

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №2
по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 2

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил:
Барсуков Максим Андреевич
Группа: P3215

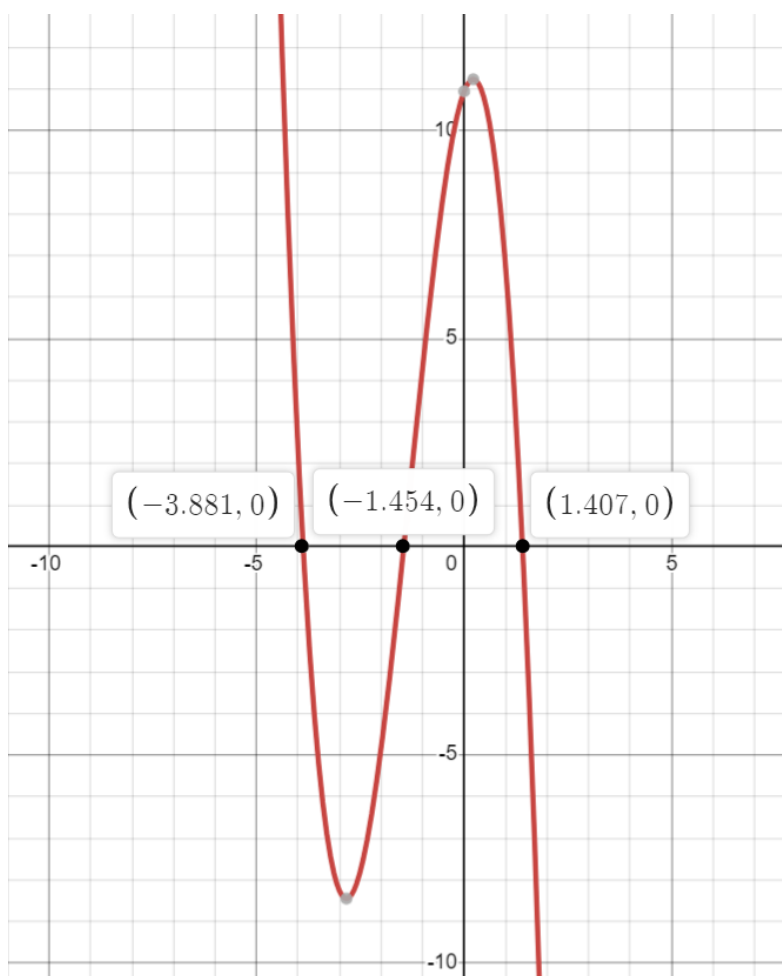
Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

1. $-1,38x^3 - 5,42x^2 + 2,57x + 10,95$



2.

Для определения интервалов изоляции корней данного уравнения, можно воспользоваться методом интервалов знакопеременности. Для этого нужно найти значения функции на различных интервалах и определить знак функции на каждом из них.

Получим приближенные значения корней:

$$x \approx -3.9, x \approx -1.5, x \approx 1.4$$

Теперь нужно разбить ось x на 4 интервала: $(-\infty, -3.9)$, $(-3.9, -1.5)$, $(-1.5, 1.4)$ и $(1.4, +\infty)$. На каждом из этих интервалов нужно определить знак функции.

Для этого можем вычислить значения функции в произвольной точке каждого интервала. Например, для интервала $(-\infty, -3.9)$ можно выбрать $x = -4$, для интервала $(-3.9, -1.5)$ $x = -2$, для интервала $(-1.5, 1.4)$ $x = 0$, и для интервала $(1.4, +\infty)$ $x = 2$.

Таким образом, получим следующие значения функции:

для $x = -4$: $f(-4) = 2.27$

для $x = -2$: $f(-2) = -4.83$

для $x = 0$: $f(0) = 10.95$

для $x = 2$: $f(2) = -16.63$

Знаки функции на каждом интервале будут соответственно:

$(-\infty, -3.9)$	$(-3.9, -1.5)$	$(-1.5, 1.4)$	$(1.4, +\infty)$
+	-	+	-

Таким образом, мы получаем два интервала изоляции корней уравнения:

$(-4, -1.5)$, $(-1.5, 1)$ и $(1, 1.5)$.

3.

$$x_1 \approx -3,88$$

$$x_2 \approx -1,45$$

$$x_3 \approx 1,41$$

4.

Крайний правый корень – Метод простой итерации

№	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$x_{k+1} - x_k$
1	1.000	1.541	6.720	0.541
2	1.541	1.298	-3.022	0.244
3	1.298	1.470	2.137	0.172
4	1.470	1.360	-1.371	0.111
5	1.360	1.437	0.956	0.077
6	1.437	1.385	-0.637	0.051
7	1.385	1.421	0.439	0.035
8	1.421	1.397	-0.297	0.024
9	1.397	1.413	0.203	0.016
10	1.413	1.402	-0.138	0.011
11	1.402	1.410	0.094	0.008

Крайний левый корень – Метод хорд

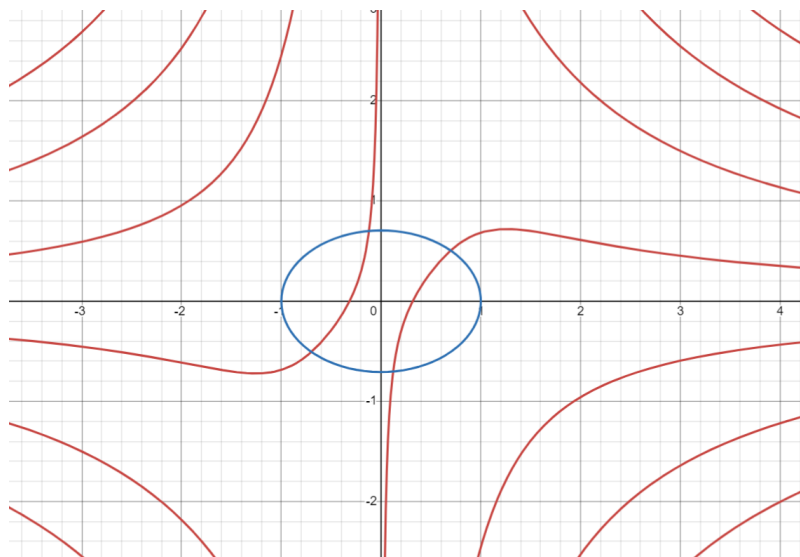
№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	$ x_{k+1} - x_k $
1	-4.000	-1.908	-3.254	2.270	-4.098	-7.253	1.346
2	-4.000	-3.254	-3.822	2.270	-7.253	-0.996	0.568
3	-4.000	-3.822	-3.876	2.270	-0.996	-0.072	0.054
4	-4.000	-3.876	-3.880	2.270	-0.072	-0.005	0.004

Центральный корень – Метод половинного деления

№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	$ a - b $
1	-1.500	1.000	-0.250	-0.443	6.720	9.990	2.500
2	-1.500	-0.250	-0.875	-0.443	9.990	5.476	1.250
3	-1.500	-0.875	-1.188	-0.443	5.476	2.566	0.625
4	-1.500	-1.188	-1.344	-0.443	2.566	1.058	0.312
5	-1.500	-1.344	-1.422	-0.443	1.058	0.305	0.156
6	-1.500	-1.422	-1.461	-0.443	0.305	-0.070	0.078
7	-1.461	-1.422	-1.441	-0.070	0.305	0.117	0.039
8	-1.461	-1.441	-1.451	-0.070	0.117	0.024	0.020
9	-1.461	-1.451	-1.456	-0.070	0.024	-0.023	0.010

2. Решение системы нелинейных уравнений

1. $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, Метод Ньютона



2.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) - x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения эллипса и $tg(xy + 0.1) - x^2 = 0$, следовательно, система имеет не более четырех различных решений.

Построим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \sec(xy + 0.1) - 2, \frac{\partial f}{\partial y} = x \sec^2(xy + 0.1), \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 4y$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y \sec(xy + 0.1) - 2 & x \sec^2(xy + 0.1) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - tg(xy + 0.1) \\ 1 - x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y \sec(xy + 0.1) \Delta x - 2 \Delta x + x \sec^2(xy + 0.1) \Delta y = x^2 - tg(xy + 0.1) \\ 2x \Delta x + 4y \Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Корень 1: Шаг 1: Выбираем $x_0 = -0.12$; $y_0 = 0.7$

$$\begin{cases} y \sec(xy + 0.1) \Delta x - 2 \Delta x + x \sec^2(xy + 0.1) \Delta y = x^2 - tg(xy + 0.1) \\ 2x \Delta x + 4y \Delta y = 1 - x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} \Delta x + 0.077 \Delta y = 0.0154 \\ -0.2 \Delta x + 2.8 \Delta y = 0.01 \end{cases} \rightarrow \Delta x = -0.0014; \Delta y = 0.0019$$

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = -0.12 - 0.0014 = -0.1214$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 0.7 + 0.0019 = 0.7019$$

$$|x_1 - x_0| \leq \varepsilon, |y_1 - y_0| \leq \varepsilon$$

$$|-0.1214 + 0.12| \leq \varepsilon, |0.7019 - 0.7| \leq \varepsilon \rightarrow \text{ответ найден, корень 1: } (-0.1214, 0.7019)$$

Аналогично находим **другой корень:** (0.698, 0.506)

Из графического решения, корни симметричны, следовательно, **другие 2 корня**

$$(-0.698, -0.506), (0.1214, -0.7019)$$

2. Программная реализация задачи

<https://github.com/maxbarsukov/itmo/tree/master/4%20%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%BC%D0%B0%D1%82/%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5/lab2>



Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

Выберите тип программы:

- 1: Нелинейное уравнение
- 2: Система нелинейных уравнений
- 3: Выход

Введите номер типа: 1

Выберите уравнение:

- 1: $-1.38x^3 - 5.42x^2 + 2.57x + 10.95$
- 2: $x^3 - 1.89x^2 - 2x + 1.76$
- 3: $x/2 - 2(x + 2.39)^{1/3}$
- 4: $-x/2 + e^x + 5\sin(x)$

Введите номер уравнения: 1

Выберите метод:

- 1: Метод половинного деления
- 2: Метод хорд
- 3: Метод простой итерации
- 4: Метод Ньютона

Введите номер метода: 2

Введите имя файла для загрузки исходных данных и интервала или пустую строку, чтобы ввести вручную:

Введите левую границу интервала: -4

Введите правую границу интервала: -1.5

Введите погрешность вычисления: 0.000001

Введите имя файла для вывода результата или пустую строку, чтобы вывести в консоль:

Процесс решения:

- 1: $a = -4.000$, $b = -1.908$, $x = -3.254$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -4.098$, $f(x) = -7.253338075903418$,
 $|x_{k+1} - x_k| = 1.3463753767240685$
- 2: $a = -4.000$, $b = -3.254$, $x = -3.822$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -7.253$, $f(x) = -0.9961797791033895$,
 $|x_{k+1} - x_k| = 0.568022551124693$

3: $a = -4.000$, $b = -3.822$, $x = -3.876$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -0.996$, $f(x) = -0.07183806668107628$, $|x_{k+1} - x_k| = 0.05421895603697724$
 4: $a = -4.000$, $b = -3.876$, $x = -3.880$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -0.072$, $f(x) = -0.004903874657289364$, $|x_{k+1} - x_k| = 0.0037899812480461925$
 5: $a = -4.000$, $b = -3.880$, $x = -3.880$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -0.005$, $f(x) = -0.0003334833824535366$, $|x_{k+1} - x_k| = 0.0002581574086821803$
 6: $a = -4.000$, $b = -3.880$, $x = -3.881$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -0.000$, $f(x) = -2.267235988462346e-05$, $|x_{k+1} - x_k| = 1.7553172981354948e-05$
 7: $a = -4.000$, $b = -3.881$, $x = -3.881$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -0.000$, $f(x) = -1.541386730252725e-06$, $|x_{k+1} - x_k| = 1.1933664496588392e-06$
 8: $a = -4.000$, $b = -3.881$, $x = -3.881$, $f(a) = 2.270$, $f(b) = -0.000$, $f(x) = -1.047914928165028e-07$, $|x_{k+1} - x_k| = 8.113129679188091e-08$

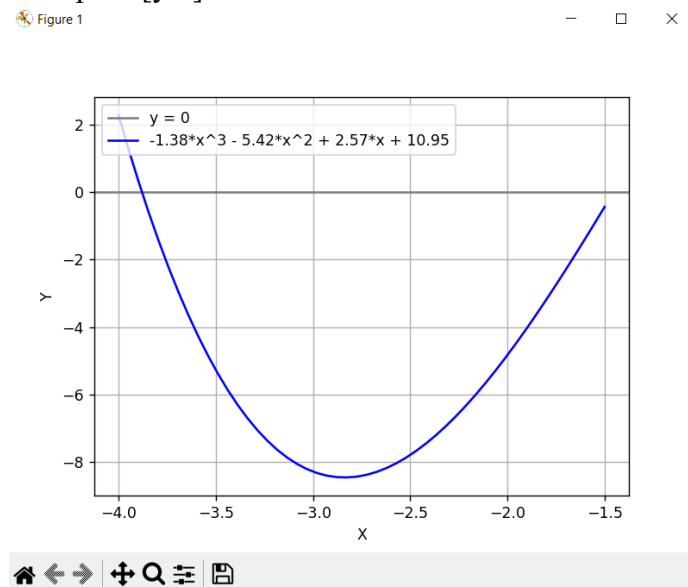
Результат:

Найденный корень уравнения: -3.880518

Значение функции в корне: $-1.047914928165028e-07$

Число итераций: 8

Еще раз? [y/n]



Выберите тип программы:

- 1: Нелинейное уравнение
- 2: Система нелинейных уравнений
- 3: Выход

Введите номер типа: 2

Выберите систему уравнений:

- 1: $x^2 + y^2 - 1$, $x^2 - y - 0.5$

Введите номер системы: 1

Введите начальные приближения x_0 , y_0 : 0 0

Введите погрешность вычисления: 0.01

0. $x_1 = 1.0$, $x_2 = -0.5$, $x_{next} = (1.0, -0.5)$, $|x_{k+1} - x_k| = 1.118033988749895$

1. $x_1 = 0.8660254037844386$, $x_2 = 0.5$, $x_{next} = (0.8660254037844386, 0.5)$, $|x_{k+1} - x_k| = 1.0089346819448337$

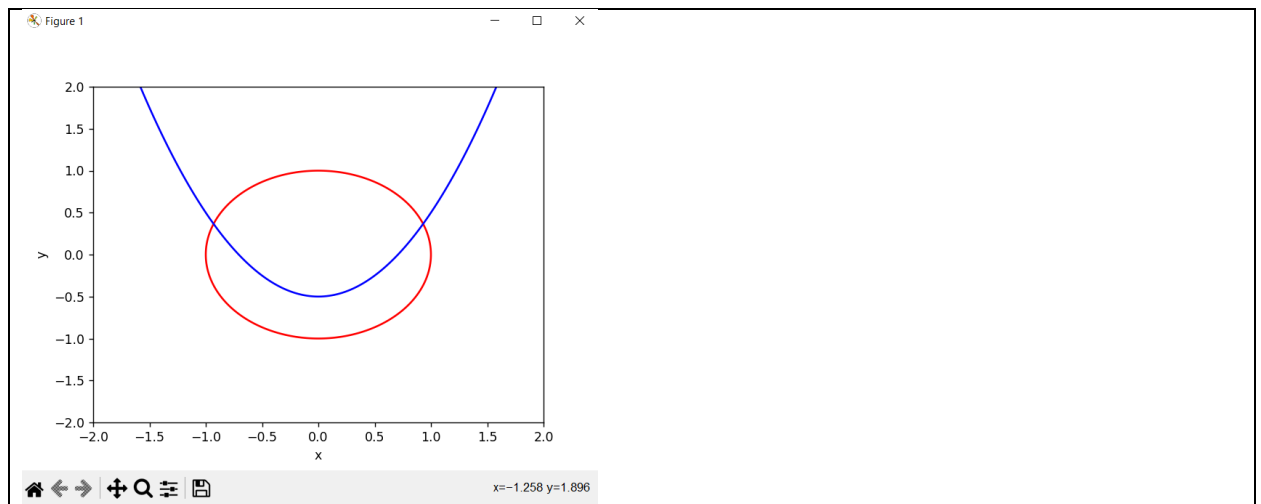
2. $x_1 = 0.8660254037844386$, $x_2 = 0.2499999999999999$, $x_{next} = (0.8660254037844386, 0.2499999999999999)$, $|x_{k+1} - x_k| = 0.2500000000000001$

3. $x_1=0.9682458365518543$, $x_2=0.2499999999999999$, $x_{next}=(0.9682458365518543, 0.2499999999999999)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.10222043276741566$
4. $x_1=0.9682458365518543$, $x_2=0.4375000000000001$, $x_{next}=(0.9682458365518543, 0.4375000000000001)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.18750000000000022$
5. $x_1=0.8992184106211348$, $x_2=0.4375000000000001$, $x_{next}=(0.8992184106211348, 0.4375000000000001)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.06902742593071942$
6. $x_1=0.8992184106211348$, $x_2=0.3085937499999999$, $x_{next}=(0.8992184106211348, 0.3085937499999999)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.12890625000000022$
7. $x_1=0.9511939326241193$, $x_2=0.3085937499999999$, $x_{next}=(0.9511939326241193, 0.3085937499999999)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.0519755220029845$
8. $x_1=0.9511939326241193$, $x_2=0.4047698974609377$, $x_{next}=(0.9511939326241193, 0.4047698974609377)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.09617614746093783$
9. $x_1=0.9144185748930639$, $x_2=0.4047698974609377$, $x_{next}=(0.9144185748930639, 0.4047698974609377)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.03677535773105545$
10. $x_1=0.9144185748930639$, $x_2=0.3361613301094619$, $x_{next}=(0.9144185748930639, 0.3361613301094619)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.0686085673514758$
11. $x_1=0.9418044171371449$, $x_2=0.3361613301094619$, $x_{next}=(0.9418044171371449, 0.3361613301094619)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.027385842244081027$
12. $x_1=0.9418044171371449$, $x_2=0.38699556013903724$, $x_{next}=(0.9418044171371449, 0.38699556013903724)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.05083423002957532$
13. $x_1=0.9220815779705572$, $x_2=0.38699556013903724$, $x_{next}=(0.9220815779705572, 0.38699556013903724)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.01972283916658768$
14. $x_1=0.9220815779705572$, $x_2=0.3502344364326728$, $x_{next}=(0.9220815779705572, 0.3502344364326728)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.03676112370636442$
15. $x_1=0.936662073288274$, $x_2=0.3502344364326728$, $x_{next}=(0.936662073288274, 0.3502344364326728)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.014580495317716768$
16. $x_1=0.936662073288274$, $x_2=0.3773358395366879$, $x_{next}=(0.936662073288274, 0.3773358395366879)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.027101403104015098$
17. $x_1=0.9260764893901275$, $x_2=0.3773358395366879$, $x_{next}=(0.9260764893901275, 0.3773358395366879)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.010585583898146456$
18. $x_1=0.9260764893901275$, $x_2=0.35761766420114305$, $x_{next}=(0.9260764893901275, 0.35761766420114305)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.019718175335544874$
19. $x_1=0.9338680882497905$, $x_2=0.35761766420114305$, $x_{next}=(0.9338680882497905, 0.35761766420114305)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.007791598859662963$
20. $x_1=0.9338680882497905$, $x_2=0.3721096062513185$, $x_{next}=(0.9338680882497905, 0.3721096062513185)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.014491942050175455$
21. $x_1=0.9281887959545131$, $x_2=0.3721096062513185$, $x_{next}=(0.9281887959545131, 0.3721096062513185)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.005679292295277416$
22. $x_1=0.9281887959545131$, $x_2=0.3615344409354887$, $x_{next}=(0.9281887959545131, 0.3615344409354887)$, $|x_{k+1} - x_k|=0.010575165315829804$

Неизвестные: $x = 0.92819$, $y = 0.36153$

Количество итераций: 22

Невязка: -0.0077584070819749495, 0.0



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием Python. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов.