

«Моделирование»

Преподаватель: АЛИЕВ Тауфик Измайлович,
доктор технических наук, профессор

**Национальный исследовательский университет ИТМО
(НИУ ИТМО)**

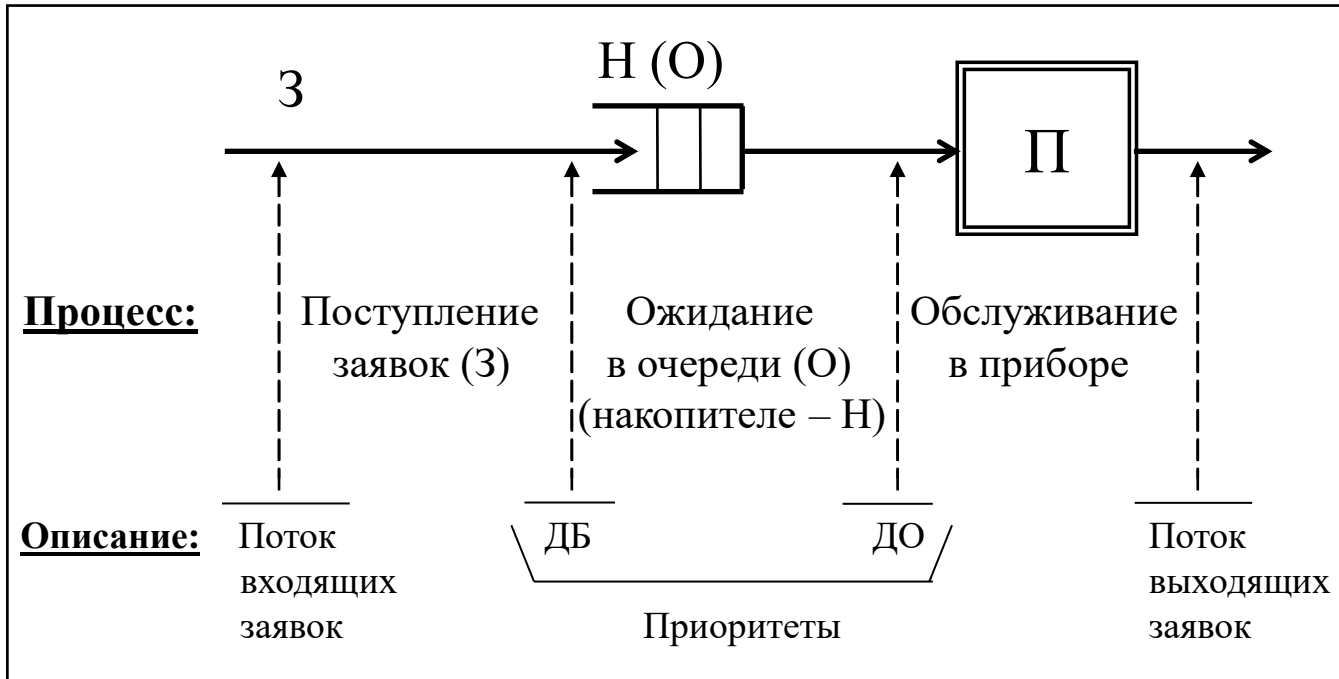
*Факультет программной инженерии и
компьютерной техники*

2. МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

1. Система массового обслуживания (СМО)
2. Многообразие (классификация) СМО
3. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации
4. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания
5. Сеть массового обслуживания (СеМО)
6. Параметры и характеристики СМО
7. Поток заявок. Длительность обслуживания
8. Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости
9. Обозначения СМО (символика Кендалла)
10. Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (М/М/1 и М/Г/1)
11. Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (М/М/1 и М/Г/1)

Раздел 2. Модели дискретных систем

Система массового обслуживания (СМО)



Базовые понятия:

- Поток заявок
- Обслуживание
- Длительность обслуживания
- Ожидание
- Дисциплина буферизации (ДБ)
- Дисциплина обслуживания (ДО)
- Приоритет

Элементы СМО:

П – прибор (канал, устройство, линия, ...)

З – заявка (запрос, клиент, вызов, требование, ...)

Н – накопитель (ёмкость)

О – очередь (длина)

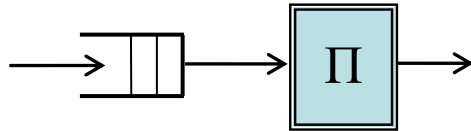
Примеры:

- Обслуживание в магазине
- Автомобильный перекрёсток
- Аэропорт: взлет и посадка самолетов, регистрация пассажиров
- ...

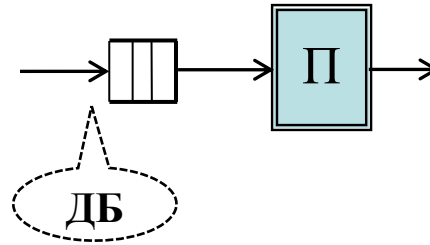
Раздел 2. Модели дискретных систем

Многообразие (классификация) СМО

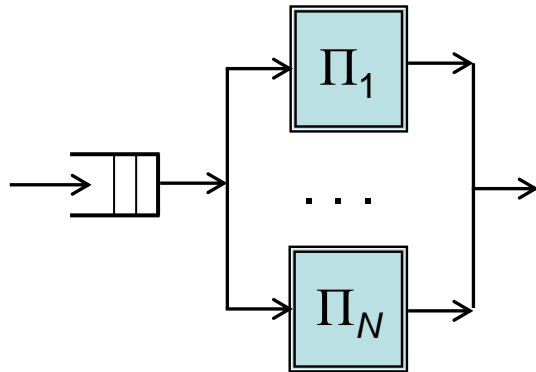
1) Одноканальная СМО с накопителем неограниченной ёмкости



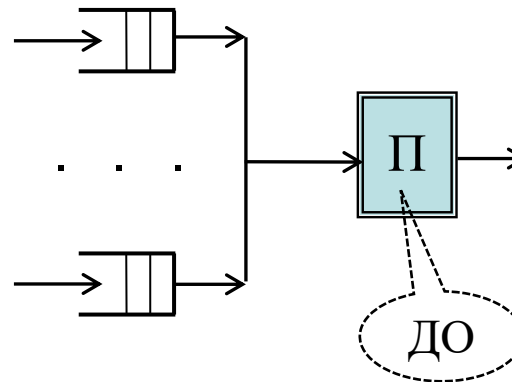
2) СМО с накопителем ограниченной ёмкости



3) Многоканальная СМО



4) СМО с неоднородным потокком заявок



Предположения:

- заявка, поступившая в систему, *мгновенно* попадает на обслуживание, если прибор свободен;
- в приборе на обслуживании в каждый момент времени может находиться только *одна* заявка;
- прибор *не простаивает*, если в очереди есть хотя бы одна заявка;
- поступление заявок в СМО и длительности их обслуживания не зависят от того, сколько заявок уже находится в системе, или других факторов;
- длительность обслуживания заявок не зависит от скорости (интенсивности) поступления заявок в систему.

2. Модели дискретных систем

Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации

Дисциплины буферизации (ДБ)

Бесприоритетные

Приоритетные

*без вытеснения
заявки*

с вытеснением заявки ...

данного
класса

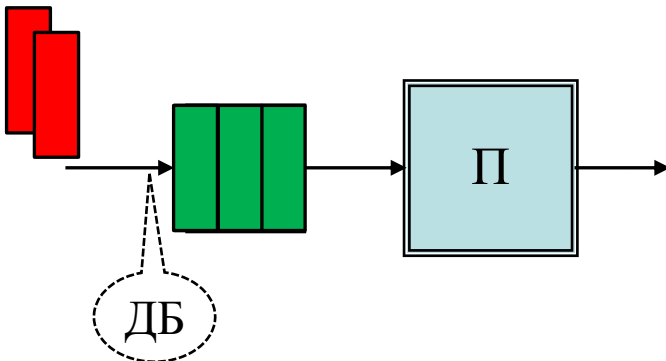
низкоприоритетного
класса

из группы низкопри-
оритетного класса

случайное

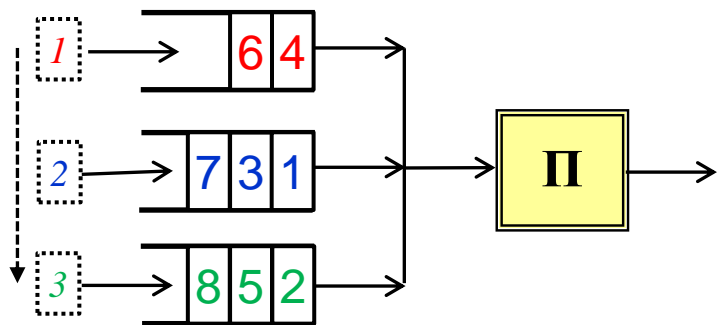
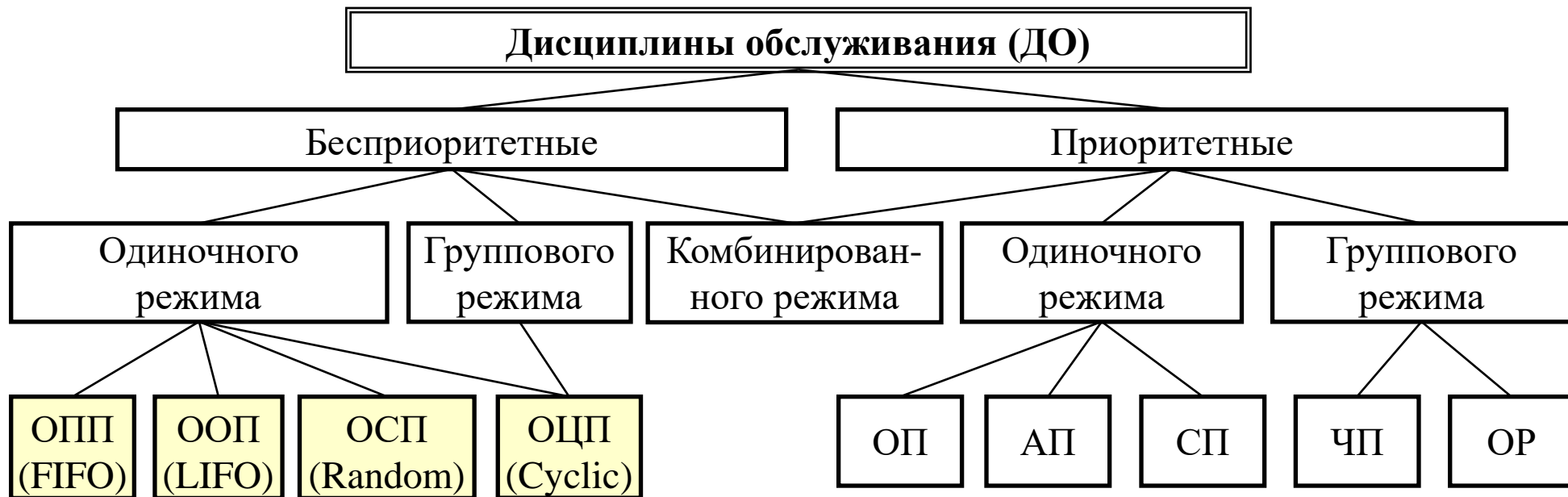
последней заявки

«долгой» заявки



2. Модели дискретных систем

Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания



12345678 (4; 2,7; 4)
87654321 (3; 4,3; 3)
32754186 (5,5; 2,3; 3,3)
41263578 (1,5; 3,7; 2,7)
46132578 (0,5; 3,7; 5,3)

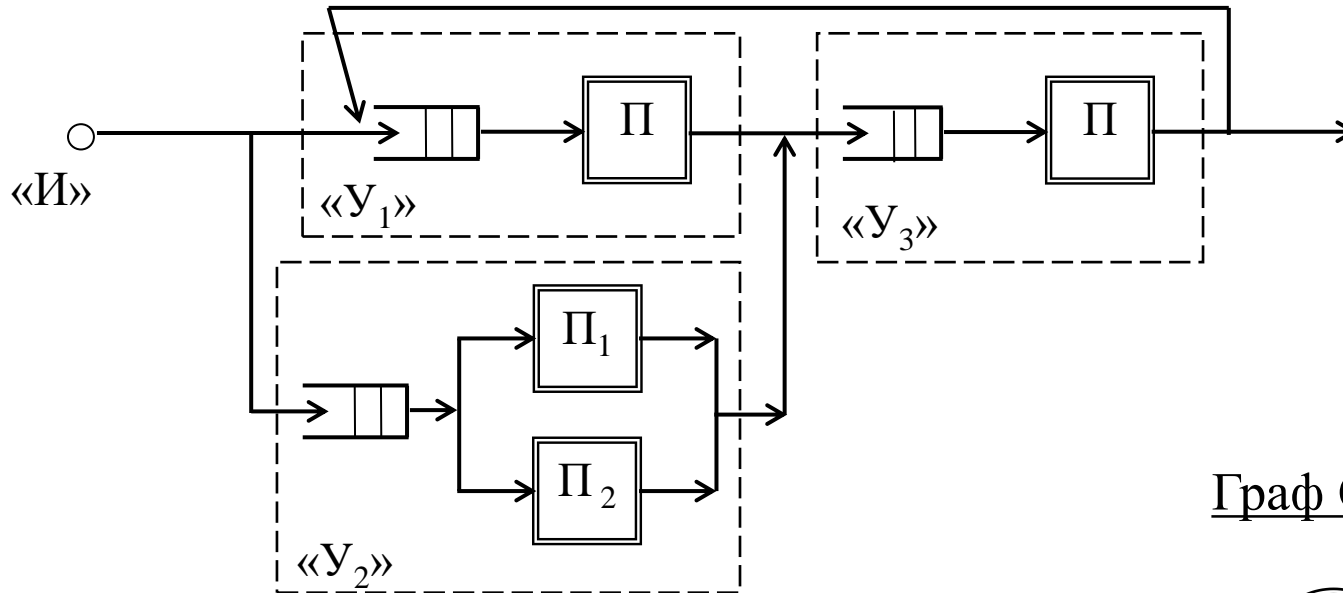
ОП: 24613758
АП: 246137258
ЧП: 46132578

Расписание: (1,2,1,3,1,2)

ОР: 41623578

Раздел 2. Модели дискретных систем

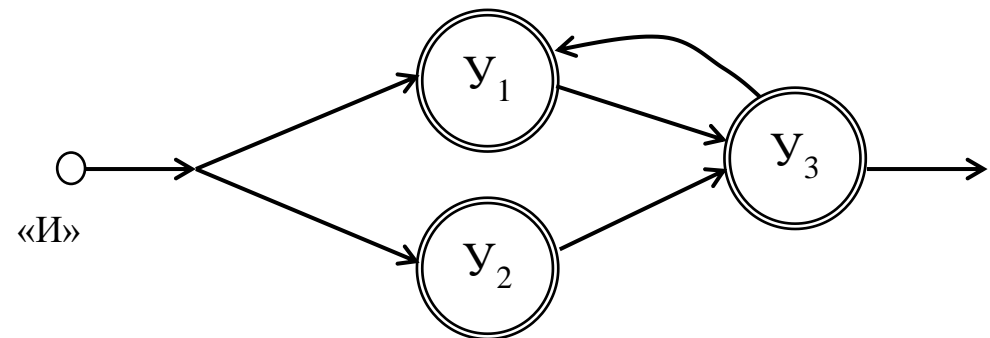
Сеть массового обслуживания (СеМО)



Базовые понятия:

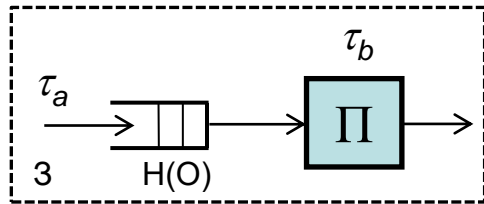
- Источник (И)
- Узел (У)
- Граф СеМО
- Маршрут

Граф СеМО



2. Модели дискретных систем

Параметры и характеристики СМО



Параметры

1) *структурные:*

- количество устройств – N ;
- количество и ёмкости накопителей E ;
- способ взаимосвязи накопителей с устройствами.

2) *функциональные:* ДБ; ДО

3) *нагрузочные:*

- поток заявок: $A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$
- интенсивность $\lambda [c^{-1}]$ ($a = 1/\lambda$);

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

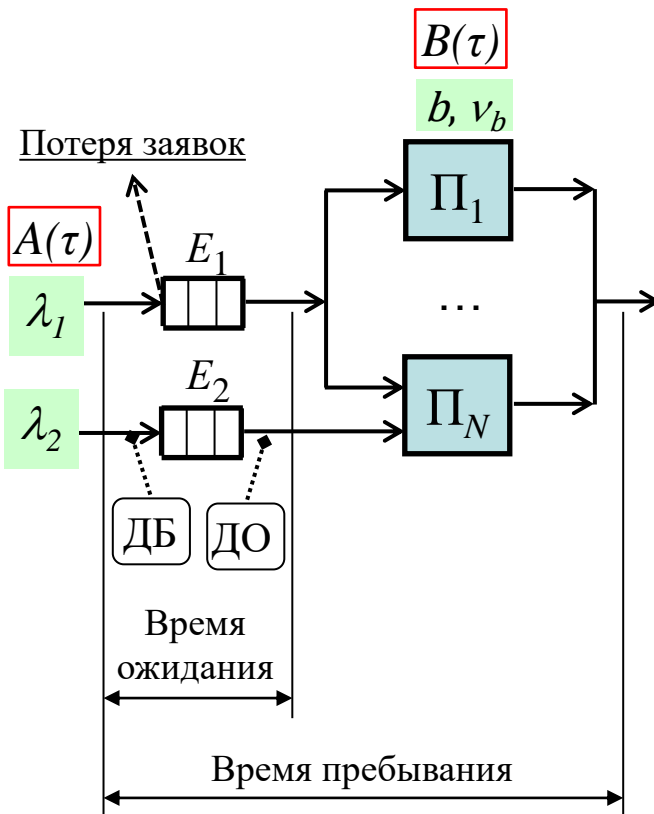
- обслуживание: $B(\tau) = 1 - e^{-\mu\tau}$

$$b \quad (\mu = 1/b)$$

$$\nu_b = \frac{\sigma_b}{b}$$

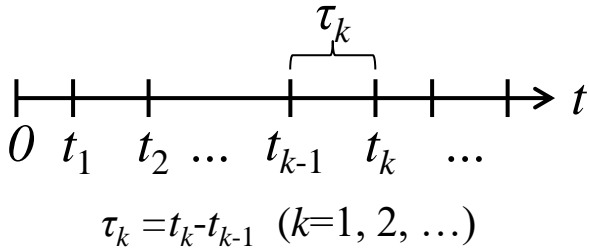
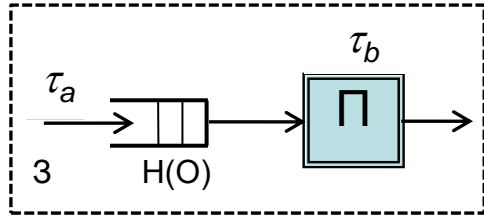
Характеристики

1. Нагрузка
2. Загрузка (и коэффициент простоя) системы
3. Вероятность потери заявки из-за ограниченной емкости накопителя
4. Время ожидания заявок в очереди
5. Время пребывания заявок в системе (в очереди и на обслуживании в приборе)
6. Длина очереди заявок
7. Число заявок находящихся одновременно в системе (в очереди и на обслуживании)



2. Модели дискретных систем

Поток заявок



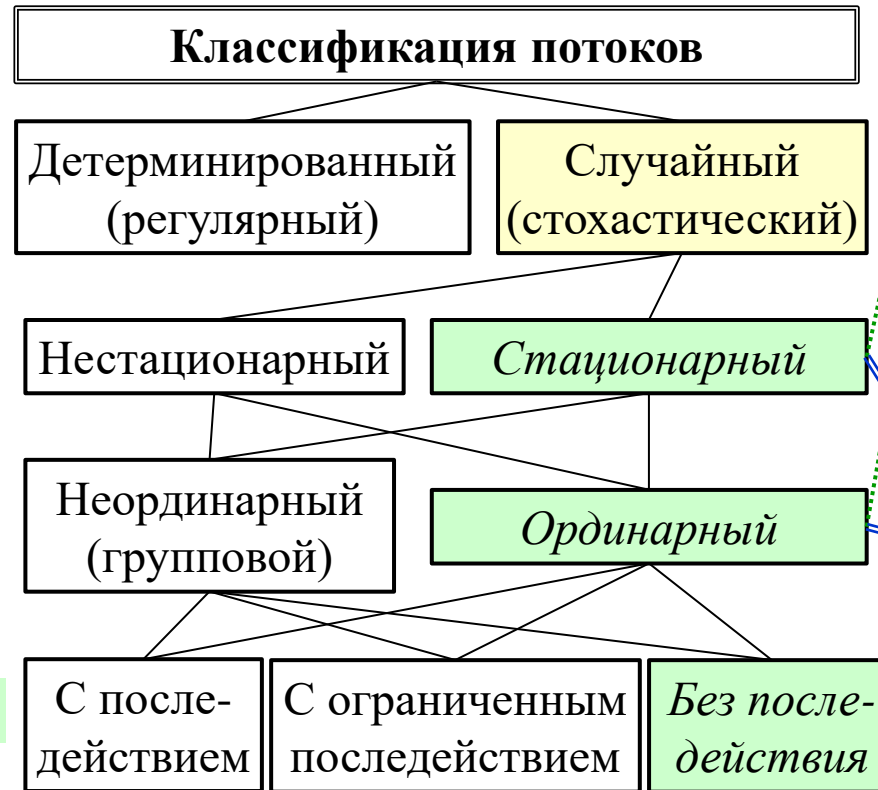
Случайный поток:

$$A_k(\tau); \quad a_k(\tau) = A'_k(\tau)$$

Рекуррентный поток:

$$A_k(\tau) = A(\tau) \quad (k=1, 2, \dots)$$

$\lambda = 1/a \text{ [с}^{-1}\text{]}$ – интенсивность потока;

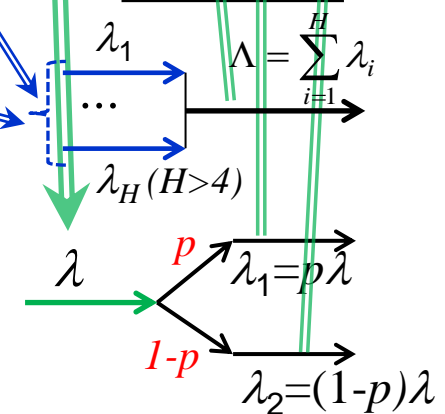


Простейший поток (Пуассоновский)

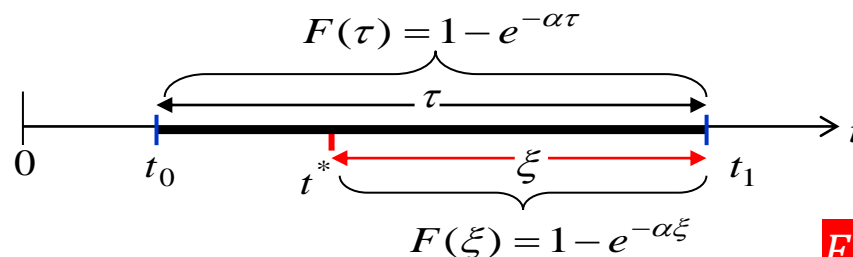
$$A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

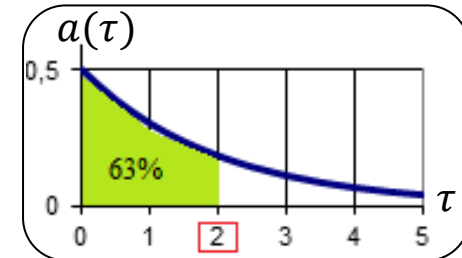
Свойства:



Свойство отсутствия последствия:

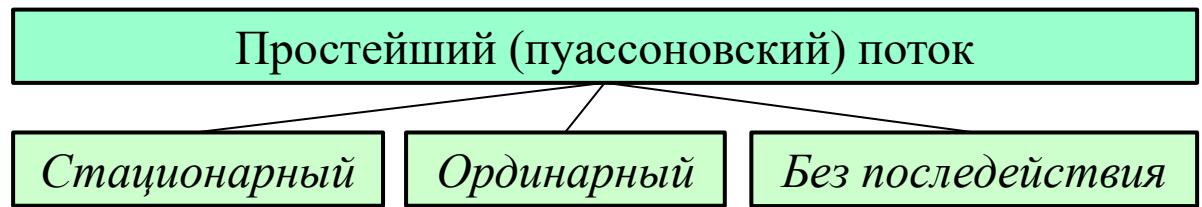
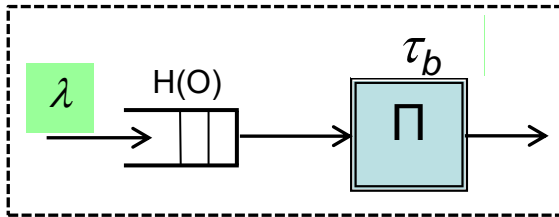


$$F(\xi) = F(\tau)$$



2. Модели дискретных систем

Поток заявок

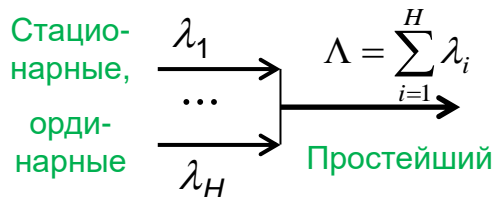


$$A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau} \quad \lambda [\text{с}^{-1}] \text{ — интенсивность потока } (a = 1/\lambda);$$

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ — вероятность того, что за время } t \text{ поступит } k \text{ заявок } (k = 0, 1, 2, \dots)$$

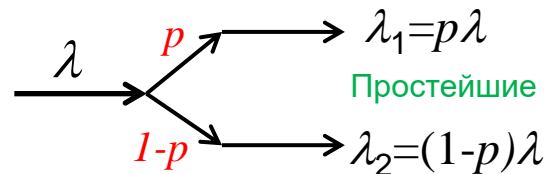
Замечательные свойства простейшего потока:

1) Суммирование потоков

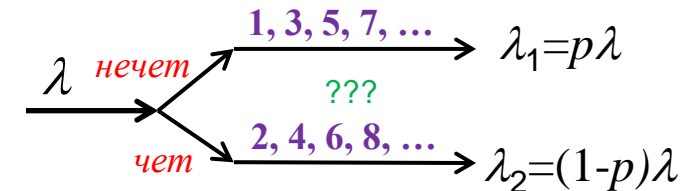


2) Разрежение простейшего потока:

а) случайное (вероятностное)



б) неслучайное (детерминированное)



Длительность обслуживания

$$B(\tau); \quad b(\tau) = B'(\tau) \quad \Rightarrow \quad b, \quad v_b$$

$$\mu \text{ — интенсивность обслуживания: } \mu = 1/b \quad [1/\text{с} = \text{с}^{-1}]$$

2. Модели дискретных систем

Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости

1) нагрузка

$$y = \lambda / \mu = \lambda b$$

($y > 0$)

2) загрузка

$$\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_p}{T}$$



$$\rho = \min(y / N; 1)$$

($0 \leq \rho \leq 1$)

3) коэффициент простоя

$$\eta = 1 - \rho$$

4) среднее время ожидания

$$w = ?$$

5) среднее время пребывания

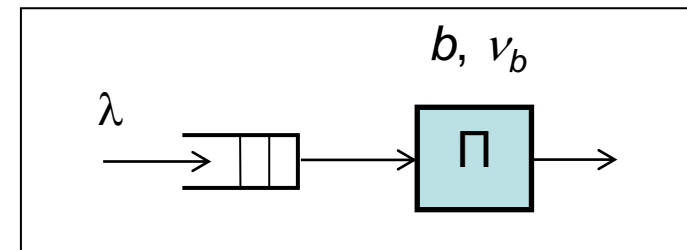
$$u = w + b$$

6) средняя длина очереди

$$l = \lambda w$$

7) среднее число заявок в системе

$$m = \lambda u$$



Условие отсутствия перегрузок:

$$\rho < 1$$

При $N = 1$: $\rho < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$

2. Модели дискретных систем

Обозначения СМО (символика Кендалла)

A/B/N/E

A и **B** – законы распределений:

G (General) – *произвольное распределение общего вида;*

M (Markovian) – *экспоненциальное (показательное) распределение;*

D (Deterministik) – *детерминированное распределение;*

U (Uniform) – *равномерное распределение;*

E_k (Erlangian) – *распределение Эрланга k-го порядка (с k последовательными одинаковыми экспоненциальными фазами);*

h_k (hypoexponential) – *гипоэкспоненциальное распределение k-го порядка (с k последовательными разными экспоненциальными фазами);*

H_r (Hyperexponential) – *гиперэкспоненциальное распределение порядка r (с r параллельными экспоненциальными фазами);*

g (gamma) – *гамма-распределение;*

P (Pareto) – *распределение Парето и т.д.*

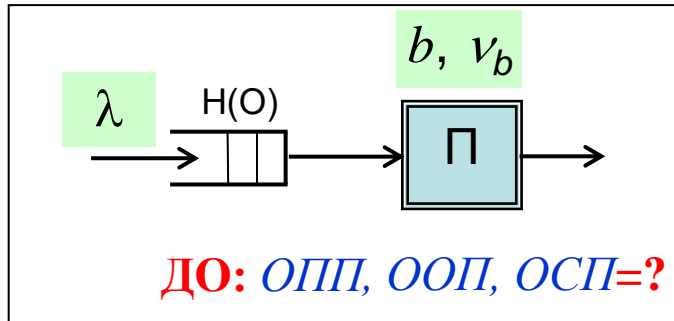
N = 1, 2, 3, ..., ∞ – количество приборов

E = 0, 1, 2, ... – емкость накопителя (по умолчанию: ∞)

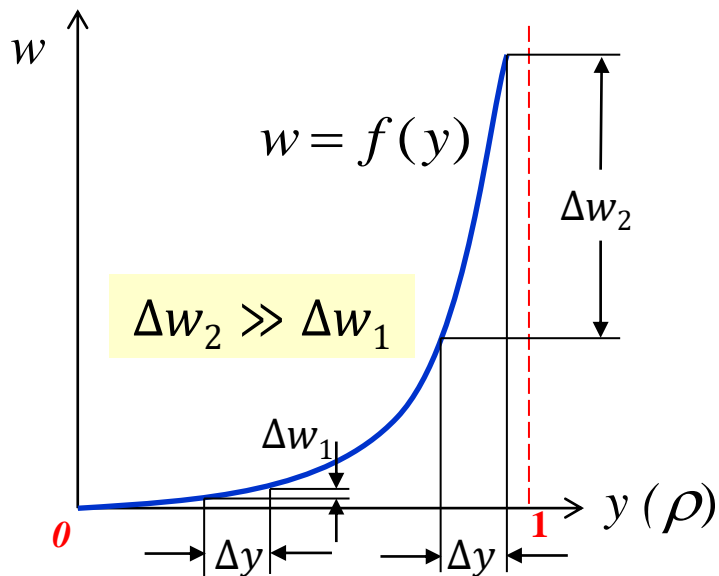
Примеры: M/M/1 M/G/4 E₃/U/2/10 G/H₂/1/20 M/D/∞

2. Модели дискретных систем

Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (М/М/1 и М/Г/1)



Анализ свойств системы



1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b < 1$ ($N=1$)

2) загрузка $\rho = \min(y / N; 1) < 1$

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

4) среднее время ожидания

$$w = \frac{\rho b}{1 - \rho} \quad (\text{М/М/1});$$

$$w = \frac{\lambda b^2 (1 + \nu_b^2)}{2(1 - \rho)} \quad (\text{М/Г/1})$$

5) среднее время пребывания

$$u = w + b = \frac{b}{1 - \rho}$$

6) средняя длина очереди

$$l = \lambda w = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

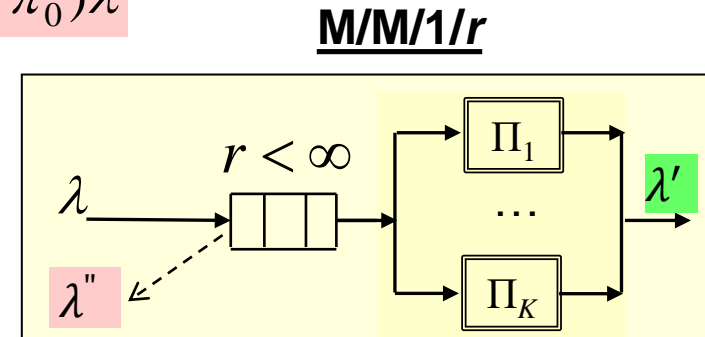
7) среднее число заявок в системе

$$m = \lambda u = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

2. Модели дискретных систем

Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем ограниченной емкости (М/М/1/Е)

- 1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b$
- 2) *вероятность потери (обслуживания) заявок* $\pi_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(T)}{N(T)}$ ($\pi_0 = (1 - \pi_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)}$)
- 3) *производительность системы* $\lambda' = \pi_0 \lambda = (1 - \pi_n) \lambda$
- 4) *интенсивность потока потерянных заявок* $\lambda'' = \pi_n \lambda = (1 - \pi_0) \lambda$
- 5) загрузка $\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_p}{T} \longrightarrow \rho = \frac{(1 - \pi_n) y}{K}$
- 6) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$
- 7) среднее время ожидания $w = ?$
- 8) среднее время пребывания $u = w + b$
- 9) средняя длина очереди $l = \lambda w$
- 10) среднее число заявок в системе $m = \lambda u$



$$p_k = \begin{cases} \frac{y^k (1 - y)}{1 - y^{r+2}}, & y \neq 1 \\ \frac{y^k}{r + 2}, & y = 1 \end{cases} \quad (k=0, 1, \dots, r+1)$$

Условие отсутствия перегрузок ?