

Analiza Matematyczna - Powtórka do egzaminu

1 Granice

1.1 Podstawienia

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin | \tan | \sinh | \tanh | \sin^{-1} | \tan^{-1})x}{x} = 1 \quad (3)$$

2 Pochodne

2.1 Różniczka funkcji

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (4)$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (5)$$

3 Całki

3.1 Metody całkowania

3.1.1 Przez części

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (6)$$

3.1.2 Complete the square

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \quad (7)$$

3.1.3 Metoda nieoznaczonych współczynników

W i R to funkcje zmiennej x . W jest wielomianem stopnia $n > 1$. R jest wielomianem stopnia 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{W_n}{\sqrt{R}} dx &= W_{n-1} \sqrt{R} + \int \frac{A}{\sqrt{R}} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow W_n &= W'_{n-1} R + W_{n-1} \frac{1}{2} R' + A \end{aligned} \quad (8)$$

3.1.4 Podstawienie trygonometryczne

$t = \tan \frac{x}{2}$	$t = \tan x$
$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	$dx = \frac{dt}{1+t^2}$
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$
$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$
—	$\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$

4 Szeregi

4.0.1 Warunek konieczny zbieżności

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (9)$$

4.1 Szeregi o wyrazach dodatnich

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$:

4.1.1 Kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \quad (10)$$

4.1.2 Kryterium Cauchy'ego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g \quad (11)$$

Szereg zbieżny, gdy $g < 1$

Szereg rozbieżny, gdy $g > 1$

4.1.3 Kryterium porównawcze

Dla szeregów $A : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $B : \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\exists_{n_0 \in N} \forall_{n > n_0} a_n \leq b_n \quad (12)$$

Szereg B jest zbieżny, gdy szereg A jest zbieżny

Szereg A jest rozbieżny, gdy szereg B jest rozbieżny

4.1.4 Kryterium całkowite

Dla szeregu $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$, gdzie $n_0 \in N$

$$\forall_{x \in [n_0, \infty)} [f(x) \geq 0 \wedge f'(x) \leq 0] \quad (13)$$

(jeśli f jest nieujemna i nierosnąca)

Szereg jest (ro)zbieżny gdy $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ jest (ro)zbieżna

4.2 Szeregi potęgowe

4.2.1 Promień zbieżności

Dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, gdzie $x \in R$:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \vee r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (14)$$

4.2.2 Szereg Taylora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (15)$$

5 ”””Praktyczne””” wzory

5.0.1 Długość łuku krzywej

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (16)$$

5.0.2 Długość łuku krzywej parametrycznej

$$|L| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (17)$$

5.0.3 Pole obrotu OX

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (18)$$

5.0.4 Pole obrotu OY

$$|P| = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (19)$$

5.0.5 Objętość obrotu OX

$$|V| = \pi \int_a^b [g(x)^2 - f(x)^2] dx \quad (20)$$

5.0.6 Objętość obrotu OY

$$|V| = 2\pi \int_a^b x [g(x) - f(x)] dx \quad (21)$$

6 Trywialne wzory

Uwaga: "–" nie oznacza, że pochodna/całka nie istnieje!

$\int f(x)dx (+ C)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x	$a^x \ln a$
$\frac{1}{a}e^{ax}$	e^{ax}	ae^{ax}
$x \ln x - x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
–	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	–
$\frac{c}{a} \ln ax + b $	$\frac{c}{ax+b}$	–
$\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	–
$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right $	$\frac{1}{x^2-a^2}$	–
$\ln x + \sqrt{a^2 + x^2} $	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	–
$\sin^{-1} \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	–
– $\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$-\ln \cos x $	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln \sin x $	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
–	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
–	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
–	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
–	$\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

7 Appendix: Szkoła podstawowa

7.1 Suma ciągu arytmetycznego

$$S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

7.2 Suma ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

7.3 Trig

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))$$