LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

En estas notas, a modo de aterrizaje en los estudios del Grado en Matemáticas, se pretende que el alumno entre en contacto con el quehacer en Matemáticas, que el aroma del oficio matemático se empiece a sentir dentro del aula.

Estas notas no pretenden ser exhaustivas, ni mucho menos. Ni se puede decir que el alumno que las trabaje correctamente adquirirá definitivamente con ellas un grado tal de madurez que lo sitúe en plenas condiciones ante el reto de seguir las clases de las diferentes asignaturas como el de su posterior asimilación. Pero al menos queremos que el salto cualitativo de unos estudios de secundaria a otros de nivel superior sea lo menos traumático posible, pretendemos llenar el vacío -grande a nuestro entender- que supone el iniciar unos estudios universitarios, los del grado en Matemáticas, sin haber estado el alumno demasiado en contacto en el instituto con los mecanismos lógicos en los que se basan la creación y el desarrollo de las diferentes áreas del campo matemático.

Tras unas charlas sobre Lógica Matemática y sobre el lenguaje de las matemáticas, ahora abordamos la cuestión de la demostración en Matemáticas. Seguiremos el siguiente índice de contenidos:

1. Introducción. Objetivo de estas notas.
2. Tipos de demostración. Ejemplos y ejercicios.
3. Comentarios alrededor de la demostración en Matemáticas.
4. Textos de demostraciones.
5. Referencias bibliográficas.

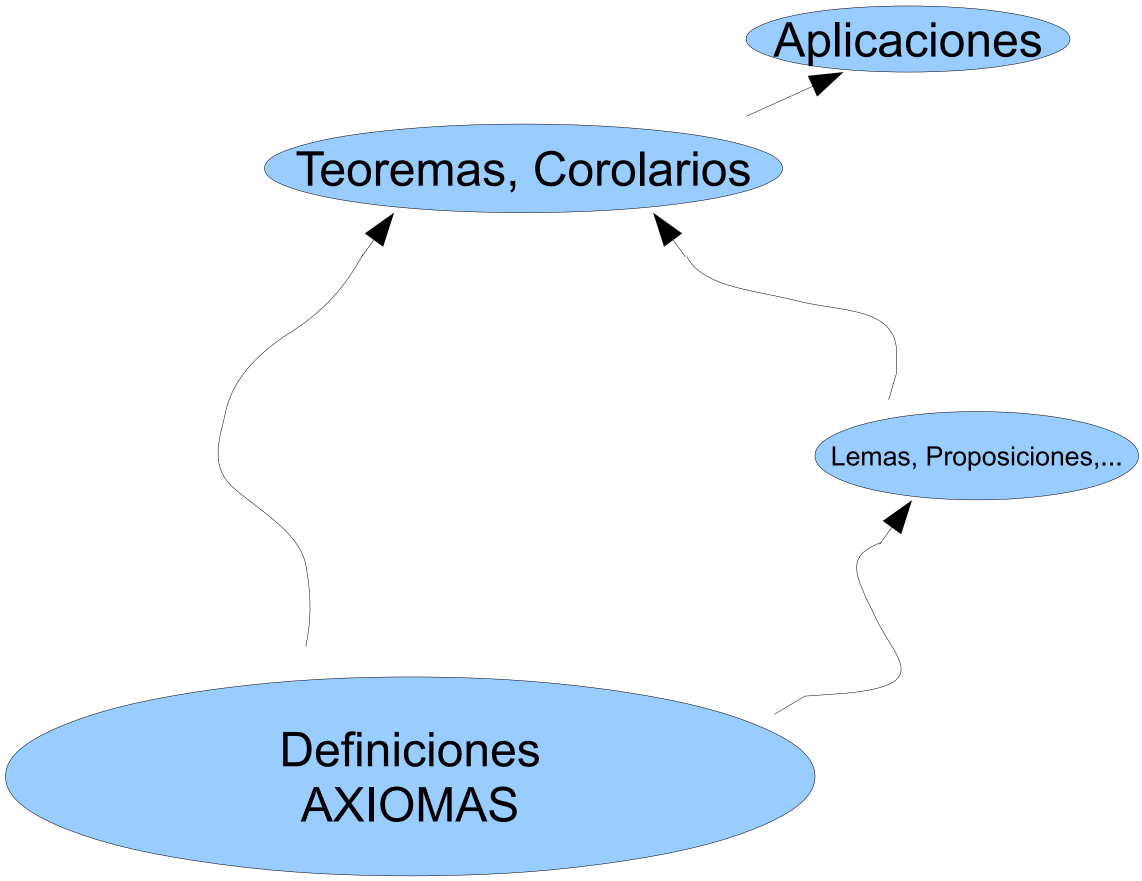
1. INTRODUCCIÓN

Según el diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española,

demostración (del latín demonstratio, -onis) es, según una de las entradas del término,

“la prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes”.

En términos matemáticos, diremos que una demostración es una serie de pasos lógicos, donde cada paso se sigue de manera lógica de los anteriores, encontrándose que el último escalón es justamente la afirmación que se quiere probar. El siguiente esquema nos aclara de forma intuitiva el procedimiento de trabajo en los diferentes campos de las Matemáticas.



Partiendo de unas definiciones y un cuerpo axiomático bien definidos, se trata de ir desarrollando un cuerpo teórico en el que en primer lugar se van deduciendo, mediante pasos lógicos, una serie de resultados “menores” (lemas, proposiciones, …), que vienen a ser piezas de un puzle que unidas convenientemente dan lugar a resultados de mayor envergadura y calado.

Aunque en principio el cuerpo de doctrina que se desarrolla es meramente teórico, no son desdeñables -ni debemos perder su perspectiva- las posibles aplicaciones de los resultados encontrados. Sin ir más lejos, la descomposición de los números naturales en factores primos es pilar en que se basa el fluir seguro de información en Internet.

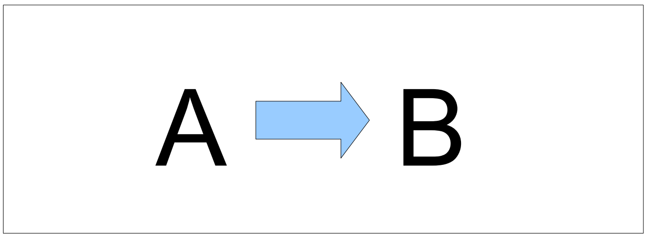
A continuación, veremos los diferentes métodos de demostración que se emplean en los pasos lógicos que conducen a las afirmaciones que se quieren probar. Debe destacarse que la validez de los resultados obtenidos siguen un estricto protocolo o control de calidad: partiendo de verdades ya conocidas debemos encontrar argumentos lógicos que nos conduzcan a la conclusión deseada.

2. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Tratamos en este apartado los siguientes mecanismos lógicos:

- Método directo.
- Reducción al absurdo.
- Contrarrecíproco.
- Bicondicionales (doble implicación). Equivalencias múltiples.
- Método de inducción.
- Contraejemplos.

Método directo



En los libros de texto se suele leer:

"Si A, entonces B"

"Para que se cumpla B es suficiente que se cumpla A"

"B es una condición necesaria para que se cumpla A"

Se trata de de demostrar que si se cumple la propiedad A, entonces se verifica B.

Ejemplos:

i) Si a es un número real, sabiendo que en el conjunto de los números reales se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y que 0 es el elemento neutro de la suma, probar que $a\times 0 = 0$.

ii) Si n es un número natural impar, probar que n^2 es de la forma $8k+1$, para algún entero $k\geq 1$.

iii) Demostrar que para cada terna de números reales positivos a, b, c se cumple que

$a/(b+c) + b/(a+c) + c/(a + b) \geq 1.$

iv) Dado un entero positivo n, probar que n^3-n es siempre múltiplo de 3.

v) Demostrar que las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, donde a,b,c son números reales, vienen dadas a través de la fórmula $(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2$.

Reducción al absurdo

Para probar que una propiedad A es verdadera, se supone que A es falsa y se llega a una contradicción. Evidentemente, empleamos el hecho de que una proposición en Matemáticas ó es verdadera ó es falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Hay que decir que este recurso era muy querido por los matemáticos griegos. Hay quienes opinan que es preferible dar, si es posible, demostraciones directas, para de esa forma no confundir al alumno con tantas suposiciones que lleguen a crearle una sensación de falta de control en el razonamiento, al no poder saber en cada momento qué es cierto o qué es falso.

Ejemplos:

i) Probar que $\sqrt{2}$ es un número real irracional.

ii) Demostrar que hay infinitos números primos (Euclides).

Contrarrecíproco

NO B $\Rightarrow$ NO A

Este mecanismo de demostración se basa en el hecho de que la implicación A $\Rightarrow$ B es equivalentemente lógica a NO B $\Rightarrow$ NO A. Este mecanismo es aconsejable cuando no sabemos cómo trabajar a partir de la hipótesis A y, en cambio, la negación de B proporciona un buen punto de partida. No se debe confundir el contrarrecíproco con el mecanismo de reducción al absurdo.

Ejemplos:

i) Si n^2 es un número natural par, entonces n es par.

ii) Sean x, y números reales. Si $x^2+y^2=0$, entonces $x=0$ e $y=0$.

Doble implicación

A $\Leftrightarrow$ B

El ***recíproco*** de la implicación A → B es B → A. Obviamente si se cumple una implicación no tiene por qué cumplirse necesariamente la otra. Por ejemplo, si A representa a la propiedad de que un número natural es múltiplo de 6 y B a la de ser múltiplo de 3, tenemos que A → B pero su recíproco es cierto (¿sabría demostrarlo?).

Cuando se tiene que tanto la implicación A → B como su recíproco B → A son ciertas, decimos que las condiciones A y B son equivalentes y empleamos el signo de la doble implicación.

En los textos aparece desarrollada esta doble implicación en sentencias del tipo:

“Probar que A y B son equivalentes”

“Probar que se cumple A si, y sólo si, se cumple B”

“Una condición necesaria y suficiente para que se dé A es que se verifique B”

Ejemplos:

i) Dados dos números reales x,y se cumple que $x^2+y^2=0$ si, y sólo si, $x=0$ e $y=0$.

ii) Dados dos enteros n, m se cumple que $n \cdot m$ es par si, y sólo si, n es par ó m es par.

iii) Para que un paralelogramo sea un rectángulo es condición necesaria y suficiente que sus diagonales tengan la misma longitud.

Equivalencias múltiples:

A lo largo de la carrera nos encontraremos con enunciados que afirmen que una serie de propiedades son equivalentes. Por ejemplo, en Álgebra Lineal se demuestra el siguiente resultado.

“Dada una matriz A con *n* filas y *n* columnas, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es invertible

ii) A tiene rango *n*

iii) Las filas de A son vectores linealmente independientes

iv) El sistema homogéneo de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A es determinado

v) A tiene determinante no nulo”

En este caso, estamos diciendo que las condiciones se implican unas a otras, así que en cuanto sepamos que una de ellas es cierta (o no se cumple) entonces del resto podremos decir lo mismo. Existen muchas formas de demostrar el resultado anterior, en el sentido de que podemos escoger distintos itinerarios de implicaciones, eso sí, en las que intervengan todas las condiciones y de modo que dicho itinerario forme un bucle cerrado. Por ejemplo, una posible vía sería

i) → ii) → iii) → iv) → v) → i)

Otra posibilidad puede ser

i) $\Longleftrightarrow$ v) junto con ii) → iii) → v) → iv) → ii)

Etcétera.

Ejemplo: Probar que, dados dos números reales no negativos a,b las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $a < b$

ii) $a^2 < b^2$

iii) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Método de inducción

Sea P(n) una propiedad relacionada con el número natural n.

- Se demuestra que P(1) es cierta.
- Se prueba que si P(k) es cierta, entonces P($k+1$) también lo es.

En ese caso, la propiedad P(n) es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

Probar por inducción que la suma de los n primeros enteros positivos es igual a $n(n+1)/2$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

En este caso, P(n)=la suma de los n primeros enteros positivos es $n(n+1)/2$

La propiedad es cierta para $n=1$: P(1)$=1=1(2)/2=1$

Es conveniente ver que también es cierta para algunos valores más

P(2)$=1+2=3=2(3)/2$; $P(3)=1+2+3=6=3(4)/2$.

La dificultad del método de inducción está en probar el paso general, esto es, demostrar que si suponemos que la propiedad es cierta para k, también lo es para $k+1$.

Se supone que P(k)$=k(k+1)/2$ y queremos probar que la fórmula sigue siendo válida también para $k+1$, es decir, que P($k+1$)$=(k+1)(k+2)/2$. Vamos allá.

P($k+1$)$=1 + 2 + \ldots + k + (k+1)=$ P(k) $+ (k+1)$ = aplicamos la hipótesis de inducción

$=k(k+1)/2 +(k+1)=(k+1)[k/2+1]=(k+1)(k+2)/2$, como queríamos probar.

Ejercicios:

i) Encontrar una fórmula para $2+4+6+ \ldots +2n$, $n\geq 1$, y demostrarla por inducción.

ii) Probar por inducción que para $n>0$ la derivada de $f_n(x)=x^n$ es $f_n'(x)=nx^{n-1}$.

Dos observaciones: También se puede aplicar el método de inducción para probar que una propiedad es cierta a partir de un valor k_0, no tenemos por qué empezar necesariamente la inducción por 1. En segundo lugar, cuando demostramos el paso general además de suponer que la propiedad P(k) es cierta en un paso k podemos utilizar que la propiedad es cierta para $1, 2, \ldots, k$.

Contraejemplos

A veces, la validez de una propiedad se refuta dando un ejemplo en el que no se cumple dicha propiedad: habremos probado entonces que,en general, la propiedad en cuestión es falsa. A dichos ejemplos que echan abajo la validez de la propiedad se les conoce con el nombre de contrajemplos.

En muchas ocasiones, cuando nos enfrentamos a resolver un problema y vemos que la propiedad que queremos demostrar no tiene un ataque sencillo, nos podemos plantear la posibilidad de encontrar un contrajemplo.

Ejercicios:

i) ¿Es cierto que para cada entero positivo n se cumple que $f(n)=n^2-n+17$ es un número primo?

ii) ¿Es cierto que la derivada de una función derivable y periódica sigue siendo periódica?

¿Y qué podemos decir de la integral de una función periódica integrable?

iii) Leibniz probó que para cualquier entero positivo n se cumple

→ n^3-n es múltiplo de 3

→ $n^5- n$ es múltiplo de 5

→ n^7-n es múltiplo de 7

A la vista de esos resultados, ¿podemos concluir que, en general, $n^k -n$ es divisible por k.

3. COMENTARIOS

A. Sobre cómo abordar el enfrentarse a una demostración

Se deben entender todas las hipótesis así como el resultado al que se quiere llegar; es muy importante conocer el marco en el que estamos trabajando. Una vez que entiendas bien de dónde partes y a dónde quieres llegar, utiliza cualquiera de los mecanismos que has visto en la sección anterior. Y no olvides tener en cuenta los conocimientos previos de cada uno de los temas en que te estés desenvolviendo. Por ejemplo, si te piden demostrar que el límite de la suma de dos sucesiones convergentes es igual a la suma de cada uno de los límites, está claro que tendrás que conocer la definición de límite de una sucesión y de cómo se formula matemáticamente la convergencia de una sucesión.

A medida que vaya pasando el tiempo te darás cuenta con mayor rapidez de qué tipo de razonamiento deberás aplicar, en esto la repetición rutinaria en clase y tu esfuerzo en casa te proporcionarán la madurez necesaria para afrontar con éxito la lectura y comprensión de cualquier demostración.

B. Hipótesis latentes

Volviendo al tema de tener claras todas las hipótesis y de especificarlas convenientemente en los enunciados, en el siguiente ejercicio se ve la importancia de este aspecto.

Ejercicio: Las siguientes afirmaciones son falsas. Explica por qué y añade las hipótesis necesarias para dar validez a las respectivas afirmaciones.

- La ecuación $x^2-2=0$ no tiene soluciones.
- Dos rectas que no son iguales ni paralelas se cortan en un punto.
- Si una función f:R→R verifica $f(0)<0$ y $f(2)>0$, entonces su gráfica corta el eje de abscisas en el intervalo $(0,2)$.

Ejercicio: En la prensa, regional o nacional, suele aparecer en la página de pasatiempos el siguiente juego, llamado cuadro numérico.

“Rellenar los cuadros en blanco con los números apropiados, de modo que resolviendo las operaciones que se especifican se puedan obtener los resultados que se solicitan.”

	+		−		= 1
+		+		:	
	X	4	−		= 1
X		−		+	
	+		:		= 2
= 9		= 2		= 7	

¿Cree que el enunciado es preciso, desde un punto de vista matemático? ¿Por qué?

¿Cuál es el tipo de solución buscada? Si son soluciones enteras, ¿incluye el cero?

¿Qué tiene que decir respecto al orden de las operaciones?

¿Es única la solución?

C. Errores en las demostraciones

Como se dijo en secciones anteriores, para superar el control de calidad debemos cerciorarnos de que todos los argumentos lógicos son correctos. No siempre es tarea fácil, como muestran los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1: Detecte el error en la siguiente demostración, en donde se prueba que $1=2$.

"Supongamos que $x=y$; entonces $x^2=xy$;

por tanto, restando a ambos lados y^2, tenemos $x^2-y^2=xy-y^2$;

de aquí, factorizando, se llega a $(x+y)(x-y)=y(x-y)$;

simplificamos en esta última igualdad para llegar a que $x+y=x$;

como $x=y$, se sustituye y se obtiene $2y=y$;

y al simplificar se obtiene ¡¡$1=2$!!".

EJEMPLO 2:

"Queremos resolver la ecuación $x^3-3x^2+4x-6=0$.

La reescribimos así: $x(x^2-3x+4)=3•2$;

igualamos factores: $x=3,\ x^22-3x+4=2$;

es decir $x=3,\ x^2-3x+2=0$;

al resolver la ecuación de segundo grado se obtiene: $x=3,\ x=1,\ x=2$;

por tanto, las soluciones son $x=1,\ x=2,\ x=3$".

¡¡Pero el alumno puede comprobar, mediante sustitución en la ecuación de partida, que ninguno de los valores es solución!!

EJEMPLO 3:

"Queremos resolver la ecuación trigonométrica $sen(2x)=1$.

Tenemos en cuenta que $sen(\pi/2)=1$;

en ese caso, $x=\pi/4$;

por tanto, la solución general, que debe contemplar cualquier número arbitrario de vueltas, será

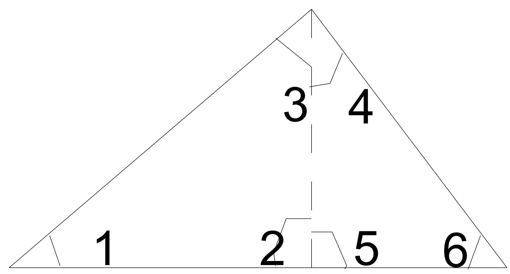
$x=\pi/4+2\pi k$, con k un número entero arbitrario."

¡¡Pero no todas las soluciones están contempladas en la expresión anterior!!¿Por qué?

EJEMPLO 4:

A continuación os presentamos la prueba de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a π radianes. Sin embargo, no es correcta. ¿Sabrías indicar en dónde falla el razonamiento?

"Para mayor comodidad, sin que ello suponga pérdida de generalidad, trabajaremos sobre el siguiente triángulo



Llamamos α a la suma de los ángulos del triángulo. Observamos entonces que

$1+2+3= \alpha$, así como $4+5+6= \alpha$. Sumando ambas igualdades, llegamos a

$1+2+3+4+5+6=2\alpha$; por otra parte, $1+3+4+6=\alpha$ y $2+5=\pi$, así que

$(1+3+4+6)+(2+5)=2\alpha \rightarrow \alpha + \pi = 2\alpha \rightarrow$ despejando, $\alpha = \pi$, como queríamos demostrar".

D. Conjeturas

Ya dijimos que la validez de los resultados en Matemáticas siguen un estricto protocolo de control de calidad: debe encontrarse un argumento lógico que, mediante el uso de propiedades ya conocidas, nos conduzcan a la conclusión deseada.

Este control no lo superan las llamadas conjeturas, proposiciones que se elaboran a partir de la experiencia acumulada y de las observaciones realizadas, pero que no se logran demostrar con argumentos lógicos. A veces, el uso de computadoras da evidencias numéricas de que la propieda en cuestión es válida para ciertos valores, pero este hecho no es bastante como para concluir categóricamente que la propiedad es cierta

Hasta hace unos pocos años, la conjetura más famosa era la de Fermat, quien a mediados del siglo XVII afirmó que para n>2 una suma de potencias de base entera y exponente n no puede dar lugar a una potencia de las mismas características.

Otras conjeturas que están todavía sin resolver y que, seguramente, tendrán que esperar a que se desarrollen las herramientas matemáticas apropiadas, son:

- Conjetura de Goldbach: "Todo número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos"
- Conjetura de los primos gemelos: "Hay infinitos primos gemelos, esto es, infinitas parejas de primos que son consecutivos (saltando, obviamente el par que los separa)".
- Conjetura de Collatz: "Dado un número entero positivo n_1, realizamos el siguiente proceso de iteración: si n_1 es par, devolvemos $n_1/2$; si n_1 es impar, hacemos $3\,n_1+1$; y repetimos el proceso de nuevo. Por ejemplo, si $n_1=6$, encontramos la sucesión {6,3,10,5,16,8,4,2,1,4,2,1,2,4,...}. Pues bien, la conjetura de Collatz afirma que, se empiece por el número n_1 que se quiera, acabaremos llegando al bucle periódico 1,2,4,1,2,4, ..."

E. El ingenio en las demostraciones

El ingenio es importante cuando se quiere hacer una demostración. Además, al matemático le gusta encontrar nuevas demostraciones que sean lo más sencillas posibles, sin un arsenal muy sofisticado, aunque no siempre es posible (recordemos el teorema de Fermat). También el tiempo hace que vayamos aprendiendo nuevas estrategias de resolución.

- i) El principio del palomar como parte de ese ingenio.

  ¿Qué argumento podríamos elaborar para demostrar que en la región de Murcia hay al menos dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza? (se excluyen los calvos).

- ii) Las fichas de dominó.

  ¿Qué argumento podríamos elaborar para demostrar que si en un tablero de ajedrez quitamos dos esquinas es imposible teselar la figura resultante con 31 fichas de dos cuadrados cada una?

- iii) Un problema de desigualdades:

  ¿Qué número es mayor, π elevado a *e* o *e* elevado a π?

- iv) Probar que todas las funciones reales derivables $f(x)$ tales que $f'(x)=f(x)$ son del tipo $f(x)=Ce^x$, con C una constante arbitraria.

4. TEXTOS DE DEMOSTRACIONES

Los siguientes resultados están tomados de diferentes libros de texto. En ellos vamos a tratar de reconocer los mecanismos de demostración que se han aplicado e intentaremos diseccionar los ingredientes que forman parte en sus enunciados.

Proposición: Sea A un conjunto y sea $*$ una ley de composición interna (l.c.i.). Entonces existe a lo sumo un elemento neutro en A respeto de $*$.

Demostración:

Supongamos que $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{e'}$ son dos elementos neutros en A. Entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e'} * \boldsymbol{e} \quad \text{(por ser } \boldsymbol{e} \text{ neutro)}$$

$$\boldsymbol{e} * \boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e'} * \boldsymbol{e} \quad \text{(por ser } \boldsymbol{e'} \text{ neutro)}$$

Consecuentemente, $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e'}$, csqd. □

Responda a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué conceptos debe conocer a priori para entender perfectamente el enunciado?
2) ¿Podría dar un ejemplo reconocible de un conjunto y una operación interna dentro de él?
3) ¿Qué tipo de prueba se desarrolla en la demostración?
4) Según se desarrolla la demostración, ¿piensa que se da por hecho que siempre existe un elemento neutro? ¿Podría precisar un poco más la parte inicial de la prueba?

Teorema:

Si $X=(x_n)$ es una sucesión convergente de números reales y si $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$x:=lim(x_n) \geq 0$.

Demostración:

Supóngase que la conclusión es falsa y que $x<0$; entonces $\varepsilon:=-x$ es positiva. Puesto que X converge a x, existe un número natural K tal que

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \qquad \text{para toda } n \geq K.$$

En particular se tiene $x_K < x + \varepsilon = x + (-x) = 0$. Pero esto contradice la hipótesis de que $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, esta contradicción indica que $x \geq 0$. □

Responda:

1) ¿Qué conceptos debe entender perfectamente si quiere comprender completamente la demostración?
2) ¿Qué mecanismo emplea el autor para demostrar el teorema?
3) Piense: Si en el enunciado escribimos "Si $X=(x_n)$ es una sucesión convergente de números reales y si $x_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $x:=lim(x_n) > 0$", ¿será verdadera o falsa la afirmación? Si es cierta, demuéstrelo, y si es falsa proponga un contraejemplo.

Teorema: Sea *S* un subconjunto de **R**. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) *S* es compacto.

b) *S* es cerrado y acotado.

c) Todo subconjunto infinito de *S* tiene un punto de acumulación en *S*.

Demostración:

Como se indicó antes, (b) implica (a). Si probamos que (a) implica (b), que (b) implica (c) y que (c) implica (b), habremos establecido la equivalencia de las tres afirmaciones.

Supongamos que se verifica (a). Probaremos primero que *S* está acotado. Elijamos un punto … por lo tanto, *S* está acotado.

A continuación probaremos que *S* es cerrado. Supongamos que no lo fuese. Existiría … Esta contradicción prueba que *S* es cerrado y, por lo tanto, que ( ) implica ( ).

Supongamos que se verifica (b). En este caso la demostración de (c) es inmediata, ya que …

Supongamos que se verifica (c). Probaremos (b). Si *S* no estuviese acotado, … en contradicción con el hecho de que … Todo ello prueba que *S* está acotado.

Para terminar la demostración tenemos que probar que *S* es un conjunto cerrado. Sea **x** un punto de … con lo cual queda demostrado que (c) implica (a). □

Responda:

1) Haga un esquema de la estrategia seguida para demostrar el resultado.
2) ¿Cuántas veces se ha empleado el mecanismo de la reducción al absurdo?
3) Complete la parte subrayada en el texto.
4) Si quiere entender perfectamente el enunciado, ¿qué conceptos deberá conocer necesariamente?
5) En la demostración se usa un resultado previo establecido en el texto con anterioridad. ¿Sabría decir cuál es?

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Libro de Miguel de Guzmán: "Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas", Editorial Anaya, 2003.
- "Método de inducción matemática. Lecciones populares de Matemáticas", I.S. Sominski, Editorial Mir, 1985 (librillo de unas 60 páginas con todo lo que se debe saber acerca del método de inducción).
- Materiales de la Universidad Complutense de Madrid:

  http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/indice.htm
- Materiales de la Profesora Marta Macho, de la Universidad del País Vasco:

  http://www.ehu.es/~mtwmastm/Docencia.html

EJERCICIOS

1. Demuestra que si q es un entero no divisible por 2 ni divisible por 3, entonces q^2-1 es divisible por 12.

2. Dado un número natural par n, probar que $n(n^2+20)$ es múltiplo de 48.

3. Dados dos números reales no negativos a, b, probar que su media aritmética es siempre mayor o igual a su media geométrica, esto es, $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$.

4. Con el fin de trabajar correctamente el uso de implicaciones en las demostraciones, se pide que en las siguientes frases se completen los puntos suspensivos con "si", "sólo si" ó "si y sólo si" y se formule la propiedad usando los símbolos de implicación correspondiente:

- Una suma de números enteros es impar sólo si uno de ellos es impar

  (si la suma es impar $\Longrightarrow$ uno de ellos es impar)
- Un producto de números enteros es par … … … uno de ellos es par.
- Dos números enteros suman 25 … … … uno de ellos es mayor que 12.
- Un número entero es par … … … su cuadrado es múltiplo de 4.
- Un número natural que acaba en 4 es múltiplo de 4 … … … la cifra de las decenas es par.
- Un número natural es múltiplo de 5 … … … acaba en 5.
- $x^2-5x+6=0$ … … … $x=2$ ó $x=3$.
- $x^3-6x^2+11x-6=0$ … … … $x=2$ ó $x=3$.
- Para un número real x se tiene: $x \in [1,2]$ … … … $x^2 \in [1,4]$.

5. En la misma línea del ejercicio anterior, complete ahora los puntos suspensivos con "necesario", "suficiente" ó "necesario y suficiente".

- Para que un producto de números enteros sea impar es … … … que uno de ellos sea impar.
- Para que una suma de números reales x+y sea positiva es … … … que x e y sean positivos.
- Para que un número real x esté en el intervalo [1,5] es … … … que el cuadrado x^2 esté en el intervalo [1,25].
- Para que una matriz cuadrada A sea invertible es … … … que su determinante |A| sea no nulo.

6. Si a, b son números reales positivos tales que $\sqrt{ab} \neq (a+b)/2$, entonces $a \neq b$.

7. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones sobre números reales? Conteste razonadamente.

- $(x+y)^2=0$ si, y sólo si, $x=y=0$.
- Si a es un número irracional y b es racional, entonces $a+b$ es necesariamente irracional.
- Si a y b son números irracionales, $a \cdot b$ es necesariamente irracional.

8. Sean A, B, C conjuntos. Probar la validez de las siguientes propiedades:
   - A∩(B U C) = (A ∩B) U (A ∩ C).
   - (A \ B) U (B \ A) = (A U B)\ (A ∩ B).
   - La imagen f(A ∩ B) está contenida en f(A)∩f(B), donde f es una aplicación arbitraria.

9. Demuestra que $x+(1/x)\geq 2$ para todo número real positivo x.

10. Prueba que $\sqrt{3}$ es un número real irracional.

11. Definimos la parte entera de un número real *x, y* la representamos a través de *[x]*, como el mayor de los enteros *k* tal que $k \leq x$. Por ejemplo, *[3'24]=3* y *[-12'897]=-13*.

    Prueba que para cualquier pareja *x, y* de números reales se tiene que una condición necesaria y suficiente para que se cumpla $[x]<[y]$ es que exista un entero *n* de modo que $x < n \leq y$.

12. Sean a,b números reales con $0<a<b$, y sea *n* un entero positivo. Probar que existe un entero *k* tal que $a < k/n < b$ si, y sólo si, $[na]+1 < nb$.

13. Si escogemos seis números entre 1 y 10, dos de ellos sumarán 11.

14. Sea A la matriz 2x2 de coeficientes $a_{11}=a_{12}=a_{22}=1$, $a_{21}=0$. Encontrar una fórmula para la matriz A^n, donde *n* es un entero positivo.

15. Deducir una fórmula para la suma de los cuadrados de los *n* primeros números enteros positivos, y demostrar su validez mediante inducción.

16. Para acabar, relájate un poco con el siguiente sudoku, pero, eso sí, resuélvelo de manera lógica, e interioriza qué tipo de razonamiento has efectuado en cada paso.

1								9
	6		8		7		5	
		7				2		
2	1			5			9	3
			4		8			
4	3			2			8	7
		1				9		
	5		6		9		4	
6								8