Université Gustave Eiffel ESIEE PARIS Année 2022-2023	**SFP 1201 – Mécanique du point** **CHAPITRE 1 – Vecteurs, repères et systèmes de coordonnées** Professeur responsable : G. LISSORGUES (gaelle.lissorgues@esiee.fr)

1) INTRODUCTION :

Avant même que l'homme ne sache compter ou parler, sans aucun doute avait-il observé que tout restait cloué au sol. Tout, sauf les oiseaux qui arrivaient à s'offrir une liberté que l'homme ne connaissait pas. Pourquoi ? Il était bien incapable d'y répondre, mais la physique, c'est avant tout un constat et une question.
La physique, "Connaissance de la nature" en grec ancien, se base sur l'observation de phénomènes suivis d'interprétations.
Les modèles ne décrivent jamais de façon complète la nature. Aujourd'hui, on connait les limites de la mécanique classique. Bien qu'elle soit un modèle prédictif, elle est incapable d'expliquer les manifestations de l'infiniment petit.
Et nous devrons faire des approximations sur nos modèles. (d'après Matthieu Barreau et al., 2012)

Ce premier chapitre est un chapitre « boîte à outils » pour commencer en mécanique (après les notions de grandeurs, dimensions, unités et les rappels de trigonométrie vus en introduction générale)!

Les positions et les vitesses des objets ainsi que les forces appliquées à ces objets sont représentées par des **vecteurs** variant en fonction du temps.

Définition : Mécanique du point = partie des mathématiques (ou de la physique) qui a pour objet l'étude du mouvement et de l'équilibre des objets (Petit Robert).

Hypothèse :
Chaque objet sera ramené à un point : il est donc supposé rigide, non déformable, et sa masse est concentrée en son centre de gravité : c'est la notion du point matériel M de masse m.

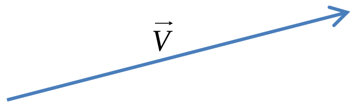
- Cet objet peut se déplacer dans l'espace au cours du temps : il possède une vitesse, une accélération, et suit une trajectoire dans un référentiel donné (Solide de base).
  ⇒⇒ **Domaine de la cinématique = Chapitre 2**
- Tout objet interagit avec d'autres objets par différents types de forces (gravitationnelle, électrostatique, frottements…), et l'étude des mouvements induits par ces forces concerne
  ⇒⇒ **Domaine de la dynamique = Chapitre 3**

Remarque : il existe aussi des approches plus complexes et complètes comme la mécanique du solide, des fluides, la mécanique quantique, relativiste… mais non vu en E1.

2) SCALAIRES, VECTEURS et REPÈRES :

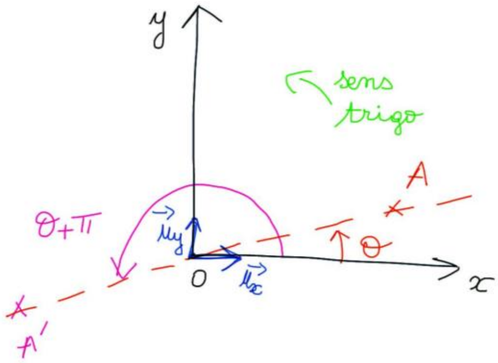
- Un **scalaire** : quantité physique complètement déterminée par sa grandeur exprimée dans l'unité convenable (ex : volume en m^3 ; temps en s ; température en °C ; masse en kg).
- Un **vecteur** : quantité physique nécessitant de connaître une direction en plus de la grandeur (ex : déplacement, défini par la distance dont s'est déplacé l'objet ET la direction selon laquelle il est allé)

Un vecteur est représenté graphiquement par un segment de droite orienté (flèche) $\vec{\boldsymbol{V}}$.
On appelle norme = intensité = grandeur du vecteur, notée $V = \|\vec{\boldsymbol{V}}\|$.

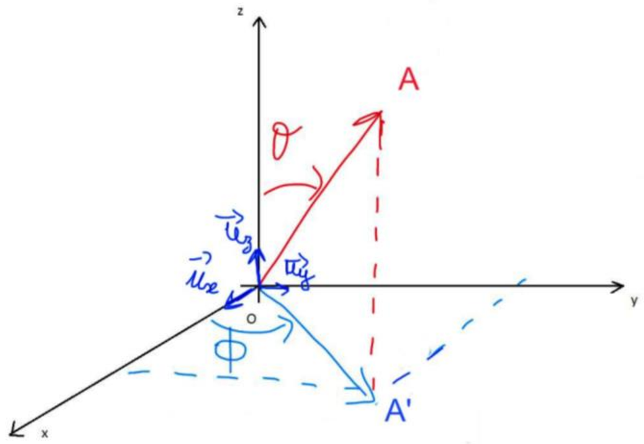


Pour définir une direction pour un vecteur, il faut un axe de référence ou mieux encore un repère (deux axes sécants avec l'origine leur point d'intersection).
On travaille souvent dans des repères dits **orthonormés** (les axes Ox et Oy sont perpendiculaires et les unités choisies sur les deux axes sont égales).

- **Dans un plan**, une direction est donnée par l'angle θ avec un axe de référence Ox, dans un repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, compté positivement dans le sens trigonométrique.



- **Dans l'espace**, 2 angles sont nécessaires pour fixer une direction (ex : longitude et latitude sur Terre) dans un repère orthonormé $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.



3) OPERATIONS SUR LES VECTEURS (RAPPELS) :

a) Addition de deux vecteurs :

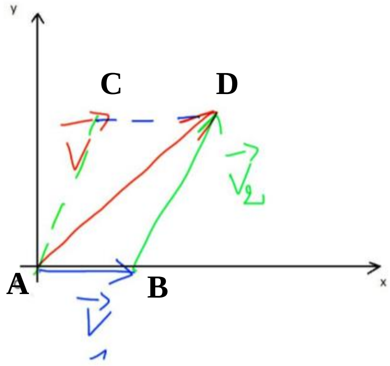
$$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}}$$

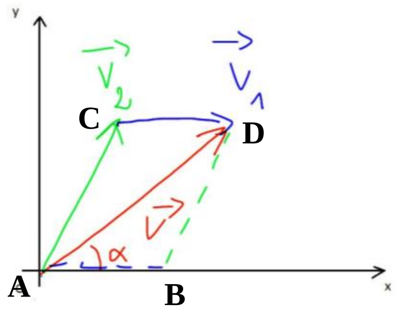
C'est la première diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{1}}$ **et** $\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{2}}$**.**
En effet, d'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BD}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$$

D'où,

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

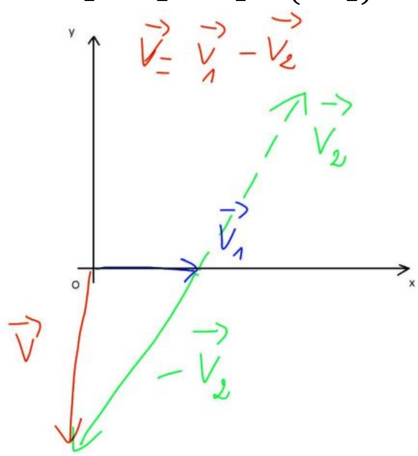




b) Soustraction de deux vecteurs :

De même,

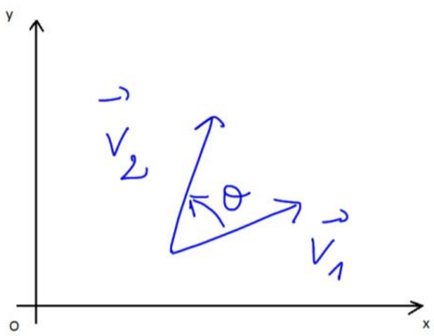
$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$$



c) Produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| . \|\vec{V}_2\| . \cos\theta$$

- C'est un scalaire
- C'est commutatif : $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \vec{V}_2 . \vec{V}_1$
- $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \ (\theta = \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = 0$
- $\vec{V} . \vec{V} = \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2 = V^2 \quad (\theta = 0)$
- C'est distributif :
  $\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 + \vec{V}_1 . \vec{V}_3$



4) VECTEURS DANS LES REPÈRES :

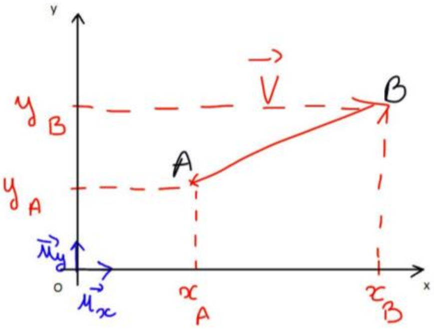
a) Décomposition d'un vecteur :

Dans un repère du plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $\vec{V}$, s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$$
$$= (x_B - x_A)\vec{u}_x + (y_B - y_A)\vec{u}_y$$

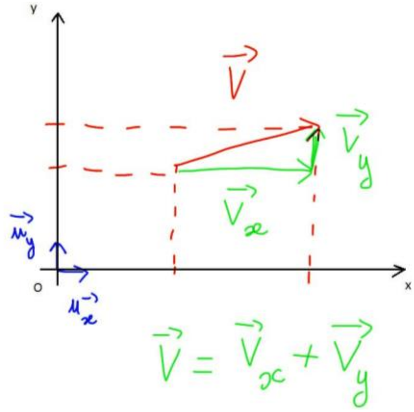
$\boldsymbol{V_x}$ et $\boldsymbol{V_y}$ sont les composantes du vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans le repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$.



On pose : $\boldsymbol{V_x}\vec{u}_x = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{x}}$ et $\boldsymbol{V_y}\vec{u}_y = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{y}}$.
Les deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{x}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{y}}$ sont appelées les projections de $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans le repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$.

C'est la **décomposition** du vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans le repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$.

On peut aussi écrire :
$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$



Même chose dans l'espace muni d'un repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, un vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$ peut s'écrire :

$\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V_x}\vec{u}_x + \boldsymbol{V_y}\vec{u}_y + \boldsymbol{V_z}\vec{u}_z = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$

Par commodité, pour le dessin, $\vec{\boldsymbol{V}}$ sera placé à l'origine O du repère.

b) <u>Produit scalaire – expression analytique :</u>

Dans un repère **orthonormé** du plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, on considère deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{V}}$ et $\vec{\boldsymbol{W}}$. On montre que leur produit scalaire peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{V}}.\vec{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{V_x W_x} + \boldsymbol{V_y W_y}}$$

Démonstration : En effet, il suffit de décomposer chaque vecteur sur sa base orthonormée.

$\vec V = V_x \vec u_x + V_y \vec u_y$
$\vec W = W_x \vec u_x + W_y \vec u_y$
$\vec V . \vec W = (V_x \vec u_x + V_y \vec u_y).(W_x \vec u_x + W_y \vec u_y)$
produit scalaire distributif

$\Rightarrow \vec V . \vec W = (V_x \vec u_x . W_x \vec u_x) + (V_x \vec u_x . W_y \vec u_y) + (V_y \vec u_y . W_x \vec u_x) + (V_y \vec u_y . W_y \vec u_y)$

$\vec V . \vec W = V_x . W_x \underbrace{\vec u_x . \vec u_x}_{= \|\vec u_x\|^2 = 1} + V_y . W_y \underbrace{\vec u_y . \vec u_y}_{= \|\vec u_y\|^2 = 1}$

car $\vec u_x \perp \vec u_y \Rightarrow \vec u_x . \vec u_y = \vec u_y . \vec u_x = 0$

il reste : $\vec V . \vec W = V_x . W_x + V_y . W_y$

Si $\vec{W} = \vec{V}$, on a $\vec{V}.\vec{V} = \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2 = V^2 = V_x^2 + V_y^2$

D'où, **la norme de** $\vec{V}$ est :

$$\boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

De même, dans l'espace muni d'un repère **orthonormé** $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, le produit scalaire $\vec{V}.\vec{W}$ peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{V}.\vec{W} = V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z}$$

Et la norme d'un vecteur $\vec{V}$ s'écrit :

$$\boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

Exercice d'application directe:

Soient les deux vecteurs :
$\vec{V} = 2\overrightarrow{u_x} + 3\overrightarrow{u_y} - 1\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{W} = -1\overrightarrow{u_x} + 1\overrightarrow{u_y} + 2\overrightarrow{u_z}$

1. Calculer le produit scalaire $\vec{V}.\vec{W}$.
2. Calculer la norme de chacun d'eux.
3. Déterminer la mesure de l'angle entre les deux vecteurs.

c) Composantes d'un vecteur et angles :

Dans un repère **orthonormé** du plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, le vecteur $\vec{V}$, s'écrit :

$\vec{V} = V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y$

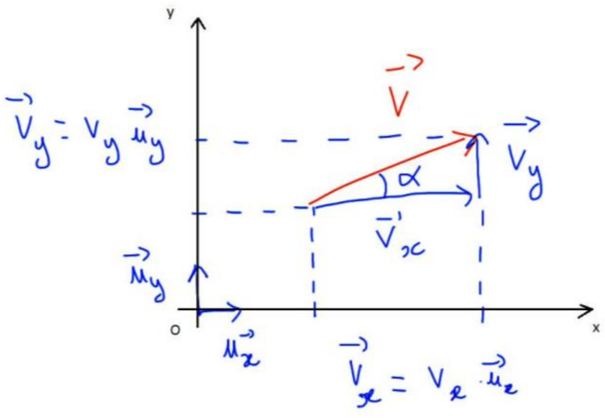
On pose pour l'angle $\alpha = (\vec{u}_x,\vec{V})$

Calculons $\vec{V}.\vec{u}_x$:

$\vec{V}.\vec{u}_x = V_x\vec{u}_x.\vec{u}_x + V_y\vec{u}_x.\vec{u}_y$

Or, $\vec{u}_x.\vec{u}_x = 1$ et $\vec{u}_x.\vec{u}_y = 0$, alors,

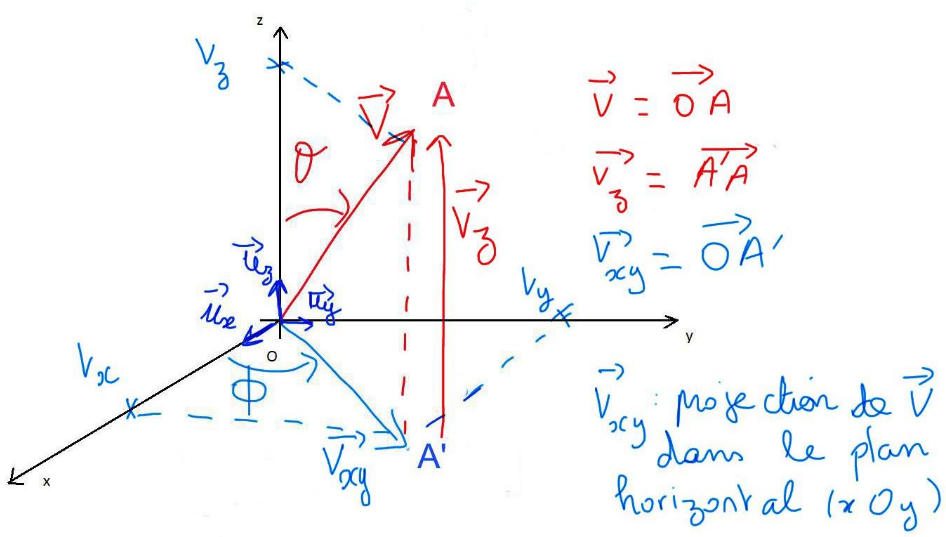
$$\boxed{\vec{V}.\vec{u}_x = V_x = V.\cos\alpha}$$



De même,

$$\boxed{\vec{V}.\vec{u}_y = V_y = V.\sin\alpha = V.\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, pour déterminer les expression des composantes d'un vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}$, on doit définir deux angles : $\theta = (\vec{u}_z, \vec{\boldsymbol{V}})$ et $\varphi = (\vec{u}_x, \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{xy}})$ (voir figure, $\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{xy}}$ est la projection de $\vec{\boldsymbol{V}}$ dans le plan Oxy) :



Chaque composante est obtenue par le produit scalaire avec le vecteur unitaire de la base :
$\vec{\boldsymbol{V}}.\vec{\boldsymbol{u}}_x = \boldsymbol{V}_x$; $\vec{\boldsymbol{V}}.\vec{\boldsymbol{u}}_y = \boldsymbol{V}_y$; $\vec{\boldsymbol{V}}.\vec{\boldsymbol{u}}_z = \boldsymbol{V}_z$

Exercice :

Dans un repère **orthonormé** du plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, on considère deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{V}}_2$ quelconques.

On désigne par $\vec{\boldsymbol{V}}$ la somme vectorielle de $\vec{\boldsymbol{V}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{V}}_2$.

On pose : $\alpha_1 = (\vec{u}_x, \vec{\boldsymbol{V}}_1)$, $\alpha_2 = (\vec{u}_x, \vec{\boldsymbol{V}}_2)$, $\theta = (\vec{u}_x, \vec{\boldsymbol{V}})$

Montrer que :

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{V}_1^2 + \boldsymbol{V}_2^2 + 2\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_2.\boldsymbol{cos}\,(\alpha_2 - \alpha_1)} \qquad \textbf{et} \qquad \boldsymbol{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{sin}\,\alpha_1 + \boldsymbol{V}_2 \boldsymbol{sin}\,\alpha_2}{\boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{cos}\,\alpha_1 + \boldsymbol{V}_2 \boldsymbol{cos}\,\alpha_2}$$

Exercice d'application directe :

$\vec{\boldsymbol{V}}_1$ vecteur de norme = 6 et de direction +30° par rapport à l'axe horizontal (Ox).
$\vec{\boldsymbol{V}}_2$ vecteur de norme = 7 et de direction +180° par rapport à l'axe horizontal (Ox).

Déterminer le vecteur somme $\vec{\boldsymbol{V}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}_1} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}_2}$, en norme et direction, en utilisant les résultats précédents.

5) SYSTÈMES DES COORDONNÉES :

a) Préambule :

Dans un problème de mécanique, on cherche à modéliser le système étudié pour déterminer son mouvement : nécessité de se repérer dans l'espace ! Car le mouvement est toujours relatif par rapport à un **référentiel** choisi (ex : système solaire, train…).

On définit aussi **des repères** dans ces référentiels pour pouvoir positionner un point M dans l'espace et suivre son déplacement le plus simplement possible au cours du temps.

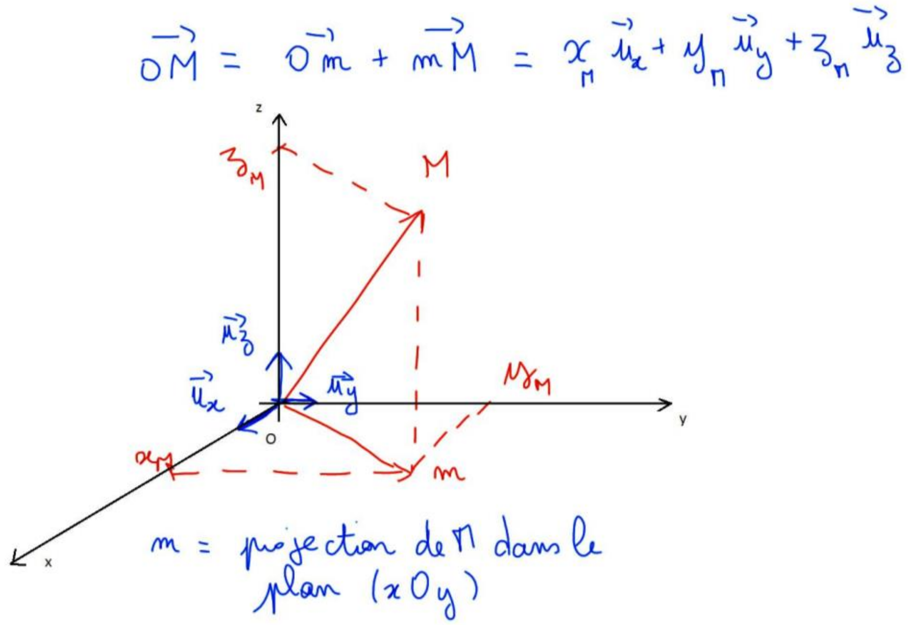
On supposera qu'en mécanique classique, le temps s'écoule de la même manière pour tous (l'échelle de temps est la même pour tout référentiel).

Il faudra donc toujours choisir un référentiel avant tout début d'étude.

Remarque: Il existe plusieurs référentiels utilisés couramment (revu Chapitre 3)
- *terrestre : Etude en un point à la surface de la terre*
- *géocentrique : Etude par rapport au centre de la terre*
- *héliocentrique : Etude par rapport au centre du soleil*

b) Coordonnées cartésiennes :

On peut repérer un point M dans l'espace à l'aide de ses trois coordonnées x, y, z dans un **repère orthonormé** d'origine O, d'axes (Ox, Oy, Oz) et ayant trois vecteurs unitaires (appelés base) $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ formant un trièdre direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.



Le vecteur position est défini selon l'expression : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z$
Et la norme $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

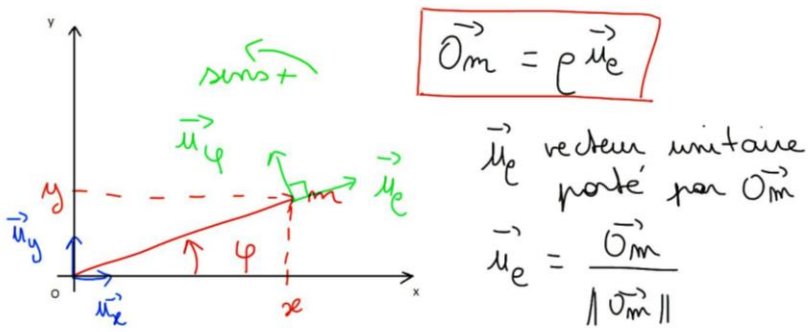
Dans le plan (xOy), on retrouve : $\overrightarrow{Om} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y$ et $\|\overrightarrow{Om}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) Coordonnées polaires :

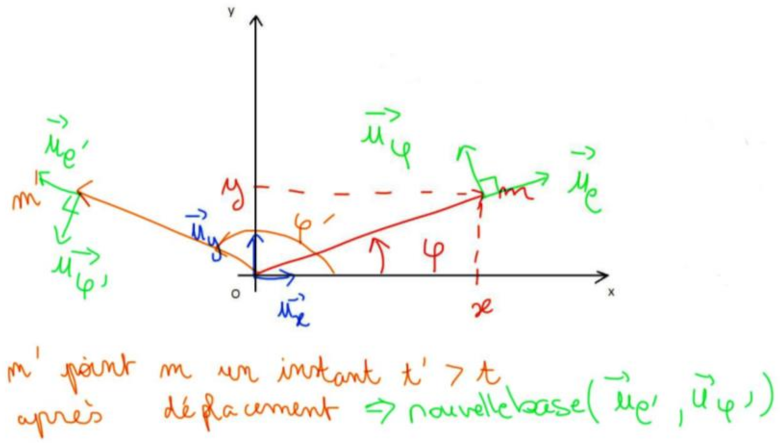
Pour définir la position du point m, projection de M dans le plan (xOy), de manière unique, il faut connaître sa position par rapport à l'axe (Ox) selon un angle φ (*prononcer « phi » en grec*) et avec une distance au centre $Om = \|\overrightarrow{Om}\| = \rho$ (*prononcer « rho » en grec*).

On appelle $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ **les coordonnées polaires du point m**, auxquelles on associe la base orthonormée $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi})$.

C'est une **base mobile** liée au point local m : $\overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho$.
$\vec{u}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{Om}$, et $\overrightarrow{u_\varphi}$ est orthogonal à $\vec{u}_\rho$.



Attention : Comme la base $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi})$ bouge en même temps que le point m se déplace, il faudra en tenir compte lors des calculs de vitesse et accélération (Chapitre 2)



➔ **Passage des coordonnées cartésiennes aux polaires ?**

$\|\overrightarrow{Om}\| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et aussi $\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\rho sin\varphi}{\rho cos\varphi}$

ou encore de façon équivalente : $cos\,\varphi = \frac{x}{\rho}$ et $\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$

Et pour la base :

$$\overrightarrow{u_\rho} = cos\varphi.\overrightarrow{u_x} + sin\varphi.\overrightarrow{u_y} \qquad et \qquad \overrightarrow{u_\varphi} = -sin\varphi.\overrightarrow{u_x} + cos\varphi.\overrightarrow{u_y}$$

<u>Remarque :</u> on privilégie les coordonnées polaires si mouvement de rotation dans un plan.

Démonstration :

$$\vec{Om} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{Om}\cdot\vec{u_x} = x &= \|\vec{Om}\|.\|\vec{u_x}\|.\cos(\vec{Om},\vec{u_x})\\ &= \rho\cdot 1.\cos\varphi\end{aligned}\right\}\ x = \rho.\cos\varphi$$

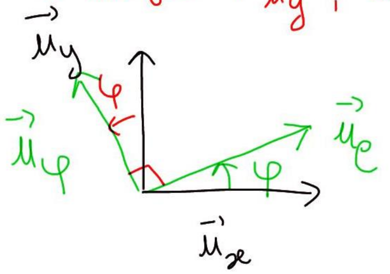
$$\left.\begin{aligned}\vec{Om}\cdot\vec{u_y} = y &= \|\vec{Om}\|.\|\vec{u_y}\|.\cos(\vec{Om},\vec{u_y})\\ &= \rho.1.\cos(\tfrac{\pi}{2}-\varphi)\\ &= \rho\sin\varphi\end{aligned}\right\}\ y = \rho.\sin\varphi$$

➔ **Passage des coordonnées polaires aux cartésiennes ?**

Par projection sur les axes (Ox) et (Oy), on a vu :
$x = \rho.cos\ \varphi$
$y = \rho.sin\ \varphi$

Et pour la base :

φ = angle $(\vec{u_x}, \vec{u_\rho})$
= angle $(\vec{u_y}, \vec{u_\varphi})$



$\overrightarrow{u_x} = cos\varphi.\overrightarrow{u_\rho} - sin\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$
$\overrightarrow{u_y} = sin\varphi.\overrightarrow{u_\rho} + cos\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$

Démonstration :

projection de $\vec{u_x}$ sur $\vec{u_\rho}$:
$\vec{u_x}\cdot\vec{u_\rho} = 1.1.\cos\varphi = \cos\varphi$
projection de $\vec{u_x}$ sur $\vec{u_\varphi}$:
$\vec{u_x}\cdot\vec{u_\varphi} = 1.1.\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi) = -\sin\varphi$
projection de $\vec{u_y}$ sur $\vec{u_\rho}$:
$\vec{u_y}\cdot\vec{u_\rho} = 1.1.\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \sin\varphi$
projection de $\vec{u_y}$ sur $\vec{u_\varphi}$:
$\vec{u_y}\cdot\vec{u_\varphi} = 1.1.\cos(\varphi) = \cos\varphi$

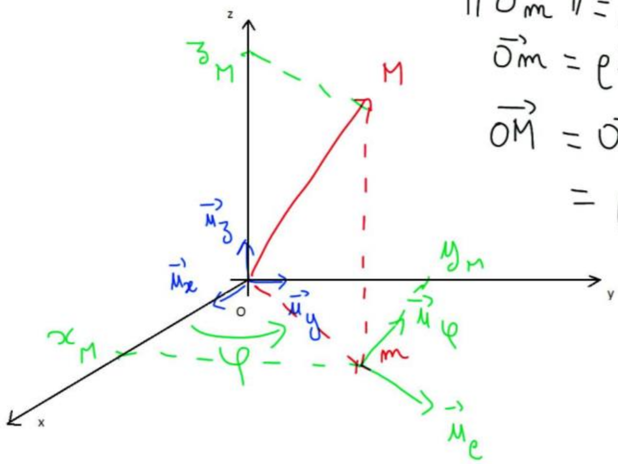
d) Coordonnées cylindriques :

Elles sont définies pour un point M(x, y, z) par M(ρ, φ, z) où z = hauteur du point M et $(\rho; \varphi)$ les coordonnées polaires de la projection m de M dans le plan (xOy).

On définit alors la base orthonormée $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{u_z})$. Elles sont adaptées à l'étude des mouvements de rotation autour d'un axe fixe.

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho.\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$$



$\|\vec{Om}\| = \rho$

$\vec{Om} = \rho \vec{u}_\rho$ dans le plan

$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$ dans l'espace

$= \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$

➔ **Passage des coordonnées cartésiennes aux cylindriques ?**

$\|\overrightarrow{Om}\| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et aussi $tan\ \varphi = y/x$; et puis $z = z$.

➔ **Passage des coordonnées cylindriques aux cartésiennes ?**

$x = \rho.cos\ \varphi$
$y = \rho.sin\ \varphi$
$z = z$

Et pour la base :

$\overrightarrow{u_x} = cos\varphi.\overrightarrow{u_\rho} - sin\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$

$\overrightarrow{u_y} = sin\varphi.\overrightarrow{u_\rho} + cos\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$

$\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_z}$

Attention au calcul de la norme :

$\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en cartésiennes
avec $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\|\vec{OM}\| = \sqrt{\rho^2+z^2}$ en cylindriques
avec $\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$