathbb{A}))$
es wird zwischen Aktionen randomisiert

Beim eingebetteten Schätzproblem bringt unter Regularitätsbedingungen Randomisieren keine Verbesserung

Grundstruktur	Datengestützt	Randomisiert
Aktionenmenge, Zustandsmenge, Nutzenfunktion	Entscheidungsfunktion, Gain-funktion	Wahrscheinlichkeitsmaße auf Aktionen
$(\mathbb{A}, \Theta, u)$	$(\mathcal{D}, \Theta, U)$	$(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, \tilde{u})$
mit $u: \mathbb{A} \otimes \Theta \to \mathbb{R}$	mit $U: \mathcal{D} \otimes \Theta \to \mathbb{R}$, $(d,\vartheta) \mapsto \mathbb{E}_{p_\vartheta}(u(d(\cdot), \vartheta))$	mit $\tilde{u}: \mathcal{M}(\mathbb{A}) \otimes \Theta \to \mathbb{R}$, $(\lambda, \vartheta) \mapsto \mathbb{E}_\lambda(u(\cdot, \vartheta))$

- Flexible Verlustfkt -> Verallgemeinerung möglich (z.B. Über- schlimmer als Unterschätzung)
- stetiges p_ϑ und hinreichend reguläre Verlustfkt -> beim Schätzen kann auf Randomisieren verzichtet werden
- Möglichkeiten Dimensionen zu reduzieren?
  - Reihenfolge nicht beachten
  - Summe der Einzelergebnisse
  - Suffiziente Statistik

Entscheidungstheorie	klassische Schätztheorie	Testtheorie	Regression
Zustandsraum	Parameterraum	H_0 und H_1	wahrer Zusammenhang
Zustand	Parameterwert	H_0, H_1	Zusammenhang zwischen Y und X
Aktion	Schätzwert (1 Zahl)	Testentscheidung	Schätzer der Parameter
Verlustfunktion	$(\theta - \hat{\theta})^2$	$\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$	Abstand Schätzer vom wahren Wert
Informationsstruktur	Verteilung der SP	Verteilung der SP	Verteilung der SP (gemeinsam)
Entscheidungsfkt.	Schätzfunktion	Testfkt. / Kritische Region	KQ-Schätzer
Risikofunktion ($\mathbb{E}$ der Verlustfunktion)	Varianz, MSE	Fehlerrate 1./2. Art	Bestimmtheitsmaß

Entscheidungskriterien

Entscheidungsprinzipien

- Grundsätze für die Auswahl von Aktionen
- beanspruchen allgemeine Rationalitätsprinzipien zu sein -> geringe Ordnungskraft
- unabhängig vom Unsicherheitsverständnis (Typ I oder Typ II)

Dominanz

Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$

a) a_1 dominiert a_2 $\Leftrightarrow$ $u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta)$ für alle $\vartheta \in \Theta$ — $a_1 \succeq a_2$ größer gleich

b) a_1 dominiert a_2 strikt $\Leftrightarrow$ $u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta)$ für alle $\vartheta \in \Theta$
und $u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta)$ für min. ein $\vartheta \in \Theta$ — $a_1 \succ a_2$ min 1 größer

c) a_1 dominiert a_2 stark $\Leftrightarrow$ $u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta)$ für alle $\vartheta \in \Theta$ — $a_1 \succ\succ a_2$ überall größer

d) a_1, a_2 sind äquivalent $\Leftrightarrow$ $a_1 \succeq a_2$ und $a_2 \succeq a_1$ — $a_1 \sim a_2$ genau gleich

Admissibilität / Zulässigkeit

$a \in \mathbb{A}$ heißt zulässig $\Leftrightarrow$ a wird von keiner Aktion strikt dominiert

-> Menge aller zulässigen Aktionen $\mathbb{A}_{ad} := \{ a \in \mathbb{A} \mid \nexists a^* \in \mathbb{A} : a^* \succ a \}$ (für endliches $\mathbb{A}$ immer min. 1 Aktion)

Dominanzprinzip: Es ist nicht vernünftig, eine inadmissible (nicht zulässige) Aktion zu wählen.

Vollständige Klassen

Problem: Al_{ad} oft nicht bestimmbar
-> Idee: Obermenge, die zumindest etwas einschränkt und alle zulässigen Aktionen enthält

a) Eine Teilmenge $\mathbb{C} \in Al$ heißt vollständig <=> alle Elemente außerhalb der Menge werden von einem Element in der Menge strikt dominiert

b) Eine Aktionenmenge $\mathbb{C} \in Al$ heißt wesentlich vollständig <=> alle Elemente außerhalb der Menge werden von einem Element in der Menge dominiert

-> minimal vollständige Klasse $\mathbb{C}_{min} = Al_{ad}$

Entscheidungsregeln / Optimalitätskriterium

- Entscheidungsregeln induzieren eine vollständige (ordnungsbar) und transitive ($a>b$ & $b>c$ => $a>c$) Ordnung auf der Aktionenmenge Al
- konkrete Regeln, hängen vom Unsicherheitsverständnis ab
- weist den Aktionen reele Zahlen zu
  -> Ordnen möglich

$\Phi : Al \to \mathbb{R}^q$; $a \mapsto \Phi(a)$ ($q \geq 2$ -> lexikographische Ordnung)
Suche $a^* \in Al$ mit $\Phi(a^*) \geq \Phi(a)$ $\forall a \in Al$
=> a^* ist dann Φ-optimale Aktion

Minimax-Entscheidungen

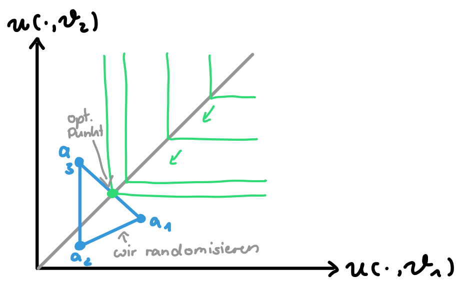
- Annahme: Typ II - Unsicherheit (feindlicher Gegenspieler)
  -> keine Wktsaussagen über Umweltzustände nötig
- Randomisieren kann zu Verbesserung führen
- „wir rechnen damit bei jeder Aktion den minimalen Nutzen zu bekommen"
  ↳ dieses Minimum maximieren wir
- lediglich die Ordnung des Nutzens ist relevant -> invariant gegenüber monotonen Transformationen
- zur Berechnung meist lineare Optimierung nötig
- Al endlich + Θ endlich => es existiert Maximin Aktion in Al und $\mathcal{M}(Al)$

damit wählt man die Kriteriumsfunktion

a) Nutzenform: $a^* \in Al$ Maximin-Aktion <=> $\inf_{\vartheta \in \Theta} u(a^*, \vartheta) \geq \inf_{\vartheta \in \Theta} u(a, \vartheta)$ $\forall a \in Al$ — $\Phi: Al \to \mathbb{R}$; $a \mapsto \inf_{\vartheta} u(a,\vartheta)$

b) Verlustform: $a^* \in Al$ Minimax-Aktion <=> $\sup_{\vartheta \in \Theta} \ell(a^*, \vartheta) \leq \sup_{\vartheta \in \Theta} \ell(a, \vartheta)$ $\forall a \in Al$ — $a \mapsto -\sup_{\vartheta} \ell(a,\vartheta)$

Graphische Bestimmung:



Equalizer-Aktion

- Äquilisator-Aktion
- in ϑ konstanten Nutzen
- liegt auf Winkelhalbierenden
- falls zulässig -> Minimax-Aktion

Bayes - Entscheidungen

Erwartungsnutzen $\mathbb{E}_\pi(u(a)) := \int_\Theta u(a,\vartheta)\, d\pi(\vartheta)$

Whksvtlg. der Umweltzustände

Bernoullikriterium: wähle $\Phi(a,\pi) = \mathbb{E}_\pi(u(a))$ als Kriteriumsfkt.
↳ ideale Risikosituation (π gegeben) OBJEKTIVE WKTSBEWERTUNG

Einbeziehen der Varianz

1) Zweistufige (μ,σ)-Kriterien um zwischen Aktionen mit gleichem $\mathbb{E}$ zu differenzieren
2) Einstufige (μ,σ)-Kriterien $\Phi(a) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) - c\cdot\sqrt{\mathbb{V}_\pi(u(a))}$
   ↳ Ergebnis mögl. dominiert

$c>0$ risikoavers (bestrafe für hohe Streuung)

Jede Situation unter Unsicherheit kann durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ beschrieben werden

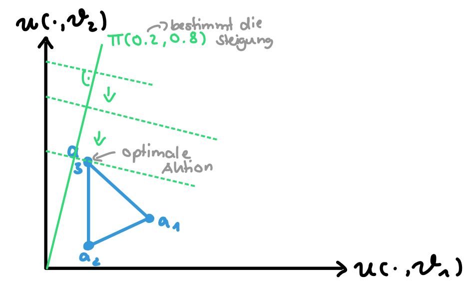
↑ Bayesianisches Paradigma

a priori Verteilung (Verteilung „vor den Daten") π

Bayes - Kriterium $\Phi(\cdot,\pi): \mathbb{A} \to \mathbb{R}\,,\; a \mapsto \underbrace{\Phi(a,\pi)}_{\text{Bayes Nutzen}} := \mathbb{E}_\pi(u(a)) = \int_\Theta u(a,\vartheta)\, d\pi(\vartheta)$

SUBJEKTIVE WKTSBEWERTUNG

Grafische Bestimmung:



Wichtige Sätze über Bayes-Aktionen:

a) **Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen**
   Es gibt immer auch eine reine Aktion, die Bayes-Aktion ist
   -> Randomisieren lohnt sich nicht

b) **Jede Bayes-Aktion ist zulässig**
   Außerdem: Zu jeder zulässigen Aktion a gibt es eine Priori Vtlg $\pi^a(\cdot)$,
   so dass a Bayes-Aktion zur Bewertung $\pi^a(\cdot)$ ist

c) Bayes und Minimax
   Eine Äquilisator-Aktion, die zugleich Bayes-Aktion ist, ist auch
   Minimax-Aktion

Theorem von Bayes

Zufallsvariablen

$$f_{U|X}(u|x) = \frac{f_{X|U}(x|u)\cdot f_U(u)}{f_X(x)}\,, \quad f_X(x) = \int f_{X|U}(x|u)\cdot f_U(u)\, du$$

Normierungskonstante

„proportional zu"

$$f_{U|X}(u|x) \propto f_{X|U}(x|u)\cdot f_U(u)$$

-> sobald ich eine gemeinsame Vtlg. anerkenne, folgt daraus Bayesianische Inferenz

$$\pi(\vartheta|x) \propto f_\vartheta(x)\cdot\pi(\vartheta)$$

Konditionale Bayes-Inferenz

bisher a priori Vtlg. der Umweltzustände
↳ ab jetzt wird mit Posteriori-Vtlg gearbeitet -> Datenbasiert

Posteriori-Verlust optimale Aktion/ konditionale Bayes-Aktion $a_x^* \in \mathbb{A}$

Beobachtung (Infobeschaffungsexperiment)

Posteriori-Vtlg

$$\mathbb{E}_{\pi(\cdot|x)}\, \ell(a_x^*,\vartheta) \le \mathbb{E}_{\pi(\cdot|x)}\, \ell(a,\vartheta) \quad \forall a\in\mathbb{A}$$

Hauptsatz der Bayes-Entscheidungstheorie

geg.: $\underbrace{(\mathbb{A}, \Theta, \ell(\cdot))}_{\text{datenfreies E-problem}}$, $\underbrace{(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (p_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})}_{\text{Informationsstruktur}}$, $\underbrace{\pi(\cdot)}_{\text{Priori-Vtlg.}}$

BAYES-OPTIMALE AKTION

alle möglichen Entschfkt. + Priorivtlg.

↓

Bayes-optimale Entschfkt. $d^*: \mathcal{X} \to \mathbb{A}$

+ konkrete Beobachtung x

↓

Bayes-optimale Aktion $a^* = d^*(x)$

POSTERIORI-VERLUST OPTIMALE AKTION

Posteriori-Vtlg.

↓

Posteriori-Verlust optimale Aktion a_x^*

Entschfkt. $d^*: \mathcal{X} \to \mathbb{A}$, $x \mapsto d^*(x)$ ist Bayes-optimal $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{X}$ ist die zugehörige Aktion $d^*(x)$ Posteriori-Verlust optimal zur Beobachtung x ist.

➡ beide Wege sind äquivalent (wir kriegen selbes Ergebnis)
↳ aber Posteriori ist deutlich einfacher

Alternative Regeln

Laplace Regel

Problem: Bayes kann kritisch gesehen werden
-> entweder: ∞ viele Daten -> Priori spielt keine Rolle
-> oder: es gibt Regelpriori -> Laplace

$\tilde{\Phi}: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j)$ (Anzahl ϑ) oder $\Phi: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j)$ als Kriteriumsfkt.
↳ alle Umweltzustände gleich gewichtet $\hat{=}$ Bayes-Regel mit gleichverteilter Priori

Rechtfertigung durch „Prinzip vom unzureichenden Grund":
Wenn nichts dafür spricht, dass eines der Elementarereignisse wahrscheinlicher ist als die anderen, dann sind sie gleichwahrscheinlich.

(Verallgemeinerung auf unendliches Θ -> nichtinformative Priori-Vtlg.
z.B. Gleichvtlg, Jeffrey-Regel, <u>Jaynes-Regel</u>, Übergang zu Credalmengen)

Hurwicz-Kriterium

Minimax zu pessimistisch
↳ Einführung eines Optimismusparameters

Hurwicz-Kriterium

$\Phi: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \Phi(a)$

$\Phi(a) = \underset{\text{Optimismusparameter}}{\alpha} \max_j u(a, \vartheta_j) + (1-\alpha) \underbrace{\min_j u(a, \vartheta_j)}_{\text{Minimax-Kriterium}}$

-> Gewichtung des max und min durch α
(wie bestimme ich α?)

Erfahrungskriterium von Hodges und Lehmann

Kompromiss zwischen Bayes & Minimax

Erfahrungskriterium

benutzen Wkt. der wir nicht trauen

$\Phi: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \Phi(a)$

$\Phi(a) = \underset{\text{Vertrauensparam.}}{\mu} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j)\, \pi(\{\vartheta_j\})\right)}_{\text{Bayes-Kriterium}} + (1-\mu) \cdot \underbrace{\left(\min_j (u(a, \vartheta_j))\right)}_{\text{Minimax-Kriterium}}$

-> Gewichtung durch μ
(wie bestimme ich μ?)

Minimax-Regret Regel   Niehans-Savage-Regel

Minimax zu pessimistisch
↳ beachtet auch den Abstand zum Möglichen

Regretfunktion $r: \mathbb{A} \times \Theta \to \mathbb{R}, (a_i, \vartheta_j) \mapsto r(a_i, \vartheta_j)$

$r(a_i; \vartheta_j) = \max_{\ell=1,\dots,n} (u(a_\ell, \vartheta_j)) - u(a_i, \vartheta_j)$ bzw. $\ell(a_i, \vartheta_j) - \min_{\ell=1,\dots,n} (\ell(a_\ell, \vartheta_j))$

Max. jedes ϑ minus der jeweilige Nutzen

-> Entscheidungsproblem heißt **induziertes Regret Problem**

Minimax-Regret Aktion a^* $\max_{j=1,\dots,m} r(a^*; \vartheta_j) \leq \max_{j=1,\dots,m} r(a, \vartheta_j) \quad \forall a \in \mathbb{A}$

größter Regret jeder Aktion
-> Minimum wählen

Bayes-Aktionen: im Bayes-Problem ist egal, ob die Nutzen- oder Regret-Tafel genutzt wird

Kritik:
- wie wahrsch. sind die Umweltzustände?
- optimale Aktion ändert sich bei Hinzufügen einer neuen subotimalen unabhängigen Aktion

Bestimmung optimaler Aktionen

Konvexe Mengen

Eine Menge ist konvex, wenn beliebige Konvexkombinationen von Elementen der Menge selbst wieder in der Menge enthalten sind.
->„Eine Menge ist konvex, wenn ich zwei beliebige Elemente der Menge nehmen kann und deren Verbindung ebenfalls in der Menge liegt."

=> um Extremwerte zu finden müssen nur noch die Ränder angeschaut werden
↳ Optimierung über endliche statt unendliche Menge

- die Menge aller Whtsmaße ist konvex -> gemischte Erweiterungen sind konvex
- Extremalpunkte: der Rand der konvexen Menge $\mathcal{E}(\underset{\text{Menge}}{\mathcal{M}})$
  ↳ reicht über sie zu optimieren

Lineare Optimierung

Zur Lösungsmenge linearer Programme:
- finde ich eine zulässige Lösung, dann weiß ich, es gibt ein Optimum
- habe ich 2 versch. Optimallösungen ist auch die Verbindung Optimallsg.

Berechnung von Optimallösungen:
- Problem: Anzahl der Extremalpkt. wächst mit steigender Anzahl der Variablen exp. an
- Simplex-Verfahren: sucht in geschickter Weise die Extremalpunkte ab
- innere-Punkte-Methoden
- 2-3 Variablen: graphische Lösung

Standard-Minimum Problem (Primal)

$$\underbrace{\overset{\text{gegeben (z.B. Kosten)}}{\underset{(1\times n)}{c^T}} \cdot \overset{\text{Variablen}}{\underset{(n\times 1)}{w}}}_{\text{Zielfunktion}} \rightarrow \min_{w}$$

unter den Nebenbedingungen

$\underset{(m\times n)}{R} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} \geq \underset{(m\times 1)}{b}$ konvexes Polyeder (z.B. A1)

$\underset{(n\times 1)}{w} \geq \underset{(n\times 1)}{0}$ Nichtnegativität

$\rightarrow$ erfüllt + $c^T \cdot \bar{w} > -\infty \Rightarrow$ zulässig

lassen $\leftrightarrow$ sich in einander umformen

Standard-Maximum Problem (Primal)

$$\underbrace{\overset{\text{gegeben (z.B. Kosten)}}{\underset{(1\times n)}{c^T}} \cdot \overset{\text{Variablen}}{\underset{(n\times 1)}{w}}}_{\text{Zielfunktion}} \rightarrow \max_{w}$$

unter den Nebenbedingungen

$\underset{(m\times n)}{R} \cdot \underset{(n\times 1)}{w} \leq \underset{(m\times 1)}{b}$ konvexes Polyeder (z.B. A1)

$\underset{(n\times 1)}{w} \geq \underset{(n\times 1)}{0}$ Nichtnegativität

$\rightarrow$ erfüllt + $c^T \cdot \bar{w} < \infty \Rightarrow$ zulässig

Duales Programm

manchmal einfacher zu lösen

Optimallsg. werden als Schattenpreise/Opportunitätskosten bezeichnet

Duales Standard-Max Problem

$\underset{(1\times m)}{b^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \rightarrow \max_{u}$

Nebenbed.: $\underset{(n\times m)}{R^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \leq \underset{(n\times 1)}{c}$, $\underset{(m\times 1)}{u} \geq \underset{(m\times 1)}{0}$

Duales Standard-Min Problem

$\underset{(1\times m)}{b^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \rightarrow \min_{u}$

Nebenbed.: $\underset{(n\times m)}{R^T} \cdot \underset{(m\times 1)}{u} \geq \underset{(n\times 1)}{c}$, $\underset{(m\times 1)}{u} \geq \underset{(m\times 1)}{0}$

Kanonische Form

alle Restriktionen liegen als Gleichungen vor (Schlupfvariablen)

$\rightarrow$ man kann erkennen, bei welchen Restriktionen noch „Spiel ist".

$c^T \cdot w \rightarrow \min_{w}$ bleibt gleich

Nebenbed.:

$[R, -I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b$ echte Gleichheit

$w_s \leftarrow$ Schlupfvar.

$w \geq 0$

$w_s \geq 0$

$c^T \cdot w \rightarrow \max_{w}$

Nebenbed.:

$[R, I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b$

$w_s \leftarrow$ Schlupfvar.

$w \geq 0$

$w_s \geq 0$

Der Satz vom komplementären Schlupf

lsg. Primalprob. in kanonischer Form: $(\tilde{w}^T, \tilde{w}_s^T)^T$

lsg. duales Prob. in kanonischer Form: $(\tilde{u}^T, \tilde{u}_r^T)^T$

sind genau dann optimal, wenn $\tilde{w}^T \cdot \tilde{u}_r + \tilde{w}_s^T \cdot \tilde{u} = 0$

„Für kein Paar von Optimallsg. für Primal- & Dual-Problem können Haupt- und zugehörige Schlupfvariable beide echt positiv sein."

Bayes-Kriterium

$$\left(\Phi_\pi(\lambda) = \mathbb{E}_\pi(\tilde{u}(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\pi(u(a_i))\lambda(\{a_i\})\right)$$

$$(e_1, \dots, \overset{\text{Anzahl Aktionen}}{e_n}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \max_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

$\hookrightarrow := \mathbb{E}_\pi(u(a_1))$

$\leftarrow$ rand. Aktionen

$\hookrightarrow$ brauchen wir, damit lin. OP

Nebenbed.:

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$\Rightarrow$ liegen im Einheitssimplex

Beobachtung:

Ecken des Einheitssimplex entsprechen den Punktmaßen in der gemischten Erweiterung (den reinen Aktionen)

$\rightarrow$ Optimum wird in reiner Aktion angenommen

Maximin-Kriterium

damit alle Variablen ≥ 0 sind

$M_1 - M_2 \to \max_{M_1, M_2, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)}$

$$\left(\begin{array}{l} \Phi_M(\lambda) = \min_j \tilde{u}(\lambda, \vartheta_j) = \min_j \left(\sum_{i=1}^n u(a_i, \vartheta_j) \lambda(\{a_i\}) \right) \\ \to \text{nicht linear in Gewichten} \to \text{umformen} \\ \Phi_M(\lambda) = \max \{ M_1 - M_2 : M_1, M_2 \geq 0 \wedge M_1 - M_2 \leq \tilde{u}(\lambda, \vartheta_j) \ \forall j \} \end{array} \right)$$

Nebenbed.:
- $\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n), M_1, M_2 \geq 0$
- $\sum_{i=1}^n u(a_i, \vartheta_j) \lambda(a_i) \geq M_1 - M_2 \quad \forall j = 1, \dots, m$ (Anzahl Umweltzustände)
- $\sum_{i=1}^n \lambda(a_i) = 1$

Beobachtung:
Zulässige Menge $\neq$ Einheitssimplex
-> Randomisieren kann sich lohnen

Hodges & Lehmann-Kriterium

-> unterscheidet sich zu Maximin lediglich in der Zielfkt.

$$\left(\begin{array}{l} \Phi_M(\lambda) = \mu \, \mathbb{E}_\pi(\tilde{u}(\lambda)) + (1-\mu) \min_j \tilde{u}(\lambda, \vartheta_j) \\ \to \text{Umformung des Maximin-Teils} \end{array} \right)$$

Vertrauenskriterium

$$((1-\mu), (\mu - 1), \mu e_1, \dots, \mu e_n) \cdot \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \to \max_{M_1, M_2, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)}$$

Nebenbed.:
- $\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n), M_1, M_2 \geq 0$
- $\sum_{i=1}^n u(a_i, \vartheta_j) \lambda(a_i) \geq M_1 - M_2 \quad \forall j = 1, \dots, m$
- $\sum_{i=1}^n \lambda(a_i) = 1$

Beobachtung:
Auch hier kann sich Randomisieren lohnen

Verallgemeinerter Wahrscheinlichkeitsbegriff

Typ I / I'   <- Kontinuum an Mischtypen ->   Typ II / II'

Bernoulli / Bayes   Modellierung z.B. via Vertrauenskriterium   Maximin

- klassische Wkt: Jede Mengenfkt. $p(\cdot)$, die die Axiome von Kolmogorov erfüllt.
  -> wir suchen eine andere Art Unsicherheiten zu modellieren
  ↳ statt einer Priori nehmen wir alle Prioris, die mit unseren „constraints" (unserem Wissen) kompatibel sind

=> ZIEL: Verallgemeinerte Wktsrechnung
↳ Berücksichtigung des Ausmaßes an Ambiguität
↳ Zuverlässigkeit statt (über-)präzision
reliable statt präzisen Schlüssen

Credalmengen

- Credalmenge $\mathcal{M}$: die Menge in ihrer Gesamtheit beschreibt die Wkt., kein Element ist wahrscheinlicher als ein anderes
- Größe der Menge reflektiert Ausmaß der Ambiguität
- klassische Wkt. als Spezialfall: Ein-Punkt-Menge

Intervallwahrscheinlichkeit

- statt $p: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto p(A)$ betrachtet man

Menge aller abgeschlossenen Intervalle in $[0;1]$ — Kapazität

$P: \mathcal{A} \to \mathcal{Z}_0([0;1])$, $A \mapsto P(A) = [\underbrace{L(A)}_{\text{lower}}, \underbrace{U(A)}_{\text{upper}}]$

- klassische Wkt. als Spezialfall: $L(\cdot) = U(\cdot)$

Auffassungen der Menge

- epistemische Sicht: es gibt wahre Wkt → unbekannt
  ↳ Menge/Intervall betrachten
- ontologische Sicht: Wkt. grundsätzlich als intervall-/mengenwertige Entität

Ellsberg-Experiment

- aus Urne wird eine Kugel gezogen
- Anteil rot ist $\frac{1}{3}$, Anteil gelb & schwarz unbekannt
- Situation 1: wähle
  a_1: 100 \$, falls rot
  a_2: 100 \$, falls schwarz
  ↳ mehr Leute wählen a_1
- Situation 2: wähle
  a_3: 100 \$, falls rot oder gelb
  a_4: 100 \$, falls schwarz oder gelb
  ↳ mehr Leute wählen a_4

⇒ es kann keine Priori geben, bei der man so entscheiden würde
→ die Entscheidungsfindung wird noch von etwas anderem beeinflusst → Ambiguity

- R-Wkt.: $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ⇒ $P(\cdot)$ heißt R-Wkt & $\mathcal{M}$ heißt Struktur

Struktur / Menge $\mathcal{M}$ ist nicht leer / Intervallgrenzen werden nicht von Strukturelementen angenommen → $L(\cdot)$ und $U(\cdot)$ können „zu weit" sein

↳ Überprüfung: lineare Optimierung

- F-Wkt.: $\forall_{A \in \mathcal{A}}$ $L(A) = \inf_{p \in \mathcal{M}} p(A)$ und $U(A) = \sup_{p \in \mathcal{M}} p(A)$ (⇒ R-Wkt)

Intervallgrenzen und Struktur passen zusammen → keine der Intervallgrenzen ist zu weit

↳ Überprüfung: lineare Optimierung

→ Struktur ist konvexes Polyeder → $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ nicht leer & endlich (Extremalpunktmenge)

Verallgemeinerte Erwartungswerte

- **Intervallwertiger Erwartungswert**

wir rechnen alle $\mathbb{E}$ aus und nehmen min & max

$\mathcal{M}$-integrierbar

$$\mathbb{E}_{\mathcal{M}} X := [\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} X ; \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} X] := [\inf_{p \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_p X ; \sup_{p \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_p X]$$

X heißt $\mathcal{M}$-integrierbar, wenn X für jedes $p \in \mathcal{M}$ p-integrierbar ist.

- **Choquet-Integrale**

$\mathcal{M}$-int + nicht negativ

$$\int X \, dL := \int L(\{X > x\}) \, dx$$
$$\int X \, dU := \int U(\{X > x\}) \, dx$$

↳ Allgemein gilt: $\int X \, dL \leq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} X \leq \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} X \leq \int X \, dU$

- **Verallgemeinerter Erwartungsnutzen**

Statt einer Zahl nun Intervalle

Priori

$$\mathbb{E}_{\mathcal{M}}(u(a)) = [\inf_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_\pi(u(a)) ; \sup_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_\pi(u(a))]$$

verallgemeinerte Priori-Bewertung

→ wie ordnen?
- Repräsentationen: Intervalle durch eine reele Zahl beschreiben (Mittelpunkt, untere Intervallgrenze ...)
- Aussagen analog zur Zulässigkeit (E-Zulässigkeit, ...)
  ↳ keine vollständige Ordnung

Entscheidungskriterien

- **Max-E-Min-Kriterium** $\Phi(\cdot,\mathcal{M}): \mathbb{A} \to \mathbb{R},\ a \mapsto \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a))$ — wir wählen unteren Erwartungswert
  -> „lokales Maximin-Kriterium"

- **Max-E-Min-Aktion** $a^* \in \mathbb{A}$ mit $\Phi(a^*,\mathcal{M}) \geq \Phi(a,\mathcal{M})\ \forall a \in \mathbb{A}$ (nicht zwingend gleicher Zustand)
  also mit $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a^*)) \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a))\ \forall a \in \mathbb{A}$ — wir wählen Aktion mit dem größten unteren Erwartungswert unter allen Zuständen
  ↳ völlige Ambiguität : $\hat{=}$ Maximin-Kriterium
  ↳ perfekte probabilistische Information : $\hat{=}$ Bayes-Kriterium

- **lineare Repräsentation mit der Vorsicht η** ($0 \leq \eta \leq 1$) $\Phi_\eta(\mathcal{M}): \mathbb{A} \to \mathbb{R},\ a \mapsto \eta \cdot \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a)) + (1-\eta)\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a))$ — Linearkomb. der $\mathbb{E}$
  -> „lokales Hurwicz-Kriterium"

- **optimale Aktion bei der Vorsicht η** $a^{*\eta}$ mit $\Phi_\eta(a^{*\eta},\mathcal{M}) \geq \Phi_\eta(a^{*\eta},\mathcal{M})\ \forall a \in \mathbb{A}$
  ↳ $\eta = 1 \Rightarrow$ Max-E-Min-Prinzip

- **E-zulässig** / E-admissible :
  Eine Aktion $a_\pi \in \mathbb{A}$ heißt E-zulässig bzgl. der verallgemeinerten Priori-Bewertung $\Pi(\cdot)$ bzw. $\mathcal{M}$, falls es ein $\pi(\cdot) \in \mathcal{M}$ gibt, so dass a_π Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ ist.

- $\mathcal{M} = \{\pi\}$ (ideale Stochastizität) : a^* ist genau dann optimal, wenn a^* Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ ist
- $\mathcal{M} = \{$alle klassischen Wkt.$\}$ (Unsicherheit) : a^* ist genau dann
  - Max-E-Min Aktion, wenn a^* Maximin-Aktion ist
  - optimale Aktion mit Vorsicht η, wenn a^* Hurwicz-Aktion zum Optimismusparameter $(1-\eta)$ ist

E_ε-Admissibilität

Kompromiss zwischen E-Admissibilität und Maximalität

a^* heißt E_ε-admissibel, falls es eine Familie $(\pi_a)_{a \in \mathbb{A}}$ von Wktsmaßen in $\mathcal{M}$ gibt, so dass gilt:
- $\mathbb{E}_{\pi_a}(u(a^*)) \geq \mathbb{E}_{\pi_a}(u(a))\ \forall a \in \mathbb{A}$
- $\|\pi_a - \pi_{a'}\|_1 \leq \varepsilon\ \forall a, a' \in \mathbb{A}$ ($\varepsilon \geq 0$)

Maximalität

Abschwächung der E-Admissibilität
-> Max lokal statt global

a^* heißt $\mathcal{M}$-maximal, falls $\forall a \in \mathbb{A}\ \exists \pi_a \in \mathcal{M}: \mathbb{E}_{\pi_a}(u(a^*)) \geq \mathbb{E}_{\pi_a}(u(a))$

Lineare Optimierung

$$\mathcal{M} = \{\pi : \underline{b}_s \leq \mathbb{E}_\pi(f_s) \leq \overline{b}_s\ \forall s = 1,\dots,r\}$$
(f_s: irgendeine Zufallsvar.)

wobei
- $\underline{b}_s \leq \overline{b}_s \in \mathbb{R}\ \forall s = 1,\dots,r$
- $f_s: \Theta \to \mathbb{R}\ \forall s = 1,\dots,r$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 \\ f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ -f_{11} & \cdots & -f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{r1} & \cdots & f_{rm} \\ -f_{r1} & \cdots & -f_{rm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\underline{b}_1 \\ \overline{b}_1 \\ \vdots \\ -\underline{b}_r \\ \overline{b}_r \end{pmatrix}$$

E-Admissibilität

Vorüberlegungen:
- es reicht aus, sich auf reine Aktionen zu beschränken
- für eine reine Aktion muss überprüft werden, ob sie für ein Maß aus unserer Credalmenge $\mathcal{M}$ Bayes-optimal ist

Idee: Maximiere über die Summe der Gewichte der (potentiellen) priori π, unter den Nebenbedingungen
- $\pi \in \mathcal{M}$
- a max den Erwartungsnutzen bzgl. π unter allen Aktionen

Aktion a ist dann E-zulässig, falls das Maximum 1 ist.

Die Aktion $a_i \in \mathbb{A}$ ist genau dann E-admissible bzgl. der Credalmenge $\mathcal{M}$, falls der Optimalwert des folgenden linearen Programms genau 1 ist.

$$(1, \dots, 1) \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix} \to \max_{\pi}$$

unter den Nebenbedingungen:
- $(\pi_1, \dots, \pi_m) \geq 0$
- $\sum_{j=1}^{m} \pi_j \leq 1$ — die Komp. von π dürfen sich höchst. zu 1 addieren (sonst kein Standardmaxproblem)
- $\underline{b}_s \leq \sum_{j=1}^{m} f_s(\vartheta_j) \cdot \pi_j \leq \overline{b}_s \;\forall s = 1, \dots, r$ — π muss in der Credalmenge liegen
- $\sum_{j=1}^{m} (u_{pj} - u_{ij}) \cdot \pi_j \leq 0 \;\forall p = 1, \dots, n$ — a_i muss unter allen reinen Aktion $\mathbb{E}$ bzgl. π max

  d.h.: $\mathbb{E}_\pi(a_p) \leq \mathbb{E}_\pi(a_i) \;\forall p = 1, \dots, n$

Verallgemeinerter Erwartungsnutzen

- Unterer Erwartungsnutzen

$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a_i))$ der Aktion $a_i \in \mathbb{A}$ ergibt sich als Optimalwert des folgenden linearen Programms.

$$(\underbrace{u_{i1}}_{u(a_i, \vartheta_1)}, \dots, u_{im}) \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix} \to \min_{\pi}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} - (\pi_1, \dots, \pi_m) \geq 0 \\ - \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1 \end{array}\right\} \pi \text{ ist Whtsmaß} \\ - \underline{b}_s \leq \sum_{j=1}^{m} f_s(\vartheta_j) \cdot \pi_j \leq \overline{b}_s \;\forall s = 1, \dots, r \quad \pi \text{ hält } \mathbb{E}\text{-Constraints ein} \end{array}\right\} \pi \text{ in Credalmenge}$$

- Oberer Erwartungsnutzen

$\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(u(a_i))$ der Aktion $a_i \in \mathbb{A}$ ergibt sich als Optimalwert des folgenden linearen Programms.

$$(\underbrace{u_{i1}}_{u(a_i, \vartheta_1)}, \dots, u_{im}) \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix} \to \max_{\pi}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} - (\pi_1, \dots, \pi_m) \geq 0 \\ - \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1 \end{array}\right\} \pi \text{ ist Whtsmaß} \\ - \underline{b}_s \leq \sum_{j=1}^{m} f_s(\vartheta_j) \cdot \pi_j \leq \overline{b}_s \;\forall s = 1, \dots, r \quad \pi \text{ hält } \mathbb{E}\text{-Constraints ein} \end{array}\right\} \pi \text{ in Credalmenge}$$

Abwandlung für randomisierte Aktionen

$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(\tilde{u}(\lambda))$ bzw. $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(\tilde{u}(\lambda))$ der randomisierten Aktion $\lambda \in \mathcal{M}(A)$ lässt sich als Optimalwert des folgenden linearen Programms darstellen.

$$(\overset{\tilde{u}(\lambda,\vartheta_1)}{\tilde{u}_{\lambda,1}}, \dots, \tilde{u}_{\lambda,m}) \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \\ \pi_m \end{pmatrix} \to \min_{\pi} \quad \text{bzw.} \quad \max_{\pi}$$

unter den selben Nebenbedingungen

-> Problem: müssen nicht nur 1, sondern ∞ viele lin. Programme lösen

Max-E-Min Kriterium

Vorüberlegung: randomisieren kann sich lohnen

- Variante 1: $\overset{\text{Extremalpunkte}}{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = \{\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(k)}\}$ bekannt

Die rand. Aktion $\lambda^* = (\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n))$ ist genau dann Max-E-Min Lösung, wenn sie Optimallösung des folgenden linearen Programms ist.

$$M_1 - M_2 \to \max_{M_1, M_2, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen:

- $(M_1, M_2, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^n \lambda(a_i) = 1$

$M_1 - M_2 \leq \sum_{i=1}^n \overset{\mathbb{E}_{\pi^{(p)}}(u(a_i))}{e_{ip}} \lambda(a_i) \ \forall p \in \{1, \dots, k\}$

- Variante 2: Extremalpunkte nicht bekannt

Die rand. Aktion $\lambda^* = (\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n))$ ist genau dann Max-E-Min Lösung, wenn sie Optimallösung des folgenden linearen Programms ist.

$$M_1 - M_2 + \sum_{s=1}^r (\underline{b}_s x_s - \overline{b}_s y_s) \to \max_{M_1, M_2, x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen:

- $(M_1, M_2, x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^n \lambda(a_i) = 1$
- $M_1 - M_2 + \sum_{s=1}^r f_s(\vartheta_j)(x_s - y_s) \leq \sum_{i=1}^n u_{ij} \lambda(a_i) \ \forall j \in \{1, \dots, m\}$

=> beide Varianten führen zum gleichen Ergebnis

- Variante 1 erfordert Preprocessing (Berechnung der Extremalpunkte)
  - -> aber: auch für Variante 2 müssen gewisse Extremalpunkte ausgerechnet werden
- -> liegen geschlossene Formeln zur Berechnung vor: Variante 1
- -> müssen die Extremalpkt. ebenfalls über Optimierung bestimmt werden: hängt von Komplexität der Credalmenge ab

Nutzentheorie

- intrinsischer Nutzen:
  - Nutzen ist eine Eigenschaft eines Objekts
  - unabhängig von anderen Objekten und unabhängig vom „agent"
- relationaler Nutzen:
  - Nutzen eines Objekts für einen spezifischen Agenten
  - kann nur indirekt im Vergleich mit anderen vergleichbaren Objekten beobachtet werden

↳ Nutzenbegriff der Vorlesung

Ordinale Nutzen-Theorie

Relationen

Eigenschaften binärer Relationen

A ist nicht-leere Menge, $R \subset A \times A$ ist eine binäre Relation auf A.
Dann ist R:

- reflexiv $\Leftrightarrow (a,a) \in R \quad \forall a \in A$
- symmetrisch $\Leftrightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \quad \forall a,b \in A$
- transitiv $\Leftrightarrow (a,b)(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \quad \forall a,b,c \in A$
- negativ transitiv $\Leftrightarrow (a,b) \notin R \wedge (b,c) \notin R \Rightarrow (a,c) \notin R \quad \forall a,b,c \in A$
- asymmetrisch $\Leftrightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \quad \forall a,b \in A$
- antisymmetrisch $\Leftrightarrow (a,b),(b,a) \in R \Rightarrow a = b \quad \forall a,b \in A$
- komplett $\Leftrightarrow (a,b) \in R \vee (b,a) \in R \quad \forall a,b \in A$
  ↳ oder auch vollständig

Arten von binären Relationen

A ist nicht-leere Menge. Eine binäre Relation auf A ist:

- eine Präferenz
  $\Leftrightarrow$ komplett + transitiv
- eine strikte Präferenz
  $\Leftrightarrow$ asymmetrisch + negativ transitiv
- eine lineare Ordnung (ist immer auch Präferenz)
  $\Leftrightarrow$ komplett + transitiv + antisymmetrisch
- eine Äquivalenz-Relation
  $\Leftrightarrow$ reflexiv + symmetrisch + transitiv

Jede Präferenz kann in 2 disjunkte Teile unterteilt werden:
A nicht-leere Menge, $\succsim$ Präferenz-Relation auf A

Strikter Teil: $\succ \subset A \times A$
$\forall a,b \in A: a \succ b :\Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg\, b \succsim a$

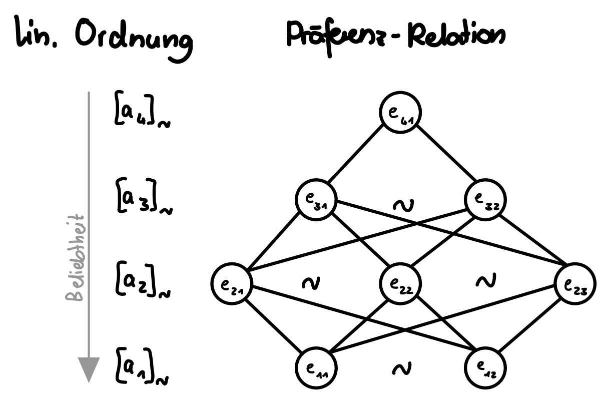
Indifferenter Teil: $\sim \in A \times A$
$\forall a,b \in A: a \sim b :\Leftrightarrow a \succsim b \wedge b \succsim a$

$(a,b) \in R : aRb$
$(a,b) \notin R : \neg aRb$

Eigenschaften von Präferenz-Relationen

A ist nicht-leere Menge, $\succsim$ ist Präferenz-Relation auf A.
Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- $\sim$ ist eine Äquivalenz-Relation auf A
- $\succ$ ist eine strikte Präferenz auf A
- $\forall a,b,c \in A: (a \sim b \wedge b \succ c) \Rightarrow a \succ c$
- $\forall a,b,c \in A: (a \succ b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \succ c$
- $\forall a,b \in A: a \succ b \vee b \succ a \vee a \sim b$



Quotient einer Präferenz-Relation

- $[a]_\sim := \{b \in A : a \sim b\}$ alle zu a äquivalenten Elemente
- Quotienten-Menge $A_\sim := \{[a]_\sim : a \in A\}$ Menge von Mengen

Lineare Ordnung

Die binäre Relation $[\succsim]$ auf $A_\sim$ ist eine lin. Ordnung:
$\forall [a]_\sim, [b]_\sim \in A_\sim : [a]_\sim [\succsim] [b]_\sim :\Leftrightarrow (\exists a_1 \in [a]_\sim, b_1 \in [b]_\sim : a_1 \succsim b_1)$

Repräsentation

→ soll später die Nutzenfkt. werden

Lass A eine nicht-leere Menge und R eine binäre Relation auf A sein.
R wird repräsentierbar in $(\mathbb{R}, \geq)$ genannt $\Leftrightarrow \exists\, \phi : A \to \mathbb{R} : \forall a,b \in A : aRb \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$
↑ Funktion heißt reale Repräsentation des Paars (A,R)

→ statt der Relation kann ich mir auch die Funktionswerte der Repräsentation anschauen
- wenn es diese Repräsentation gibt folgt daraus Vollständigkeit und Transitivität

- Repräsentation einer linearen Ordnung

Lass A eine nicht-leere Menge und $\succsim$ eine lineare Ordnung auf A sein.

$\succsim$ ist repräsentierbar in $(\mathbb{R}, \geq) \Leftrightarrow \exists \phi: A \to \mathbb{R}: \forall a,b \in A: a \succ b \Rightarrow \phi(a) > \phi(b)$

- Cantor's Theorem

Lass A eine nicht-leere Menge und $\succsim$ eine lineare Ordnung auf A sein.

A ist abzählbar $\Rightarrow$ $\succsim$ ist repräsentierbar in $(\mathbb{R}, \geq)$

(nicht mächtiger als die reelen Zahlen) — suffizient, aber nicht nötig

---

A ist nicht-leere Menge, $\succsim \subset A \times A$ ist reflexiv + transitiv: (muss nicht lin. Ordn.)

- $B \subset A$ heißt ordnungsdicht bzgl $\succsim$ $\Leftrightarrow \forall a,c \in A, a \succ c: \exists b \in B \; a \succsim b \succsim c$
- $(A, \succsim)$ heißt ordnungsseperabel $\Leftrightarrow \exists \underset{\text{ordnungs-dicht}}{B \subset A}: B$ ist abzählbar

---

- Birkhoff's Theorem

Verallgemeinerung von Cantor's Theorem

Lass A eine nicht-leere Menge und $\succsim$ eine lineare Ordnung sein.

$\succsim$ ist repräsentierbar in $(\mathbb{R}, \geq) \Leftrightarrow (A, \succsim)$ ist ordnungsseperabel

folgt

- Repräsentation einer Präferenz-Relation

Lass A eine nicht-leere Menge und $\succsim$ eine Präferenz auf A sein.

$\succsim$ ist repräsentierbar in $(\mathbb{R}, \geq) \Leftrightarrow (A, \succsim)$ ist ordnungsseperabel

- Eindeutigkeit der Repräsentation

- nur bis auf streng monoton wachsende Transformationen eindeutig
  $\Rightarrow$ Abstände von Werten haben keine Bedeutung
  ↳ Nutzendifferenzen anschauen ergibt keinen Sinn

Ordinaler Nutzen in der Entscheidungstheorie

- $(A, \succsim)$ ist Präferenz, die in $(\mathbb{R}, \geq)$ repräsentierbar ist
- $\Theta: \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_m\}$ ist endliche Menge der Umweltzustände
- $\mathcal{A} := \{x_1, \dots, x_n\} \subset A^\Theta$ ist endliche Menge der Aktionen
  ↳ Zufallsvar. die jedem ϑ ein Element aus A zuordnet
- $C := \{c_{ij} := x_i(\vartheta_j) \mid i \in \underline{n} \wedge j \in \underline{m}\}$ ist Menge der relevanten Konsequenzen
  Konsequenzenraum
- $\succsim_C := C^2 \cap \succsim$ ist die Präferenzrelation auf C eingeschränkt

X statt A	ϑ_1	...	ϑ_m
x_1	c_{11}	...	c_{1m}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	c_{n1}	...	c_{nm}

Konsequenzen statt Nutzen (müssen nicht numerisch sein)
↳ geordnet durch Präferenz-relation

$\Rightarrow$ Ziel: (Präferenz-) Relation auf $\mathcal{A}$

Es ist möglich Dominanz & Maximin-Kriterium ohne Nutzenfkt. zu definieren:

schwache Dominanz

$x_1, x_2 \in \mathcal{A}: x_1 \geq_{dom} x_2 :\Leftrightarrow$
$(\forall \vartheta \in \Theta: x_1(\vartheta) \succsim_C x_2(\vartheta))$

Dominanz starke Dominanz wäre auch möglich

$x_1, x_2 \in \mathcal{A}: x_1 >_{dom} x_2 :\Leftrightarrow$
$(\forall \vartheta \in \Theta: x_1(\vartheta) \succsim_C x_2(\vartheta)) \wedge$
$(\exists \vartheta_0 \in \Theta: x_1(\vartheta_0) \succ_C x_2(\vartheta_0))$

Maximin

$x_1, x_2 \in \mathcal{A}: x_1 \succsim_{min} x_2 :\Leftrightarrow$
$x_1(\vartheta_{x_1}) \succsim_C x_2(\vartheta_{x_2})$ mit
$\vartheta_z \in \{\vartheta^*: \forall \vartheta \in \Theta: z(\vartheta) \succsim z(\vartheta^*)\}$ für $z \in \{x_1, x_2\}$

- Erwartungswertbildung ist nicht möglich (Stärke der Präferenz nicht bekannt)
  ↳ Bayes-Kriterium nicht anwendbar
  -> probabilistische Informationen können nicht verwendet werden

Kardinaler Nutzen

Lotterien

- Einfache Lotterien

Wktsfkt. die endlich vielen Elementen pos. Werte zuweist (ähnlich wie gemischte Erweiterung)
-> es ist möglich die Stärke der Präferenzen zu implizieren

Lass A eine nicht-leere Menge von Alternativen sein. Für $f: A \to B$ mit $B \subset \mathbb{R}$ nennen wir $\operatorname{supp}(f) := \{a \in A : f(a) > 0\}$ den <u>Support</u> von f. Die Funktion $p: A \to [0,1]$ mit $\overset{\text{Support abzählbar}}{|\operatorname{supp}(p)| < \infty}$ und $\overset{\text{Summe ist 1}}{\sum_{a \in \operatorname{supp}(p)} p(a) = 1}$ ist eine einfache Lotterie auf A. Die Menge aller einfachen Lotterien auf A wird als $\mathcal{L}_A$ bezeichnet.

Beispiel: $A = \{\text{Tee}, \text{Wasser}, \text{Bier}\}$

einfache Lotterien sind z.B.: $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $\overbrace{(0.1, 0.5, 0.4)}^{\text{Summe ist 1}}$

↳ sicher Tee   ↳ sicher Bier   ↳ 10% Tee, 50% Wasser, 40% Bier

- Zusammengesetzte Lotterien

2 hintereinander geschaltete Lotterien -> einfache Lotterie

Für $p, q \in \mathcal{L}_A$ und $\alpha \in [0,1]$ definiere die zusammengesetzte Lotterie $pq_\alpha := \alpha p + (1-\alpha) q$ komponentenweise.
-> pq_α ist wieder eine einfache Lotterie in $\mathcal{L}_\alpha$

Von Neumann-Morgenstern

- von Neumann-Morgenstern Axiome

Lass A eine nicht-leere Menge, $\mathcal{L}_A$ die Menge der einfachen Lotterien auf A und $\succsim$ eine binäre Relation auf $\mathcal{L}_A$ sein.

1) Präferenzrelation
$\succsim$ ist eine Präferenz-Relation auf $\mathcal{L}_A$ (komplett + transitiv)

2) Unabhängigkeit -> wie Dominanz
$\forall p,q,r \in \mathcal{L}_A, \alpha \in (0,1]: p \succ q \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r$
Wenn ich p besser als q finde, finde ich auch $p \cdot r$ besser als $q \cdot r$

3) Stetigkeit -> Präferenzen sollen nah genug aneinander liegen
$\forall p,q,r \in \mathcal{L}_A: p \succ q \succ r \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in (0,1): \alpha p + (1-\alpha) r \succ q \succ \beta p + (1-\beta) r$
ich kann zum besten mit kleiner Wkt. das schlechteste dazu addieren und es bleibt trotzdem besser als q
↳ Es gibt kein zu guten / schlechten Lotterien
(nichts ist so schlecht, dass ich es nicht mit einer kleinen Wkt. in Kauf nehmen würde)

=> daraus folgt für alle $p, q, r \in \mathcal{L}_A$:
- $p \succ q \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in [0,1]: \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha p + (1-\alpha) p \succsim \beta p + (1-\beta) q$
  Wenn die Wkt. auf dem besseren höher ist, finde ich das auch besser
- $p \sim q \Rightarrow \forall \alpha \in [0,1]: \alpha p + (1-\alpha) r \sim \alpha q + (1-\alpha) r$
  Wenn ich indifferent bin, bin ich auch mit hinzuaddiertem r indifferent
- $p \succsim q \succsim r \wedge p \succ r \Rightarrow$ es existiert genau ein $\alpha^* \in [0,1]: q \sim \alpha^* p + (1-\alpha^*) r$
  ↳ α^* wird später genau der Fktswert der Nutzenfkt.

- von Neumann-Morgenstern Theorem

Lass A eine nicht-leere Menge und $\succsim$ eine binäre Relation auf $\mathcal{L}_A$ sein.

$\succsim$ erfüllt die vNM Axiome $\Leftrightarrow \exists u: A \to \mathbb{R} : \forall p,q \in \mathcal{L}_A: p \succsim q \Leftrightarrow \sum_{a \in \operatorname{supp}(p)} u(a) \cdot p(a) \geq \sum_{a \in \operatorname{supp}(q)} u(a) \cdot q(a)$
Wenn $p \succsim q$ ist auch $\mathbb{E}(p) \geq \mathbb{E}(q)$

↳ Diese Funktion u ist eindeutig bis auf positiven linearen Transformationen ($u^*: A \to \mathbb{R}$, $u^*(\cdot) = \underset{\in \mathbb{R}^+}{c} \cdot u(\cdot) + \underset{\in \mathbb{R}}{d}$)

=> eine Präferenzrelation, die die vNM Axiome erfüllt, ist darstellbar über $\mathbb{E}$ einer reelwertigen Nutzenfunktion.

Kardinaler Nutzen in der Entscheidungstheorie

- $\mathcal{C} := \{c_{ij} \mid i \in \underline{n} \wedge j \in \underline{m}\}$ ist Konsequenzenraum
- $\succsim$ binäre Relation auf $\mathcal{L}_c$, die die vNM Axiome erfüllt

$\overset{vNM}{\Rightarrow}$ wir können $u: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ wählen

- π ist Wktsmaß aus Θ

-> Jedes Paar (X_i, π) ist eindeutig durch eine einfache Lotterie $p_{(i,\pi)}$ bestimmt:

$$p_{(i,\pi)}(c) := \pi(X_i^{-1}(\{c\})) := \pi(\{\vartheta \in S : X_i(\vartheta) = c\})$$

$\Rightarrow$ $p_{(\underset{1,\dots,n}{i},\pi)} \succsim p_{(\underset{1,\dots,n}{k},\pi)} \Leftrightarrow \mathbb{E}_\pi(u \circ X_i) \geq \mathbb{E}_\pi(u \circ X_k)$

-> X_i muss X_k vorgezogen werden $\Leftrightarrow \mathbb{E}_\pi(u(X_i)) > \mathbb{E}_\pi(u(X_k))$

Beispiel: einfache Lotterien definieren

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
X_1	c_1	c_2	c_4	c_4
$\vdots$				

$\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{10}\}$

$p_{(1,\pi)}(c_1) = \pi(\{\vartheta_1\})$; $p_{(1,\pi)}(c_2) = \pi(\{\vartheta_2\})$

$p_{(1,\pi)}(c_3) = 0$; $p_{(1,\pi)}(c_4) = \pi(\{\vartheta_3\}) + \pi(\{\vartheta_4\})$

$p_{(1,\pi)}(c_i) = 0$ für $i = 5, \dots, 10$

=> Das vNM Theorem akzeptiere ich sobald ich Erwartungsnutzen vergleiche / das Bayes-Kriterium nutze

Partiell kardinaler Nutzen

- Problem: Annahme der Kompletheit kann verletzt sein
  - ↳ Wir können nicht unbedingt ordnen, wenn z.B. die Konsequenzen unterschiedliche Dimensionen betrachten

-> versch. Lösungsansätze:

- Nicht-komplette ordinale Präferenzen: Wir können nicht mehr <u>eine</u> Nutzenfkt. finden, sondern eine Menge
- Nicht-komplette kardinale Präferenzen: Nicht mehr <u>ein</u> vNM Erwartungswert, sondern eine Menge
- Konsistente Präferenzsysteme: Präferenzen können sowohl ordinal als auch kardinal sein

Präferenzsysteme

- statt 1 Relation haben wir 2
  - Rangordnung zwischen den Konsequenzen
  - Rangordnung zwischen den Rangordnungen

Lass A eine Konsequenzenmenge sein.

- $R_1 \subseteq A \times A$ ist reflexive + transitive Ordnung auf A
- $R_2 \subseteq R_1 \times R_1$ ist reflexive + transitive Ordnung auf R_1

=> $\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ heißt Präferenzsystem auf A

Repräsentation

$\mathcal{A} = [A, R_1, R_2]$ heißt **konsistent** $\Leftrightarrow \exists u: A \to [0,1] : \forall a,b,c,d \in A$:

- $(a,b) \in R_1 \Rightarrow u(a) \geq u(b)$ $\quad (u(a) = u(b) \Leftrightarrow (a,b) \in I_{R_1}^{\text{Indifferenz}})$
- $((a,b),(c,d)) \in R_2 \Rightarrow u(a) - u(b) \geq u(c) - u(d)$
  $(u(a) - u(b) = u(c) - u(d) \Leftrightarrow ((a,b),(c,d)) \in I_{R_2})$

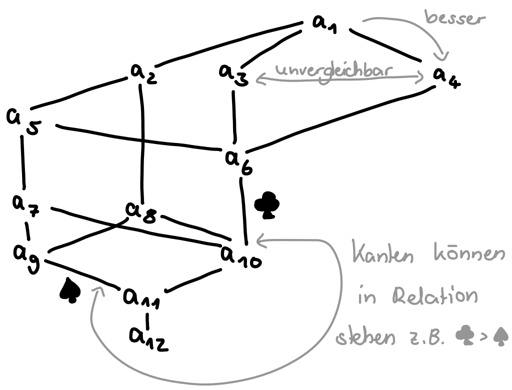
$(a,b) \in R_1$: a ist min. so gut wie b

$((a,b),(c,d)) \in R_2$: b durch a zu ersetzen ist min. so gut wie d durch c zu ersetzen

Jede solche Funktion u heißt **Repräsentation** des Präferenzsystems $\mathcal{A}$. Die Menge aller Repräsentationen u von $\mathcal{A}$ wird mit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ bezeichnet.

-> $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist konsistent

Hasse Diagramm



-> Nebenbedingungen fürs lineare Programm:

z.B.: $(a_2, a_5) \in P_{R_1}$: $u_5 + \varepsilon \le u_2$ -> für jede Kante

$((a_6, a_{10}), (a_9, a_{11})) \in P_{R_2}$: $u_9 - u_{11} + \varepsilon \le u_6 - u_{10}$

-> optimale Lösung > 0 ? Gibt uns <u>eine</u> mögl. Repräsentation

Konsistenz überprüfen

Lass $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ sein und betrachte das lineare Optimisierungsproblem

$$\varepsilon = \langle (0, \dots, 0, 1)', (u_1, \dots, u_n, \varepsilon)' \rangle \to \max_{(u_1, \dots, u_n, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1}}$$

unter den Nebenbedingungen:

- $0 \le (u_1, \dots, u_n, \varepsilon) \le 1$
- $u_p = u_q \quad \forall (a_p, a_q) \in I_{R_1}$
- $u_q + \varepsilon \le u_p \quad \forall (a_p, a_q) \in P_{R_1}$
- $u_p - u_q = u_r - u_s \quad \forall ((a_p, a_q), (a_r, a_s)) \in I_{R_2}$
- $u_r - u_s + \varepsilon \le u_p - u_q \quad \forall ((a_p, a_q), (a_r, a_s)) \in P_{R_2}$

-> $\mathcal{A}$ ist konsistent, wenn die Lösung streng positiv ist.

Partiell kardinaler Nutzen in der Entscheidungstheorie

-> Wie definiert man Entscheidungskriterien?

- Kriterien, welche Repräsentationen von $\{\mathbb{E}_\pi(u \circ X) : (\overset{\text{nicht eindeutig}}{u}, \pi) \in \mathcal{U}_\mathcal{A} \times \mathcal{M}\}$
  - ↳ Intervall - $\mathbb{E}$
- Globale Kriterien, welche E-Admissibilität generalisieren (finde min 1 (u, π) für das X erw. Nutzen max)
- Lokale Kriterien, welche Maximalität generalisieren (finde min 1 (u_Y, π_Y) für alle $Y \in A$) für das X Y dominiert)

Daten-basierte Entscheidungen unter Credalmengen

Konjugierte Verteilungen

Priori -> Daten -> Posteriori => Bayes - Lernen

neue Daten

↳ neue Daten: Posteriori wird zur Priori

=> Posteriori ausrechnen etwas schwierig

↳ einfacher wenn konjugiert

Eine Vtlsfamilie Π von Priori-Vtlg. heißt zu einer Menge $\mathcal{P}$ von SPvtlg. konjugiert, wenn für $\forall \pi(\cdot) \in \Pi$ und für $\forall p(\cdot) \in \mathcal{P}$ die zugehörige Posteriori-Vtlg. wieder ein Element von Π ist.

-> Exponentialfam.: es ist möglich eine konj. Vtlg. zu konstruieren

- wir wollen nicht nur verallgemeinerte Prioris sondern <u>verallgemeinerte Informationsstrukturen</u>
- mögliche Gründe:
  - Robustheit: Umgebungsmodelle
  - Parameter-Intervalle
  - versch. Model Kandidaten
  - „big data uncertainty"

Umgebungsmodelle

- Motivation: Normal-Cauchy-Beispiel

- statt $p_\vartheta(\cdot)$ nutzen wir „ungefähr $p_\vartheta(\cdot)$"
  - ↳ Credalmenge aller Vtlg. „nah an $p_\vartheta(\cdot)$"

reguläre Intervallwertige Wkt.

F-Wkt. $P_\vartheta(\cdot) = [L_\vartheta(\cdot), U_\vartheta(\cdot)]$

Ereignis

$L_\vartheta(A) = g(p_\vartheta(A))$, $g : [0,1] \to [0,1]$

Risikozuschlag „central distr."

↳ macht Werte etwas kleiner

- Datengestütztes Entscheidungsproblem unter credaler Informationsstruktur

datenfreies Entscheidungsprob. / Menge von Wkt.

$$\big((\mathbb{A}, \Theta, \ell(\cdot)); \underbrace{(\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}), (Q_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})}_{\text{credales statistisches Modell}}\big)$$

-> $(\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}), (p_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ mit $p_\vartheta \in Q_\vartheta$ für $\forall \vartheta \in \Theta$ heißt potentielles statistisches Modell bzgl. des credalen stat. Modells

↳ cred. stat. Modell ist Menge von pot. stat. Modellen

- Zugehöriges credales Auswertungsproblem

Menge aller Entsch. fkt.

$(\mathbb{D}, \Theta, \underline{R}, \overline{R})$

$\underline{R}: \mathbb{D} \times \Theta \to \mathbb{R};\ (d, \vartheta) \mapsto \underline{R}(d, \vartheta) = \min_{p_\vartheta \in Q_\vartheta} \mathbb{E}_{p_\vartheta}\, \ell(d(x), \vartheta)$ kleinster Erwartungswert — untere Risikofunktion

$\overline{R}: \mathbb{D} \times \Theta \to \mathbb{R};\ (d, \vartheta) \mapsto \overline{R}(d, \vartheta) = \max_{p_\vartheta \in Q_\vartheta} \mathbb{E}_{p_\vartheta}\, \ell(d(x), \vartheta)$ größter Erwartungswert — obere Risikofunktion

↳ für jedes d kann ein anderes p_ϑ max / min sein

- verallgemeinerte Dominanzbegriffe (Vergleich bei festem ϑ_0)
  - (lokale) Intervalldominanz $d_2 \; d_1$
  - (lokale) Intervallordnung $d_2 \; d_1$ beide Grenzen müssen schlagen
  - Repräsentation zur Vorsicht η ← je größer, desto mehr Gewicht auf oben
    ↳ reele Zahlen bilden

    $d_1 \preceq_\eta d_2 :\Leftrightarrow \overbrace{\eta \cdot \overline{R}(d_1, \vartheta_0) + (1-\eta)\, \underline{R}(d_1, \vartheta_0)}^{R_\eta} \geq \eta \cdot \overline{R}(d_2, \vartheta_0) + (1-\eta)\, \underline{R}(d_2, \vartheta_0)$

    -> Entsch.problem $(\mathbb{D}, \Theta, R_\eta)$ betrachten

  ↳ Zulässigkeit & Dominanzbegriff lässt sich verallgemeinern

Menge der potentiellen Risikofkt.

Menge von Risikofkt.

- anderer Ansatz: $(\mathbb{D}, \Theta, \mathcal{R})$
  ↳ wir kriegen Menge von Lösungen

- verallgemeinerte Entscheidungskriterien
  -> mit $(\mathbb{D}, \Theta, R_\eta)$ lassen sich alle Kriterien wie bisher anwenden
    ↳ $\eta = 1$: Betrachtung des jeweils max Risikos

Spezialfall Testproblem

- betrachte worst-case Szenario: obere Risikofkt betrachten

- $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$, Credalmengen $Q_{\vartheta_0}, Q_{\vartheta_1}$ (2 Credalmengen: ca. ϑ_0 vs. ca. ϑ_1)
- Aktionen: $\mathbb{A} = a_0, a_1$
- Randomisierte Entscheidungsfkt. $d(x) = \varphi(x) \cdot a_0 + (1 - \varphi(x)) \cdot a_1$
  vollständig beschrieben durch Testfunktion $\varphi(x)$
- 0-1 Verlustfunktion: Risikofkt. entspricht Fehlerwkt.
- mengenwertige Fehlerwkt. 1. Art: $\{\mathbb{E}_{p_{\vartheta_0}}(\varphi(x)) \mid p_{\vartheta_0} \in Q_{\vartheta_0}\}$; 2. Art: $\{\mathbb{E}_{p_{\vartheta_1}}(1 - \varphi(x)) \mid p_{\vartheta_1} \in Q_{\vartheta_1}\}$
- obere Risikofkt. betrachtet max. Fehlerwkt.:
  1. Art: $\overline{R}(d, \vartheta_0) = \max_{p_{\vartheta_0} \in Q_{\vartheta_0}} \mathbb{E}_{p_{\vartheta_0}} \varphi(x) = \overline{\mathbb{E}}_{Q_{\vartheta_0}} \varphi(x)$
  2. Art: $\overline{R}(d, \vartheta_1) = \overline{\mathbb{E}}_{Q_{\vartheta_1}}(1 - \varphi(x)) = 1 - \underline{\mathbb{E}}_{Q_{\vartheta_1}} \varphi(x)$

  => Jetzt wie klassisches Problem
- Asymmetrische Tests: Niveau-α-Maximin-Test (Maximiere minimale Güte)
  ↳ Betrachte nur Test mit $\overline{\mathbb{E}}_{Q_{\vartheta_0}} \varphi(x) \leq \alpha$

- **Ungünstigstes Paar** (q_0^*, q_1^*)
  nimmt max Risiko unter H_0 und min Güte unter H_1 an
  -> Likelihood-Ratio Test basierend auf ungünstigstem Paar ist der beste Test
    ↳ es existiert nicht zwingend ein ungünstigstes Paar

- **Huber-Strassen Theorie**
  Wenn die Risikozuschlagfkt. convex ist existiert ein ungünstigstes Paar

Datenbasierte Entscheidungsprobleme mit Priori-Credalmengen

- Sei SPmodell jetzt (meist) präzise
- Verallgemeinertes Bayes-Risiko $\mathbb{E}_{\mathcal{M}} R(d, \vartheta)$
- Kriterien & Algorithmen wie bisher

} Verallgemeinerte Priori-Risiko-Optimalität

- Löse Entsch.probl. mit Posteriori als aufdat. Priori
- Kriterien & Algorithmen unmittelbar anwendbar

} Posteriori-Loss-Optimalität

=> Hauptsatz der Bayes-Entscheidungstheorie im Allgemeinen nicht verallgemeinbar auf diese Situation
  ↳ die 2 Wege sind nicht äquivalent -> inhaltliche Entscheidung

- **Generalized Bayes Rule** $\underbrace{\mathcal{M}_{\cdot|x}}_{\text{Posteriori-Credalmenge}} = \{\pi(\cdot|x) \mid \exists \pi(\cdot) \in \underbrace{\mathcal{M}}_{\text{Priori-Credalmenge}} : \pi(\cdot|x)$ ist Posteriori-Vtlg. von ϑ geg. x bzgl. $\pi(\cdot)\}$
  ↳ Bayes-Postulat: alle stat. Analysen haben sich ausschließlich auf $\mathcal{M}_{\cdot|x}$ zu stützen

  => **Robuste Bayes-Analyse in konjugierten Modellen**
  - Problem: wie weit Priori und SP auseinander liegen wird überhaupt nicht beachtet
    ↳ mit Intervallen arbeiten $[\underline{y}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}]$ typischerweise intervallwertiger Priori-Lageparameter
      ↳ lässt man $\underline{y}^{(0)}$ und $\bar{y}^{(0)}$ gegen die Grenzen des zulässigen Priori-Parameterbereichs gehen, so erhält man „near ignorance" Modelle
    -> bei „nicht überraschenden" Beobachtungen: Posteriori-Unschärfe klein
    -> bei „überraschenden" Beobachtungen: Posteriori-Unschärfe groß

Sozialwahltheorie

Wie können die individuellen Inputs der Mitglieder einer Gruppe zu einem für alle Mitglieder akzeptablen Gruppenoutput aggregiert werden?

- C: endliche Menge von Konsequenzen
- $\mathcal{R}$: Menge aller reflexiven, vollständigen, transitiven Relationen $R \subset C^2$
- $n \in \mathbb{N}$: festgelegte Gruppengröße
-> $\underline{R} := (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$: Präferenzprofil einer Gruppe der Größe n

=> Finde Regeln W, die jedem Präferenzprofil $\underline{R} \in \mathcal{R}^n$ eine bestimmten Eigenschaften genügende Gruppenordnung $W(\underline{R})$ zuweisen (jedem Präferenzprofil wird eine Präferenzrelation zugewiesen) ($W: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$: Wohlfahrtsfunktion)

Condorcets Methode

Zählen wie viele a vor b -> Mehrheit

„Die Gruppe bevorzugt Alternative a vor b, falls strikt mehrere Gruppenmitglieder dies ebenfalls tun. Platzieren ebenso viele Mitglieder a vor b wie b vor a, so ist die Gruppe indifferent."

=> $\forall (a,b) \in C^2 : (a,b) \in Co(\underline{R}) :\Leftrightarrow |\{i : (a,b) \in R_i\}| \geq |\{i : (b,a) \in R_i\}|$

-> wir können intransitive Zyklen erhalten -> keine Präferenzrelation

Bordas Methode

Durchschnittliche Ränge berechnen

„Die Gruppe bevorzugt a vor b, falls der durchschnittliche Rang von a höher ist als der von b. Haben a und b den gleichen durchschnittlichen Rang, so ist die Gruppe indifferent."

↳ es können alle den gleichen durchschnittlichen Rang haben

Instant-Runoff Methode (nach Thomas Hare)

Schließe Option mit wenigsten Erstplatz-Stimmen aus

„a ist mindestens so wünschenswert wie b, falls a auf der gleichen oder einer späteren Stufe ausgeschlossen wird."

Coomb's Rule (nach Clyde Coomb)

Wir schließen aus, was die meisten Mitglieder als letzten Platz wählen

„a ist mindestens so wünschenswert wie b, falls a auf der gleichen oder einer späteren Stufe ausgeschlossen wird."

Axiome nach K. Arrow

1) **UNANIMITY** Wenn alle a besser als b finden, dann muss die Gruppenentscheidung das auch aussagen
2) **INDEPENDENCE OF IRRELEVANT ALTERNATIVES** (IAA)

Meinungsbilder

$\left.\begin{array}{l} \underline{R} = (R_1, R_2, R_3) \\ \underline{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} R_1 \text{ rankt wie } Q_1 \\ R_2 \text{ — " — } Q_2 \\ R_3 \text{ — " — } Q_3 \end{array} \Rightarrow \omega(\underline{R}) \overset{!}{=} \omega(\underline{Q})$

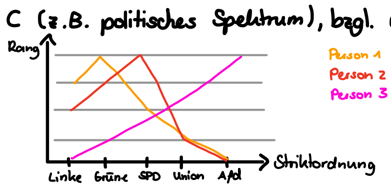
↳ Problem: rein ordinales Verständnis

3) **NO DICTATORSHIP** Es sollte kein Gruppenmitglied geben, das, egal welche Meinungen die anderen Gruppenmitglieder haben, das Ranking bestimmen kann

- **Arrows Unmöglichkeitstheorem**: Axiome sind nicht alle gleichzeitig erfüllbar
  -> Condorcet erfüllt alle 3 Annahmen (ist aber keine Wohlfahrtsregel)
  ↳ nicht mehr für beliebige Präferenzprofile (intransitive ausschließen) -> Condorcet ist Wohlfahrtsfkt.

Möglichkeitstheorem nach A. Sen

- Single-peakedness: Es existiert eine strikte Anordnung von C (z.B. politisches Spektrum), bzgl. derer die Präferenzkurven für alle R_i nur einen Gipfel besitzen



- Single-cavedness: — " — nur ein Tal besitzen

=> Condorcet ist transitiv => erfüllt Axiome