Математика, подготовка к экзамену

Готовящиеся к отчислению и не только

19 января 2021 г.

Содержание

Вопрос №1 Векторы, линейные операции над ними. Свойства векторов 5

Вопрос №2 Линейная зависимость системы векторов. Базис. Прямоугольная декартова система координат. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Компоненты вектора. Теоремы о проекциях вектора. 6

Вопрос №3 Скалярное произведение векторов и его свойства 7

Вопрос №4 Векторное произведение векторов и его свойства. Критерий коллинеарности двух ненулевых векторов 8

Вопрос №5 Смешанное произведение векторов и его свойства. Критерий компланарности трех векторов 9

Вопрос №6 Определители и их основные свойства. 10

Вопрос №7 Уравнение алгебраической поверхности. Различные способы задания плоскости в пространстве. 12

Вопрос №8 Различные способы задания прямой в пространстве. 13

Вопрос №9 Уравнение алгебраической линии на плоскости. Различные способы задания прямой на плоскости. 14

Вопрос №10 Взаимное расположение двух прямых на плоскости. 15

Вопрос №11 Взаимное расположение двух плоскостей и двух прямых в пространстве. 16

Вопрос №12 Взаимное расположение прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой в пространстве. 17

Вопрос №13-14 Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости. 18

Вопрос №15 Эллипс. Определение, каноническое уравнение, характеристики. 19

Вопрос №16 Гипербола. Определение, каноническое уравнение, характеристики. 21

Вопрос №17 Парабола. Определение, каноническое уравнение, характеристики. 23

Вопрос №18 Общее уравнение кривой второго порядка. Классификация кривых второго порядка. 25

Вопрос №19 Поверхности второго порядка (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоид, эллиптический и гиперболический параболоид, конус, цилиндрические поверхности второго порядка). 26

Вопрос №20 Множества и операции над ними. Свойства действительных чисел. Модуль действительного числа, свойства модуля. Окрестность точки. 31

Вопрос №21 Грани числовых множеств. 33

Вопрос №22 Числовые последовательности. Определение предела последовательности. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. 34

Вопрос №23 Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами. 35

Вопрос №24 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства. 36

Вопрос №25 Арифметические операции над сходящимися последовательностями. 38

Вопрос №26 Монотонные последовательности. Признак сходимости монотонной последовательности (без доказательства). Число e. 39

Вопрос №27 Теорема Кантора о вложенных отрезках. 41

Вопрос №28 Подпоследовательности.Частичные пределы. Теорема Больцано - Вейерштрасса (о существовании частичного предела у ограниченной последовательности). 42

Вопрос №29 Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности 44

Вопрос №30 Понятие функции, области определения, значений.Равенство функций, операции над функциями. Композиция функций.Элементарные функции. Способы задания функции. Ограниченные и неограниченные функции. Монотонные функции. Обратная функция. Неявные функции. Параметрически заданные функции. 45

Вопрос №31 Предел функции. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне. 48

Вопрос №32 Односторонние конечные пределы функции. Бесконечные пределы функции в конечной точке. Окрестность бесконечности. Предел функции в бесконечности. Локальные свойства функции, имеющей предел. 49

Вопрос №33 Свойства пределов функций, связанные с неравенствами. 50

Вопрос №34 Бесконечно малые функции, их свойства. 51

Вопрос №35 Свойства пределов функций, связанные с арифметическими операциями. 52

Вопрос №36 Сравнение функций. Эквивалентные функции. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов. 54

Вопрос №37 Понятие бесконечно малой функции по сравнению с другой. Свойства символа o(g). 55

Вопрос №38 Критерий эквивалентности функций. Основные эквивалентности. 56

Вопрос №39 Первый замечательный предел. 57

Вопрос №40 Непрерывность функции в точке. Локальные свойства функций, непрерывных в точке. 58

Вопрос №41-42 Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса. 59

Вопрос №43-44 Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Коши. Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции (без доказательства). 60

Вопрос №45 Второй замечательный предел. 61

Вопрос №46 Точки разрыва функции. Определение и классификация. 63

Вопрос №47 Определение производной функции, её геометрический и механический смысл. Односторонние и бесконечные производные. Дифференциал функции. Дифференцируемость функции в точке, определение, критерий. Геометрический и физический смысл дифференциала. 64

Вопрос №48 Дифференцирование суммы, произведения, частного функций. 66

Вопрос №49 Дифференцирование сложной и обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. 67

Вопрос №50 Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций. 68

Вопрос №51 Инвариантность формы дифференциала. 69

Вопрос №52 Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков. 70

Вопрос №53 Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. 72

Вопрос №54 Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши 73

Вопрос №55 Формулы Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора 74

Вопрос №56 Правило Лопиталя. 76

Вопрос №57 Признак постоянства функции. Критерий возрастания и убывания функции. 77

Вопрос №58 Экстремумы функции. Необходимые условия экстремума. 78

Вопрос №59 Первое достаточное условие экстремума функции. 79

Вопрос №60 Второе достаточное условие экстремума функции. 80

Вопрос №61 Третье достаточное условие экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. 81

Вопрос №62 Выпуклость функции. Точки перегиба, необходимое и достаточное условия наличия точки перегиба. 83

Вопрос №63 Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций. 84

0 ,

Вопрос 1

Векторы, линейные операции над ними. Свойства векторов

Определение. *Вектор* - отрезок прямой, характеризующийся определенной длиной и определенным направлением.

Другое определение: Вектор - это множество всех направленных отрезков, равных данному. Любой направленный отрезок задаёт Вектор.

Определение. *Длина вектора* - величина, определяющая длину отрезка, составляющего вектор.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным.*

Определение. *Орт вектора* - единичный вектор, сонаправленный данному. ($\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$)

Определение. *Нулевой* вектор - вектор, начало и конец которого совпадают ($\overline{0}$). Можно считать, что нулевой вектор одновременно коллинеарен и ортогонален любому вектору в пространстве

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны ($\overline{a} \parallel \overline{b}$). Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно

Определение. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковые длины.

Определение. *Свободный вектор* - вектор, начало которого может быть совмещено с любой точкой пространства(вектор скорости или ускорения при поступательном движении тела).

Определение. *Скользящий вектор* - вектор, начало которого можно выбирать произвольно только на прямой, на которой расположен вектор (вектор силы, действующей на абсолютно твердое тело).

Определение. *Приложенный вектор* неотделим от точки определлнной точки, точки приложения(вектор силы, действующей на упроугое тело). Т.е. кроме направения и длины такой вектор характеризуется и точкой приложения.

Линейные операции над векторами:

- Сложение и вычитание векторов
- Умножение вектора на число

Свойства:

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$
3. $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$
4. $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{a})$
6. $(\alpha + \beta) \cdot \overline{a} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{a}$
7. $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \lambda = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b}$
8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$

Вопрос 2

Линейная зависимость системы векторов. Базис. Прямоугольная декартова система координат. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Компоненты вектора. Теоремы о проекциях вектора.

Определение. *Линейно зависимые векторы* - такие векторы $\overline{a_1}, ..., \overline{a_k}$, для которых существуют такие $\lambda_1, ..., \lambda_k$, не все равные нулю, что $\overline{a_1}\lambda_1 + ... + \overline{a_k}\lambda_k = 0$. В противном случае, т.е. когда соотношение $\overline{a_1}\lambda_1 + ... + \overline{a_k}\lambda_k = 0$ выполняется только при $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$ векторы называются *линейно независимыми.*

Ясно, что заданные векторы будут линейно зависимыми, если какой-либо вектор выражается через остальные.

Определение. *Базис* - совокупность отличных от нулей линейно независимых векторов, определяющая длину отрезка, составляющего вектор. Зачастую обозначаются $\overline{e_1}, ..., \overline{e_k}$.

На плоскости базисом являются два неколлинеарных вектора.
В пространстве базисом является три некомпланарных вектора.

Теорема. Пусть в пространстве задан базис $\overline{e_1}, ..., \overline{e_k}$, тогда любой вектор $\overline{a}$ можно представить в виде линейной комбинации $\overline{a} = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{e_i}\lambda_i$

Определение. *Прямоугольная декартова система координат* - система координат, базисом для которой является набор векторов $\overline{e_1}, ..., \overline{e_k}$, которые попарно являются взаимно перпендикулярными.

Для того, чтобы найти координаты точки A требуется провести вектор $\overline{a} = \overline{AO}$, где O - начало координат, выразить этот вектор через линейную комбинацию векторов $\overline{e_1}, ..., \overline{e_k}$. Координаты этой точки будут равны коэффицентам в этой линейной комбинации $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$.

Определение. *Проекция точки M на ось l* - основание M_1 перпендикуляра MM_1 опущенного из точки на ось l.

Определение. *Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l* - Скалярная величина $\overline{|A_1B_1|}$, A_1 является проекцией точки A на l, а B_1 является проекцией точки B на l. Берется со знаком $+$, если $\overline{A_1B_1}$ сонаправлен l, и со знаком $-$ в противном случае. Вектор $\overline{A_1B_1}$ называется *вектороной проекцией.*

Определение. *Координаты вектора $\overline{a}$* - координаты конца вектора, равного данному, но начало которого лежит в начале координат. Или, иначе, если вектор задан точками начала и координат $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, тогда его координаты будут равны $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Определение. *Компоненты вектора $\overline{a}$* - множество векторов, сонаправленных осям координат и равным по длине его проекциям на эти оси соответственно.

Теорема. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между этими вектором и осью.

Вопрос 3

Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение. *Скалярное произведение векторов* - число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается $(\overline{a}, \overline{b})$ или $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos\phi$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними неопределен, и скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения:

- $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$ - переместительное свойство
- $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$ - сочетательное свойство относительно скалярного множества
- $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$ - распределительное свойство
- $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2, \quad (\sqrt{\overline{a}^2} \neq \overline{a}, \sqrt{\overline{a}^2} = |\overline{a}|)$
- Если ненулевые $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно 0. Справедливо и обратное утверждение

Утверждение. *Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных кооординат*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Доказательство. Разложим $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по ортонормированному базису $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}) : \overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}, \quad \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$

Тогда:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) \cdot (b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) =$$

$$= a_x b_x \overline{i}\overline{i} + a_x b_y \overline{i}\overline{j} + a_x b_z \overline{i}\overline{k} + a_y b_x \overline{j}\overline{i} + a_y b_y \overline{j}\overline{j} + a_y b_z \overline{j}\overline{k} + a_z b_x \overline{k}\overline{i} + a_z b_y \overline{k}\overline{j} + a_z b_z \overline{k}\overline{k} =$$

$$= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

■

Определение угла ϕ между ненулевыми $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\overline{b} = (b_x; b_y, b_z)$:

$$cos\phi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}, cos\phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Отсюда следует *условие перпендикулярности ненулевых векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a} \perp \overline{b} \iff a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Вопрос 4

Векторное произведение векторов и его свойства. Критерий коллинеарности двух ненулевых векторов

Три некомпланарных вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, взятые в указанном порядке образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден совещаюмся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой.

Определение. *Векторным произведением* вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который:

- перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{c} \perp \overline{a}$ и $\overline{c} \perp \overline{b}$
- имеет длину, численно равную площади площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах:

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| sin\phi$$

- векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку

Обозначается $\overline{a} \times \overline{b}$ или $[\overline{a}, \overline{b}]$

Из определения непосредственно следует:

$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}, \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}, \overline{i} \times \overline{k} = \overline{j}$$

Свойства векторного произведения:

- $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$
- $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b})$
- $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$
- *Условие коллинеарности двух векторов:* Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда , когда их векторное произведение равно нулевому вектору. $\overline{a} \parallel \overline{b} \iff \overline{a} \times \overline{b} = 0$

  Доказательство. Если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то угол между ними равен $0°$ или $180°$. Но тогда $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot sin\phi = 0$. Значит $\overline{a} \times \overline{b} = 0$.
  Если же $\overline{a} \times \overline{b} = 0$, то $sin\phi = 0$. Тогда $\phi = 0°$ или $\phi = 180°$, значит $\overline{a} \parallel \overline{b}$ ∎

Выражение векторного произведения через координаты:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Физический смысл векторного произведения: Момент силы $\overline{F}$, приложенной к точке B относительно точки A, есть векторное произведение $\overline{F}$ на $\overline{AB}$:

$$\overline{M} = \overline{F} \times \overline{AB}$$

Вопрос 5

Смешанное произведение векторов и его свойства. Критерий компланарности трех векторов

Определение. *Смешанное или векторно-скалярное произведение* векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - это скалярное произведение вектора $\overline{c}$ на векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$$

Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов:

Объем параллелепипеда построенного на трех векторах равен абсолютному значению их смешанного произведения:

$$V = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на трех векторах равно $\frac{1}{6}$ модуля их смешанного произведения:

$$V = \frac{1}{6}|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$$

Свойства смешанного произведения:

- При циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot \overline{a} = (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot \overline{b}$$

- Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного произведений

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$$

  (это позволяет записывать смешанное произведение в виде $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, без знаков векторного и скалярного произведений)

- Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c}, \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$$

- *Условие компланарности трех векторов:* три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0

  Утверждение. *Если $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - компланарны*

  Доказательство. Предположим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \pm V$, то получили бы $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \neq 0$. Это противоречит условию: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$

  Обратно, пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны. Тогда векторв $\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, и, следовательно, $\overline{d} \perp \overline{c}$. Поэтому $\overline{d} \cdot \overline{c} = 0$, т.е. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$ ■

Выражение смешанного произведения через координаты:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Вопрос 6

Определители и их основные свойства.

Как считать

Для матрицы первого порядка определитель равен элементу: $\det A = \Delta = |a| = a$

Для матрицы второго порядка определитель вычисляется вот так: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Для матриц более высоких порядков решение определителя сводится к решению нескольких определителей меньшего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Раскрывать таким образом можно не только по первой строке, но и по любой другой, а также можно брать вместо строк столбцы. Берётся элемент, затем вычёркиваются строка и столбец, которые его содержат, таким образом получается определитель меньшего порядка, и берётся произведение данного элемента и определителя, причём иногда с минусом - когда сумма индексов элемента нечётная. Так делается для всех элементов в строке или столбце. В конце всё это суммируется и получается ответ.

Свойства определителей

- $\det E = 1$, где E - единичная матрица.
- $\det A^T = \det A$ - определитель не меняется при транспонировании, а транспонирование - это отражение относительно главной диагонали:

  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  - также у элементов индексы меняются местами.
- $\det AB = \det A \cdot \det B$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
- определитель не меняется, если к какой-то его строке или столбцу прибавить другую строку или столбец, умноженную на некоторое число:

  $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- если поменять местами две строки или два столбца матрицы, то определитель матрицы поменяет знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- общий множитель в строке или столбце можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- если каждый элемент в какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные строки совпадают с исходным определителем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- определитель верхней или нижней треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

- $\det A = 0$, если:
  - есть строка или столбец, полностью состоящие из нулей
  - есть одинаковые строки или столбцы
  - две и более строки (столбцы) линейно зависимы (первые два условия являются частным случаем этого условия)

Вопрос 7

Уравнение алгебраической поверхности. Различные способы задания плоскости в пространстве.

Вопрос 8

Различные способы задания прямой в пространстве.

Вопрос 9

Уравнение алгебраической линии на плоскости. Различные способы задания прямой на плоскости.

Вопрос 10

Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Вопрос 11

Взаимное расположение двух плоскостей и двух прямых в пространстве.

Взаимное расположение двух плоскостей:

Рассмотрим две плоскости пространства, заданные общими уравнениями:
$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
Они могут:

1. совпадать;
2. быть параллельными: $\sigma_1 \parallel \sigma_2$
3. пересекаться по некоторой прямой: $l = \sigma_1 \cap \sigma_2$.

Совпадающие плоскости

Две плоскости совпадают, тогда и только тогда, когда их соответствующие коэффициенты пропорциональны, то есть $\exists\ \lambda\ /A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 = \lambda D_1$

Параллельные плоскости

Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x, y, z пропорциональны: $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$, но $D_2 \neq \lambda D_1$

Пересекающиеся плоскости

Две плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x, y, z НЕ пропорциональны, то есть НЕ существует такого значения λ, чтобы выполнялись равенства $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$,

Взаимное расположение двух прямых:

Рассмотрим две прямые пространства:
– прямую d_1, заданную точкой M_1 и направляющим вектором $\overline{p}_1$;
– прямую d_2, заданную точкой M_2 и направляющим вектором $\overline{p}_2$;
Две прямые d_1, d_2 пространства могут:

1. скрещиваться;
2. совпадать;
3. быть параллельными: $d_1 \parallel d_2$
4. пересекаться в точке $M = d_1 \cap d_2$.

Если прямые скрещиваются, то векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{M_1M_2}$ не компланарны, значит смешанное произведение векторов будет отлично от нуля: $(\overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 \cdot \overline{M_1M_2}) \neq 0$ В остальных случаях прямые лежат в одной плоскости.
Если векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ коллинеарны и прямые имеют общую точку, то они совпадают. Иначе они параллельны.
Если векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ неколлинеарны, то прямые пересекаются.

Вопрос 12

Взаимное расположение прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Взаимное расположение прямой и плоскости.
Рассмотрим плоскость $\sigma : Ax+By+Cz+D=0$ и прямую d, заданную точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\overline{p}(p_1; p_2; p_3)$
Существует три варианта взаимного расположения прямой и плоскости:

1. прямая пересекает плоскость в некоторой точке $M = d \cap \sigma$;
2. прямая параллельна плоскости: $d \| \sigma$;
3. прямая лежит в плоскости: $d \in \sigma$.

Прямая пересекает плоскость тогда и только тогда, когда её направляющий вектор $\overline{p}(p_1; p_2; p_3)$ не ортогонален вектору нормали $\overline{n}(A; B; C)$ плоскости.
То есть $\overline{n} \cdot \overline{p} \neq 0$.
Или в координатах: $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0$.
Если же данные векторы ортогональны, то прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.
Если прямая параллельна плоскости, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (а значит, и ЛЮБАЯ точка данной прямой) не удовлетворяет уравнению плоскости: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.
Если прямая лежит в плоскости, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (а, значит, и ЛЮБАЯ точка данной прямой) удовлетворяет уравнению плоскости: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Расстояние от точки до прямой в пространстве.
Пусть у нас есть точка N и прямая l, заданная точкой M_0 и направляющим вектором $\overline{p}$.
Расстоянием от точки до прямой является модуль вектора $\overline{NH}$, где H это основание перпендикуляра, опущенного из точки N на прямую l.
Это расстояние можно найти по формуле: $p(N; l) = \dfrac{|\overline{NM_0} \times \overline{p}|}{|\overline{p}|}$

Вопросы 13-14

Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Пусть заданы прямая $l : Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$

Решение. *Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ - произвольная точка прямой l, на направление нормального вектора $\overline{n} = (A; B)$. Следовательно, $d = |\dfrac{\overline{M_1M_0} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|}| = \dfrac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|Ax_0 + Bx_0 - Ax_1 - Bx_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$*
Так как $M_1 \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0 \Rightarrow C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть заданы плоскость $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$

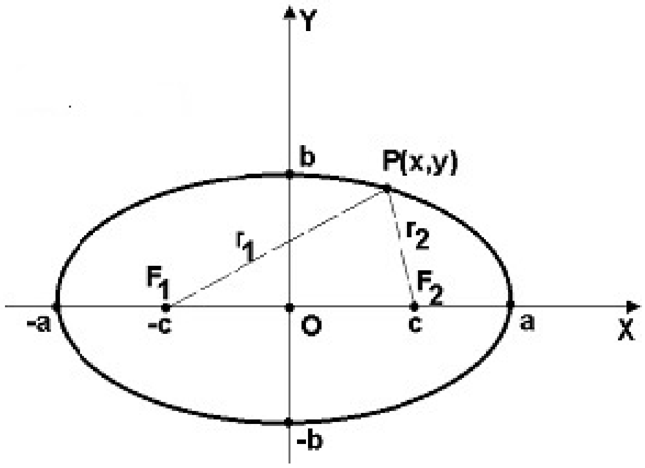
Решение. *Расстояние d от точки M_0 до плоскости α равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ - произвольная точка плоскости α, на направление нормального вектора $\overline{n} = (A; B; C)$. Следовательно, $d = |\dfrac{\overline{M_1M_0} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|}| = \dfrac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 - Ax_1 - Bx_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$*
Так как $M_1 \in \alpha$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \Rightarrow D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Вопрос 15

Эллипс. Определение, каноническое уравнение, характеристики.

Определение. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояния между фокусами.



Определение. Расстояние между фокусом и любой точкой эллипса называется фокальным радиусом.

Пусть фокусы имеют такие координаты $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, а фокальные радиусы равны r_1 и r_2, $r_1+r_2=2a$, точка $M(x;y)$ принадлежит эллипсу. Найдем **каноническое уравнение эллипса**.

Решение. *Из определния получим, что* $r_1+r_2=2a>2c=|F_1F_2| \Rightarrow a>c$

$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow r_1+r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}, (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$

$4xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2((x-c)^2+y^2)$

$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$. *Пусть* $\sqrt{a^2-c^2}=b, a>c \Rightarrow a^2-c^2>0 \Rightarrow b>0$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow$ ***каноническое уравнение эллипса***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Рассмотрим I четверть, тогда $y \geqslant 0$

$$y=b\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Утверждения:

1. Если $x=0, y=b \Rightarrow$ т. O(0,b) $\in$ эллипс
2. Если x - возрастает от 0 до a, то y - уменьшается

3. Если $x = a \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(a, 0) \in$ эллипс

4. Если $x > a$, то $y \in \mathbb{C}$, значит эллипс $\nexists$

Определение. Оси симметрии эллипса называются его осями

Определение. Центр симметрии (т. пересечения осей) называется центром эллипса

Определение. Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются его вершинами

Определение. Вершины ограничивают отрезки, равные $2a$ и $2b$ ($a \geqslant b$)

Определение. Величины a и b называются соответственно большой и малой полуосями

Определение. Эксцентриситетом эллипса называется отношение:

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

где c - половниа расстояния между фокусами, a - большая полуось эллипса.

$$a > c \Rightarrow 0 \leq \varepsilon < 1, c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

- этот параметр характерезует меру вытянутости эллипса

Замечания:

- Пусть $\varepsilon \to 0$, тогда $a \approx b \Rightarrow$ эллипс $\to$ окружность
- Пусть $\varepsilon \to 1 \Rightarrow b \ll a \Rightarrow$ эллипс сильно вытянут вдоль большой оси

Определение. Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются **директрисами эллипса**.

Уравнение директрисы эллипса задано каноническим уравнением $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, т.к. $\varepsilon < 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} > a$

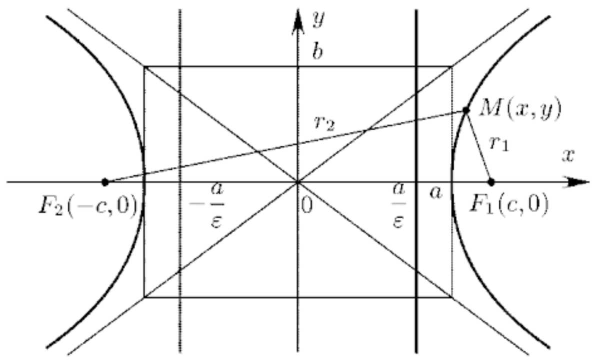
Свойства. *Если r - это расстояние от произвольной точки M эллипса до какого-нибдуь фокуса, d - это расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ - есть постоянная величина равная ε эллипса*

Определение. Множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соотвествующей директрисы, является величиной постоянной, равной ε, это есть эллипс, если $\varepsilon < 1$

Вопрос 16

Гипербола. Определение, каноническое уравнение, характеристики.

Определение. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, причем меньшая, чем расстояние между фокусами



Определение. Расстояние между фокусом и любой точкой гиперболы называется фокальным радиусом.

Пусть фокусы имеют такие координаты $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, а фокальные радиусы равны r_1 и r_2, $r_1+r_2 = 2a$, точка $M(x;y)$ принадлежит гиперболе. Найдем **каноническое уравнение гиперболы**.

Решение. *Из определния* $\Rightarrow |r_1 - r_2| = 2a < 2c = |F_1F_2| \Rightarrow a < c \Rightarrow r_1 - r_2 = \pm 2a \Rightarrow$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$, $(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$;

$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2;$

$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$. *Пусть* $b = \sqrt{c^2-a^2}$, *т.к.* $c > a$, *значит* $c^2 - a^2 > 0 \Rightarrow b > 0$

Получим ***каноническое уравнение гиперболы:*** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Рассмотрим I четверть, тогда $y \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

Утверждения:

1. Если $0 \leq x < a \Rightarrow y \in \mathbb{C}$
2. Если $x = a \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(a,0) \in$ гиперболе
3. Если $x > a$, тогда $y > 0$: $\begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$
4. $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы

Определение. Оси симметрии гиперболы называются осями гиперболы

Определение. Центр симметрии (т. пересечения осей) называется центром гиперболы

Определение. Одна из осей пересекает гиперболу в 2 точках, которые называется ее вершинами

Определение. Эта ось называется действительной осью гиперболы

Определение. Другая ось - не имеет общих точек с гиперболой и называется мнимой

Определение. Прямоугольник, образованный прямыми $y = \pm b, x = \pm a$, со сторонами $2a$ и $2b$, называется основным прямоугольником гиперболы

Определение. Величины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы

Замечания:

- $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ - гипербола, сопряженная по отношению к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- Если $a = b \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$ - равносторонняя гипербола

Определение. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, где с - половина расстояния между фокусами, а a - действительная полуось

Т.к. $c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$: $\varepsilon^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \dfrac{b^2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ - характеристика гиперболы (геометрическое истолкование ε гиперболы), указываюшая насколько вытянут основной прямоугольник гиперболы.

Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от него, называются **директрисами гиперболы**.

Уравнение директрисы гиперболы задано каноническим уравнением $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, т.к. $\varepsilon > 1 \Rightarrow \dfrac{a}{\varepsilon} < a$

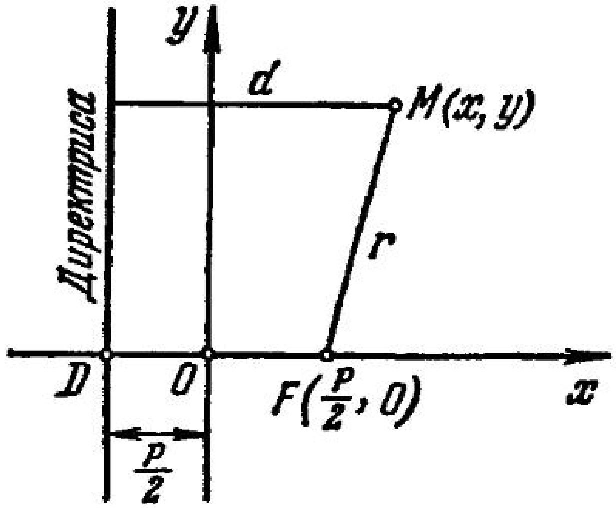
Свойства. *Если r - это расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-нибдуь фокуса, d - это расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\dfrac{r}{d}$ - есть постоянная величина равная ε гиперболы*

Определение. Множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соотвествующей директрисы, является величиной постоянной, равной ε, это есть гипербола, если $\varepsilon > 1$

Вопрос 17

Парабола. Определение, каноническое уравнение, характеристики.

Определение. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.



Свойства. *Положительное направление оси - направление от директриссы к фокусу, начало координат находится по середине, между фокусом и директрисой.*

Определение. Расстояние от произвольной точки параболы $M(x, y)$ до фокуса $F(\frac{p}{2}, 0)$ - это фокальный радиус r, а d - это расстояние от данной точки $M(x, y)$ до директрисы.

Найдем **каноническое уравнение параболы**

Решение. *Из определения* $\Rightarrow r = d$, $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $\quad d = x + \frac{p}{2}$,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2};$$

Заметим, что $x \geq 0$, *т.к при* $x < 0 \Rightarrow d \neq r$ *- получается, что такая точка* $\notin$ *параболе;*

$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right) \Rightarrow y^2 = 2px$ - ***каноническое уравнение параболы***

Замечания:

- $x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы
- В данном случае $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим $y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{2px}$

Утверждения:

1. Если $x < 0 \Rightarrow y \in \mathbb{C}$, значит $\nexists$ таких точек параболы
2. Если $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0,0) \in$ параболе
3. Если $y \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$

Определение. p - выражает расстояние от фокуса до директрисы

Определение. т. $O(0,0)$ называется вершиной параболы.

Определение. Ось симметрии (ось Ox) называется осью параболы

Пусть $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2p} \Rightarrow \exists M_1(1, \sqrt{2p})$ и $M_2(1, -\sqrt{2p})$
$|M_1M_2| = 2\sqrt{2p} \Rightarrow$ чем больше p, тем больше $|M_1M_2|$

Свойства. *Получается, что p характеризует ширину области, ограниченной параболой.*

Свойства. ***Оптическое свойство параболы.*** *Парабола имеет следующее оптическое свойство. Если в фокус параболы поместить источник света, то все световые лучи после отражения от параболы будут параллельны оси параболы. Оптическое свойство означает, что в любой точке M параболы нормальный вектор касательной составляет с фокальным радиусом MF и осью абсцисс одинаковые углы.* *P.S. данное свойство было честно украдено с рандомного сайта:)*

Вопрос 18

Общее уравнение кривой второго порядка. Классификация кривых второго порядка.

В общей декартовой системе координат линия второго порядка может быть задана уравнением *)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно.

При помощи параллельного переноса и поворота на определенный угол базиса декартовой системы координат это уравнение всегда можно свести к:

$$A' * x'^2 + C' * y'^2 + F' = 0$$

Классификация

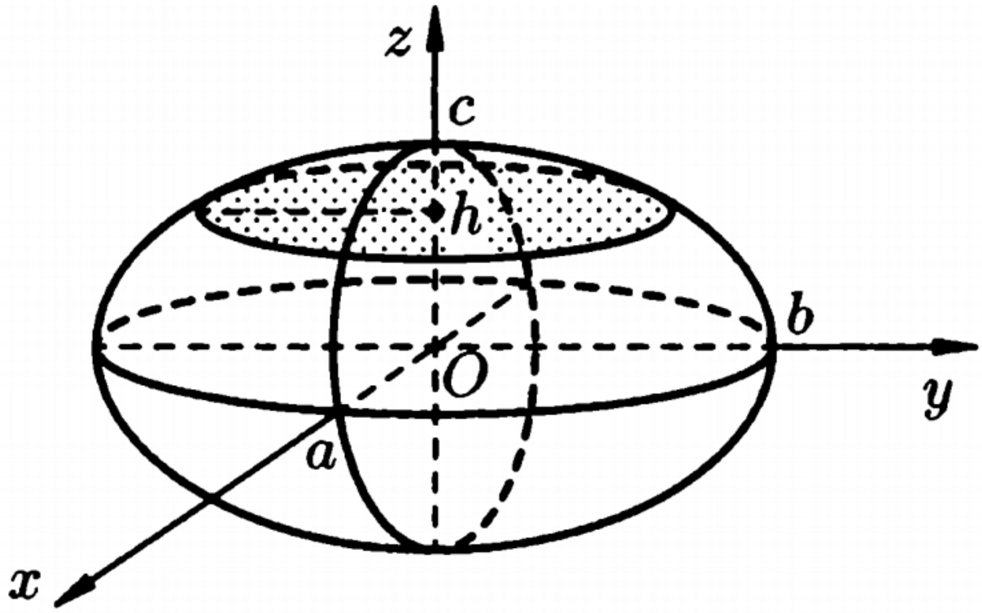
AC-B^2- инвариант, с помощью которого можно определить тип кривой
AC-B^2>0 -эллиптический
AC-B^2<0 -гиперболический
AC-B^2=0 -параболический
Чтобы определить геометрический вид необходимо использовать метод сечений: исследование пересечение поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, им параллельными.

Вопрос 19

Поверхности второго порядка (эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоид, эллиптический и гиперболический параболоид, конус, цилиндрические поверхности второго порядка).

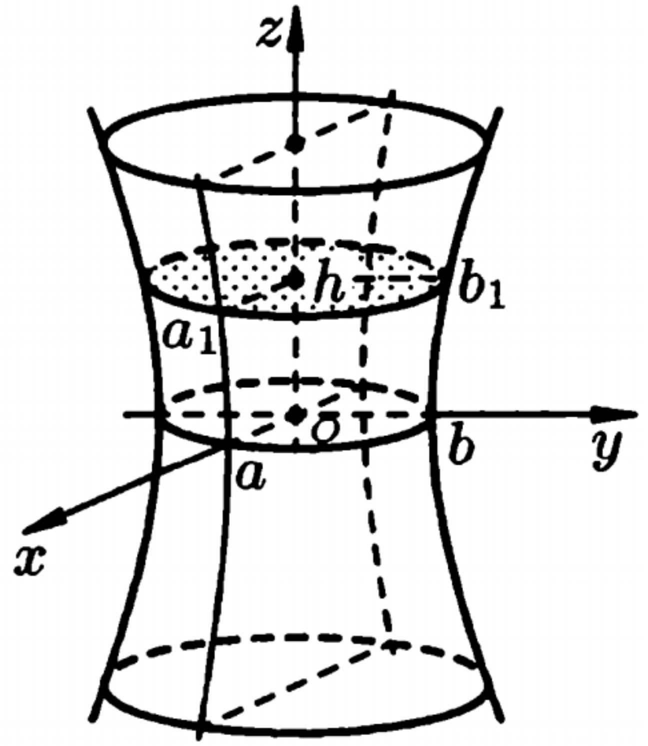
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



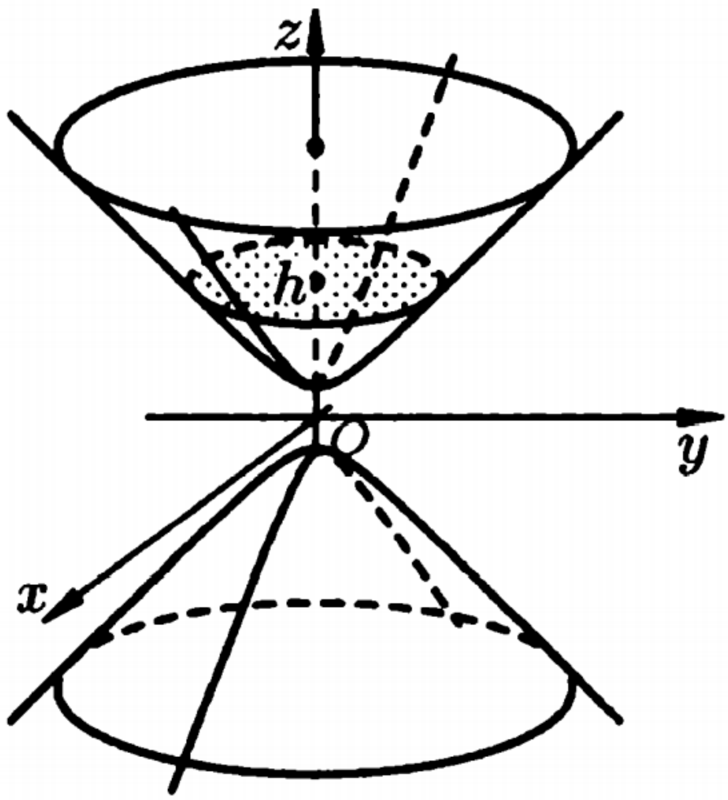
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Двуполостный гиперболоид

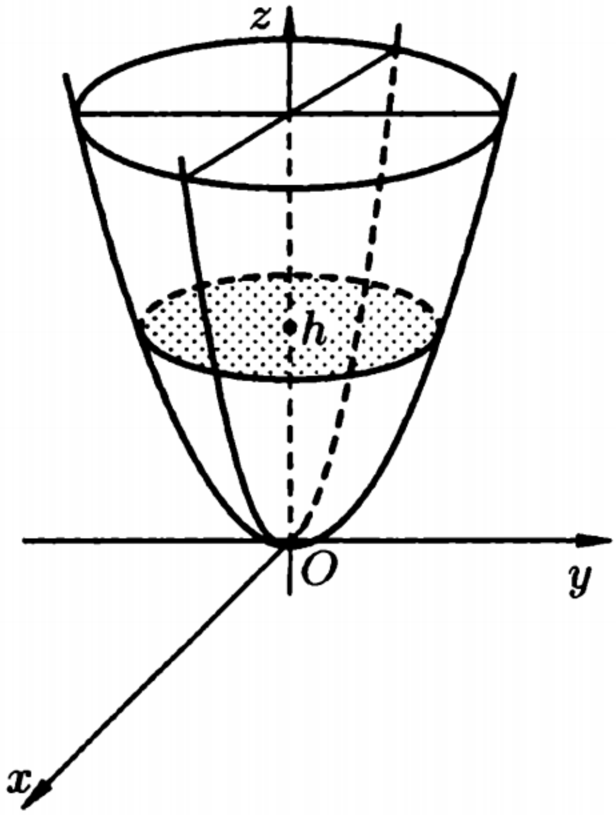
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

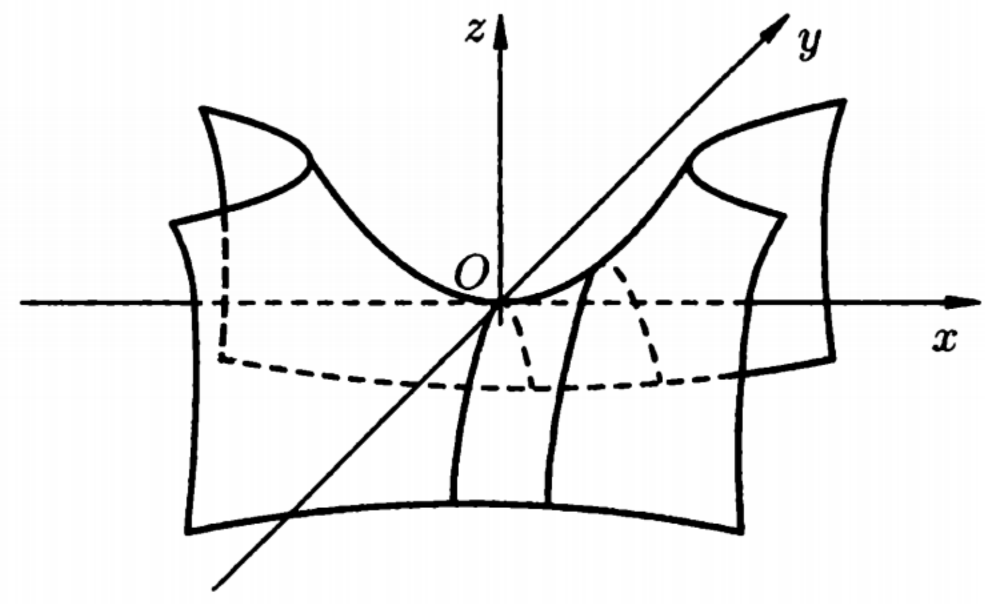
где p>0,q>0



Гиперболический параболоид

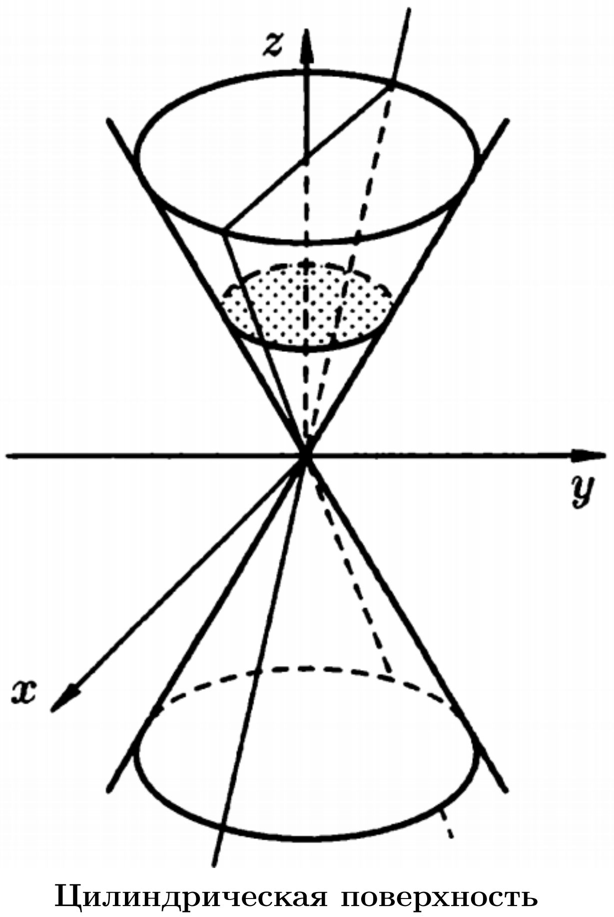
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

где p>0,q>0



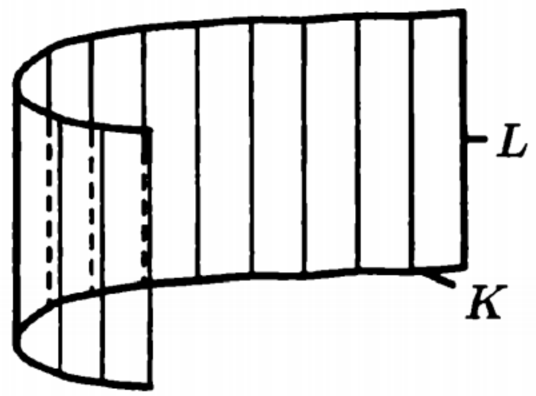
Конус 2го порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

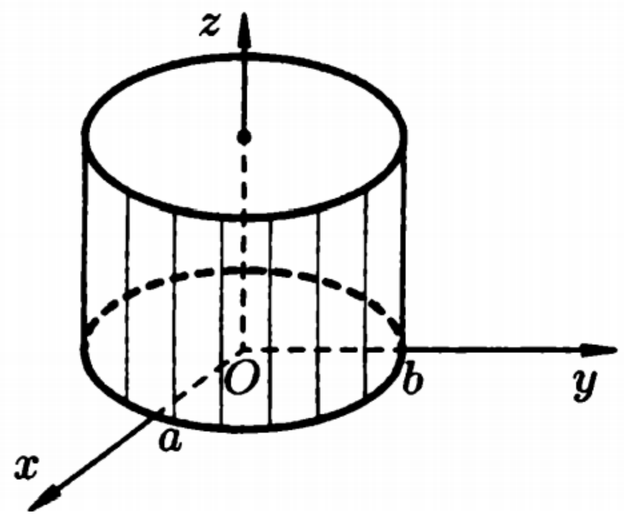


Цилиндрическая поверхность

Образована движением прямой L(образующая), которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую К(направляющая).



Название цилинра определяет название направляющей. К примеру, ниже представлен эллиптический целиндр:



Вопрос 20

Множества и операции над ними. Свойства действительных чисел. Модуль действительного числа, свойства модуля. Окрестность точки.

1. Множества и операции над ними

   Определение. Под *множеством* понимают совокупность некоторых объектов объединенных по какому-либо признаку.

   Определение. *Элементы* — объекты, из которых состоит множество.

   Определение. *Пустое множество* — множество, не содержащее ни одного элемента.

   Определение. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. ($A \subset B$)

   Определение. Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов.

   Определение. Множества, элементами которых являются числа, нызываются *числовыми.*

   $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

   Операции над множествами

   - объединение
   - пересечение
   - разность

2. Свойства множества действительных чисел:

   (a) $\mathbb{R}$ — упорядоченное

   $$\forall x, y \in \mathbb{R} \implies \left[\begin{array}{l} x > y \\ x = y \\ x < y \end{array}\right.$$

   (b) $\mathbb{R}$ — плотное

   $$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \ \exists \,\text{бесконечное кол-во}\ z \in \mathbb{R} : x < z < y$$

   (c) $\mathbb{R}$ — непрерывное

   $$\text{Пусть } \mathbb{R} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}; \mathrm{A}, \mathrm{B} \neq \varnothing; \forall x \in \mathbb{R} : \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases} \end{array}\right. ; \forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \in A \\ y \in B \end{cases} \implies x < y,$$

   $$\text{тогда (\textit{свойство непрерывности}): } \exists!\ c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y \ (\text{для } \forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{B})$$

   Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное чило. Поэтому вместо слова *число* часто говорят *точка.*

3. Модуль дейтсвительного числа, свойства модулей

   Определение.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, если} x \geq 0 \\ -x & \text{, если} x < 0 \end{cases}$$

   Свойства.

   (a) $|a| = |-a|$
   (b) $-|a| \leq a \leq |a|$
   (c) $|x| \leq b \implies -b \leq x \leq b$
   (d) $|a+b| \leq |a| + |b|$
   (e) $|a-b| \leq |a| + |b|$
   (f) $|a-b| \geq |a| - |b|$
   (g) $|ab| \leq |a| \cdot |b|$

4. Окрестность точки

   Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда *окрестностью* x_0 называется любой интервал (a;b), содеражщий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки x_0. x_0 называется центром, а ε — радиусом окрестности. Если $x \in \varepsilon$-окрестности, то $|x - x_0| < \varepsilon$.

Вопрос 21

Грани числовых множеств.

Определение. Множество X называется *ограниченным сверху*, если:

$$\exists b \in \mathbb{R} : x \leq b \text{ для } \forall x \in X, b \text{ называется } \textit{верхней границей.}$$

Определение. Множество X называется *ограниченным снизу*, если:

$$\exists a \in \mathbb{R} : x \geq a \text{ для } \forall x \in X, a \text{ называется } \textit{нижней границей.}$$

Определение. Множество X называется *ограниченным сверху и снизу*, если:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \text{ для } \forall x \in X.$$

Определение. Множество, не ограниченное сверху и снизу, называется *неограниченным.*

Определение. Если X ограничено сверху, то наименьшая из его верхних границ называется *верхней гранью.* ($b = \sup A$ "Супремум")

Определение. Если X ограничено снизу, то наибольшая из его нижних границ называется *нижней гранью.* ($b = \inf A$ "Инфимум")

Теорема. Если A огрнаичено сверху, то у него существует верхняя грань (аналогично для A ограниченного снизу и его нижней грани)

Доказательство. Пусть M — множество верхних границ A. Так как A ограничено сверху, то $M \neq \varnothing$. По определению верхней границы: A≤M. По аксиоме(или по свойству) непрерывности: $\exists d \in \mathbb{R} : A \leq M \implies \left[\begin{array}{l} A \leq d \implies d \in M \\ d \leq M \implies d - \text{наименьшая из границ A} \end{array} \right.$

Получили, что d — верхняя граница A, и d не больше всех верхних границ A $\implies d = \sup A$

Аналогично для нижней грани ограниченного снизу множества. ■

Вопрос 22

Числовые последовательности. Определение предела последовательности. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.

Если для $\forall n \in N$ поставленно в соответствие $x_n \in R$, то говорят, что задана числовая последовательность. Обозначается $\{x_n\}$ или (x_n).

Числа x_n, где n = 1,2,3... называются элементами (членами) последовательности.

Суммой, разностью,произведением, отношением последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности $\{z_n\} = \{x_n\} \pm * / \{y_n\}$. При отношении $\{y_n\} \neq 0$.

Последовательность называется ограниченной сверху(снизу), если $\exists M \in R : \forall x_n \leq M (x_n \geq M)$. Последовательность называется ограниченной, если она ограниченна и сверху, и снизу.

Число $a \in R$ называется пределом чиловой последовательности, если $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Сходящаяся последовательность - последовательность, у которой есть предел.

Т. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (x_n - a) = 0$

Т. Единственности: сходящаяся последовательность имеет единственный предел.
Пусть $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, $a < b$. И пусть $U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \varnothing$ (Например при $\epsilon = \frac{b-a}{3}$). Тогда пусть a $= \lim\limits_{n \to \infty} x_n \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N \Rightarrow x_n \in U_\epsilon(a)$. Значит в любой $U_\epsilon(a)$ существует бесконечное число членов последовательности. Следовательно, в $U_\epsilon(b)$ - конечное число членов последовательности, что противоречит определению. Значит b не является пределом последовательности $\{x_n\}$

Т. Если $\{x_n\}$ сходится, то $\{x_n\}$ - ограниченная.
Пусть $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon.$$

$$]M = max(a + \epsilon, |x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) \Rightarrow |x_n| \leq M \forall n \Rightarrow \{x_n\} -$$

ограниченная

Вопрос 23

Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами.

Т. $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} : \forall n >= N : x_n \leq y_n \leq z_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N(\epsilon) : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Аналогично $\forall n > N_2\ a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$. $]N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n > N\ a - \epsilon < x_n \Leftarrow y_n \Leftarrow z_n < a + \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Т. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, a < b \Rightarrow \exists N_0 : \forall n > N_0\ x_n < y_n$
$]U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \varnothing$ (Например, при $\epsilon = \frac{b-a}{3}$) $\Rightarrow \exists N_1, N_2 : \forall n > N_1\ x_n \in U_\epsilon(a), \forall n > N_2\ y_n \in U_\epsilon(b)$ $]N_0 = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n > N_0\ x_n < a + \epsilon < b - \epsilon < y_n \Rightarrow x_n < y_n$

Следствия:

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, a < b \Rightarrow \exists N_0 : \forall n > N_0\ x_n < b$
   $]y_n = b\ \forall n \in N \Rightarrow$ По теореме выше $\exists N_0 : \forall n > N_0\ x_n < b$
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $\exists N_0 : \forall n > N_0\ x_n \geq y_n \Rightarrow a \geq b$
   Пусть это не так, т.е. a $<$ b, следовательно, по теореме выше $\exists N_0 : \forall n > N_0\ x_n < y_n$, что противоречит условию $\Rightarrow a \geq b$

Вопрос 24

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства.

Определение. Ч.п. x_n называется бесконечно малой последовательностью (б.м.) $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ По определению это означает:

$$\forall\epsilon > 0\exists N = N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \Longrightarrow x_n \in U_\epsilon(0)$$

или, что то же,

$$|x_n - 0| = |x_n| < \epsilon$$

Примеры: $x_n = \frac{1}{n}, x_n = \frac{\ln n}{n!}$

Определение. Ч.п. x_n называется бесконечно большой последовательностью (б.б.) $\iff$ $\forall 96 * +epsilon > 0\exists N = N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \Longrightarrow x_n \in U_\epsilon(\infty)$ или, что то же $|x_n| > \epsilon$
Примеры: $x_n = n, x_n = \ln n$

Замечание.
Бесконечно большие числовые последовательности не относят к числу сходящихся, но иногда говорят о них, как об имеющих «бесконечный предел» (в отличие от сходящихся, то есть имеющих пределом конечное действительное число).

СВОЙСТВА Б.М.

1) Сходимость некоторой ч.п. равносильна тому, что разность этой ч.п. и ее предела есть бесконечно малая ч.п., то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, a \in R \iff \alpha_n = x_n - a --$ б.м.
Действительно, пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Поскольку предел константы равен ей самой, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a = a$. Тогда на основании свойств арифметических операций со сходящимися числовыми последовательностями $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} a = a - a = 0$, так что последовательность $(x_n - a)$ - бесконечно малая. Пусть, наоборот, $(x_n - a)$ - бесконечно малая ч.п., т.е $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$. Учтем теперь опять, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a = a$ и в силу того, что $x_n = (x_n - a) + a$, можем вновь утверждать: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) + \lim\limits_{n\to\infty} a = 0 + a = a$.
Доказанное означает, что для любой сходящейся последовательности x_n, имеющей пределом число $a \in R$, справедливо равенство $x_n = \alpha_n + a$, где α_n - бесконечно малая ч.п.
2) Если x_n, y_n - б.м., то $(x_n + y_n)$ - тоже б.м.Действительно, существование пределов (равных нулю) у ч.п. x_n, y_n влечет его существование и у их суммы, а также равенство $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 + 0 = 0$, то есть $(x_n + y_n)$ б.м., что и требовалось доказать. Доказанное утверждение остается верным и для любого фиксированного числа слагаемых.
3) Пусть x_n - б.м., а y_n - ограниченная ч.п. (знак фигурных скобок при обозначении числовых последовательностей часто опускают). Тогда их произведение – б.м.
Действительно, ограниченность y_n означает, что $\exists M > 0 : |y_n| < M, \forall n \in N$. Задав произвольно $\epsilon > 0$, подберем $N = N(\epsilon) : \forall n > N \Longrightarrow |x_n| < \frac{\epsilon}{M}$. Для членов ч.п. x_n, y_n указанными номерами n будет выполнено неравенство $|x_n y_n - 0| = |x_n| * |y_n| < \frac{\epsilon}{M} * M = \epsilon$. Но это и означает что $x_n y_n \Longrightarrow 0, n \to \infty$, то есть что произведение бесконечно малой и ограниченной числовых последовательностей есть бесконечно малая числовая последовательность.

СВОЙСТВА Б.Б.

1) Ч.п. x_n - б.б. Докажем, что $\frac{1}{x_n}$ - б.м.По определению бесконечно большой ч.п. $|x_n|$, начиная с некоторого номера, будет произвольно велик. Но это означает, что величина $\frac{1}{|x_n|} = |\frac{1}{x_n}| = |\frac{1}{x_n} - 0|$ станет настолько близка к нулю, насколько захотим. Именно, $\forall\epsilon > 0\exists N = N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \Longrightarrow |\frac{1}{x_n} - 0| < \epsilon$. Но это по определению как раз и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$, то есть $\frac{1}{x_n}$ - б.м.

2) Если x_n - ограниченная ч.п., а y_n - б.б., то $\frac{x_n}{y_n}$ - б.м. **3)** . Пусть ч.п. n x ограничена по модулю снизу положительным числом m , то есть $|x_n| > m > 0$, а ч.п.y_n – б.м., причем $y_n \neq 0$. Тогда ч.п. $\frac{x_n}{y_n}$ - б.б.

Действительно, зададим произвольное положительное ϵ. Поскольку y_n - б.м., то для любого взятого ϵ найдется такое число $N(\epsilon)$, что для всех номеров $n > N(\epsilon)$ будет выполнено неравенство $|y_n| < \frac{m}{\epsilon}$ (наряду с ϵ величина $\frac{m}{\epsilon}$ также может принимать произвольные положительные значения), а тогда $|\frac{x_n}{y_n}| = \frac{|x_n|}{|y_n|} > \frac{|x_n|}{m/\epsilon} > \frac{m\epsilon}{m} = \epsilon$

Тем самым получили: $\forall\epsilon > 0\exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \Longrightarrow |\frac{x_n}{y_n}| > \epsilon$. Но это по определению означает, что $|\frac{x_n}{y_n}| \to \infty$ при $n \to \infty$, то есть $\frac{x_n}{y_n}$ - бесконечно большая ч.п., что и требовалось доказать.

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty(-\infty)$ и $y_n \geq c(\leq c), \forall n \in N$, где $c = const$, то есть y_n ограничена снизу (сверху), то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty(-\infty)$.

5) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty(-\infty)$. Тогда, если начиная с некоторого n , выполняются неравенства $y_n \geq c > 0(\leq c < 0), c = const$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty(-\infty)$.

6) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и для всех n , начиная с некоторого, $|y_n| \geq c > 0, c = const$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n * y_n) = \infty$.

Вопрос 25

Арифметические операции над сходящимися последовательностями.

Теорема. (о сохранении знака) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}$ и $sgn(b_n) = sgn(b)$. Если у последовательности есть числовой предел, который не равен нулю, то существует такой номер, начиная с которого каждый член последовательности по модулю больше половины модуля предела, и знак каждого члена последовательности совпадает со знаком предела.

Доказательство. (для $b > 0$) Пусть $\varepsilon = \frac{b}{2}$ По определению предела:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |b_n - b| < \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{b}{2} < b_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}$$

Доказано. Для $b < 0$ доказывается аналогично. ■

Теорема. Для двух последовательностей, имеющих пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ справедливы следующие операции:

1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$
3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
4. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}, b \neq 0$ и $\forall n \to \mathbb{N} : b_n \neq 0$

Доказательство. (через теорему о б.м.п.)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \{a_n - a\} = \{\alpha_n\}$ - б.м.п. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \iff \{b_n - b\} = \{\beta_n\}$ - б.м.п.

1. $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$ - тоже б.м.п. (по свойству сложения б.м.п.), $\{\alpha_n + \beta_n\} = \{(a_n + b_n) - (a + b)\}$ - б.м.п. $\iff \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$. Доказано.

2. $\{\alpha_n\} + (-1) * \{\beta_n\} = \{\alpha_n - \beta_n\}$ - тоже б.м.п. (по свойству сложения б.м.п. и домножения на ограниченную п., так как константа - ограниченная п.), $\{\alpha_n - \beta_n\} = \{(a_n - b_n) - (a - b)\}$ - б.м.п. $\iff \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$. Доказано.

3. $a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = b_n(a_n - a) + a(b_n - b) = b_n * \alpha_n + a\beta_n$.

   b_n - ограниченная, α_n - б.м.п., $\Rightarrow b_n * \alpha_n$ - б.м.п.

   a - константа, т.е. ограниченная, β_n - б.м.п., $\Rightarrow a\beta_n$ - б.м.п.

   $\Rightarrow b_n * \alpha_n + a\beta_n$ - б.м.п. $\Rightarrow \{a_n b_n - ab\}$ - б.м.п. $\iff \lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$. Доказано.

4. $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{ba_n - ab_n}{b_n b}| = |\frac{ba_n - ab + ab - ab_n}{b_n b}| = |\frac{b(a_n - a) - a(b - b_n)}{b_n b}| = |\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b_n b}| <$(по т. о сохранении знака) $\frac{|b\alpha_n - a\beta_n|}{\frac{b^2}{2}}$. $b\alpha_n - a\beta_n$ - б.м.п. (аналогично п.3), $\frac{b^2}{2}$ - константа $\Rightarrow \frac{|b\alpha_n - a\beta_n|}{\frac{b^2}{2}}$ - б.м.п., $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}|$ - б.м.п. $\iff \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

■

Вопрос 26

Монотонные последовательности. Признак сходимости монотонной последовательности (без доказательства). Число e.

Определение. Последовательность называется **возрастающей (неубывающей)**, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$

Определение. Последовательность называется **убывающей (невозрастающей)**, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$

Определение. Такие последовательности называются **монотонными**.

Определение. Последовательность называется **строго возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$

Определение. Последовательность называется **строго убывающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$

Определение. Такие последовательности называются **строго монотонными**.

Теорема. (Вейерштрасса - признак сходимости монотонной последовательности)

Если последовательность $\{a_n\}$ возрастающая и ограниченна сверху, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup(a_n)$

Если последовательность $\{a_n\}$ убывающая и ограниченна снизу, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf(a_n)$

Замечание. Для последовательности, возрастающей/убывающей начиная с какого-то номера, справедливо лишь утверждение про существование предела, однако он необязательно равен её супремуму/инфимуму.

Определение. $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

Доказательство. (существования предела этой последовательности) Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + b^n$$

Пусть $a = 1, b = \frac{1}{n}, \{a_n\} = \{(a+b)^n\}$. Тогда n-ый член последовательности:

$$a_n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + ... + C_n^k\frac{1}{n^k} + ... + \frac{1}{n^n}$$

n+1-ый член последовательности:

$$a_{n+1} = 1 + C_{n+1}^1\frac{1}{n+1} + C_{n+1}^2\frac{1}{(n+1)^2} + ... + C_{n+1}^k\frac{1}{(n+1)^k} + ... + \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

Рассмотрим k-ые слагаемые обоих членов:

$$C_n^k\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}(\frac{n-k+1}{n}) * (\frac{n-k+2}{n}) * ... * \frac{n}{n}$$

Добавим по 1 в числитель и знаменатель каждой дроби. При этом каждая дробь увеличится, а значит и произведение увеличится:

$$C_n^k\frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!}(\frac{n-k+2}{n+1}) * (\frac{n-k+3}{n+1}) * ... * \frac{n+1}{n+1} = C_{n+1}^k\frac{1}{(n+1)^k}$$

Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастающая.

Рассмотрим n-ый член последовательности:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\frac{1}{n^3} + ...$$

Начиная с 3-его, в каждом слагаемом есть множитель вида $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}$, который < 1. Следовательно:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n!} = (*)$$

Так как $k! \geq 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, то

$$(*) < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Начиная со второго слагаемого, мы получаем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с знаменателем $\frac{1}{2}$. Значит их сумма:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

И тогда:

$$a_n < (*) < 2 + 1 = 3$$

Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху. Значит, по признаку сходимости монотонных последовательностей, она имеет предел. Доказано. ■

Вопрос 27

Теорема Кантора о вложенных отрезках.

Определение. Множество отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} = \{[a_1, b_1,], [a_2, b_2], ..\}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\infty < a_n < b_n < \infty$ называется **системой вложенных отрезков**, если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Определение. Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **стягивающейся системой вложенных отрезков**, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$

Теорема. (Кантора) Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одна точка c, принадлежащая всем отрезкам данной системы. Причем если система отрезков стягивающаяся, то такая точка ровно одна.

Доказательство. (существования) Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества:

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, ...\}$$

- множество всех левых концов отрезков системы и

$$B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, ...\}$$

- множество всех правых концов отрезков системы.

Так как $\forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$[a_{n+m}, b_{n+m}] \subset [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq a_{n+m}$$

и

$$[a_{n+m}, b_{n+m}] \subset [a_m, b_m] \Rightarrow b_{n+m} \leq b_m$$

Следовательно, совмещая неравнества и применяя правило отрезков получаем

$$a_n \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq b_m$$

Так как a_n - это любое a из A, b_n - любое b из B, то по свойству непрерывности множества действительный числе $\mathbb{R}$

$$\forall a \in A,\, \forall b \in B\, \exists c : \; a \leq c \leq b$$

В частности,

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in [a_n, b_n]$$

то есть такая точка существует. Доказано. ■

Доказательство. (единственности, от противного) Пусть есть две точки, принадлежащие всем отрезкам стягивающейся системы $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - c и c' и пусть для определенности $c' \leq c$, то есть $\varepsilon = c - c' > 0$.

По определению стягивающейся системы,

$$\exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon \Rightarrow a_n \leq c' < c \leq b_n$$

Отсюда

$$a_n \leq c' \Rightarrow -c' \leq -a_n \Rightarrow c - c' \leq c - a_n$$
$$c \leq b_n \Rightarrow c - a_n \leq b_n - a_n.$$

Поэтому

$$\varepsilon = c - c' \leq c - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$$

Получилось противоречие. Значит такая точка может быть только одна. Доказано. ■

Вопрос 28

Подпоследовательности. Частичные пределы. Теорема Больцано - Вейерштрасса (о существовании частичного предела у ограниченной последовательности).

Пусть дана последовательность a_n. Если задана возрастающая последовательность натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < ... < n_{k+1} < ... ,$$

то соответствующая ей подпоследовательность a_{n_k} называется подпоследовательностью последовательности a_n.

Утверждение (Теорема Больцано). *Во всякой ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть все члены некоторой последовательности a_n принадлежат отрезку $[c; d]$. Разделим отрезок $[c; d]$ пополам и выберем ту половину, в которой лежит бесконечно много членов последовательности. Эту половину вновь разделим пополам и опять выберем половину, в которой лежит бесконечно много членов последовательности. В результате построения получаем последовательность вложенных отрезков $[c_k; d_k]$, причём $d_k - c_k = (d-c)/2^{k-1}$, $[c_1; d_1] = [c; d]$, и в каждом из отрезков существует точка a, принадлежащая всем построенным отрезкам. Построим теперь последовательность возрастающих номеров n_k следующим образом: $n_1 = 1$ и, если уже построили n_k, то находим такой номер $n_{k+1} > n_k$, что $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}; d_{k+1}]$ (элемент $a_{n_{k+1}}$ найдётся, так как на этом отрезке лежит бесконечно много членов последовательности). Поскольку $|a_{n_k} - a| \leq d_k - c_k$ и $(d_k - c_k) \to 0$ получаем $a_{n_k} \to a$. ■

Частичным пределом последовательности называется предел некоторой её подпоследовательности.

Утверждение. *Если последовательность сходится к некоторому числу, то всякая её подпоследовательность сходится к этому же числу.*

Доказательство. Пусть $a_n \to a$ и a_{n_k} - подпоследовательность последовательности a_n. По индукции можно показать, что $n_k \geq k$. Запишем определение предела для a_n:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$$

Итак, если $k > N$,то $n_k \geq k > N$ и $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ ■

Итак, если последовательность сходится, то её предел является единственнм частичным пределом. Если ограниченная последовательность не сходится, то у неё есть не менее двух различных частичных пределов. Найдём границы множества частичных пределов ограниченной последовательности.

Утверждение. *Пусть последовательность a_n ограничена. Тогда:*
(i) последовательность верхних граней "хвостов" $M_n = \sup a_k$, при k>n является невозрастающей и сходится к некоторому числу M;
(ii) последовательность нижних граней "хвостов" $m_n = \inf a_k$, при k>n является неубывающей и сходится к некоторому числу m;
(iii) m и M - частичные пределы последовательности a_n
(iv) все частичные пределы лежат между m и M.

Доказательство. Первые два утверждения немедленно следуют из определений точных граней и **теоремы Вейерштрасса**. Докажем (iii). Построим подпоследовательность, сходящуюся к числу M. Пусть элемент a_{n_k} уже построен. Найдём такой номер $n_{k+1} > n_k$, что $a_{n_{k+1}} \geq M_{n_k} - \frac{1}{k+1}$. Отсюда вытекает, что $a_{n_k} \to M$. Аналогично строим подпоследовательность, сходящуюся к m. Утверждение (iv) следует из неравенств $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$. ■

Пределы $\lim_{n\to\infty} M_n$ и $\lim_{n\to\infty} m_n$ называют *верхним* и *нижним* пределом последовательности a_n и обозначается $\limsup_{n\to\infty} a_n$ и $\liminf_{n\to\infty} a_n$ соответственно. Для неограниченной последовательности a_n можно показать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ <=>

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

Следовательно если ограниченная последовательность не сходится, то у неё есть не менее двух частичных пределов.

Вопрос 29

Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности.

Последовательность a_n называется **подпоследовательностью Коши** или **фундаментальность последовательностью**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \ : \forall \, m, n > N \text{ выполняется неравенство } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Утверждение (Лемма)**.** *Всякая фундаментальная последовательность ограничена*

Доказательство. Пусть последовательность a_n фундаментальна. Тогда:

$$\exists N : \, \forall n > N : \, o|a_n - a_{N+1}| < 1, \Rightarrow |a_n| \geq |a_{N+1}| + 1.$$

Положим

$$C = max|a_1|, |a_2|, \, \ldots \, , |a_N|, |a_{N+1}| + 1.$$

Тогда $|a_n| \geq C$ для всех n $\in \mathbb{N}$. ■

Утверждение (Лемма)**.** *Если у фундаментальной последовательности a_n есть сходящаяся подпоследовательность a_{n_k}, которая сходится к некоторому числу a, то и вся фундаментальная последовательность сходится к этому числу a.*

Доказательство. По определению фундаментальной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N : \, \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Пусть $k > N$, тогда $n_k \geq k > N$ и $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$. Устремим в последнем неравенстве $k \to \infty$ и получим $|a_n - a| \leq \varepsilon$ ■

Утверждение (критерий Коши)**.** *Последовательность действительных числе сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.*

Доказательство. Если последовательность a_n сходится к a, то её фундаментальность следует из неравенства

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m|$$

Обратно, если известно, что последовательность фундаментальна, то она ограниченна и по **теореме Больцано** из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, фундаментальная последовательность сходится. ■

Вопрос 30

Понятие функции, области определения, значений.Равенство функций, операции над функциями. Композиция функций.Элементарные функции. Способы задания функции. Ограниченные и неограниченные функции. Монотонные функции. Обратная функция. Неявные функции. Параметрически заданные функции.

Функцией f из множества X в множество Y называется правило, соответствующе сопоставляющая каждому x ∈ X ровно один y ∈ Y: $y = f(x)$ $D(f)$, или же X - называют областью определения функции $E(f)$, или же Y - называют областью значений функции.

Определение. Отображение множества X на множество Y при которых $\forall x \in X$ соответствует один элемент $y \in Y$, называется функцией. Пишут так: $f : X \to Y$

Определение. $f = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ - множество упорядоченных пар X может перейти только в одно Y. (Биективное отображение, т.е. однозначное)

Определение (Равенство функций)**.** Пусть $f(x) = g(x)$, $x \in X \iff f = g : 1)$ $x \in X$ - совпадают области определения. 2) f(x) = g(x) - совпадают значения.

Определение. Пусть $f : X \to Y_1$ $g : X \to Y_2 =>$ функции, значения которых $\forall x \in X$:

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

называются соответствующе: суммой / разностью / произведением / частным функций f и g

Определение. Пусть $y = \phi(x), z = f(y) : x \in X$ и $y \in Y$ $E(\phi) \in D(f) \Rightarrow F(x) = f(\phi(x)) = f * \phi$ - композиция.

Определение. Элементарной функцией называется функция, которую можно получить из основных функций с помощью конечного числа операций и композиций. Основные функции: 1) Линейная; 2) Показательная; 3) Логарифмическая; 4) Степенная; 5) Тригонометрические и обратные к ним;

Определение (Способы задания функции)**.** 1) Аналитический (с помощью формулы); 2) Табличный; 3) Графический; 4) Словесный; 5) Рекурсивный

Определение. Множество $\{x, y\}$ называется неупорядоченной парой элементов x,y.
Множество $\{x, \{x, y\}\}$ называется упорядоченной парой, где x - первый элемент, а пару обозначают (x,y).
Декартово произведение двух множеств $X * Y$ называется множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X, y \in Y$(по факту, это обычная табличка).
Если задана функция $f : X \to Y$, то в декартовом произведении $X * Y$ определено подмножество:

$$G_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

G_f является графиком некоторой функции из X в Y тогда и только тогда, когда для всякого элемента $x \in X$ найдётся такой элемент y, что (x,y) $\in G$, причём если (x,y) $\in G$ и (x,z) $\in G$, то y = z.

Замечание! $\forall x_0 \in D(f)$ прямая $x = x_0$ пересекает график функции $y = f(x)$ только в одной точке $M_0(x_0, y_0)$ $y_0 = f(x_0)$
x = a, и $f(a) = 0$ - это нуль функции

Определение. Чётная функция — функция, не изменяющая своего значения при изменении знака независимой переменной (график её симметричен относительно оси ординат

Определение. Нечётная функция — функция, меняющая значение на противоположное при изменении знака независимой переменной (график её симметричен относительно центра координат).

Определение. Функция f называется ограниченной снизу на $x \subset D(f)$, если $\exists C_1 : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq C_1$

Определение. Функция f называется ограниченной сверху на $x \subset D(f)$, если $\exists C_2 : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq C_2$

Определение. Если функция ограничена и сверху, и снизу, то она называется ограниченной : $|f(x)| \leq C$

Определение. Функция называется неограниченной на X, если

$$\forall C > 0 \exists x_c \in X : |f(x_c| \geq C$$

Определение. Пусть $Y = E(f)$. Точной верхней гранью множества Y называется ТВГ функции $f : x \in D(f) : \sup_{x \in X} f(x)$. Аналогично определяется точная нижняя грань inf

Определение. Если $\exists x_0 \in X \subset D(f) : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$, то $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x) \Rightarrow \inf_{x \in X} f(x) = f(x_0)$. Аналогично sup.

Точки, в которых функция принимает максимальное/минимальное значение - называются точками экстремума.

Определение. Возрастающая функция $<=> \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Аналогично задаётся определение строговозрастающей/ убывающей/ строгоубывающей.

Определение. Если функция $f : \forall y_0 \in E(f)$ принимает только при одном значении $x_0 \in D(F)$, то f называется обратимой. Функция $g : Y \to Xg : Y \to X$ называется обратной к функции $f : X \to Yf : X \to Y$, если выполнены следующие тождества:
1) $f(g(y)) = y$ для всех $y \in Y$;
2) $g(f(x)) = x$ для всех $x \in X$;

Определение (Свойства)**.** 1) $g = f^{-1} \Rightarrow f = g^{-1}$
2) $\forall x \in D(f) \Rightarrow g(f(x)) = x$
...$\forall x \in E(f) \Rightarrow f(g(x)) = x$
3) График функции $y = g(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси $y = x$
4) Если нечётная функция обратима, то обратная к функции f - тоже нечётная.
5) Если f - строго возрастающая, то она обратима:

Определение (Неявные функции)**.** Пусть E - множество точек $M(x, y) \in$ Oxy. Если $\forall M \in E \to z \in \mathbb{R}$, то говорят, что на E задана числовая функция от переменных x и y:

$$z = f(x, y), (x, y) \in E$$

Определение. Пусть $K = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0 \leq b\} \subset D(F)$
Пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Если на $\delta = [x_0 - a; x_0 + a]$ существует единственный y = f(x): $f(x) \in [y_0 - b; y_0 + b]$ и $F(x, f(x)) \equiv 0, x \in \delta$, то говорят, что уравнение F(x,y) = 0 - определяет в множестве K переменную y - как неявную функцию x.

Определение (Параметрически заданные функции)**.** Пусть $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$
$t \in E', E_1 = E(\phi)$
Пусть ϕ - обратима на E', пусть $t = \phi^{-1}(x) \Rightarrow$ на E_1 определена сложная функция у $=$ $\psi(\phi^{-1}(x)) = f(x)$, которая называется параметрически заданной уравнениями $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$.
$x = \cos t$ и $y = \sin t \Rightarrow t = \arccos x \Rightarrow y = \sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$

Вопрос 31

Предел функции. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.

Предел функции определяется для точки, существует два(стандартных) определения функции, по Гейне и по Коши:

$\sqsupset$ **Функция** $f(x) = y$ определена в некоторой окрестности точки x_0(в самой точке x_0 не обязательно). Запишем это совокупностью: $\left[\begin{array}{lcl} x & \in & V(x_0) \\ x & \in & \dot{V}(x_0) \end{array}\right.$, где будем иметь ввиду, что $V(x_0)$ есть окрестность точки x_0 вместе с ней, а $\dot{V}(x_0)$ — окрестность точки x_0 без неё самой, в данном случае нам не важно, входит ли точка в окрестность или нет.

Для такой f рассмотрим точки $\neq x_0 : x_1, x_2, x_3, x_4...$ такие, что $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x_0}$

Тогда образуется последовательность $\big\{\mathbf{f(x)}\big\} : f(x_1, f(x_2), f(x_3)...f(x_n)$.

Определение. По Гейне(через последовательностям): $\lim\limits_{x\to x_0} = A,\quad$ если $\forall\{x_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\forall x \neq x_0}{=} x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Определение. По Коши(на мужика): $\lim\limits_{x\to x_0} = A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \quad \forall x \in X, x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Замечание: Несложно заметить, что определение по Коши похоже на просто предел последовательности. В целом как-то так и есть.

Докажем эквивалентность формулировок!

Сначала из Коши докажем Гейне:

Формулировка: $\sqsupset \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{по Коши}}{\Rightarrow} \exists\delta_0 : \dot{V}_{\delta_0}(x) \subset D_f$ и $\forall\varepsilon > 0 \sqsupset \delta_\varepsilon = (0; \delta_0] : \forall x \in \dot{V}_\varepsilon(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(A)$ (или $|f(x) - A| < \varepsilon$)

Доказательство: Тогда рассмотрим $\forall\{X_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

а также $x_n \in \dot{V}(x_0)$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и тогда найдется номер, что после него все $\{x_n\}$ лежат в δ окрестности числа $x_0, \sqsupset$ этот номер $\mathbb{N}_\delta \Rightarrow \forall n \geq \mathbb{N}_\delta \Rightarrow x_n \in \dot{V}(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in V_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теперь докажем из Гейне в Коши:

Формулировка:(пойдем от противного, потому все кванторы меняем на противоположные и так далее...)

$\exists\varepsilon_0 : \quad \forall\delta \in (0; \delta_0] \quad \exists x(\delta) \in \dot{V}_\delta(x_0) : \quad |f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon_0 \quad (1)$

Доказательство: Тогда $\sqsupset \delta = \frac{\delta_0}{n}$, где $n \in \mathbb{N} \qquad \sqsupset x_n = x(\frac{\delta_0}{n}) \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}$ верно, что

$$\begin{cases} 0 < |x_n - x_0| < \frac{\delta_0}{n} & (2) \\ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 & (3) \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in \dot{V}_{\delta_0}(x_0)$

Из (3) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A \Rightarrow A \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)-$ но это не по Гейне, а значит мы пришли к противоречию, следовательно выполняется следствие из Гейне в Коши.

Простым языком это означает, что НЕТ такого эпсилон, что для любого икса из окрестности x_0 следует что значение функции в этой окрестности всегда удалено от предела, полученного по Гейне, больше чем этот эпсилон. Здесь доказывается, что так как выполняется определение по Гейне, то мы просто выбираем подходящую нам последовательность исков в окрестности вокруг x_0 и говорим, что она уж точно стремится к пределу, то есть к $f(x_0)$, тогда наша предпосылка была ложью...

Вопрос 32

Односторонние конечные пределы функции. Бесконечные пределы функции в конечной точке. Окрестность бесконечности. Предел функции в бесконечности. Локальные свойства функции, имеющей предел.

Определим левый и правый пределы для какой-то точки x_0:

- По Гейне:
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ – –правый предел в точке x_0, если $\forall \{x_n\} \overset{n\to\infty}{\to} x_0, x_n > x_0 \Longrightarrow$
    $\Longrightarrow \{f(x_n)\} \overset{n\to\infty}{\to} A$
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ – –левый предел в точке x_0, если $\forall \{x_n\} \overset{n\to\infty}{\to} x_0, x_n < x_0 \Longrightarrow$
    $\Longrightarrow \{f(x_n)\} \overset{n\to\infty}{\to} A$
- По Коши:
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ – –правый предел в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0 :$
    $\forall x : x_0 < x < x + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
  - $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ – –левый предел в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0 :$
    $\forall x : x - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Далее рассмотрим бесконечные пределы в точке, правый и левый предел не обязательно равны, пример такой функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$, тогда для неё верно, что:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (0; 0 + \delta) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (0 - \delta; 0) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$
- В таком случае предел функции в точке $x_0 = 0$ есть бесконечность(знак неопределён):
  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (0 - \delta; 0 + \delta), x \neq x_0(0) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Как видно выше, если предел в точке есть бесконечность, то её окрестностью выступает не эпсилон область вокруг неё, а просто очень большое число, и если функция по модулю больше этого числа(при приближении к x_0), то предел и оказывается бесконечность.

Для предела функции на бесконечности берут дельту, после которой в сторону бесконечности все числа х удовлетворяют некоторым условиям, то есть находятся ближе к пределу чем число эпсилон: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \forall x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Локальные свойства функций, имеющих предел в точке x_0:

1. Если у функции есть предел в точке x_0, то она ограничена в некоторой области от точки x_0
2. Если предел функции в точке x_0 не равен нулю, то функция сохраняет знак предела в некоторой области точки x_0
3. Теорема о двух милиционерах: если три функции $g(x), f(x), h(x)$–такие, что $g(x) < f(x) < h(x)$ для $\forall x$ в окрестности некого числа x_0, а также соблюдается равенство пределов $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = h(x) = A$, тогда отсюда $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Вопрос 33

Свойства пределов функций, связанные с неравенствами.

Свойство 50.1. *Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняются неравенства*

$$g(x) \leq f(X) \leq h(x), \tag{1}$$

и если

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(X) = A, \tag{2}$$

то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Доказательство. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ для $n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\inf} x_n = a$. Тогда в силу условия (2) $\lim\limits_{n\to\inf} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\inf} h(x_n) = A$.

Так как, согласно условию (1), для всех $n \in N$ выполняется неравенство

$$g(x) \leq f(X) \leq h(x),$$

то в силу свойств пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\inf} f(x_n) = A$. Следовательно существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ■

Свойство 50.2. *Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ справедливо неравенсвто $f(x) \leq g(x)$, и если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $A \leq B$.*

Доказательство. Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне. По сути мы задаём последовательность значений функции, из условия свойства берём, что каждое значение $f(x) \leq g(x)$ и применяем аналогичное доказываемому свойство для последовательностей. ■

Вопрос 34

Бесконечно малые функции, их свойства.

Определение. Если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой при* $x \to a$.

Свойство 51.1. *Сумма конечого числа бесконечно малых при* $x \to a$ *функций есть бесконечно малая при* $x \to a$ *функция*

Свойство 51.2. *Произведение бесконечно малой при* $x \to a$ *функции на ограниченнуй в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при* $x \to a$ *функция.*

Свойство 51.3. *Произведение конечного числа бесконечно малых при* $x \to a$ *функций есть бесконечно малая при* $x \to a$ *функция.*

Данные свойства доказываются применением определения предела по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей.

Замечание. Из определения предела функции и определения бесконечно малой функции следует, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда эта функция представляетсся в виде

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Вопрос 35

Свойства пределов функций, связанные с арифметическими операциями.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, тогда:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{a}{b}, b \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot a$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} (|f(x)|) = |a|$

Доказательство Пусть $f(x), g(x)$ определены на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ конечной или бесконечно удаленной точки x_0. И пусть существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

1. Используем определение предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ есть произвольная последовательность, сходящаяся к точке x_0, элементы которой принадлежат определенной выше окрестности. Тогда определены последовательности $\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}$, имеющие пределы, равные a, b соответственно. Определим функцию $s(x) = f(x) \pm g(x)$ По свойству пределов последовательности:
   $\lim\limits_{x\to x_0} \{s(x)\} = \lim\limits_{x\to x_0} \{f(x)\} \pm \lim\limits_{x\to x_0} \{g(x)\} = a \pm b.$
   Согласно определению функции по Гейне:
   $\lim\limits_{x\to x_0} s(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b.$
   Аналогично докажем остальные свойства.

2. Определим функцию $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ По свойству пределов последовательности:
   $\lim\limits_{x\to x_0} \{s(x)\} = \lim\limits_{x\to x_0} \{f(x)\} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \{g(x)\} = a \cdot b.$
   Согласно определению функции по Гейне:
   $\lim\limits_{x\to x_0} s(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b.$

3. Определим функцию $s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ По свойству пределов последовательности:
   $\lim\limits_{x\to x_0} \{s(x)\} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \{f(x)\}}{\lim\limits_{x\to x_0} \{g(x)\}} = \frac{a}{b}.$
   Согласно определению функции по Гейне:
   $\lim\limits_{x\to x_0} s(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$ при $b \neq 0$.

4. Определим функцию $s(x) = f(x)$ По свойству пределов последовательности:
   $\lim\limits_{x\to x_0} \{s(x)\} = \lim\limits_{x\to x_0} \{f(x)\} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} C = C \cdot a.$
   Согласно определению функции по Гейне:
   $\lim\limits_{x\to x_0} s(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (C \cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} C = C \cdot a.$

5. Определим функцию $s(x) = |f(x)|$ По свойству пределов последовательности: $\lim\limits_{x\to x_0} \{s(x)\} = \lim\limits_{x\to x_0} \{|f(x)|\} = |a|$.
   Согласно определению функции по Гейне:
   $\lim\limits_{x\to x_0} s(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (|f(x)|) = |a|$.

Вопрос 36

Сравнение функций. Эквивалентные функции. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.

Сравнение (пусть даны функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{a})$ - проколотая окрестность точки a)

1. $\boldsymbol{f(x)}$ - **ограниченная** по сравнению с $\boldsymbol{g(x)}$ в $\overset{\circ}{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{a})$, если

   $\exists \boldsymbol{c} > \mathbf{0} : \forall \boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{a}) : |\boldsymbol{f(x)}| \leqslant \boldsymbol{c}|\boldsymbol{g(x)}|$

   Обозначается как $\boldsymbol{f(x) = O(g(x))}$

2. Если $\boldsymbol{f(x) = O(g(x))}$ и $\boldsymbol{g(x) = O(f(x))}$, то $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ - функции **одного порядка**

   Обозначается как $\boldsymbol{f(x) \asymp g(x)}$

3. Если $\boldsymbol{f(x) \neq 0} \quad \boldsymbol{g(x) \neq 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{a})$ и $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to a}} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \mathbf{1}$,то $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ - **эквивалентны**

   Обозначается как $\boldsymbol{f(x) \sim g(x)}$

4. Если $\boldsymbol{g(x) \neq 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{a})$ и $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to a}} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{f}$ -

   Бесконечно малая по сравнению с $\boldsymbol{g}$

   Обозначается как $\boldsymbol{f(x) = o(g(x))}$

Замена функции: при вычислении пределов функцию можно заменить на эквивалентную только в произведении, иначе нужно заменять ее по правилу: $\boldsymbol{f = g + o(g)}$,

Вопрос 37

Понятие бесконечно малой функции по сравнению с другой. Свойства символа o(g).

Сравнение (пусть $\boldsymbol{\alpha = \alpha(x)}$ - БМФ, $\boldsymbol{\beta = \beta(x)}$ - БМФ при $\boldsymbol{x \to a}$

1. Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0}$, то $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ - **Бесконечно малые одного порядка малости**
2. Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0}$, то $\boldsymbol{\alpha}$ **Бесконечно малая более высокого порядка малости**, чем $\boldsymbol{\beta}$
3. Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = \infty}$, то $\boldsymbol{\alpha}$ **Бесконечно малая более низкого порядка малости**, чем $\boldsymbol{\beta}$
4. Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta}}$ - не существует, то $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ - **Несравнимые бесконечно малые**
5. Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1}$, то $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ - **Эквивалентные бесконечно малые**

Свойства $\boldsymbol{o(g)}$

1. $\boldsymbol{o(g) + o(g) = o(g)}$
2. $\boldsymbol{o(c * g) = o(g)(c \neq 0)}$
3. $\boldsymbol{c * o(g) = o(g)(c \neq 0)}$
4. $\boldsymbol{o(o(g)) = o(g)}$
5. $\boldsymbol{o(g + o(g)) = o(g)}$
6. $\boldsymbol{o(g^n) * o(g^m) = o(g^{n+m})}$
7. $\boldsymbol{(o(g))^n = o(g^n)}$
8. $\boldsymbol{\frac{o(g^n)}{g} = o(g^{n-1})}$

Вопрос 38

Критерий эквивалентности функций. Основные эквивалентности.

Теорема. *Критерий эквивалентности функций.*

Для того, чтобы отличные от нуля функции f и g были эквивалентны при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $f(x) = g(x) + o(g(x))(x \to x_0)$

Доказательство

Необходимость Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0 \quad (x \to x_0)$, т.е. $\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = h(x)$, где $h(x) \to 0 \quad (x \to x_0)$. Отсюда следует, что $f(x) = g(x) + g(x) \cdot h(x)$. Но $\frac{g(x) \cdot h(x)}{g(x)} = h(x)$, т.е. $f(x) = g(x) + o(g(x))(x \to x_0)$

Досаточность Если $f(x) = g(x) + o(g(x))(x \to x_0)$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Основные эквивалентности при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\arctan x \sim x$
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
6. $e^x - 1 \sim x$
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln x$
8. $\ln(1 + x) \sim x$
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a(e)$
10. $(1 + x)^k - 1 \sim kx$

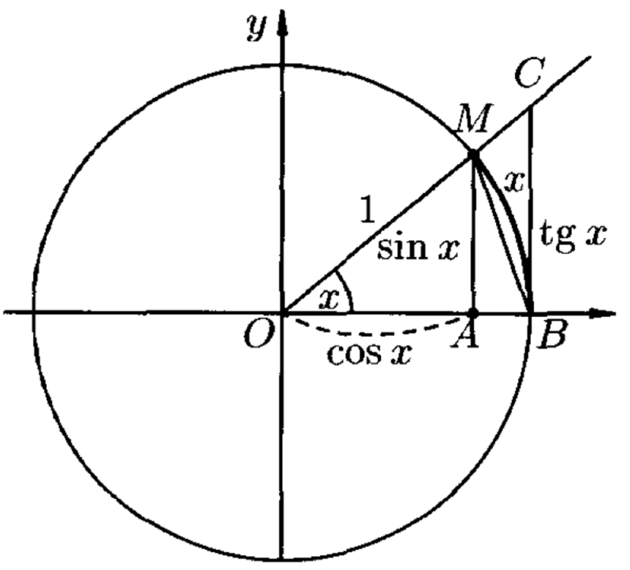
Вопрос 39

Первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство

Возьмем круг радиуса 1



Пусть угол MOB $= x$ **радиан**

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$|AM| = \sin x, \smile MB = x, |BC| = \tan x$

Очевидно, что $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектор}MOB} < S_{\triangle COB} \Rightarrow 0.5\sin x < 0.5x < 0.5\tan x$

Разделим на $0.5 sinx > 0 \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow$ по теореме о промежуточном значении (о 2-х миллиционерах для функции) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Пусть $x < 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin -x}{-x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Вопрос 40

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства функций, непрерывных в точке.

Пусть дана функция $f : M \to N$, которая сопоставляет элементам множества M соответствующие элементы множества N. Пусть $m \in M$ - точка. Введём понятие окрестности точки.

Определение. Окрестность точки m - множество $U \in M$ такое, что существует открытый шар $B_r(m)$ радиуса $r > 0$, содержащийся в U:

$$U \in M : \exists\, B_r(m) \wedge r > 0 : B_r(m) \in U$$

Обозначим за U и V окрестности точек m и $f(m)$ соответственно. Теперь мы можем ввести определение непрерывной функции в точке.

Определение. Функция f непрерывна в точке m, если для любой окрестности $V \in N$ существует окрестность $U \in M$ такая, что $f(U) \subset V$:

$$\forall\, V \in N : \exists U \in M : f(U) \subset V$$

Множество всех непрерывных функций, определённых на некотором множестве U обозначается $C^0(U)$. В данном случае, если f - непрерывна в точке m, то $f \in C^0(\{m\})$.

Также можно определить непрерывность в функции в точке через предел функции. Другими словами, математическая запись будет следующей:

$$f \in C^0(\{m\}) \iff \lim_{x \to m} f(x) = f(m)$$

При рассмотрении непрерывных функций в точке выделяют следующие локальные свойства функции:

1. Функция, непрерывная в точке, ограничена:

$$f \in C^0(\{m\}) \Rightarrow \exists\, U \in M : \forall\, x \in U : |f(x)| \leq R \wedge R \in \mathbb{R}$$

2. Функция, непрерывная в точке и принимающая положительное (отрицательное) значение в ней, принимает положительные (отрицательные) значения в некоторой окрестности точки:

$$f \in C^0(\{m\}) \wedge f(m) > 0\, (f(m) < 0) \Rightarrow \exists\, U \in M : \forall x \in U : f(x) > 0\, (f(x) < 0)$$

3. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в данной точке:

$$f, g \in C^0(\{m\}) \Rightarrow (f+g), (f-g), (f \cdot g) \in C^0(\{m\})$$

4. По 3 свойству, если $g(m) \neq 0$, то частное непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в данной точке.

Вопрос 41-42

Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса.

к и в вопросе 40, будем обозначать непрерывную функцию следующим образом: $f : M \to N$. Так как теперь рассматривается функция, непрерывная на отрезке, нужно для начала определить её.

Определение. Функция f непрерывна на отрезке $[a;b] \in M$, если она непрерывна в каждой точке $m \in [a;b]$:

$$f \in C^0(\{[a;b]\}) \iff \forall m \in [a;b] : f \in C^0(\{m\})$$

я непрерывных на отрезке функций выделяют следующие 3 свойства:

1. (Теорема Вейерштрасса) Непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает своих минимального и максимального значений.

2. (Теорема Коши) Непрерывная на отрезке функция, значения на концах которой имеют противоположные знаки, принимает нулевое значение хотя бы в одной точке данного отрезка.

3. (Теорема Больцано-Коши) Непрерывная на отрезке функция, принимающая различные значения на концах отрезка, принимает и любое значение между ними.

Рассмотрим подробнее первое свойство.

Теорема (Теорема Вейерштрасса)**.** Непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает своих минимального и максимального значений:
$f \in C^0(\{[a;b]\}) \Rightarrow$

1. $\exists\, R \in \mathbb{R} : \forall\, x \in [a;b] : |f(x)| \leq R$

2. $\exists\, m, n \in [a;b] : f(m) = \inf(f) \wedge f(n) = \sup(f)$

Доказательство 1 части.
Предположим, что функция f неограничена на отрезке $[a;b]$. Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in [a;b] : f(x_n) > n$. Таким образом мы можем определить последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Так как $[a;b]$ - ограниченное множество, то по теореме Больцано-Вейерштрасса: $\exists\, \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x < \infty$.
Так как $[a;b]$ - закрытое множество, то $x \in [a;b]$.
Из непрерывности функции на отрезке следует непрерывность функции в точке x. Таким образом $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in \mathbb{R}$.
Но из начального предположение следует, что $\forall\, k \in \mathbb{N} : f(x_{n_k}) > n_k \leq k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, что есть противоречие, завершающее доказательство. ■

Доказательство 2 части.
Пусть $V = \{y \in N \,|\, y = f(x) \text{ для } x \in [a;b]\}$. Тогда V - ограниченное множество, а значит $\exists \sup\{V\}$ - по свойству.
Пусть $R = \sup(f) \in [a;b]$. Если функция f не достигает своего супремума на $[a;b]$, то есть $\nexists\, x \in [a;b] : f(x) = R$, тогда $f(x) < R$ на $[a;b]$ и $\frac{1}{R-f(x)} \in C^0([a;b])$.
Однако по свойству супремума: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in [a;b] : R - f(x) < \varepsilon$. Таким образом $\frac{1}{R-f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть функция $R - f(x)$ неограничена.
Но функция f ограничена. Таким образом $\frac{1}{R-f(x)} \notin C^0([a;b])$, что есть противоречие, завершающее доказательство.
Аналогично доказывается достижение функцией инфимума на отрезке. ■

Вопрос 43-44

Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Коши. Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции (без доказательства).

Свойства смотри в предыдущем вопросе.

Теорема (Коши). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$.

1. Если $f(a)f(b) < 0$, то $f(c) = 0$ для некоторого $c \in [a, b]$.

2. Если $A = f(a), B = f(b)$ и $A \leq C \leq B$, то $f(c) = C$ для некоторого $c \in [a, b]$.

Первое утверждение. Допустим, что такой точки нет, тогда построим два множества:

$$F_{-} = \{x : f(x) \leq 0\}, \qquad F_{+} = \{x : f(x) \geq 0\}$$

Раз такой точки нет, то $F_{-} \cup F_{+}$ дает весь отрезок $[a, b]$, а это означает, что два замкнутых, непустых и непересекающихся множества дают в объединении весь отрезок, что невозможно по теореме о связности отрезка. ■

Второе утверждение. Второе утвеждение легко выводится из первого:
Построим функцию $g(x) = f(x) - C$, для нее выполняется условие $g(a)g(b) < 0$, тогда $\exists c : g(c) = f(c) - C = 0 \implies f(c) = C$. ■

Определение. Промежуток - всякое подмножество числовой прямой, которое вместе с любыми двумя своими точками содеражит отрезок, их соединяющий.
К промежуткам относятся только *пустое множество, одноточечные множества, интервалы, полуинтервалы, отрезки, лучи и вся числовая прямая.*

Теорема (Об обратной функции). Пусть f - строго монотонная и непрерывная функция на промежутке I. Тогда:

1. Множество $J = f(I)$ является промежутком.
2. $f : I \to J$ является биекцией.
3. f^{-1} является непрерывной строго монотонной функцией.

Вопрос 45

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство для последовательности. Докажем сначала, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает. То есть докажем следующее утверждение:

$$\forall x_n : x_{n+1} > x_n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i, \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-i+1)}{i!}$$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!n^1} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + ... + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + ...+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)+$$
$$+... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Легко заметить, что в x_{n+1} каждое слагаемое больше соответственного слагаемого в x_n, да и само количество слагаемых больше, следовательно, последовательность монотонно возрастает, что и требовалось доказать. Теперь докажем, что последовательность ограниченна:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + ...+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}$$
$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} <$$
$$< 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + ... + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$
$$= 1 + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 1 + 2 = 3$$

Итак, мы доказали монотонность и ограниченность, из чего по теореме Вейерштрасса следует, что последовательность имеет конечный предел, и здесь он обозначается e. ■

Доказательство для функций (вещественных чисел).

$$1) \quad x \to +\infty :$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$, а $n = [x]$.

$$n \le x < n+1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Longrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n}$$

. В силу монотонности показательной и степенной функций,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} y_n = e$$

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot \frac{n}{n+1}} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} z_n = e$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2) \quad x \to -\infty :$$

Пусть $x = -1 - t$, тогда $t \to +\infty$.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{-1-t} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e$$

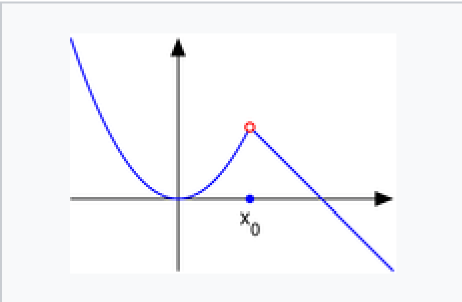
$\blacksquare$

Вопрос 46

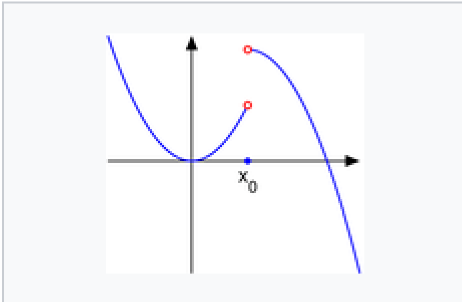
Точки разрыва функции. Определение и классификация.

Определение. Точкой разрыва называется та точка, в которой предел функции отсутствует или не совпадает со значением функции в этой точке. Они делятся на точки разрыва первого рода и второго рода.

Определение. Точка разрыва первого рода - значит оба односторонних предела существуют и конечны. Могут быть устранимые разрывы и скачки.

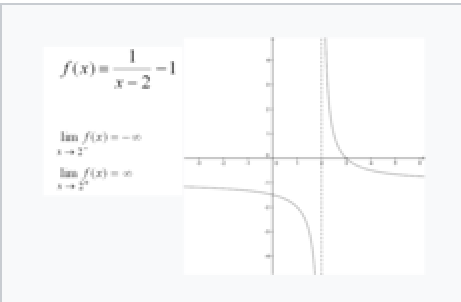


Устранимый разрыв

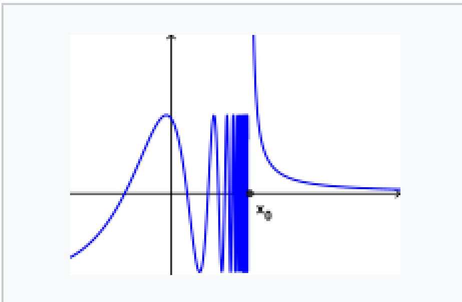


Разрыв типа «скачок»

Определение. Точка разрыва второго рода - значит хотя бы один из односторонних пределов не существует или не является конечной величиной. Могут быть полюсы и точки существенного разрыва.



Особая точка типа «полюс». Если доопределить функцию для x=2 — получится разрыв «полюс».



Точка существенного разрыва

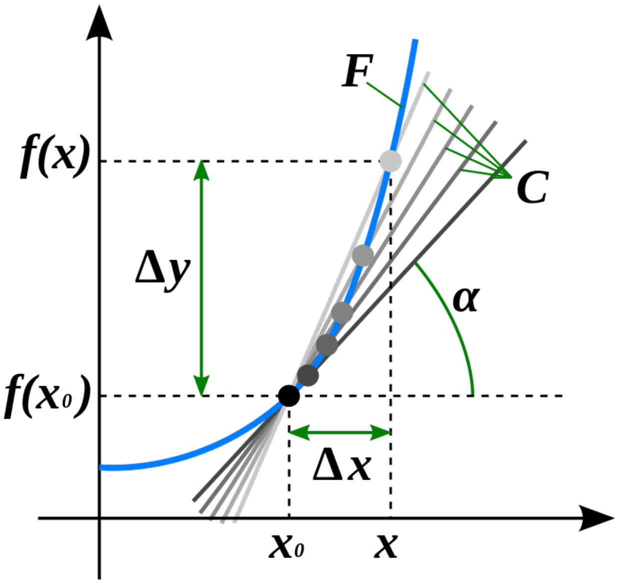
Вопрос 47

Определение производной функции, её геометрический и механический смысл. Односторонние и бесконечные производные. Дифференциал функции. Дифференцируемость функции в точке, определение, критерий. Геометрический и физический смысл дифференциала.

Определение. Производная функции определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращении аргумента к нулю, если такой предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При этом функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда её производная в этой точке существует и конечна.

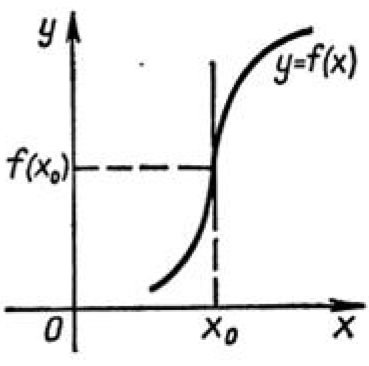


Геометрический смысл: производная равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

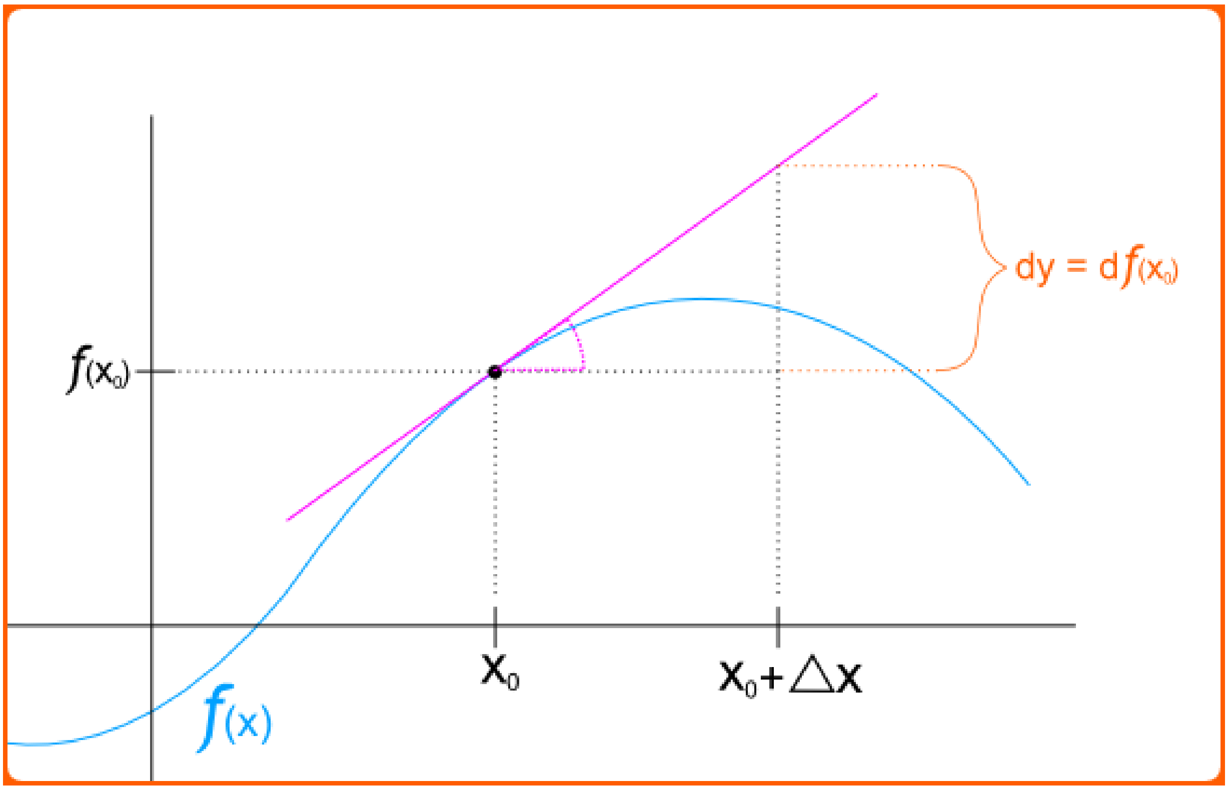
Механический смысл: производная пути равна скорости тела, а производная скорости - ускорению тела.

Односторонняя производная - это как обычная, но определяется через односторонний предел. Таким образом обычная производная существует тогда и только тогда, когда существуют обе односторонние производные.

Бесконечная производная возникает в точке, где касательная к графику расположена перпендикулярно оси Ox.



Дифференциал функции - это линейная часть приращения функции, обозначается dy.



Геометрический смысл: вертикальный катет прямоугольного треугольника, образованного касательной, прямой $y = f(x_0)$ и прямой $x = x_0 + \Delta x$

Физический смысл: бесконечно малое расстояние, пройденное телом за бесконечно малое время так, если бы все это время тело двигалось с постоянной скоростью.

Вопрос 48

Дифференцирование суммы, произведения, частного функций.

Дифферецирование суммы

Если существуют производные от функций, участвующих в сумме (разности), то производная от их суммы (разности) будет равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u(x) \pm v(x))' = u(x)' \pm v(x)'$$

Дифферецирование произведения

Если данные функции - дифференцируемы, то их произведение дифференцируемо и выполняется по следующему правилу:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)'$$

Дифферецирование частного

Если данные функции - дифференцируемы, то их частное дифференцируемо и выполняется по следующему правилу:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)'}{v^2(x)}$$

Вопрос 49

Дифференцирование сложной и обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Вопрос 50

Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций.

Вопрос 51

Инвариантность формы дифференциала.

Утверждение. *Форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.*

$$]y = f(x), x = \varphi(t) : \exists y = f(\varphi(t)) \Rightarrow dy = y'_x \cdot dx,$$

где dx — дифференциал x как функции от t.

Доказательство.

$$\text{Если } \exists y'_x, x'_t \Rightarrow \exists y'_t = y'_x \cdot x'_t \tag{1}$$

Если считать x независимой переменной, то дифференциал $dy = y'_x \cdot dx$.

$$dy = y'_t \cdot dt \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2) получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx,$$

где dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. ■

Замечание. Это свойство не сохраняется для дифференциалов высших порядков.

Вопрос 52

Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков.

Определение. Если $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в некотором промежутке X, так что последняя сама представляет функцию от x, то может случиться так, что это функция имеет производную в точке $x_0 \in X$. Её назвают второй производной функции $f(x)$ и обозначают:

$$f''(x), \text{ или } \frac{d^2 f}{dx^2}, \text{ или } \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right).$$

Итак $f'' = (f')'$.
Аналогично определяется произвдная третьего порядка: $f''' = (f'')'$.
Тогда, предположив, что определена $(n-1)$-ая производная, можно индукционно определить n-ую производную (или производную n-ого порядка):

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Теорема (Формула Лейбница)**.** Пусть функция $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ и функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют каждая в отдельности производные до n-ого порядка, тогда

$$y^{(n)} = (uv)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$$

Доказательство методом мат. индукции. База: $y' = u'v + uv'$, $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$
Пердположение: для n верно. Выполним переход $n \to n+1$.
Переход:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}$$

Объединим теперь слагаемые обеих последних сумм, содержащие одинаковые произведения производных функций u и v (сумма порядков производных в таком произведении равна всегда $n+1$. Произведение $u^{(n+1)} v^{(0)}$ входит только в первую сумму (при $i = O$); коэффициент его в этой сумме есть $C_n^0 = 1$. Точно так же $u^{(0)} v^{(n+1)}$ входит только во вторую сумму (в слагаемое с номером $i = n$), с коэффициентом $C_n^n = 1$. Все остальные произведения, входящие в эти суммы, имеют вид $u^{(n+1-k)} v^{(k)}$, причем $1 \le k \le n$. Каждое такое произведение встретится как в первой сумме (слагаемое с номером $i = k$), так и во второй сумме (слагаемое с номером $i = k-1$). Сумма соответствующих коэффициентов будет $C_n^k + C_n^{k-1}$. Но, как известно,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Получим

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{[(n+1)-k]} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

учитывая

$$C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1.$$

■

Определение. Дифференциалом n-го порядка или n-м дифференциалом функции $y = f(x)$ называется дифференциал ее $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Утверждение.

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

Ремарка. Под $dx^2, dx^3, \dots$ и т. п. всегда разумеются степени дифферен циала: $(dx)^2, (dx)^3, \dots$ Дифференциал от степени будет обозначаться так: $d(x^2), d(x^3), \dots$

Замечание. При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно помнить, что dx есть произвольное и независящее от x число, которое при дифференцировании по x надлежит рассматривать как постоянный множитель.

Пример. Если x — функция от t, то верно
$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx) = y''_{x^2} dx^2 \cdot dx + y'_x \cdot d(dx)$.
Если x —независимая переменная, то $d^2y = y''_{x^2} dx^2$.

Вывод. Дифференциалов высших порядков не обладают свойством инвариантности.

Вопрос 53

Локальный экстремум функции. Теорема Ферма.

Определение локального максимума и локального минимума

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности точки x_0, где $\delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0, если для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.Если для всех точек $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$,то точка x_0 является точкой строгого локального максимума.

Аналогично определяется локальный минимум функции $f(x)$. В этом случае для всех точек $x \neq x_0$ из δ-окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Соответственно, строгий локальный минимум описывается строгим неравенством $f(x) > f(x_0)$. Понятия локального максимума и локального минимума объединяются общим термином локальный экстремум. Слово "локальный"для краткости часто опускают и говорят просто о максимумах и минимумах функции.

Теорема. Теорема Ферма. Пусть $f(x)$ существует и дифференцируема в $O(x_0)$ и x_0 - точка локального экстремума. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим случай, когда x_0 - точка локального минимума. Случай с локальным максимумом доказывается аналогично. $\triangle y / \triangle x = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) / \triangle x$; рассмотрим $\triangle x \approx 0$. Заметим, что, по определению локального минимума, $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \geq 0$. Возможны 2 случая для $\triangle x$:

$$\triangle x < 0 \Rightarrow \triangle y / \triangle x \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

$$\triangle x > 0 \Rightarrow \triangle y / \triangle x \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

Отсюда, $f'(x_0) = 0$

Вопрос 54

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема. Теорема Ролля. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство: $f(x)f$ непрерывна на $[a;b]$, значит, у нее на этом отрезке существуют минимум и максимум. Пусть x_1 - точка минимума, x_2 - точка максимума
Рассмотрим 2 случая:
1) Обе точки граничные, то есть x_1, x_2 находятся на концах отрезка. Тогда, так как $f(a) = f(b)$, то $f_{max}[a;b] = f_{min}[a;b]$ Значит, $f(x)$ на $[a;b]$ - константа, то есть $\forall c \in (a;b) : f'(c) = 0$
2) Хотя бы одна из точек x_1, x_2 не граничная. Пусть это, например, x_1. Тогда по теореме Ферма $f'(x_1) = 0$.

Теорема. Теорема Лангража. Пусть f непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Тогда $\exists c \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = (f(x) - f(a)) - k(x - a), k = f(b) - f(a)/(b-a)$
Заметим, что $g(a) = g(b) = 0$, значит, по теореме Ролля, $\exists c \in (a;b) : g'(c) = 0$
Но $g'(x) = f'(x) - k$, значит, $f'(c) = k = f'(c) = k = f(b) - f(a)/(b-a)$
Следствия:

1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Теорема. Теорема Коши. Пусть f, g непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a;b)$. Тогда $\exists c \in (a;b) : f(b) - f(a)/g(b) - g(a) = f'(c)/g'(c)$.

Доказательство: Для начала, докажем, что дробь в левой части равенства определена: по теореме Лагранжа, $g(b) - g(a) = g'(d)(b-a)$ для некоторого d, по условию, правая часть не равна нулю, значит, $g(b) - g(a) \neq 0$.
Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - k(g(x) - g(a)), k = f(b) - f(a)/g(b) - g(a) F(a) = F(b) = 0$, значит, по теореме Ролля, $\exists c \in (a;b) : F'(c) = 0$.
Но $F'(x) = f'(x) - kg'(x)$, значит
$f'(c) = kg'(c)$
$f'(c)/g'(c) = k = f(b) - f(a)/g(b) - g(a)$

Вопрос 55

Формулы Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора

Определение. Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$ порядка включительно, и пусть существует $f_{(n)}(x_0)$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$.
То есть
Многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ - многочлен Тейлора. $R_n = f(x) - P_n(x)$ - остаточный член n-го порядка формулы Тейлора.

При $x_0 = 0$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$ - формула Маклорена

Формулы Тейлора в окрестности точки x0=0 для основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}); \quad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}); \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n); \quad x \to 0$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad x \to 0.$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \overline{o}(x^5) \quad x \to 0$$

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + \overline{o}(x^{2n+2}), \quad x \to 0$$

Вопрос 56

Правило Лопиталя.

Теорема (Правило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{0}{0}$)**.**
Пусть есть функции $f(x), g(x)$, они непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0. Если выполняются следующие условия:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ или $f(x_0) = g(x_0) = 0$
2. $g'(x) \neq 0$ в окрестности x_0.
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$

Тогда $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$.

Доказательство. Если наша какая-то из функций не определена при $x = x_0$, то доопределим их, положив, что при $x = x_0$ их значение равно 0. В x_0 они будут непрерывны по определению, поэтому выделим отрезок $[x_0, x]$ в окрестности x_0, на котором обе функции непрерывны, поэтому можно применить теорему Коши:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

где c лежит между x_0 и x. Так как $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

При $x \to x_0$, $c \to x_0$, т.к. $c \in [x, x_0]$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Так как $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$, то и $\lim_{c\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$. Поэтому $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$. ■

Замечание. Теорема справедлива и при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to 0} \frac{(f(\frac{1}{z}))'}{(g(\frac{1}{z}))'} = \lim_{z\to 0} \frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{g'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема (Правило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$)**.**
Пусть есть функции $f(x), g(x)$, они непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0). Если выполняются следующие условия:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$
2. $g'(x) \neq 0$ в окрестности x_0.
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$

Тогда $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$.

Доказательство. ■

Вопрос 57

Признак постоянства функции. Критерий возрастания и убывания функции.

Вопрос 58

Экстремумы функции. Необходимые условия экстремума.

Определение. Экстремум — максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума. Соответственно, если достигается минимум — точка экстремума называется точкой минимума, а если максимум — точкой максимума.

Пусть дана функция $f : M \in R \to R$ и $x_0 \in M^0 -$ внутренняя точка области определения f. Тогда:

- x_0 называется точкой локального максимума функции f, если существует проколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что
$\forall x \in \dot{U}(x_0)\ f(x) \geq f(x_0)$
- x_0 называется точкой локального минимума функции f, если существует проколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что
$\forall x \in \dot{U}(x_0)\ f(x) \leq f(x_0)$
- x_0 называется точкой глобального максимума функции f, если
$\forall x \in M)\ f(x) \geq f(x_0)$
- x_0 называется точкой глобального минимума функции f, если
$\forall x \in M)\ f(x) \leq f(x_0)$

Если неравенства выше строгие, то x_0 называется точкой строгого локального или глобального максимума или минимума соответственно.

Теорема (Необходимые условия существования экстремума)**.** Если точка с является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке $f'(c)$ равен нулю или не существует. Если $f'(c) = 0$, то в точке с функция имеет гладкий экстремум

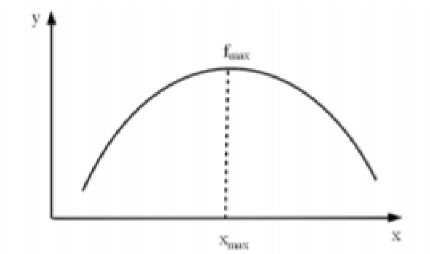


Рис. 1: Гладкий экстремум

Если $f'(c)$ не существует (т.е. $f'(c) = \infty$), то в точке с функция имеет острый экстремум

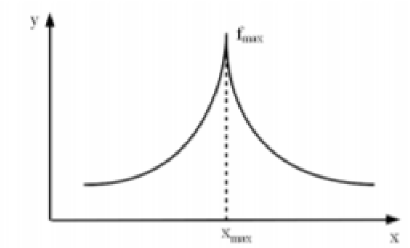


Рис. 2: Острый экстремум

Вопрос 59

Первое достаточное условие экстремума функции.

Теорема (Достаточное условие по первой производной)**.** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0,в которой, однако, функция непрерывна. Тогда:
Если производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, (слева направо), то точка x_0 является **точкой строгого минимума**. Другими словами, в этом случае существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0,$$

$$\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Если производная $f'(x)$, наоборот, меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то точка x_0 является **точкой строгого максимума**. Иначе говоря, существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0,$$

$$\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая минимума. Пусть производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. Слева от точки x_0 выполняется условие

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0.$$

По теореме Лагранжа разность значений функции в точках x и x_0 записывается как

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - \ x_0)\,,$$

где точка c принадлежит интервалу $(x_0 - \delta, x_0)$, в котором производная отрицательна, т.е. $f'(c) < 0$. Поскольку $x - x_0 < 0$, слева от точки x_0, то следовательно,

$$f(x) - f(x_0) > 0 \ \text{ для всех } \ x \in (x_0 - \delta, x_0)\,.$$

Таким же образом устанавливается, что

$$f(x) - f(x_0) > 0 \ \text{ для всех } \ x \in (x_0, x_0 + \delta)\,.$$

(справа от точки x_0).
На основании определения заключаем, что точка x_0 является точкой строгого минимума функции $f(x)$.
Аналогично можно доказать первое достаточное условие для строгого максимума функции. ■

Вопрос 60

Второе достаточное условие экстремума функции.

Теорема (Достаточное условие по второй производной)**.** Пусть в точке x_0 первая производная равна нулю: $f\left(x_0\right) = 0$, т.е. точка x_0 является стационарной точкой функции $f\left(x\right)$. Пусть также в этой точке существует вторая производная $f''\left(x_0\right)$. Тогда:
Если $f''\left(x_0\right) > 0$, то x_0 является **точкой строгого минимума**
Если $f''\left(x_0\right) < 0$, то x_0 является **точкой строгого максимума**

Доказательство. В случае строгого минимума $f''\left(x_0\right) > 0$. Тогда первая производная представляет собой возрастающую функцию в точке x_0. Следовательно, найдется число $\delta > 0$, такое, что

$$\forall\, x \in \left(x_0 - \delta, x_0\right) \Rightarrow f'\left(x\right) < f'\left(x_0\right),$$

$$\forall\, x \in \left(x_0, x_0 + \delta\right) \Rightarrow f'\left(x\right) > f'\left(x_0\right).$$

Поскольку $f''\left(x_0\right) = 0$ (так как x_0 - стационарная точка), то следовательно, в δ-окрестности слева от точки x_0 первая производная отрицательна, а справа - положительна, т.е. первая производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0. По первому достаточному признаку экстремума это означает, что x_0 - точка строгого минимума. ■

Вопрос 61

Третье достаточное условие экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Теорема (Достаточное условие по третьей и тд производной)**.** Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно. Тогда, если

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ и } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

то при четном n точка x_0 является:
точкой строгого минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и
точкой строгого максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

При нечетном n экстремума в точке x_0 не существует.
Очевидно, что при $n = 2$ в качестве частного случая мы получаем второе достаточное условие экстремума. Чтобы исключить такой переход, в третьем признаке полагают, что $n > 2$.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в точке x_0 в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n.$$

Поскольку по условию теоремы все первые производные до $(n-1)$-го порядка равны нулю, получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ((x - x_0)^n),$$

где остаточный член $((x - x_0)^n)$ имеет более высокий порядок малости, чем n. В результате в δ-окрестности точки x_0 знак разности $f(x) - f(x_0)$ будет определяться знаком n-го члена в ряде Тейлора:

$$\operatorname{sign}[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sign}\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right]$$

или

$$\operatorname{sign}[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sign}\left[f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n\right].$$

Если n - четное число ($n = 2k$), то

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow (x - x_0)^{2k} > 0.$$

Следовательно, в этом случае

$$\operatorname{sign}[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0).$$

При $f^{(n)}(x_0) > 0$ в δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) > 0.$$

По определению это означает, что x_0 - **точка строгого минимума**
Аналогично, при $f^{(n)}(x_0) < 0$ в δ-окрестности точки x_0 имеем неравенство

$$f(x) - f(x_0) < 0,$$

что соответствует **точке строго максимума**
Если n - нечетное число ($n = 2k+1$) то степень $(x - x_0)^{2k+1}$ будет менять знак при переходе через точку x_0. Тогда из формулы

$$\operatorname{sign}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \operatorname{sign}\left[f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{2k+1}\right]$$

следует, что разность $f(x) - f(x_0)$ также меняет знак при переходе через x_0. В этом случае экстремума в точке x_0 не существует. ■

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая является непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Определение. Если существует точка $x_0 \in [a, b]$, такая, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ принимает в точке x_0 **наибольшее (максимальное) значение** на отрезке $[a, b]$.

Определение. Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является одновременно **точной верхней гранью** множества значений функции на этом отрезке и обозначается как

$$f(x_0) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Аналогично для минимума.
Введенные понятия характеризуют поведение функции на конечном отрезке, в отличие от локального экстремума, который описывает свойства функции в малой окрестности точки. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке называют также **глобальным (абсолютным) максимумом** или, соответственно, **глобальным минимумом.**

Вопрос 62

Выпуклость функции. Точки перегиба, необходимое и достаточное условия наличия точки перегиба.

Определение. График дифференциируемой функции $y = f(x)$ *выпуклый вниз* на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой её касательной на этом интервале.

Определение. График дифференциируемой функции $y = f(x)$ *выпуклый вверх* на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой её касательной на этом интервале.

Определение. *Точка перегиба* - точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.
Если же $f''(x) > 0$ во всех точках интервала $(a; b)$, то график выпуклый вниз.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a; b)$. Возьмём на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой y_k её касательной. Уравнение касательной:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда $y - y_k = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа, $f(x) - f(x_0) - f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поэтому

$$y - y_k = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$$

Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа: $f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$, где c_1 лежит между x_0 и c. Таким образом, получаем

$$y - y_k = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Исследуем это равенство:

1. если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_k < 0$, т. е. $y < y_k$

2. если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_k < 0$, т. е. $y < y_k$

Итак, доказано, что во всех точках интервала $(a; b)$ ордината касательной больше ординаты графика, т. е. график функции выпуклый вверх.
Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график выпуклый вниз. ■

Теорема. (достаточное условие существования точек перегиба)
Если $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна 0 или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда слева от $x = x_0$ график выпуклый вверх, а справа - выпуклый вниз.
Следовательно, точка $(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба.
Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика функции $y = f(x)$. ■

Вопрос 63

Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций.

Определение. *Асимптота* - прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к 0 при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Вертикальная асимптота:
Прямая вида $x = a$ являетс *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$.
Обычно это точка разрыва второго рода.
Наклонная асимптота:
Уравнение наклонной асимптоты имеет вид: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - kx)$.
Вывод коэффициентов для наклонной асимптоты:
Пусть $M = (x; y)$ - произвольная точка кривой $y = f(x)$. По формуле расстояния от точки до прямой ($d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$) находим расстояние от точки M до наклонной асимптоты: $d = \frac{kx-y+b}{\sqrt{k^2+1}}$.
Условие $d \to 0$ будет выполняться лишь тогда, когда числитель дроби стремится к 0, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} (kx - y + b) = 0.$$

Отсюда следует, что $kx - y + b = \alpha$, где $\alpha = \alpha(x)$ бесконечно малая: $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Разделив обе части равенства $y = b + kx - \alpha$ на x и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} (\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x}).$$

Так как $\frac{b}{x} \to 0$ и $\frac{\alpha}{x}$, то

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx)$$

Итак, если существует наклонная асимптота $y = kx + b$, то коэффициенты находятся по приведённым формулам.
Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы для поиска коэффициентов, то прямая является наклонной асимптотой.
Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.
Горизонтальная асимптота:
Если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ - уравнение *горизонтальной асимптоты.*
Последовательность исследования функции для построения графика:

1. Найти область определения функции.

2. Найти точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).

4. Является ли функция чётной, нечётной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведённого исследования построить график функции. В более простых случаях достаточно выполнить лишь некоторые операции.
Если же график функции не совсем понятен и после выполнения всех операций, то можно дополнительно исследовать функцию на периодичность, построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.