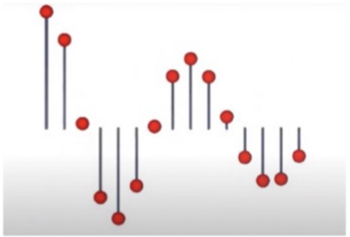
https://youtu.be/ErMSHiQRnc8?si=0Aq6IQhv8zEoQna9

ЛЕКЦИЯ 14
Механические волны. Продольные и поперечные волны.
Определение скорости распространения продольной монохроматической волны в упругом стержне со свободной боковой поверхностью. Определение скорости распространения поперечной монохроматической волны в бесконечной натянутой струне.

Свободные колебания
Собственные колебания в присутствие сил трения
Вынужденные колебания



Колебания в системах с одной степенью свободы
Колебания в системах с двумя степенями свободы

Колебательные процессы в механических системах с бесконечным числом степеней свободы похожи на колебания бесконечного числа связанных маятников. Каждый маятник колеблется около своего положения равновесия, передавая часть энергии своих колебаний другим маятникам

Механические волны - это волновой процесс в упругой среде (твёрдое тело, жидкость, газ).

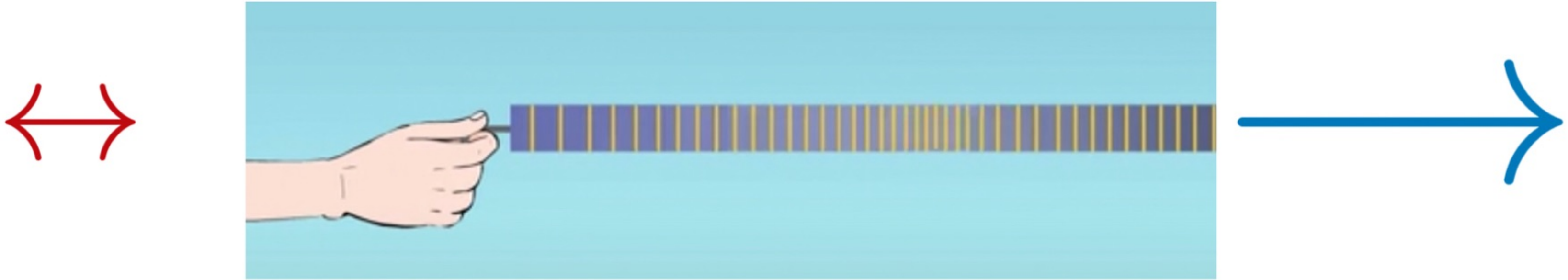
В упругой среде, представляющей собой большое число связанных частиц (система с бесконечным количеством степеней свободы), под действием внешних сил могут возникать колебательные процессы. Колебания распространяются в среде из-за связи частиц.

ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС - ЭТО ПРОЦЕСС, В КОТОРОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Механические волны - волновой процесс в упругой среде.

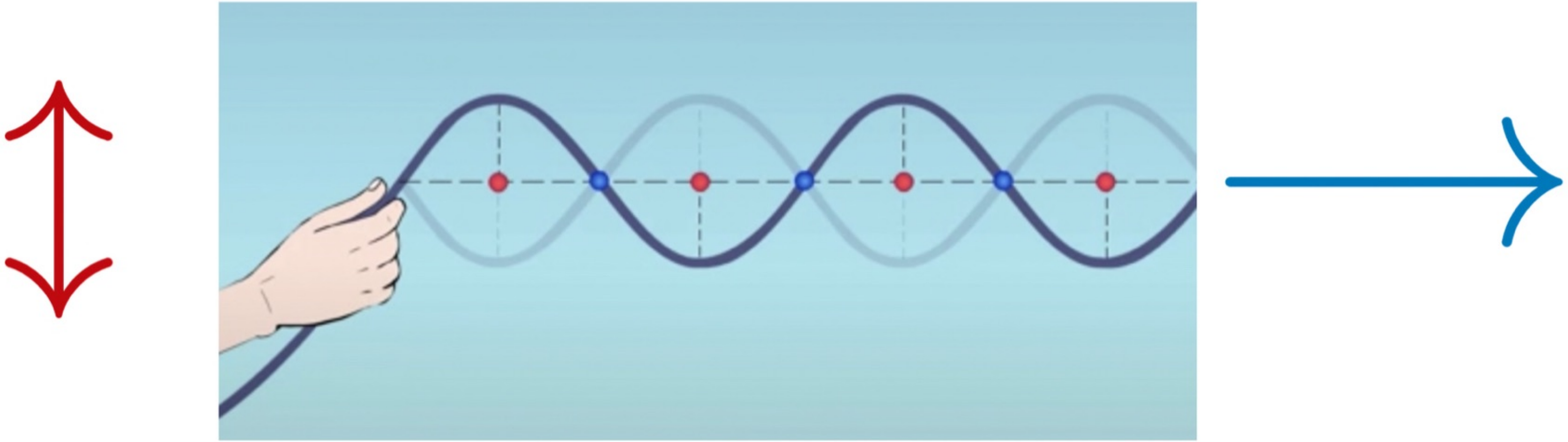
Кинематический признак распространения волны - распространение фазы.
Динамический признак - перенос энергии.
Волновой процесс характеризуется фазовой скоростью или скоростью распространения волны c, длиной волны λ, частотой ν и периодом T.

$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$



Продольные волны (звук) - это волны, в которых направление колебаний частиц совпадает с направлением распространения волны. Звук - это деформация продольного растяжения-сжатия в среде.

Поперечные волны (шнур) - это волны, в которых колебания частиц происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.



ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

В случае гармонических колебаний

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

$$s\left(t\right) = s_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

В случае механических волн

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$s\left(x, t\right)$$

Смещение частиц среды относительно положения равновесия

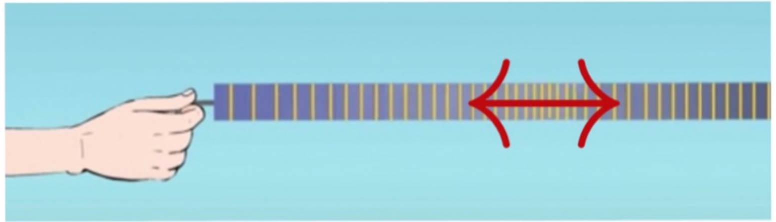
Наблюдаем за какой-то конкретной точкой среды: $x_0 = const$

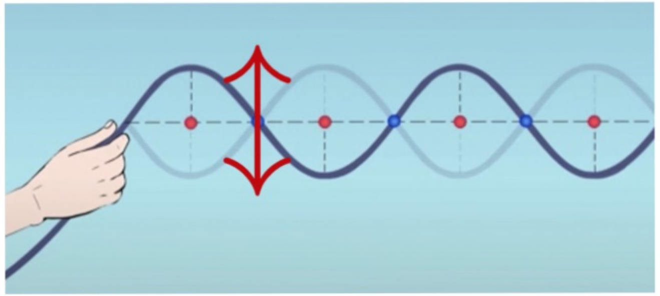
$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + (\varphi_0 - kx_0)) = s_0 \cos(\omega t + \varphi_0')$$

Гармоническая функция t

Период колебаний точек среды

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

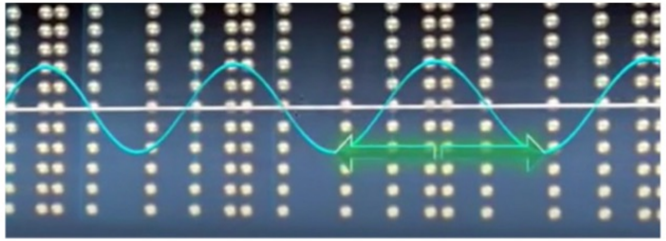




Точка среды колеблется по гармоническому закону (вынужденные колебания). Фаза колебания зависит от того, на каком расстоянии от источника возмущения среды ($\boldsymbol{x} = 0$) находится данная точка.

$$t_0 = const$$

$$s\left(x, t_0\right) = s_0 \cos\left(\omega t_0 - kx + \varphi_0\right)$$



Фотография среды

$$s\left(x\right) = s_0 \cos\left(kx - \left(\omega t_0 + \varphi_0\right)\right)$$

Гармоническая
функция

x

Длина волны - минимальное расстояние между двумя точками среды, которые колеблются в одной фазе.

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

АЛГОРИТМ ИЗУЧЕНИЯ ВОЛН В СРЕДЕ

1) Рассмотрим деформацию некоторого элемента среды.

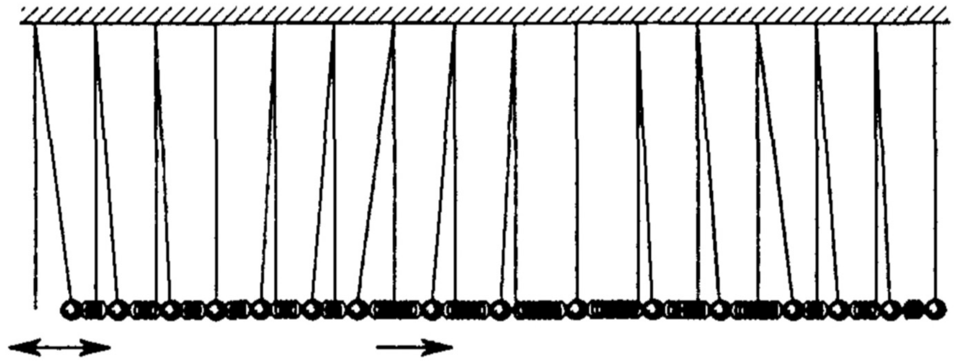
2) Применим к элементу среды второй закон Ньютона.

3) Получим дифференциальное уравнение (волновое уравнение).

4) Определим скорость распространения волны в среде (фазовую скорость $\boldsymbol{c}$).

Волны в дискретной цепочке

Проще всего представить себе волну, распространяющуюся по бесконечной цепочке связанных маятников (рисунок). С *бесконечной* цепочки мы начинаем для того, чтобы можно было рассматривать волну, распространяющуюся в одном направлении, и не думать о возможном ее отражении от конца цепочки. Если маятник, находящийся в начале цепочки, привести в гармоническое колебательное движение с некоторой частотой ν и амплитудой А, то колебательное движение будет распространяться по цепочке. Такое распространение колебаний из одного места в другое называется волновым процессом или волной



Пусть при гармонических колебаниях первого маятника его смещение из положения равновесия дается выражением

$x(t) = A \cos \omega t$ (1)

Каждый из маятников цепочки характеризуется тем расстоянием z, на которое он отстоит от начала цепочки. Поэтому его смещение из положения равновесия при прохождении волны естественно обозначить через x(t, z).

$x(t,z) = A \cos \omega(t - z/u)$ (2)

Описываемая этим уравнением волна называется монохроматической. Характерным признаком монохроматической волны является то, что каждый из маятников совершает синусоидальное колебание определенной частоты. Распространение волны по цепочке маятников сопровождается переносом энергии и импульса. Но никакого переноса массы при этом не происходит: каждый маятник, совершая колебания около положения равновесия, в среднем остается на месте.

Волны в натянутой струне

Рассмотрим поперечную монохроматическую волну, распространяющуюся в бесконечной натянутой струне. Предварительное натяжение струны необходимо потому, что ненатянутая гибкая струна, в отличие от твердого стержня, обладает упругостью только по отношению к деформации растя-жения, но не сжатия.

Монохроматическая волна в струне описывается тем же выражением, что и волна в цепочке маятников. Однако теперь роль отдельного маятника играет каждый элемент струны, поэтому переменная z в уравнении, характеризующая равновесное положение маятника, принимает непрерывные значения. Смещение любого элемента струны из равновесного положения при прохождении волны есть функция двух переменных: времени t и равновесного положения этого элемента z.

Если в формуле зафиксировать z, т. е. рассматривать определенный элемент струны, то функция x(t, z) при фиксированном z дает смещение выделенного элемента струны в зависимости от времени. Это смещение представляет собой гармоническое колебание с частотой ν и амплитудой A:

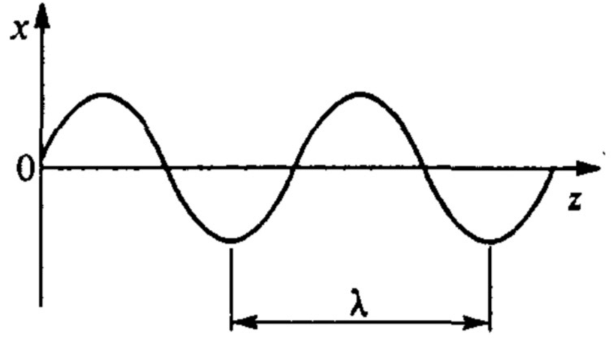
$$x(t, z) = A \cos \omega(t + \alpha)$$

Начальная фаза колебаний этого элемента струны $\alpha = - (\omega/u)z$, т. е. зависит от его равновесного положения z. Все элементы струны при прохождении монохроматической волны совершают гармонические колебания одинаковой частоты и амплитуды, но различающиеся по фазе.

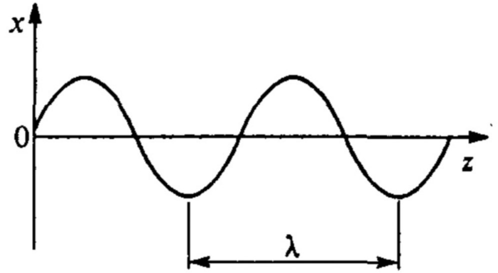
Длина волны

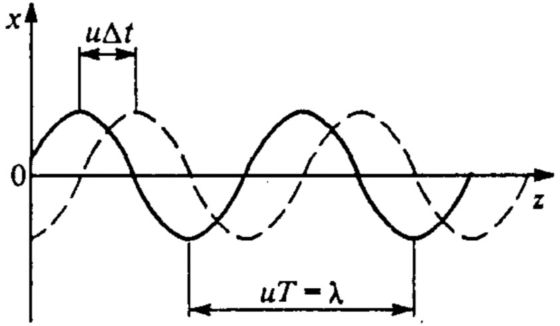
Если в формуле (2) зафиксировать t, т. е. рассматривать всю струну в один и тот же момент времени, то функция
x(t, z) при фиксированном t дает мгновенную картину смещений всех элементов струны - как бы моментальную фотографию волны. На этой «фотографии» мы увидим застывшую синусоиду (рис.). Период этой синусоиды, т. е. расстояние между соседни-ми горбами или впадинами, называется длиной волны λ. Из формулы (2) можно найти, что длина волны связана с частотой ν и скоростью волны u соотношением

$$\lambda = 2\frac{\pi}{\omega}u = uT,$$



T — период колебаний. Картину распространения волны можно представить себе, если эту «застывшую» синусоиду привести в движение вдоль оси z со скоростью u. Две последовательные «моментальные фотографии» волны в моменты времени t и t+ Δt показаны на рисунке



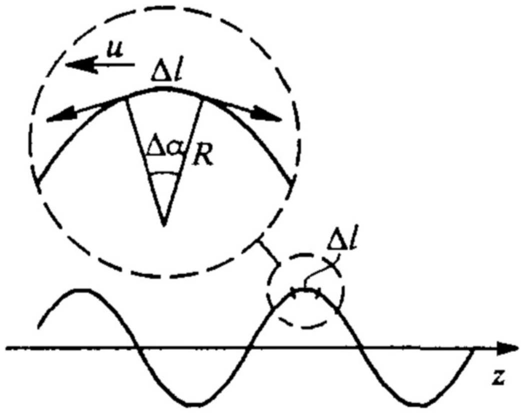


Видно, что длина волны λ равна расстоянию, проходимому любым горбом за один период колебаний T.

Скорость поперечной волны. Определим скорость распространения монохроматической поперечной волны в струне. Будем считать, что амплитуда A мала по сравнению с длиной волны: $\lambda <<$ A. Пусть волна бежит вправо со скоростью u. Перейдем в новую систему отсчета, движущуюся вдоль струны со скоростью, равной скорости волны u. Эта система отсчета также является инерциальной и, следовательно, в ней справедливы законы Ньютона. Из этой системы отсчета волна кажется застывшей синусоидой, а вещество струны скользит вдоль этой синусоиды влево: любой предварительно окрашенный элемент струны будет казаться убегающим вдоль синусоиды влево со скоростью u.

Рассмотрим в этой системе отсчета элемент струны длины Δl, которая много меньше длины волны λ, в тот момент, когда он находится на гребне синусоиды (рис). Применим к этому элементу второй закон Ньютона. Силы, действующие на элемент со стороны соседних участков струны, показаны в выделенном кружке на рисунке Поскольку рассматривается поперечная волна, в которой смещения элементов струны перпендикулярны направлению распространения волны, то горизонтальная составляющая силы натяжения F постоянна вдоль всей струны. Так как длина рассматриваемого участка мала, то направления сил натяжения, дейст-вующих на выделенный элемент, почти горизонтальны, а их модуль можно считать равным F. Равнодействующая этих сил направлена вниз и равна $F\Delta\alpha$.

Скорость рассматриваемого элемента равна и и направлена влево, а малый участок его синусоидальной траектории вблизи горба можно считать дугой окружности радиуса R. Поэтому ускорение этого элемента струны направлено вниз и равно u^2/R. Массу элемента струны можно представить в виде $\rho S\ \Delta l$, где ρ - плотность материала струны, а S - площадь сечения, которые ввиду малости деформаций при распространении волны можно считать такими же, как и в отсутствие волны.



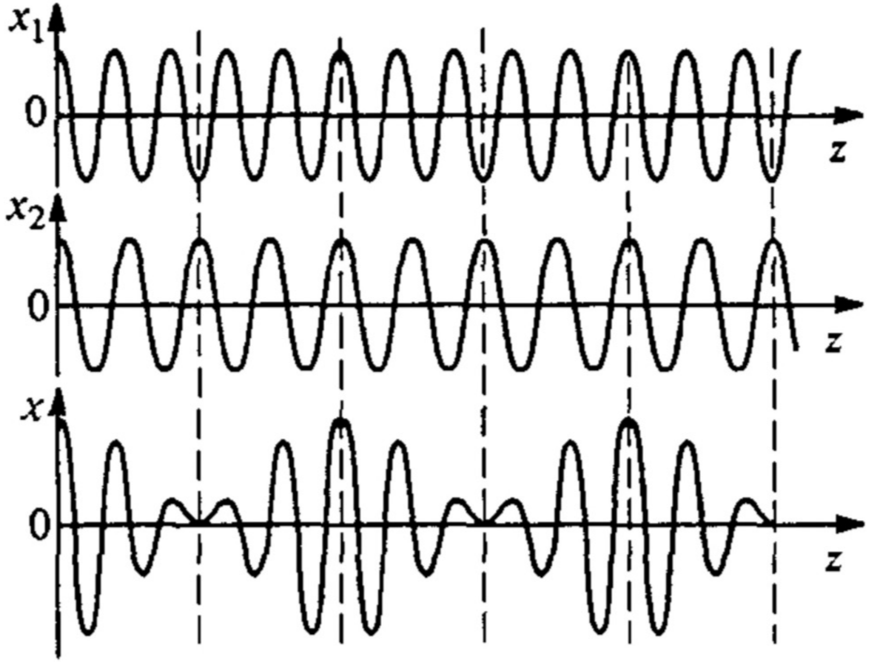
Второй закон Ньютона: $$F\,\Delta\alpha = \rho\,\Delta l\,\frac{u^2}{R}.$$

$$\Delta l = R\,\Delta\alpha$$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}.$$

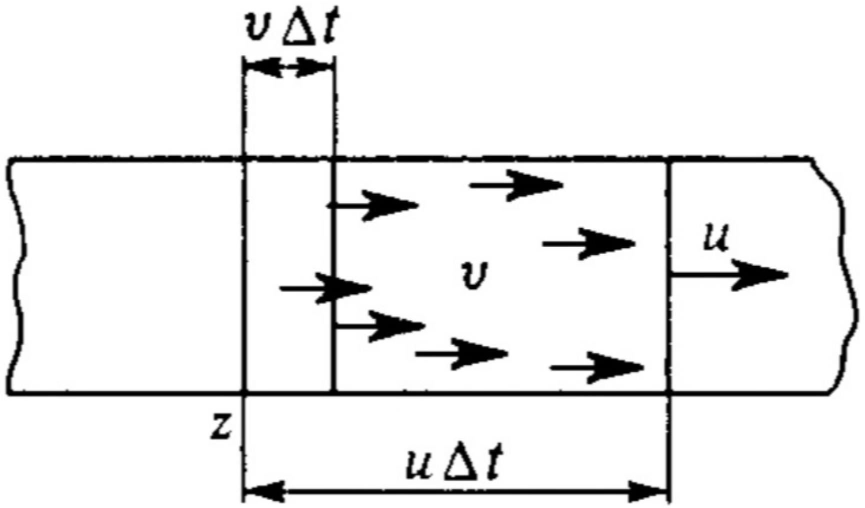
Это и есть искомая скорость распространения поперечной монохроматической волны малой амплитуды в натянутой струне. Видно, что она зависит только от механического напряжения натянутой струны F/S и ее плотности ρ и не зависит от амплитуды и длины волны. Это значит, что поперечные волны любой длины распространяются в натянутой струне с одинаковой скоростью.

Если в струне одновременно распространяются, например, две монохроматические волны с одинаковыми амплитудами и близкими частотами ω1 и ω2, то «моментальные фотографии» этих монохроматических волн и результирующей волны будут иметь вид, показанный на рис. Там, где горб одной волны совпадает с горбом другой другой, в результирующей волне смещение максимально. Поскольку соответствующие отдельным волнам синусоиды бегут вдоль оси z с одинаковой скоростью u, то и результирующая кривая бежит с той же самой скоростью, не меняя своей формы. Оказывается, что это справедливо для волнового возмущения любой формы: поперечные волны произвольного вида распространяются в натянутой струне, не меняя своей формы.



О дисперсии волн

Если скорость распространения монохроматических волн не зависит от длины волны или частоты, то говорят, что отсутствует дисперсия. Сохранение формы любой волны при ее распространении есть следствие отсутствия дисперсии. Дисперсия отсутствует для волн любого вида, распространяющихся в сплошных упругих средах. Это обстоятельство позволяет очень легко найти скорость продольных волн.



Скорость продольных волн

Рассмотрим, например, длинный упругий стержень площади S, в котором распространяется продольное возмущение с крутым передним фронтом. Пусть в некоторый момент времени t этот фронт, перемещаясь со скоростью u, дошел до точки с координатой z; справа от фронта все точки еще покоятся. Спустя промежуток времени Δt фронт переместится вправо на расстояние uΔt. В пределах этого слоя все частицы движутся с одной и той же скоростью v. Спустя это промежуток времени Δt частицы стержня, находившиеся в момент времени t на фронте волны, переместятся вдоль стержня на расстояние vΔt.

Применим к вовлеченной за время Δt в волновой процесс массе стержня $\Delta m = \rho\, S u\, \Delta t$
закон сохранения импульса:

$$v\,\Delta m = v\rho S u\,\Delta t = F\,\Delta t.$$

Действующую на массу Δm силу F выразим через деформацию элемента стержня с помощью закона Гука

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}.$$

Длина выделенного элемента стержня равна $u\Delta t$, а изменение его длины под действием силы F равно $v\Delta t$

$$F = ES\,\frac{v}{u}.$$

$$v\,\Delta m = v\rho S u\,\Delta t = F\,\Delta t.$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Скорость продольных волн в упругом стержне зависит только от модуля Юнга и плотности материала, из которого он сделан.

Скорость продольных волн в упругой среде всегда больше скорости поперечных. Сравним, например, скорости продольных и поперечных волн u_l и u_t в натянутой гибкой струне. Поскольку при малых деформациях упругие постоянные не зависят от приложенных сил, то скорость продольных волн в натянутой струне не зависит от ее предварительного натяжения.
Для того чтобы сравнить эту скорость с найденной ранее скоростью поперечных волн u, выразим силу натяжения струны F, через относительную деформацию струны $\varepsilon = \Delta l / l_0$, $\varepsilon = F/(SE)$

$$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Таким образом, скорость поперечных волн в натянутой струне u_t оказывается значительно меньше скорости продольных волн, так как относительное растяжение струны ε много меньше единицы.

$$u_t = \sqrt{\frac{\varepsilon E}{\rho}}.$$

$$u_t < u_l$$

Энергия волны

При распространении волн происходит передача энергии без переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц вещества и из потенциальной энергии упругой деформации среды.

Рассмотрим, например, продольную волну в упругом стержне.

В фиксированный момент времени кинетическая энергия распределена по объему стержня неравномерно, так как одни точки стержня в этот момент покоятся, другие, напротив, движутся с максимальной скоростью. То же самое справедливо и для потенциальной энергии, так как в этот момент какие-то элементы стержня не деформированы, другие же деформированы максимально. Поэтому при рассмотрении энергии волны естественно вводить плотность кинетической и потенциальной энергий. Плотность энергии волны в каждой точке среды не остается постоянной, а периодически изменяется при прохождении волны: энергия распространяется вместе с волной.

Плотность кинетической энергии бегущей волны

Рассмотрим плотность кинетической энергии в монохроматической упругой волне

$$x(t, z) = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{u}\right).$$

Выделим в стержне малый элемент между плоскостями z и z+Δz, такой, что его длина в не деформированном состоянии Δz много меньше длины волны λ. Тогда скорости v всех частиц в этом элементе при распространении волны можно считать одинаковыми.

d/dt

$$v(t, z) = \dot{x} = -\omega A\sin\omega\left(t - \frac{z}{u}\right).$$

z = const

$$\Delta m = \rho S \, \Delta z$$

$$v(t, z) = \dot{x} = -\omega A \sin \omega \left(t - \frac{z}{u}\right).$$

Кинетическая энергия элемента массы Δm

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho S \, \Delta z \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{z}{u}\right).$$

Кинетическая энергия единичного объема (плотность кинетической энергии):

$$w_{\text{к}}(t, z) = \frac{\Delta E_{\text{к}}}{S \, \Delta z} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{z}{u}\right).$$

Плотность потенциальной энергии

Поскольку длина выделенного элемента стержня мала по сравнению с длиной волны, то деформацию в элементе можно считать однородной

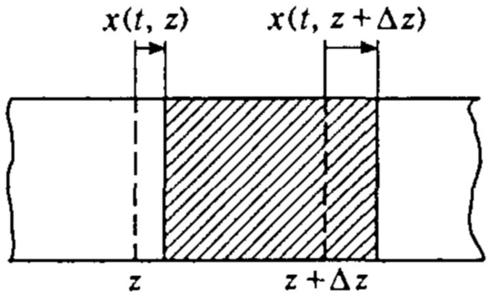
$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{1}{2} S\, \Delta z\, E \left(\frac{\Delta l}{\Delta z}\right)^2,$$

Δl - удлинение стержня, вызванное проходящей волной. Для нахождения этого удлинения нужно рассмотреть положение плоскостей, ограничивающих выделенный элемент, в некоторый момент времени t. Мгновенное положение любой плоскости, равновесное положение которой характеризуется координатой z, определяется функцией x(t,z), рассматриваемой как функция z при фиксированном l. Поэтому

$$\Delta l = x(t,\, z+\Delta z) - x(t,\, z).$$

Относительное удлинение этого элемента есть

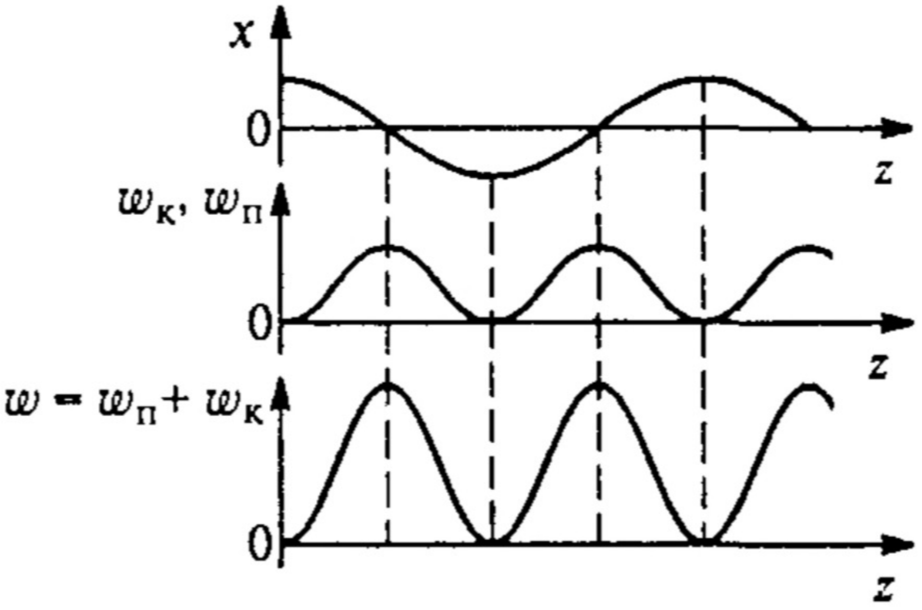
$$\frac{\Delta l}{\Delta z} = \frac{x(t,\, z+\Delta z) - x(t,\, z)}{\Delta z}.$$



$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{1}{2} S\, \Delta z\, E \left(\frac{\Delta l}{\Delta z}\right)^2, \quad \frac{\Delta l}{\Delta z} = \frac{x(t,\, z+\Delta z) - x(t,\, z)}{\Delta z}.$$

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{1}{2} S\, \Delta z\, E \left(\frac{\omega}{u} A\right)^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{z}{u}\right),$$

$$w_{\text{п}}(t,\, z) = \frac{\Delta E_{\text{п}}}{S\, \Delta z} = \frac{1}{2} E \frac{\omega^2}{u^2} A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{z}{u}\right).$$



скорость распространения волны

$$u = \sqrt{E/\rho}$$

$$w_к(t, z) = \frac{\Delta E_к}{S\,\Delta z} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{z}{u}\right).$$

$$w_п(t, z) = \frac{\Delta E_п}{S\,\Delta z} = \frac{1}{2} E\,\frac{\omega^2}{u^2} A^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{z}{u}\right).$$

Плотности потенциальной и кинетической энергии в бегущей продольной упругой волне равны в любой момент времени в любой точке среды.

В отличие от локализованных колебаний осциллятора, где кинетическая и потенциальная энергии изменяются в противофазе, в бегущей волне колебания кинетической и потенциальной энергий происходят в одинаковой фазе.
Кинетическая и потенциальная энергия одновременно достигают максимальных значений и одновременно обращаются в ноль.
Равенство мгновенных значений кинетической и потенциальной энергий есть общее свойство бегущих волн, то есть волн, распространяющихся в определенном направлении. Это справедливо и для поперечных волн в натянутой струне.

До сих пор мы рассматривали волны, распространяющиеся в системе, имеющей бесконечную протяженность только по одному направлению (z): в цепочке маятников, в струне, в стержне. Но волны могут распространяться и в среде, имеющей бесконечные размеры по всем направлениям. В такой сплошной среде волны бывают разного вида в зависимости от способа их возбуждения.

Плоская волна

Если, например, волна возникает в результате гармонических колебаний бесконечной плоскости, то в однородной среде она распространяется в направлении, перпендикулярном этой плоскости. В такой волне смещение всех точек среды, лежащих на любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения, происходит совершенно одинаково. Если в среде не происходит поглощения энергии волны, то амплитуда колебаний точек среды всюду одинакова и их смещение дается формулой $x(t) = A \cos \omega t$. Такая волна называется плоской.

Сферическая волна

Волну другого вида - сферическую - создает в однородной изотропной упругой среде пульсирующий шар. Такая волна распространяется с одинаковой скоростью по всем направлениям. Ее волновые поверхности, т. с. поверхности постоянной фазы, представляют собой концентрические сферы.

В отсутствие поглощения энергии в среде легко определить зависимость амплитуды сферической волны от расстояния до центра.

Поскольку поток энергии волны, пропорциональный квадрату амплитуды, одинаков через любую сферу, амплитуда волны убывает обратно пропорционально расстояни r от центра.

Уравнение продольной сферической волны имеет вид

$$x(t, r) = a\frac{r_0}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{u}\right),$$

где a — амплитуда колебаний на расстоянии r_0 от центра волны.