Конспекты к зачету по дискретной математике

Егор Федоров, P3115
Университет ИТМО

2022 — 2023

Оглавление

Часть I

Дискретная математика

Глава 1

Множества и отображения

1.1 Основные понятия теории множеств: множество, элемент, подмножество. Основные операции над множествами.

1.2 Бинарные и n-арные отношения. Определения и примеры. Основные свойства отношений. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.

1.3 Понятие отображения. Образ и прообраз элемента. Инъекция, сюръекция и биекция. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.

1.4 Число элементов декартова произведения двух и нескольких множеств. Количество подмножеств данного множества.

1.5 Число отображений из одного множества в другое. Число инъекций. Число перестановок данного множества. Размещения и размещения с повторениями.

1.6 Счётные множества. Определение и примеры. Счётность декартова произведения счётных множеств.

1.7 Теорема о бесконечном подмножестве счётного множества. Понятие не более чем счётного множества и их основные свойства.

1.8 Счётность множества рациональных чисел.

1.9 Теорема об объединении не более чем счётных множеств.

1.10 Пример несчётного множества. Существование трансцендентных чисел.

1.11 Понятие мощности множества. Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.

1.12 Формулировка аксиомы выбора. Примеры теорем, которые невозможно доказать без использования этой аксиомы.

1.13 Следствия об объединении и разности бесконечного множества и счётного множества. Примеры множеств мощности континуума.

1.14 Сравнение мощностей. Определение, теорема Кантора-Бернштейна

Глава 2

Основы математической логики

2.1 Булевы функции. Определение, задание таблицей истинности, количество булевых функций от n переменных. Примеры булевых функций от 1 и 2 переменных.

2.2 Формулы исчисления высказываний. Связь с булевыми функциями. Эквивалентность формул, примеры. Тавтологии, выполнимые формулы и противоречия.

2.3 Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. СКНФ и СДНФ. Существование и единственность представления булевой функции в виде СКНФ и СДНФ. Полные системы булевых функций.

2.4 Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ и СДНФ эквивалентными заменами.

2.5 Аксиомы и правила вывода в исчислении высказываний. Пример логического вывода.

2.6 Язык исчисления предикатов. Термы и формулы исчисления предикатов. Свободные и связанные вхождения переменных.

2.7 Интерпретация формул исчисления предикатов. Общезначимые и выполнимые формулы.

Глава 3

Элементарная комбинаторика

3.1 Число сочетаний из n элементов по k. Формула для числа сочетаний.

3.2 Число сочетаний с повторениями из n элементов по k. Формула для числа сочетаний с повторениями.

3.3 Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.

3.4 Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).

3.5 Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.

3.6 Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.

3.7 Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.

3.8 Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$

3.9 Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

3.10 Формула для числа сюръекций.

Глава 4

Разбиения чисел

4.1 Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Формула для числа упорядоченных разбиений.

4.2 Упорядоченные разбиения на нечетные слагаемые.

4.3 Неупорядоченные разбиения. Связь с диаграммами Юнга. Запись в виде решений специального уравнения.

4.4 Рекуррентная формула для числа разбиений на фиксированное число слагаемых.

4.5 Явные формулы для числа разбиений на 2 и 3 слагаемых.

4.6 Формула для количества разбиений числа n на m различных слагаемых.

4.7 Пентагональная формула Эйлера.

Глава 5

Рекуррентные соотношения в комбинаторике

5.1 Числа Фибоначчи. Определение и формулы суммы чисел Фибоначчи.

5.2 Числа Каталана. Определение и простейшие интерпретации (скобочные последовательности, последовательности единиц и минус единиц, пути на клетчатой сетке).

5.3 Принцип отражений. Явная формула для чисел Каталана.

5.4 Числа Каталана и триангуляции многоугольника

Часть II

Теория графов

Глава 6

Основные понятия

6.1 Граф, подграф. Вершина, окрестность, степень. Сумма степеней вершин графа.

Определение 6.1.1 $G = (V(G), E(G))$ — граф. $V(G)$ — множество вершин графа G, а $V(G)$ — множество ребер графа G. В курсе рассматриваются только конечные графы. Количество вершин — $v(G)$, количество ребер — $e(G)$.

Ребро e называется петлей, если его начало и конец совпадают. Ребра e и e' называются кратными, если множества их концов совпадают.

Запись $e = xy$ будет означать, что вершины x и y — концы ребра e.

Соединенные ребром вершины будем называть смежными. Если вершина x — конец ребра e, то будем говорить, что x и e инциденты.

Определение 6.1.2 Для любой вершины $v \in V(G)$ через $N_G(v)$ мы будем обозначать окрестность вершины v — множество всех вершин графа G, смежных с v.

Определение 6.1.3 Для вершины $v \in V(G)$ через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, то есть количество ребер, инцидентных x.

Минимальную степень вершины графа G обозначим через $\delta(G)$, а максимальную через $\Delta(g)$.

Лемма 6.1.1

1. Сумма степеней всех вершин графа G равна $2e(G)$.
2. Количество вершин нечетной степени в любом графе четно.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что любое ребро имеет ровно два конца, а второе — из первого. □

Определение 6.1.4 Граф H является подграфом графа G, если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$.

Подграф H графа G остовный, если $V(H) = V(G)$.

Пусть $U \subset V(G)$. Через $G(U)$ мы обозначим индуцированный подграф на множестве вершин U. Это означает, что $V(G(U)) = U$, а множество $E(G(U))$ содержит из всех ребер, оба конца которых лежат в U.

Пусть $F \subset E(G)$. Через $G(F)$ обозначим индуцированный подграф на множестве ребер F. Это означает, что $E(G(F)) = F$, а $V(G(F))$ состоит из всех вершин, инцидентных хотя бы одному ребру из F.

Собственный подграф G — подграф, отличный от G.

В дальнейшем индуцированный подграф графа G будет означать подграф, индуцированный на некотором множестве вершин $U \subseteq V(G)$.

Определение 6.1.5 Пусть G_1 и G_2 — два графа. Тогда их объединение $G_1 \cup G_2$ — это граф со множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Определение 6.1.6 Для любого множества $R \subset (E(G) \cup V(G))$ определим через $G - R$ граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и ребер графа R, а также всех ребер инцидентных вершинам из R.

Пусть e — ребро, соединяющее пару вершин из $V(G)$. Тогда обозначим за $G + e$ результат добавления ребра e, то есть $G + e = (V(G), E(G) \cup e)$. Если $e \in E(G)$, то $G + e = G$.

Определение 6.1.7 Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате стягивания ребра $e = xy$. Это означает, что граф $G \cdot e$ получается из графа $G - x - y$ добавление новой вершины w, которая будет смежна в графе $G \cdot e$ со всеми вершинами, смежными в G хотя бы одной из x и y.

Мы будем применять обозначение $w = x \cdot y$.

6.2 Пути, циклы и маршруты. Лемма о выделении простого пути и цикла.

Определение 6.2.1 – Маршрут Последовательность вершин $a_1 a_2 \cdots a_n$ и ребер $e_1, \cdots, e_{n-1}$ где $e_i = a_i a_{i+1}$ для всех $i \in [1 \ldots n-1]$, называется маршрутом.

Маршрут называется замкнутым, если $a_1 = a_n$.

Вершины и ребра маршрута не обязательно различны.

Определение 6.2.2 – Путь Путь — это маршрут $a_1 a_2 \ldots a_n$ не проходящий ни по какому ребру дважды.

a_1 — начало пути, a_n — конец пути.

Путь называется простым, если все его вершины различны.

Длина пути — количество его ребер.

Если граф P — простой путь, то его внутренность $Int(P)$ — это множество всех его вершин, отличных от начала и конца этого пути. Вершины из $Int(P)$ называются внутренними вершинами пути.

Определение 6.2.3 – xy-путь Пусть $x, y \in V(G)$. Назовем xy-путем любой простой путь от x до y.

Пусть $X, Y \subset V(G)$. Назовем XY-путем любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y, внутренние вершины которого не принадлежат X и Y.

Расстоянием между вершинами x и y графа G называется длина наименьшего xy-пути. Обозначение: $dist_G(x, y)$.

TODO!!! ДОБАВИТЬ ВСЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Лемма 6.2.1 1. Для любого цикла Z существует такой простой цикл Z', что $V(Z') \subset V(Z)$ и $E(Z') \subset E(Z)$.

2. Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.

3. Из xy-пути можно выделить простой xy-путь.

Доказательство. 1. Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Участок между двумя посещениями b — искомый.

2. Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Изменим порядок обхода большого цикла Z в вершине b: разомкнем его на простой цикл Z' (как в пункте 1) и цикл Z_1 из оставшихся ребер цикла Z. Эти циклы имеют общую вершину v и $e(Z) = e(Z') + e(Z_1)$, а значит либо $e(Z')$ нечетно (и тогда Z' — искомый), либо $e(Z_1)$ нечетно, тогда, если он не простой, то продолжим рассуждения с ним, иначе он — искомый.

3. Аналогично □

6.3 Лемма о длинном пути и цикле.

Лемма 6.3.1 1. В графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$.

2. Если $\delta(G) \geq 2$, то в графе есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

Доказательство. 1. Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1 \ldots a_n$. Из его последней вершины a_n выходит хотя бы $\delta(G) - 1$ ребер в вершины, отличные от a_{n-1}. Так как путь P — максимальный, то все эти вершины принадлежат пути P, то есть a_n смежна только с вершинами пути P, значит $n - 1 \geqslant \delta(G) - 1$.

2. Пусть a_m — вершина наименьшего номера, смежная с a_n. Тогда в множестве $a_m, \ldots, a_{n-1}$ лежат не менее $d_G(a_n) \geqslant \delta(G) \geqslant 2$ концов выходящих из a_n ребер.

Следовательно $a_m \neq a_{n-1}$ и мы получаем цикл $a_m \ldots a_{n-1} a_n$ в котором не менее чем $\delta(G) + 1$ вершин. □

6.4 Компоненты связности.

Определение 6.4.1 Вершины a и b графа G называются связными, если в графе существует путь между ними.

Граф называется связным, если любые две его вершины связны.

Множество $U \subset V(G)$ называется связным, если граф $G(U)$ связен.

Компоненты связности графа G — максимальные (по включению) связные множества вершин. Через $c(G)$ обозначим их количество.

6.5 Дерево. Количество ребер дерева, выделение остовного дерева.

Определение 6.5.1 Дерево — связный граф без циклов.

Лес — это граф без циклов (то есть множество деревьев)

Вершина графа G, имеющая степень 1, называется висячей вершиной или листом.

Лемма 6.5.1 В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

У любого связного графа существует остовное дерево.

Доказательство. Докажем первое утверждение индукцией по количеству вершин в графе. База для дерева с одной вершиной очевидна.

Рассмотрим дерево T с $n \geqslant 2$ вершинами. По лемме **??** в графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Тогда у связного дерева T не может быть циклов, тогда нам подходят значения 0 и 1. Но так как граф T связный, то остается только 1.

Тогда найдем висячую вершину степени 1. Обозначим ее за a.

Понятно, что граф $T - a$ тоже связен и не имеет циклов, то есть является деревом на $n-1$ вершине. Но по индукционному предположению $e(T-a) = n-2$, откуда очевидно, что $e(T) = n-1$.

Докажем второе утверждение. Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным. Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть остовным деревом этого графа. □

Следствие 6.5.1.1 1. Дерево с более чем одной вершиной имеет не менее двух висячих вершин.

2. Для любого графа G выполнено $e(G) \geqslant v(G) - c(G)$.

Доказательство. 1. Если в дереве не более одной висячей вершины, то остальные вершины имеют степень хотя бы два, и сумма степеней вершин не менее чем $2v(T) - 1$. Однако она же равна $2e(T) = 2v(T) - 2$ по пункту 1 леммы **??**. Противоречие.

2. По лемме **??** каждая компонента графа G имеет остовное дерево, у которого ребер ровно на одном меньше, чем вершин. □

6.6 Единственность пути между вершинами дерева.

Лемма 6.6.1 Граф G является деревом, если и только если для любых двух его вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что в графе есть единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф связен, однако если в графе есть цикл, то между любыми двумя вершинами существуют как минимум два простых пути. Значит G — дерево.

Докажем достаточность. Пусть G — дерево, и между любыми двумя его вершинами есть два простых пути. Пусть существуют два разных простых ab-пути P_1 и P_2. Отрежем общее начало от этих путей: предположим, они начинаются в точке c и их первые ребра на совпадают.

Пойдем по пути P_1 до первого пересечения с P_2 в вершине d (такая вершина обязательно найдется, так как у путей общий конец b). Мы получили два простых cd-пути без общих внутренних вершин, которые образуют цикл, коих не может быть в дереве. Противоречие. □

6.7 Нормальное остовное дерево.

Определение 6.7.1 – Нормальное дерево или дерево обхода в глубину Пусть G — связный граф, $a \in V(G)$. Остовное дерево T называется нормальным деревом с корнем a, если для любого ребра $xy \in E(G)$ либо x лежит на ay-пути дерева T, либо y лежит на ax пути дерева T.

Теорема 6.7.1 Пусть G — связный граф, $a \in V(G)$. Тогда у графа G существует нормальное остовное дерево с корнем a.

Доказательство. Индукция по $v(G)$. База для графов с 1 или 2 вершинами очевидна.

Предположим, что для меньших чем G графов теорема уже доказана. Пусть $U_1, \ldots, U_m$ — все компоненты связности графа $G - a$, $G_i = G(U_i)$.

Для каждого $i \in [1 \ldots m]$ отметим вершину $a_i \in U_i \cap N_G(a)$ и построим нормальное остовное дерево T_i графа G_i с вершиной в a_i.

После этого соединим a с $a_1, \ldots, a_m$ и получим остовное дерево T исходного графа.

Пусть $xy \in E(G)$. Если обе вершины x и y отличны от a, то они лежат в одной компоненте связности (так как ребер между разными нет), а значит свойство выполняется по индукционному предположению для T_i.

Если же $x = a$, то доказываемое свойство очевидною □

6.8 Радиус, диаметр и центр графа. Дерево поиска в ширину.

Определение 6.8.1

- Диаметром $d(G)$ графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.
- Эксцентриситетом вершины v называется величина $e(v) = \max_{u \in V(G)} dist(u, v)$
- Радиусом $r(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин
- Центром графа G называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

Лемма 6.8.1 $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$

Доказательство. Неравенство $r(G) \leqslant d(G)$ очевидно.

Пусть ab-путь — это диаметр графа, а c — центр. Тогда существуют ac-путь Q_a и bc-путь Q_b, причем $e(Q_a) = dist(a, c) \leqslant r$ и $e(Q_b) = dist(b, c) \leqslant r$. Так как d — кратчайший ab-путь, а aQ_acQ_bb — некоторый ab-путь, то

$$r = e(D) \leqslant e(Q_a) + e(Q_b) = 2r$$

□

Определение 6.8.2 – Дерево поиска в ширину Одна из вершин a связного графа G объявляется корнем и составляет множество вершин уровня 0 (назовем его L_0). Остальные вершины разбиваются так: в уровень L_k попадают вершины, находящиеся на расстоянии k от корня a. Каждая вершина уровня k присоединяется к одной из смежных с ней вершин уровня $k - 1$.

В результате получится дерево, часто бывает удобно ориентировать его ребра от меньшего уровня к большему. Таким образом, разбиение на уровни единственно, а само дерево — нет.

Количество уровней в построенном выше дереве равно $e(a)$, а наименьшее количество уровней достигается когда a — центра графа G, и равно при этом $r(G)$.

Лемма 6.8.2 Ребра графа G могут соединять либо вершины соседних уровней, либо одного и того же уровня.

Доказательство. Пусть ребро xy соединяет вершину $x \in L_k$ и $y \in L_m$, $m > k$. Тогда:

$$m = dist_G(a, y) \leqslant dist_G(a, x) + 1 = k + 1$$

□

6.9 Двудольный граф. Критерий двудольности.

Определение 6.9.1 Граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на два множества, внутри которых нет ребер.

Таким образом, двудольный граф представим в виде $G = (V_1(G), V_2(G), E(G))$.

Двудольный граф также можно представить в виде двухцветной раскраски.

Теорема 6.9.1 Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной длины.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как цикл нечетной длины невозможно раскрасить в два цвета.

Докажем необходимость. Будем считать, что G связен, иначе докажем утверждение для каждой компоненты. Подвесим граф за любую вершину a, назовем полученное дерево T. Первую долю образуют вершины на нечетном расстоянии от a, вторую — на четном и сама вершина a.

Предположим, что две смежные вершины x и y попали в одну долю. Рассмотрим простые пути P_x и P_y в дереве T от a до x и y. В дереве такие пути единственные и в сумме дают одинаковую четность. (либо оба четные, либо оба нечетные).

Отрежем от P_x и P_y их общее начало (если такое есть) и получим xy-путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра xy. При добавлении этого ребра образуется нечетный цикл, противоречие.

Таким образом, граф без нечетных циклов является двудольным. $\square$

Глава 7

Пути и циклы

7.1 Эйлеров путь и цикл в графе.

Определение 7.1.1 Эйлеров путь в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров граф — граф, содержащий эйлеров цикл.

Разумеется, эйлеров путь и цикл могут иметь самопересечения по вершинам.

Теорема 7.1.1 Связный граф G — эйлеров, если и только если степени всех вершин графа G четны.

Доказательство. Докажем достаточность. Каждый раз, проходя через вершину v, эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому $d_G(v)$ четна.

Докажем необходимость. Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно.

Так как все степени четны, наш путь обязательно закончится в вершине a. В результате получится цикл Z.

Пусть $G_1, \ldots, G_k$ — компоненты графа $G - E(Z)$. Степени всех вершин каждой из компонент четны, поэтому в каждом графе G_i есть эйлеров цикл Z_i.

Поскольку граф G связен, то для каждого i существует вершина $u_i \in V(G_i)$, лежащая на цикле Z. Тогда по вершине u_i можно состыковать циклы Z и Z_i в один.

Проделав такую операцию последовательно для $Z_, 1 \ldots, Z_k$ мы получим искомый эйлеров цикл в графе G. □

7.2 Лемма о преобразовании пути в цикл.

Лемма 7.2.1 – Лемма о преобразовании пути в цикл Связный граф G имеет эйлеров путь, если и только если в графе G нет вершин нечетной степени или таких ровно две.

Доказательство. Пусть эйлеров путь имеет концы a и b. Если $a = b$, то наш путь – эйлеров цикл, а значит степени всех вершин четны. Если же $a \neq b$, то в графе ровно две вершины нечетной степени — a и b. Достаточность доказана.

Количество вершин нечетной степени в графе четно, если их нет, то в графе есть даже ЭЦ.

Пусть в графе ровно две вершины нечетной степени — a и b. Добавим фиктивное ребро ab в граф (если оно есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф, в котором степени всех вершин четны, и по теореме **??** в нем есть эйлеров цикл C. Удалим из цикла C добавленное ребро и получим эйлеров путь с концами a и b. □

7.3 Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.

Определение 7.3.1 Гамильтонов путь в графе G — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов цикл — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.

Лемма 7.3.1 Пусть $n > 2$, $a_1, \ldots, a_n$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant n$. Тогда в графе есть цикл длины n.

Доказательство. Если вершины a_1 и a_n смежны, то $a_1 a_2 \dots a_n$ — искомый цикл.

Пусть a_1 и a_n несмежны. Понятно, что $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots, a_{n-1}\}$ (иначе мы могли бы продлить максимальный путь)

Пусть вершина a_n смежна с вершиной a_k, а вершина a_1 смежна с вершиной a_{k+1}. Тогда в графе есть цикл $a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}$.

Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots a_{i_l}\}$. Тогда либо в графе есть цикл длины n, либо a_{i_1} $\square$

7.4 Существование Гамильтонова пути и цикла: замыкание по Хваталу.

7.5 Существование Гамильтонова цикла: критерий Хватала.

7.6 Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

Глава 8

Паросочетания, независимые множества и покрытия

8.1 Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

8.2 Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

8.3 Теорема Холла.

8.4 Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.

8.5 Теорема о гареме.

8.6 Теорема Кёнига и ее следствие.

8.7 Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.

8.8 Теорема Татта о совершенном паросочетании.

8.9 Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.

8.10 Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$-регулярном графе и ее следствия о регулярных факторах.

8.11 Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

8.12 Дефицит графа. Формула Бержа.

Глава 9

Связность

9.1 Точки сочленения и блоки в связном графе. Лемма о пересечении блоков. Каждое ребро содержится в единственном блоке.

9.2 Дерево блоков и точек сочленения. Лемма о пути и теорема.

9.3 Крайние блоки.

9.4 Алгоритм построения блоков с помощью последовательных разрезов графа по точкам сочленения.

9.5 Разбиение двусвязного графа на два связных графа заданных размеров.

9.6 Теорема Менгера в форме Гёринга (для двух множеств).

9.7 Следствие — две формы теоремы Менгера (для двух вершин и для вершины и множества).

9.8 Теорема Уитни.

9.9 Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин.

Глава 10

Раскраски