# Задача 1

Вычислить полный дифференциал 2-го порядка функции

$$f(x,y) = \ln(8x + 8y - 86)$$

в точке $x_0 = 4$, $y_0 = 7$ при $dx = 6$, $dy = 4$.

Формат ответа: целое число или десятичная дробь.

Примеры записи ответа: 5; -4.1; 0.07.

Полный дифференциал функции:

$$dU = \frac{8}{8 \cdot x + 8 \cdot y - 86} \cdot dx + \frac{8}{8 \cdot x + 8 \cdot y - 86} \cdot dy$$

подставить

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log(8\,x + 8\,y - 86)) = \frac{4}{4\,x + 4\,y - 43}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\log(8\,x + 8\,y - 86)) = \frac{4}{4\,x + 4\,y - 43}$$

https://www.wolframalpha.com/input?i=z%3D%5B%2F%2Fmath%3Aln%288x%2B8y-86%29%2F%2F%5D

## Задача 2

Вычислите производную функции

$$u(x, y, z) = 7xy + 7xz + 2yz$$

по направлению $\mathbf{n} = (0, 2, \sqrt{12})$ в точке $M(-1, 3.5, -3)$.

Формат ответа: целое число или десятичная дробь.

Примеры записи ответа: 5; -4.1; 0.07.

## SOLUTION

**Your input: find the directional derivative of** $7xy + 7xz + 2yz$ **at** $(x, y, z) = \left(-1, \frac{7}{2}, -3\right)$ **in the direction of the vector** $\vec{u} = (0, 2, 2\sqrt{3})$

Find the gradient of the function and evaluate it at the given point:

$$\nabla (7xy + 7xz + 2yz)\,|_{(x,y,z)=\left(-1,\frac{7}{2},-3\right)} = \left(\frac{7}{2}, -13, 0\right)$$ (for steps, see gradient calculator)

Find the length of the vector: $|\vec{u}| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

To normalize the vector, divide each component by the length:

$\vec{u}$ becomes $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Finally, the directional derivative is the dot product of the gradient and the normalized vector:

$$D(7xy + 7xz + 2yz)_{\vec{u}}\left(-1, \frac{7}{2}, -3\right) = \left(\frac{7}{2}, -13, 0\right) \cdot \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{13}{2}$$ (for steps, see dot product calculator)

**Answer:** $D(7xy + 7xz + 2yz)_{\vec{u}}\left(-1, \frac{7}{2}, -3\right) = -\frac{13}{2}$

https://www.emathhelp.net/en/calculators/calculus-3/directional-derivative-calculator/?f=7xy%2B7xz%2B2yz&p=x%2Cy%2Cz%3D-1%2C3.5%2C-3&v=0%2C2%2C12%5E%281%2F2%29

## Задача 3

Исследовать на экстремум функцию

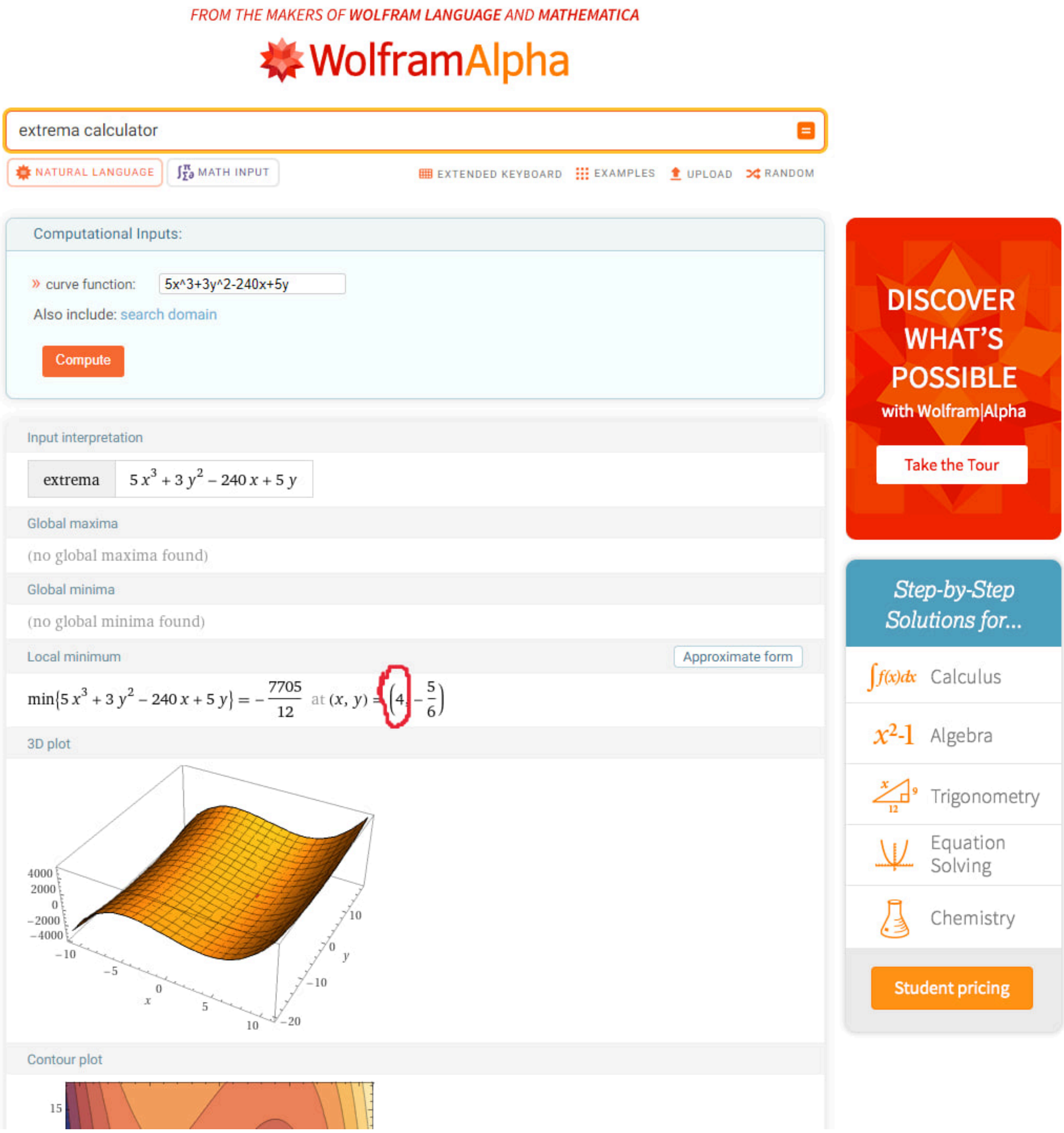
$$f(x,y) = 5x^3 + 3y^2 - 240x + 5y$$

Запишите в ответ абсциссу точки минимума.

Формат ответа: целое число или десятичная дробь.

Примеры записи ответа: 5; -4.1; 0.07.

абсцисса или ордината




ОТВЕТ: 4

https://www.wolframalpha.com/input?i=extrema+calculator&assumption=%7B%22F%22%2C+%22GlobalExtremaCalculator%22%2C+%22curvefunction%22%7D+-%3E%225x%5E3%2B3y%5E2-240x%2B5y%22

# Задача 4

Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности

$$x^2 + y^2 + 10z^3 + 5x + 10y + 9$$

в точке $M(-2, 2, \sqrt[3]{-2.7})$.

Приведите уравнение плоскости к виду

$$x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

и запишите в ответ число $\delta$.

Формат ответа: целое число или десятичная дробь.

Примеры записи ответа: 5; -4.1; 0.07.

---

Поверхность задана уравнением x^2+y^2+10*z^3+5*x+10*y+9. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(-2;2;-2.7^{1/3})$.

**Решение**.

Запишем уравнения касательной в общем виде:

$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0)$

Найдем частные производные функции f(x,y,z) = x^2+y^2+10*z^3+5*x+10*y+9:

Поскольку функция задана в неявном виде, то производные ищем по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$$

Для нашей функции:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 2 \cdot x + 5$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 2 \cdot y + 10$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 30 \cdot z^2$$

Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2 \cdot x + 5}{30 \cdot z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2 \cdot y + 10}{30 \cdot z^2}$$

В точке $M_0(-2,2,-2.7^{1/3})$ значения частных производных:

$f'_x(-2;2;-2.7^{1/3}) = -0.0171910697541214$

$f'_y(-2;2;-2.7^{1/3}) = -0.2406749765577$

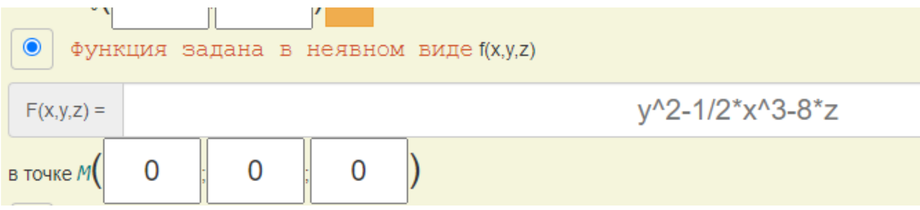
Пользуясь формулой, получаем уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0$:

$z + 2.7^{1/3} = -0.0171910697541214(x + 2) - 0.2406749765577(y - 2)$

или

0.0172*x+0.2407*y+z+0.9455 = 0

ОТВЕТ: 0.9455 (смотри знак перед числом)




https://math.semestr.ru/math/tangent-plane.php

# Задача 5

Вычислите дивергенцию векороного поля

$$\mathbf{f} = (3y^3 + 8z^2y^2, -x^4z + 9y, xz^5 - x^2)$$

в точке $M(10, 10, -8)$.

Формат ответа: целое число или десятичная дробь.

Примеры записи ответа: 5; -4.1; 0.07.

## YOUR INPUT

**Calculate** $\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle$ **and evaluate it at** $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, -8)$.

## SOLUTION

By definition, $\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle = \nabla \cdot \left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle$, or, equivalently, $\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle$, where $\cdot$ is the dot product operator.

Thus, $\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x}\left(3y^3 + 8y^2z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-x^4z + 9y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2 + xz^5\right)$.

Find the partial derivative of component 1 with respect to $x$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(3y^3 + 8y^2z^2\right) = 0$ (for steps, see derivative calculator).

Find the partial derivative of component 2 with respect to $y$: $\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^4z + 9y\right) = 9$ (for steps, see derivative calculator).

Find the partial derivative of component 3 with respect to $z$: $\frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2 + xz^5\right) = 5xz^4$ (for steps, see derivative calculator).

Now, just sum up the above expressions to get the divergence:
$\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle = 5xz^4 + 9$.

Finally, find the divergence at the specific point:

$$\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle|_{((x_0,y_0,z_0)=(10,10,-8))} = 204809$$

## ANSWER

$\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle = 5xz^4 + 9$ A

$\operatorname{div}\left\langle 3y^3 + 8y^2z^2, -x^4z + 9y, -x^2 + xz^5 \right\rangle|_{((x_0,y_0,z_0)=(10,10,-8))} = 204809$ A

ОТВЕТ: 204809

https://www.emathhelp.net/en/calculators/calculus-3/divergence-calculator/?fx=3y%5E3%2B8z%5E2y%5E2&fy=-x%5E4z%2B9y&fz=xz%5E5-x%5E2&px=10&py=10&pz=-8