

## **Программа экзамена по математическому анализу (третий семестр, 2023)**

1. Функции нескольких переменных. Понятие  $n$ -мерного координатного пространства. Область определения. Предел функции.
2. Непрерывность функции нескольких переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях (арифметические операции над непрерывными функциями, непрерывность сложной функции, знакопостоянство непрерывной функции, о промежуточных значениях, ограниченности и достижении наименьшего и наибольшего значений).
3. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал, частные производные. Геометрический и физический смысл частных производных. Необходимое и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
4. Свойство инвариантности формы первого дифференциала функции нескольких переменных.
5. Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных.
6. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявной функции.
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.
8. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования.
9. Дифференциалы высших порядков.
10. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
11. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных.
12. Двойной интеграл. Определение. Геометрический смысл. Вычисление с помощью повторного интегрирования. Основные свойства.
13. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.
14. Тройной интеграл. Определение. Вычисление с помощью повторного интегрирования. Основные свойства.
15. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
16. Криволинейный интеграл первого рода. Определение. Основные свойства. Вычисление.
17. Криволинейный интеграл второго рода. Определение. Основные свойства. Вычисление.
18. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.
19. Формула Грина.
20. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

21. Поверхностный интеграл первого рода. Определение. Вычисление. Свойства.
22. Поверхностный интеграл второго рода. Определение. Вычисление. Свойства.
23. Формула Остроградского-Гаусса.
24. Формула Стокса.
25. Скалярное поле. Поверхности уровня, линии уровня скалярного поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля, координатное и инвариантное определения.
26. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие уравнения и его решения. Поле направлений. Задача Коши. Теорема Пикара. Общее, частное и особое решения.
27. Методы интегрирования уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.
28. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.
29. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
30. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.
31. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Задача Коши. Теорема Пикара. Понижение порядка уравнения. Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных. Уравнения, не содержащие независимой переменной.
32. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Свойства решений линейного однородного уравнения. Фундаментальная система решений и определитель Вронского. Признак линейной независимости решений. Формула Остроградского – Лиувилля.
33. Построение общего решения линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Структура общего решения неоднородного уравнения. Принцип наложения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка. Случай уравнения  $n$ -го порядка.
34. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Нормальная система. Задача Коши. Механическое истолкование нормальной системы и ее решения. Теорема Пикара. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений 1-го порядка.
35. Линейные системы. Свойства линейных систем. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости вектор-функций. Формула Остроградского – Лиувилля.
36. Построение общего решения линейной однородной системы по фундаментальной системе решений. Интегрирование линейной однородной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера.

37. Структура общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).
38. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
39. Производная и дифференциал функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций комплексного переменного.
40. Аналитические функции. Свойства нулей аналитических функций. Теорема единственности. Принцип аналитического продолжения. Связь аналитических функций с гармоническими.
41. Элементарные функции комплексного переменного и их свойства.
42. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
43. Интегральные теоремы Коши (для односвязной и для многосвязной областей).
44. Независимость интеграла от пути интегрирования.
45. Первообразная функции комплексного переменного. Неопределенный интеграл от функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница.
46. Интегральная формула Коши.
47. Высшие производные аналитической функции.
48. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Теорема Тэйлора.
49. Ряды Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана.
50. Изолированные особые точки голоморфной функции. Их классификация посредством ряда Лорана. Устранимая особая точка и ее характеристика. Полус и его характеристика. Существенно особая точка и ее характеристика.
51. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.
52. Вычеты в изолированных особых точках. Основная теорема теории вычетов. Вычисление вычетов в конечных особых точках.
53. Вычет относительно бесконечно удаленной особой точки. Теорема о сумме вычетов.
54. Вычисление криволинейных интегралов с использованием теории вычетов. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов от вещественных функций.
55. Вычисление несобственных интегралов с использованием теории вычетов. Леммы Жордана.