Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**
«Численное интегрирование»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **2**

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил:
Барсуков Максим Андреевич
Группа: P3215

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

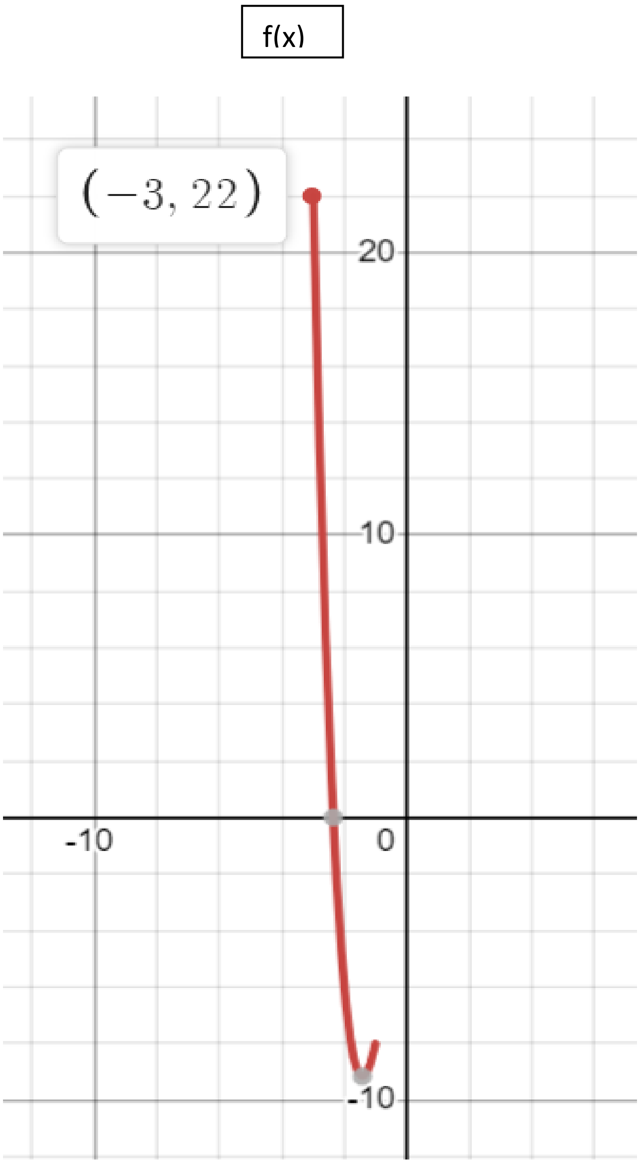
1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$\int_{-3}^{-1} (-3x^3 - 5x^2 + 4x - 2)\,dx$$

$$\mathrm{F(x)} = -\frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2 - 2\mathrm{x};\ F(-1) = \frac{59}{12};\ F(-3) = \frac{33}{4}$$

$$I_{\text{точн}} = F(x) = F(-1) - F(-3) = \frac{59}{12} - \frac{33}{4} = \frac{-10}{3} \approx \mathbf{-3.(3)}$$



2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{(-1)-(-3)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

$$I_{cotes} = \big((-1)-(-3)\big) \times \left(\frac{41}{840} f(-3) + \frac{216}{840} f\left(\frac{-8}{3}\right) + \frac{27}{840} f\left(\frac{-7}{3}\right) + \frac{272}{840} f(-2) + \frac{27}{840} f\left(\frac{-5}{3}\right) + \frac{216}{840} f\left(\frac{-4}{3}\right) + \frac{41}{840} f(-1)\right) = \frac{-10}{3} = \mathbf{-3.(3)}$$

Решение на Wolfram Alpha

3. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{-1-(-3)}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} = h \cdot \left(f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f\left(a+\frac{5h}{2}\right) + f\left(a+\frac{7h}{2}\right) + f\left(a+\frac{9h}{2}\right) + f\left(a+\frac{11h}{2}\right) + f\left(a+\frac{13h}{2}\right) + f\left(a+\frac{15h}{2}\right) + f\left(a+\frac{17h}{2}\right) + f\left(a+\frac{19h}{2}\right)\right) =$$

$$= 0.2\big(f(-3+0.1) + f(-3+0.3) + f(-3+0.5) + f(-3+0.7) + f(-3+0.9) + f(-3+1.1) + f(-3+1.3) + f(-3+1.5) + f(-3+1.7) + f(-3+1.9)\big) = \mathbf{-3.42}$$

Решение на Wolfram Alpha

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{трапеция}} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_{\text{трапеция}} = 0.2\left(\frac{f(-3) + f(-1)}{2} + f(-3+0.2) + f(-3+0.4) + f(-3+0.6) + f(-3+0.8) + f(-3+1) + f(-3+1.2) + f(-3+1.4) + f(-3+1.6) + f(-3+1.8)\right) = \mathbf{-3.16}$$

Решение на Wolfram Alpha

- **Метод Симпсона**:

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + \ 4 \sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2 \sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n \right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3} \big(f(-3) + 4 * \big(f(-3+0.2) + f(-3+0.6) + f(-3+1) + f(-3+1.4) + f(-3+1.8) \big) + 2 * \big(f(-3+0.4) + f(-3+0.8) + f(-3+1.2) + \ f(-3+1.6) \big) + f(-1) \big) = -3.33333\ldots = \mathbf{-3.(3)}$$

Решение на Wolfram Alpha

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале вычислено как $\frac{-10}{3} = \mathbf{-3.(3)}$

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{cotes} = -3.(3)$, **значения совпадают**.

   $$R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = \left| \frac{-10}{3} - (-3.33333\ldots) \right| = 0$$
2. Для метода **средних прямоугольников** при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -3.42$.

   $$R = \left| I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}} \right| = \left| \frac{-10}{3} - (-3.42) \right| = 0.08(6)$$
3. Для метода **трапеций** при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -3.16$.

   $$R = \left| I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}} \right| = \left| \frac{-10}{3} - (-3.16) \right| = 0.17(3)$$
4. Для метода **Симпсона** при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -3.(3)$, **значения совпадают**.

   $$R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = \left| \frac{-10}{3} - (-3.33333\ldots) \right| = 0$$

5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

1. Для метода **Ньютона–Котеса**: $R = 0$ → **погрешности нет.**
2. Для метода **средних прямоугольников**: $\Delta = \frac{|-3.(3) - (-3.42)|}{|-3.(3)|} \approx 2.6\%$
3. Для метода **трапеций**: $\Delta = \frac{|-3.(3) - (-3.16)|}{|-3.(3)|} \approx 5.2\%$
4. Для метода **Симпсона**: $R = 0$ → **погрешности нет.**

Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность, особенно при использовании формулы Ньютона–Котеса и Симпсона. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–Котеса с $n = 6$ и формулы Симпсона с $n = 10$, при которых значения интеграла полностью совпали.

2. Программная реализация задачи

https://github.com/maxbarsukov/itmo/tree/master/4%20вычмат/лабораторные/lab3

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

```
Выберите функцию:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2
8. 10
Ваш выбор: 7
Введите начальный предел интегрирования: -3
Введите конечный предел интегрирования: -1
Выберите метод интегрирования:
1. rectangle_left
2. rectangle_right
3. rectangle_middle
4. trapezoid
5. simpson
Ваш выбор: 5
Введите требуемую точность вычислений: 0.0001
Значение интеграла: -3.3333333333333333
Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: 8
```

```
Выберите функцию:
1. x^2
2. sin(x)
3. e^x
4. 1/x^2
5. 1/x
6. 1/sqrt(x)
7. -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2
8. 10
Ваш выбор: 5
```

Введите начальный предел интегрирования: -1 Введите конечный предел интегрирования: 1 Выберите метод интегрирования: 1. rectangle_left 2. rectangle_right 3. rectangle_middle 4. trapezoid 5. simpson Ваш выбор: 1 Введите требуемую точность вычислений: 0.0001 Интеграл не существует: функция имеет разрыв.
Выберите функцию: 1. x^2 2. sin(x) 3. e^x 4. 1/x^2 5. 1/x 6. 1/sqrt(x) 7. -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2 8. 10 Ваш выбор: 5 Введите начальный предел интегрирования: 1 Введите конечный предел интегрирования: 10 Выберите метод интегрирования: 1. rectangle_left 2. rectangle_right 3. rectangle_middle 4. trapezoid 5. simpson Ваш выбор: 5 Введите требуемую точность вычислений: 0.001 Значение интеграла: 2.302763505482293 Число разбиений интервала интегрирования для достижения требуемой точности: 32

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы интегрирования с использованием Python. В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования. Написав реализации всех трех методов решения интегралов, можно сделать вывод, что самым точным и быстрым является метод Симпсона.

В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов.

Также была выполнена дополнительная задача по установлению сходимости рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода и их вычислению заданными численными методами в случаях, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке a, в точке b или на отрезке интегрирования.