Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№2**
«Численное решение нелинейных уравнений и систем»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **2**

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил:
Барсуков Максим Андреевич
Группа: P3215

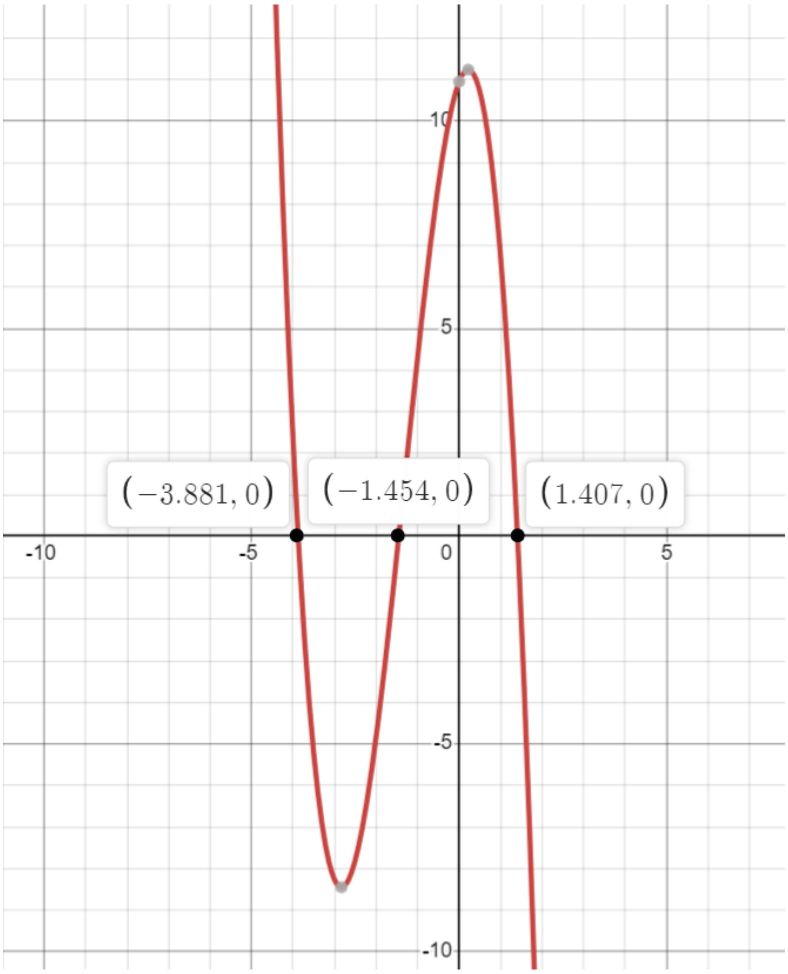
Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

1. $-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95$



2.

Для определения интервалов изоляции корней данного уравнения, можно воспользоваться методом интервалов знакопеременности. Для этого нужно найти значения функции на различных интервалах и определить знак функции на каждом из них.

Получим приближенные значения корней:
x ≈ -3.9, x ≈ -1.5, x ≈ 1.4

Теперь нужно разбить ось x на 4 интервала: (-∞, -3.9), (-3.9, -1.5), (-1.5, 1.4) и (1.4, +∞). На каждом из этих интервалов нужно определить знак функции.

Для этого можем вычислить значения функции в произвольной точке каждого интервала. Например, для интервала (-∞, -3.9) можно выбрать x = -4, для интервала (-3.9, -1.5) x = -2, для интервала (-1.5, 1.4) x = 0, и для интервала (1.4, +∞) x = 2.

Таким образом, получим следующие значения функции:

для x = -4: f(-4) = 2.27

для x = -2: f(-2) = -4.83

для x = 0: f(0) = 10.95

для x = 2: f(2) = -16.63

Знаки функции на каждом интервале будут соответственно:

(-∞, -3.9)	(-3.9, -1.5)	(-1.5, 1.4)	(1.4, +∞)
+	-	+	-

Таким образом, мы получаем два интервала изоляции корней уравнения:

(-4, -1.5), (-1.5, 1) и (1, 1.5).

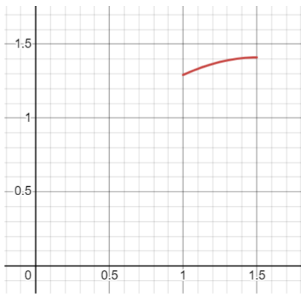
3.

$x_1 \approx -3{,}88$
$x_2 \approx -1{,}45$
$x_3 \approx 1{,}41$

4.

Крайний правый корень – **Метод простой итерации**

$\varphi(x)$

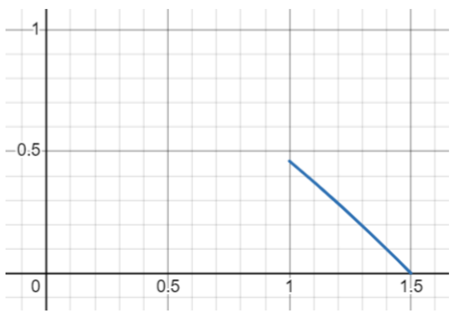


Проверка **условия сходимости** метода на выбранном интервале:
$f(x) = -1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95 = 0$
$f'(x) = -4{,}14x^2 - 10{,}84x + 2{,}57$
$f'(a) = -12{,}41 < 0, f'(b) = -23{,}005 < 0$
$\max(|f'(a)|, |f'(b)|) = 23{,}005 \rightarrow \lambda = \frac{1}{\max(|f'(x)|)} = \frac{1}{23{,}005}$

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x + \frac{-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95}{23{,}005}$$

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 + \frac{-4{,}14x^2 - 10{,}84x + 2{,}57}{23{,}005}$$

$\varphi'(x)$



На отрезке начального приближения [1, 1.5] функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема.

$|\varphi'(a)| = 0{,}461$
$|\varphi'(b)| = 0$

$|\varphi'(x)| \le q$, где $q = 0{,}461$
$0 \le q < 1 \rightarrow$ **итерационная последовательность сходится,** скорость сходимости высокая.

№	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	1.5000	1.4110	-2.047	0.089
2	1.4110	1.4070	-0.091	0.00396
3	1.4070	1.4067	-0.0082	0.00036
4	1.4067	**1.4066**	-0.00076	$3.32*10^{-5}$

Крайний левый корень – **Метод хорд**

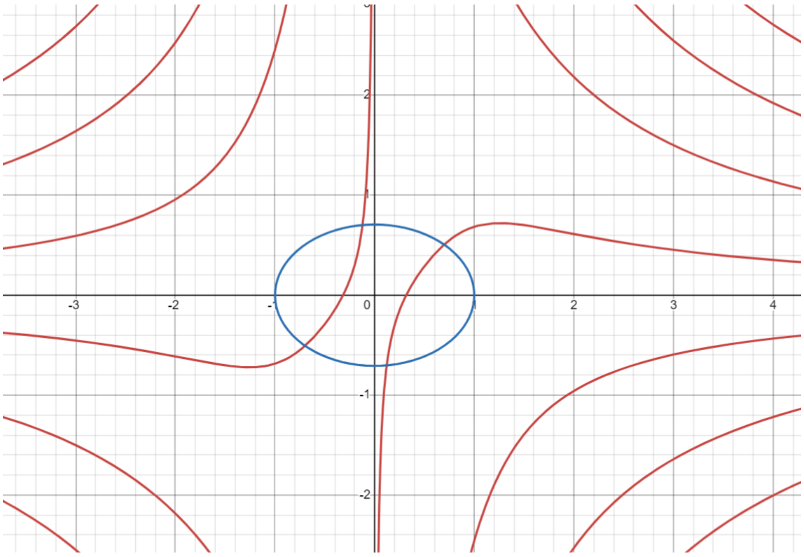
№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
1	-4.000	-1.908	-3.254	2.270	-4.098	-7.253	1.346
2	-4.000	-3.254	-3.822	2.270	-7.253	-0.996	0.568
3	-4.000	-3.822	-3.876	2.270	-0.996	-0.072	0.054
4	-4.000	-3.876	**-3.880**	2.270	-0.072	-0.005	0.004

Центральный корень – **Метод половинного деления**

№	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|a – b|
1	-1.500	1.000	-0.250	-0.443	6.720	9.990	2.500
2	-1.500	-0.250	-0.875	-0.443	9.990	5.476	1.250
3	-1.500	-0.875	-1.188	-0.443	5.476	2.566	0.625
4	-1.500	-1.188	-1.344	-0.443	2.566	1.058	0.312
5	-1.500	-1.344	-1.422	-0.443	1.058	0.305	0.156
6	-1.500	-1.422	-1.461	-0.443	0.305	-0.070	0.078
7	-1.461	-1.422	-1.441	-0.070	0.305	0.117	0.039
8	-1.461	-1.441	-1.451	-0.070	0.117	0.024	0.020
9	-1.461	-1.451	**-1.456**	-0.070	0.024	-0.023	0.010

2. Решение системы нелинейных уравнений

1. $\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$, Метод Ньютона



2.

$$\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x,y)} \ = \ 0 \\ \mathrm{g(x,y)} \ = \ 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg(xy+0.1) - x^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения эллипса и $tg(xy+0.1) - x^2 = 0$, следовательно, система имеет не более четырех различных решений.

Построим матрицу Якоби:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\ sec(xy+0.1) - 2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\ sec^2(xy+0.1),\ \frac{\partial g}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 4y$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y\ sec(xy+0.1) - 2 & x\ sec^2(xy+0.1) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - tg(xy+0.1) \\ 1 - \ x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ysec(xy+0.1)\Delta x - 2\Delta x + \ x\ sec^2(xy+0.1)\Delta y = x^2 - tg(xy+0.1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - \ x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Корень 1: Шаг 1: Выбираем $x_0 = -0.12;\ y_0 = 0.7$

$$\begin{cases} ysec(xy+0.1)\Delta x - 2\Delta x + \ x\ sec^2(xy+0.1)\Delta y = x^2 - tg(xy+0.1) \\ 2x\Delta x + 4y\Delta y = 1 - \ x^2 - 2y^2 \end{cases}$$

Шаг 2. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} \Delta x + 0.077\,\Delta y = 0.0154 \\ -0.2\Delta x + 2.8\Delta y = 0.01 \end{cases} \rightarrow \Delta x = -0.0014;\ \Delta y = 0.0019$$

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

$x_1 = x_0 + \Delta x = -0.12 - 0.0014 = -0.1214$

$y_1 = y_0 + \Delta y = 0.7 + 0.0019 = 0.7019$

$|x_1 - x_0| \le \varepsilon, |y_1 - y_0| \le \varepsilon$

$|-0.1214 + 0.12| \le \varepsilon$, $|0.7019 - 0.7| \le \varepsilon$ → ответ найден, **корень 1**: $(-0.1214, 0.7019)$

Аналогично находим **другой корень**: $(0.698, 0.506)$

Из графического решения, корни симметричны, следовательно, **другие 2 корня** $(-0.698, -0.506), (0.1214, -0.7019)$

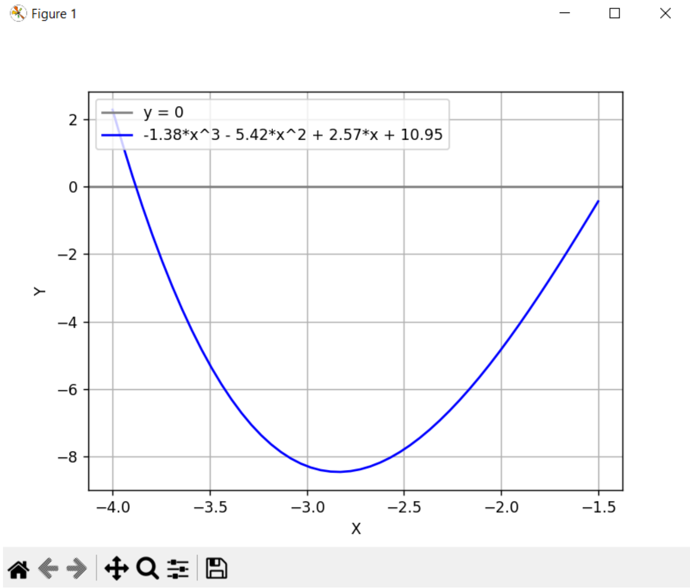
2. Программная реализация задачи

https://github.com/maxbarsukov/itmo/tree/master/4%20%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%BC%D0%B0%D1%82/%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5/lab2

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

```
Выберите тип программы:
1: Нелинейное уравнение
2: Система нелинейных уравнений
3: Выход
Введите номер типа: 1
```

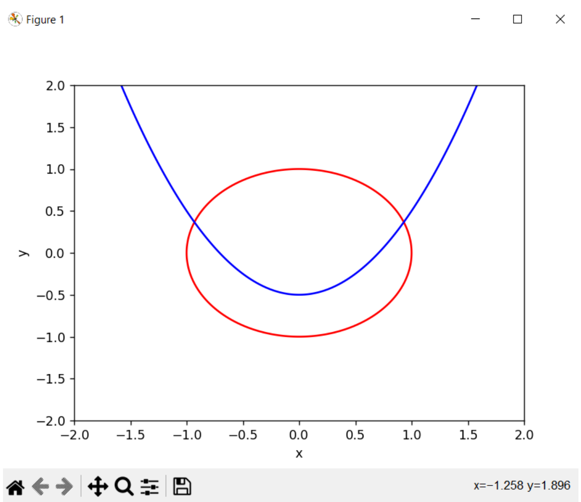
```
Выберите уравнение:
1: -1.38*x^3 - 5.42*x^2 + 2.57*x + 10.95
2: x^3 - 1.89*x^2 - 2*x + 1.76
3: x/2 - 2*(x + 2.39)^(1/3)
4: -x/2 + e^x + 5*sin(x)
Введите номер уравнения: 1
Выберите метод:
1: Метод половинного деления
2: Метод хорд
3: Метод простой итерации
4: Метод Ньютона
Введите номер метода: 2
Введите имя файла для загрузки исходных данных и интервала или пустую строку, чтобы ввести вручную:
Введите левую границу интервала: -4
Введите правую границу интервала: -1.5
Введите погрешность вычисления: 0.000001
Введите имя файла для вывода результата или пустую строку, чтобы вывести в консоль:
Процесс решения:
1: a = -4.000, b = -1.908, x = -3.254, f(a) = 2.270, f(b) = -4.098, f(x)=-7.253338075903418, |x_k+1 - x_k| = 1.3463753767240685
2: a = -4.000, b = -3.254, x = -3.822, f(a) = 2.270, f(b) = -7.253, f(x)=-0.9961797791033895, |x_k+1 - x_k| = 0.568022551124693
3: a = -4.000, b = -3.822, x = -3.876, f(a) = 2.270, f(b) = -0.996, f(x)=-0.07183806668107628, |x_k+1 - x_k| = 0.05421895603697724
4: a = -4.000, b = -3.876, x = -3.880, f(a) = 2.270, f(b) = -0.072, f(x)=-0.004903874657289364, |x_k+1 - x_k| = 0.0037899812480461925
5: a = -4.000, b = -3.880, x = -3.880, f(a) = 2.270, f(b) = -0.005, f(x)=-0.0003334833824535366, |x_k+1 - x_k| = 0.0002581574086821803
6: a = -4.000, b = -3.880, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.000, f(x)=-2.267235988462346e-05, |x_k+1 - x_k| = 1.7553172981354948e-05
7: a = -4.000, b = -3.881, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.000, f(x)=-1.541386730252725e-06, |x_k+1 - x_k| = 1.1933664496588392e-06
8: a = -4.000, b = -3.881, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.000, f(x)=-1.047914928165028e-07, |x_k+1 - x_k| = 8.113129679188091e-08

Результат:
Найденный корень уравнения: -3.880518
Значение функции в корне: -1.047914928165028e-07
Число итераций: 8

Еще раз? [y/n]
```



Выберите тип программы:
1: Нелинейное уравнение
2: Система нелинейных уравнений
3: Выход
Введите номер типа: 2
Выберите систему уравнений:
1: x^2 + y^2 - 1, x^2 - y - 0.5
Введите номер системы: 1
Введите начальные приближения x0, y0: 0 0
Введите погрешность вычисления: 0.01
0. x1=1.0, x2=-0.5, xnext=(1.0, -0.5), |xk+1 - xk|=1.118033988749895
1. x1=0.8660254037844386, x2=0.5, xnext=(0.8660254037844386, 0.5), |xk+1 - xk|=1.0089346819448337
2. x1=0.8660254037844386, x2=0.2499999999999999, xnext=(0.8660254037844386, 0.2499999999999999), |xk+1 - xk|=0.2500000000000001
3. x1=0.9682458365518543, x2=0.2499999999999999, xnext=(0.9682458365518543, 0.2499999999999999), |xk+1 - xk|=0.10222043276741566
4. x1=0.9682458365518543, x2=0.4375000000000001, xnext=(0.9682458365518543, 0.4375000000000001), |xk+1 - xk|=0.18750000000000022
5. x1=0.8992184106211348, x2=0.4375000000000001, xnext=(0.8992184106211348, 0.4375000000000001), |xk+1 - xk|=0.06902742593071942
6. x1=0.8992184106211348, x2=0.3085937499999999, xnext=(0.8992184106211348, 0.3085937499999999), |xk+1 - xk|=0.12890625000000022
7. x1=0.9511939326241193, x2=0.3085937499999999, xnext=(0.9511939326241193, 0.3085937499999999), |xk+1 - xk|=0.0519755220029845
8. x1=0.9511939326241193, x2=0.4047698974609377, xnext=(0.9511939326241193, 0.4047698974609377), |xk+1 - xk|=0.09617614746093783
9. x1=0.9144185748930639, x2=0.4047698974609377, xnext=(0.9144185748930639, 0.4047698974609377), |xk+1 - xk|=0.03677535773105545
10. x1=0.9144185748930639, x2=0.3361613301094619, xnext=(0.9144185748930639, 0.3361613301094619), |xk+1 - xk|=0.0686085673514758
11. x1=0.9418044171371449, x2=0.3361613301094619, xnext=(0.9418044171371449, 0.3361613301094619), |xk+1 - xk|=0.027385842244081027
12. x1=0.9418044171371449, x2=0.38699556013903724, xnext=(0.9418044171371449, 0.38699556013903724), |xk+1 - xk|=0.05083423002957532

13. x1=0.9220815779705572, x2=0.38699556013903724, xnext=(0.9220815779705572, 0.38699556013903724), |xk+1 - xk|=0.01972283916658768
14. x1=0.9220815779705572, x2=0.3502344364326728, xnext=(0.9220815779705572, 0.3502344364326728), |xk+1 - xk|=0.03676112370636442
15. x1=0.936662073288274, x2=0.3502344364326728, xnext=(0.936662073288274, 0.3502344364326728), |xk+1 - xk|=0.014580495317716768
16. x1=0.936662073288274, x2=0.3773358395366879, xnext=(0.936662073288274, 0.3773358395366879), |xk+1 - xk|=0.027101403104015098
17. x1=0.9260764893901275, x2=0.3773358395366879, xnext=(0.9260764893901275, 0.3773358395366879), |xk+1 - xk|=0.010585583898146456
18. x1=0.9260764893901275, x2=0.35761766420114305, xnext=(0.9260764893901275, 0.35761766420114305), |xk+1 - xk|=0.019718175335544874
19. x1=0.9338680882497905, x2=0.35761766420114305, xnext=(0.9338680882497905, 0.35761766420114305), |xk+1 - xk|=0.007791598859662963
20. x1=0.9338680882497905, x2=0.3721096062513185, xnext=(0.9338680882497905, 0.3721096062513185), |xk+1 - xk|=0.014491942050175455
21. x1=0.9281887959545131, x2=0.3721096062513185, xnext=(0.9281887959545131, 0.3721096062513185), |xk+1 - xk|=0.005679292295277416
22. x1=0.9281887959545131, x2=0.3615344409354887, xnext=(0.9281887959545131, 0.3615344409354887), |xk+1 - xk|=0.010575165315829804

Неизвестные: x = 0.92819, y = 0.36153
Количество итераций: 22
Невязка: -0.0077584070819749495, 0.0



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием Python. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов.