

Matematyka Dyskretna CW

Max Adamski

Zadania

Lekcja 1 - Logika

❶ Czy wyrażenie to zdanie logiczne, jeśli tak, oblicz

❶ $\forall_{x \in R} x^2 = x$

❷ $\exists_{x \in R} x^2 = x$

❸ $x^2 = x$

❷ Zdanie odwrotne i przeciwstawne

❶ $\forall_{x \in R \setminus \{0\}} (x > 0 \rightarrow x^2 > 0)$

❸ $p \rightarrow q \equiv 0$, oblicz $p \wedge q$, $p \oplus q$, $p \vee q$, $\neg p \vee q$, $\neg(p \wedge \neg q)$, $\neg q \rightarrow \neg p$, $q \rightarrow p$

❹ Wyraz \neg , \vee , \wedge za pomocą kreski Sheffera

❺ Czy zdanie jest tautologia

❶ $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (p \wedge \neg q)$

❷ $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

Lekcja 2 - Relacje

- ❶ Jakie własności ma relacja $R \subseteq S \times S$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$
 - ❶ $(m, n) \in R \iff m + n = 3$
 - ❷ $(n, m) \in R \iff n \leq m$
- ❷ Jaka relacja jest równoległość prostych
- ❸ Jakie własności ma relacja pusta $\emptyset \in S \times S$
- ❹ A, B nie są puste, $RZUT : a \times b \rightarrow a$, $RZUT(a, b) = a$
 - ❶ Czy $RZUT$ jest na
 - ❷ Czy $RZUT$ jest różnowartościowa
- ❺ Znajdź funkcje odwrotne dla $f : R \rightarrow R$
 - ❶ $f(x) = 2x + 3$
 - ❷ $f(x) = \sqrt[3]{x} + 7$

Lekcja 2 - Relacje

5 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, T = \{a, b, c, d\}$

- 1 Czy istnieje funkcja różnowartościowa $S \rightarrow T, S \rightarrow T, T \rightarrow S, T \rightarrow S$
- 2 Czy istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $S \rightarrow T$ lub $T \rightarrow S$

6 Rozważ $\log x, x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$

- 1 Znajdź dziedzinę w R
- 2 Które są wzajemnie odwrotne
- 3 Dla których par złożenie jest przemienne

7 $SUMA(m, n) = m + n, N \times N \rightarrow N$

- 1 Czy $SUMA$ jest na
- 2 Czy $SUMA$ jest różnowartościowa

Lekcja 3 - Asymptotyka

- ❶ Znajdź najmniejszą k , że $f(n) = O(n^k)$
- ❷ Sprawdź czy oszacowanie jest poprawne
 - ❶ $2^{n-1} = O(2^n)$
 - ❷ $(n+1)^2 = O(n^2)$
 - ❸ $40^n = O(2^n)$
 - ❹ $(2n)! = O(n!)$
 - ❺ $(2n)! = O((n!)^2)$
- ❸ Korzystając z hierarchii funkcji dokonaj oszacowania

Lekcja 4 - Zliczanie

- 1 Ile jest drog w grafie
- 2 Ile jest anagramow
 - 1 FLORYDA
 - 2 MISSISSIPPI
- 3 Na ile sposobow mozna posadzić 6 osob przy okraglym stole
- 4 Na ile sposobow mozna posadzić 5 osob przy prostym stole
 - 1 Aby A i B siedzialy obok siebie
 - 2 Aby A i B nie siedzialy obok siebie
- 5 Na ile sposobow mozna wylosowac ze wracaniem sekwencje 10 kart
 - 1 Aby pierwsza karta sie nie powtorzyla
 - 2 Aby pierwsza karta sie powtorzyla

Lekcja 4 - Zliczanie

- 6 Na ile sposobow mozna przejsc z $A = (2, 1)$ do $B = (7, 4)$ w minimalnej liczbie krokow
- 7 Na ile sposobow mozna przejsc z $A = (0, 0)$ do $B = (7, 4)$ w minimalnej liczbie krokow nie przechodzac po XYZ , $X = (2, 2)$, $Y = (4, 2)$, $Z = (4, 3)$
- 8 Na ile sposobow mozna ulozyc 12 ksiazek z 20 na polce
- 9 Na ile sposobow mozna podzielic 12 ksiazek na 4 dzieci
- 10 Na ile sposobow mozna podzielic 7 jablek, 6 truskawek na 4 dzieci, aby kazdy dostal co najmniej 1 jablko
- 11 Znajdz calkowitoliczbowe rozwiazania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$, $x_i \geq 0$
 - 1 $x_i \geq 0$
 - 2 $x_i > 0$
 - 3 $x_i > 0 \wedge 25 \geq x$

Lekcja 5 - Indukcja i rekurencja

Todo

Lekcja 6 - Indukcja i liczby specjalne

- ❶ Ile słów o długości n nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ nie zawierających aa
- ❷ Udowodnij, że zbiór potęgowy zbioru n -elementowego ma 2^n elementów
- ❸ Udowodnij, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} H_{2^n} \leq 1 + n$
- ❹ Udowodnij, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} F_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$
- ❺ Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{v, w, x, y, z\}$. Ile jest funkcji $f : A \rightarrow B$
 - ❶ Gdy $f(A) = \{v, x\}$
 - ❷ $|f(A)| = 2$
- ❻ Na ile sposobów można ułożyć 4 elementy w 3 pudełkach
 - ❶ Pudełka nie mogą być puste
 - ❷ Pudełka mogą być puste
- ❼ Na ile sposobów 5 osób można posadzić przy 3 okrągłych stołach

Wzory dodatkowe

Liczby Stirlinga

- $S(n, 1) = 1$, *gdy* $n \geq 1$
- $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$, *gdy* $n \geq 1$

Lekcja 7 - Liczby całkowite

- 1 Zapisz liczbę 6137 w systemie 8
- 2 Znajdź największy wspólny dzielnik (gcd) liczb 250 i 111. Zapisz go jako kombinację liniową tych liczb. Podaj ich najmniejszą wspólną wielokrotność (lcm)
- 3 Udowodnij, że $8n + 3$ i $3n + 2$ są względnie pierwsze
- 4 $\forall_{n \in \mathbb{Z}^+} \gcd(8n + 3, 3n + 2) = 1$
- 5 Rozwiąż równanie diofantyczne $6x + 15y = 30$, $x, y \in \mathbb{Z}$
- 6 Równanie diofantyczne $ax + by = c$ ma rozwiązanie gdy $\gcd(a, b) | c$
- 7 Przedstaw \gcd jako kombinację liniową i sparametryzuj ją
- 8 Ile jest dodatnich dzielników liczby $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$
- 9 Ilość dzielników to $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_r + 1)$
- 10 np. $29\,338\,848\,000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 11^1 \cdot q$
- 11 Student analizuje procedury w C średnio w 6 minut a w assemblerze średnio w 10 minut ile procedur zanalizuje dokładnie w 104 minuty?

Lekcja 8 - Teoria grafów

- ❶ Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$
- ❷ Ile spójnych podgrafów G zawiera 4 wierzchołki i cykl?
- ❸ Narysuj podgraf indukowany zbiorem wierzchołków $V = \{ \dots \}$
- ❹ Ile istnieje podgrafów rozpinających grafu G ?
- ❺ Ile istnieje spójnych podgrafów rozpinających grafu G ?
- ❻ Ile istnieje podgrafów rozpinających grafu G indukowanych zbiorem wierzchołków $V = \{ \dots \}$?
- ❼ Niech G będzie grafem nieskierowanym $G = (V, E)$ bez pętli własnych
- ❽ Ile krawędzi zawiera dopełnienie grafu G ?
- ❾ Ile wierzchołków i krawędzi zawiera $K_{4,7}$

Lekcja 9 - Zliczanie

*Diagram Venna, Zasada włączania i wylaczania, Liczba nieporzadkow,
Zasada szufladkowa*

- 1 W pewnej instytucji pracuje wylacznie znajace co najmniej 1 jezyk obcy: 6 ang, 6 niem, 7 franc, 4 ang + niem, 3 niem + franc, 2 franc + ang, 1 zna 3 jezyki
- 2 Ile osob pracuje w firmie?
- 3 Ile osob zna tylko 1 jezyk?
- 4 Podczas wywiadówki nauczyciel informuje rodzicow, ze sposrod 30 uczniow w klasie do kolek naukowych zapisalo sie: mat 19, fiz: 13, bio: 18, chem: 11
- 5 Jezeli uczen nie zapisuje sie do > 2 kolek, a kolka nie maja wiecej niz 5 wspolnych czlonkow, to czy nauczyciel mowi prawde?
- 6 Jakie jest prawdopodobienstwo, ze w *sekwencji* 8 rzutow kostka pojawia sie wszystkie liczby?
- 7 Na ile sposobow mozna ulozyc klocki z 26 literami alfabetu aby nie pojawilo sie slowo KOT, RAZ, LUD, PIES?
- 8 Ile liczb w zbiorze $T = \{1000, 1001, \dots, 9999\}$ zawiera co najmniej 9 cyfre 0, 1 i 2?

Lekcja 9 - Zliczanie

- 6 Na ile sposobow 2 osoby moga przeczytac 7 ksiazek w 7 dni czytając 1 dziennie?
- 7 Czy mozna zmiescic 500 000 plikow o nazwach ciag 4 liter (26 liter) w jednym katalogu?
- 8 Ile trzeba zaprosic osob aby mialy te same inicjaly
- 9 Udowodnij, ze wsrod 9 nieujemnych liczb calkowitych ktorych suma wynosi 90 istnieja:
- 10 3 liczby ktorych suma wynosi co najmniej 30
- 11 Pokaż, ze ponizsza figura nie może być narysowana linia ciągłą bez przechodzenia pewnych fragmentów kilka razy.