Programowanie liniowe

- Problem programowania liniowego
  $max\ z = \Sigma c_i x_i\ p.o.\ g(x_1, ..., x_n) = \Sigma a_i x_i \le b_j,\ x_i \ge 0$
- Dualność $max\ f(x)\ p.o.\ g_i(x) \le b_i$, do $min\ f(y)\ p.o.\ g_i(y) \ge b_i$
- Rozwiązanie nieograniczone jeśli jest jedna kolumna z dodatnim wskaźnikiem, a w niej wszystkie wartości są mniejsze równe zero
- Rozwiązanie optymalne jeśli wszystkie wskaźniki są mniejsze równe zero
- Brak rozwiązań jeśli koniec algorytmu i w bazie jest zmienna sztuczna

Programowanie nieliniowe

- Problem programowania matematycznego
  $min\ f_0(x_1, ..., x_n),\ p.o.\ f_i(x_1, ..., x_n) \le 0,\quad i = 1, ..., m$
- Funkcja Lagrange'a $L(x, u) = f(x) + \Sigma u_i f_i(x)$
- Metoda Lagrange'a
  $min\ f_0(x_1, ..., x_n),\ p.o.\ f_i(x_1, ..., x_n) = 0,\quad i = 1, ..., m$
  Warunki: $n > m$, ograniczenia mają ciągłe pochodne
  gradienty ograniczeń są liniowo niezależne
- Twierdzenie KKT
  Konieczne: fi są różniczkowalne, x jest minimum lokalnym, spełnione warunki KKT,
  To istnieje u, że (x, u) spełnia warunki KKT
  Dostateczne: (x, u) spełnia warunki KKT, fi są wypukłe, to x jest min glob
- Warunki KKT
  Warunek dopuszczalności $g_i(x) \le 0,\ i = 1, ..., m$
  Warunek gradientowy $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, ..., n$
  Warunek ortogonalności $u_i g_i(x) = 0,\quad i = 1, ..., m$
  Warunek nieujemności $u_i \ge 0,\ i = 1, ..., m$
- H(x) jest dodatnio półokreślona, to f(x) jest wypukła
- H(x) jest dodatnio określona, to f(x) jest ściśle wypukła
- Jeśli H(x) jest dodatnio określona, to x jest właściwym minimum lokalnym
- Jeśli x jest minimum lokalnym, to H(x) jest dodatnio półokreślona
- KKT to w.k.d istnienia ekstremum dla f wypukłych, czyli
  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$
- Gradient równy 0, to warunek konieczny istnienia w punkcie ekstremum

Sieci

- Zapas niezależny $Z_n = T_j^W - T_i^P - t_{ij}$
- Zapas swobodny $Z_n = T_j^W - T_i^W - t_{ij}$

- Zapas całkowity $Z_n = T_j^P - T_i^W - t_{ij}$
- Zachodzi $0 \le Z_n \le Z_s \le Z_c$
- Na ścieżce krytycznej $Z_n = Z_s = Z_c = 0$
- Czynność pozorna ma zerowy czas trwania i jest wprowadzana aby kolejność zdarzeń była zachowana.
- Może istnieć kilka ścieżek krytycznych. Wszystkie mają taką samą długość.
- Średni gradient kosztów to koszt skrócenia czynności na jednostkę czasu.
- Czas realizacji czynności jest liniowo zależny od kosztu wykonania.
- Ścieżka krytyczna to droga łącząca zdarzenie początkowe z końcowym, której łączny czas jest najdłuższy.
- Zdarzenie krytyczne to zdarzenie z zerowym luzem.
- Czynności krytyczne leżą na ścieżce krytycznej.
- Zapas całkowity ścieżki krytycznej jest równy zero.
- Połączenie zdarzeń krytycznych nie oznacza czynności krytycznej.
- PERT pozwala oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnych luzów zdarzeń, czyli opóźnienia projektu.
- a, b, m - optymistyczny, pesymistyczny, najbardziej prawdopodobny czas trwania czynności
- $t^e = (a + 4m + b)/6$
- $\sigma^2 = (b - a)^2/36$
- $u = (t_p - t_w)/\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_w^2}$
- $P(L_i < 0) = \Phi(-u_i) = 1 - \Phi(u_i)$

Teoria Gier

- a_{ij} $i = 1, ..., n$ $j = 1, ..., m$ - elementy macierzy wypłat.
- Dolna wartość gry $v = \max_i \min_j a_{ij}$
- Górna wartość gry $v = \min_i \max_j a_{ij}$
- Gra z naturą
- Kryterium Walda (maksyminowe) - wybieramy strategię z największym $v_i = \min_j a_{ij}$.
- Kryterium Hurwitza - wybieramy strategię z największym $v_i = \gamma \min_j a_{ij} + (1 - \gamma) \max_j a_{ij}$, gdzie gamma to współczynnik ostrożności $0 \le \gamma \le 1$.
- Kryterium Bayesa - wybieramy strategię z największym $v_i = \sum_j p_j a_{ij}$, gdzie p_j to prawdopodobieństwo wystąpienia j-tego stanu natury $\Sigma p_j = 1$.
- Kryterium Savage'a - minimalizujemy maksymalne straty wybierając strategię z najmniejszym $L_i = \max_j (\max_k a_{kj}) - a_{ij}$.
- Każda gra dwuosobowa o sumie zerowej ma rozwiązanie. Jeśli nie jako strategia czysta, to jako mieszane rozszerzenie gry, które ma zawsze rozwiązanie.

- Mieszane rozszerzenie to trójka $\Gamma =< X, Y, \phi(x,\ y) >$
  $X = \{x : \Sigma x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1..m\}$, zbiór strategii mieszanych gracza A
  $Y = \{y : \Sigma y_i = 1,\ y_i \geq 0,\ i = 1..n\}$, zbiór strategii mieszanych gracza B
  x_i, y_i , prawdopodobieństwo wybrania i-tej strategii przez gracza A, B
  $\phi(x,\ y) = \Sigma\Sigma x_i a_{ij}\, y_j = x^T A y$, wartość oczekiwana gracza A

Kolejki

- Notacja Kendalla $X|Y|m|L|k$
  X, Y - rozkład wejścia i czasu obsługi - D (jednopunktowy), M (wykładniczy), G (dowolny)
  m - liczba stanowisk
  L - pojemność poczekalni
  k - wymiar źródła zgłoszeń

- λ - intensywność napływu zgłoszeń
- μ - intensywność obsługi zgłoszeń
- $\rho = \lambda/\mu$ - intensywność ruchu
- $\overline{W_{M|M|1}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$, średni czas oczekiwania na obsługę
- $\overline{W_{M|D|1}} = \frac{v_0\rho}{2(1-\rho)}$, średni czas oczekiwania na obsługę, gdzie v_0 to stały czas obsługi
- $\overline{V} = 1/\mu = \int_0^\infty v dF(v)$, średni czas obsługi
- $\overline{T} = \overline{W} + \overline{V}$, średni czas odpowiedzi (czekanie + obsługa)
- $\overline{N} = \lambda\overline{T}$, średnia ilość obsłużonych zgłoszeń
- Proces sygnałowy jest jednorodnym procesem Poissona gdy jest procesem o przyrostach niezależnych, X(t) ma rozkład Poissona i $\lambda(t) = \lambda t$
- System jest w stanie równowagi statystycznej jeśli osiąga granice
  $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = N,\ N < \infty$
  $\lim\limits_{t\to\infty} P_n(t) = p_n,\ n = 0, 1, ...$
- System jest w stanie równowagi statystycznej, jeśli spełnia warunek $\rho < m$