

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Национальный исследовательский университет ИТМО**»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№4**
«Аппроксимация функции методом наименьших квадратов»
по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **2**

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил:
Барсуков Максим Андреевич
Группа: Р3215

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

1. Вычислительная реализация задачи

Линейная аппроксимация:

$$y = \frac{15x}{x^4 + 2}$$

$$n = 11$$

$$x \in [0; 4]$$

$$h = 0.4$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y _i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233

$$\varphi(x) = a + bx$$

Вычисляем суммы: $sx = 22$, $sxx = 61.6$, $sy = 19.52$ $sxy = 26.116$

$$\begin{cases} n * a + sx * b = sy \\ sx * a + sxx * b = sxy \end{cases} \begin{cases} 11 * a + 22 * b = 19.52 \\ 22 * a + 61.6 * b = 26.116 \end{cases} \begin{cases} 11 * a + 22 * b = 19.52 \\ 17.6 * b = -12.924 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -12.924 / 17.6 = -0.7343 \\ 11a = 19.52 - 22 * (-0.7343) = 35.6746 \end{cases} \begin{cases} b = -0.7343 \\ a = 3.2431 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = 3.2431 - 0.7343 * x$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y _i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233
φ(x _i)	3.243	2.949	2.656	2.362	2.068	1.775	1.481	1.187	0.893	0.6	0.306
(φ(x _i) - y _i) ²	10.518	0.0	5.403	4.231	0.544	0.012	0.21	0.276	0.197	0.079	0.00

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} = \mathbf{1.3972}$$

Квадратичная аппроксимация:

$$y = \frac{15x}{x^4 + 2}$$

$$n = 11$$

$$x \in [0; 4]$$

$$h = 0.4$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y _i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2$$

Вычисляем суммы:

$$sx = 22, sxx = 61.6, sxxx = 193.6, sxxxx = 648.52, sy = 19.52, sxy = 26.116, sxxxy = 47.405$$

$$\begin{cases} n * a + sx * b + sxx * c = sy \\ sx * a + sxx * b + sxxx * c = sxy \\ sxx * a + sxxx * b + sxxxx * c = sxxxy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 * a + 22 * b + 61.6 * c = 19.52 \\ 22 * a + 61.6 * b + 193.6 * c = 26.116 \\ 61.6 * a + 193.6 * b + 648.52 * c = 47.405 \end{cases}$$

По методу Крамера:

$$\Delta = 4251.456$$

$$\Delta_1 = 9043.80576, \Delta_2 = 4785.47696, \Delta_3 = -1976.8496$$

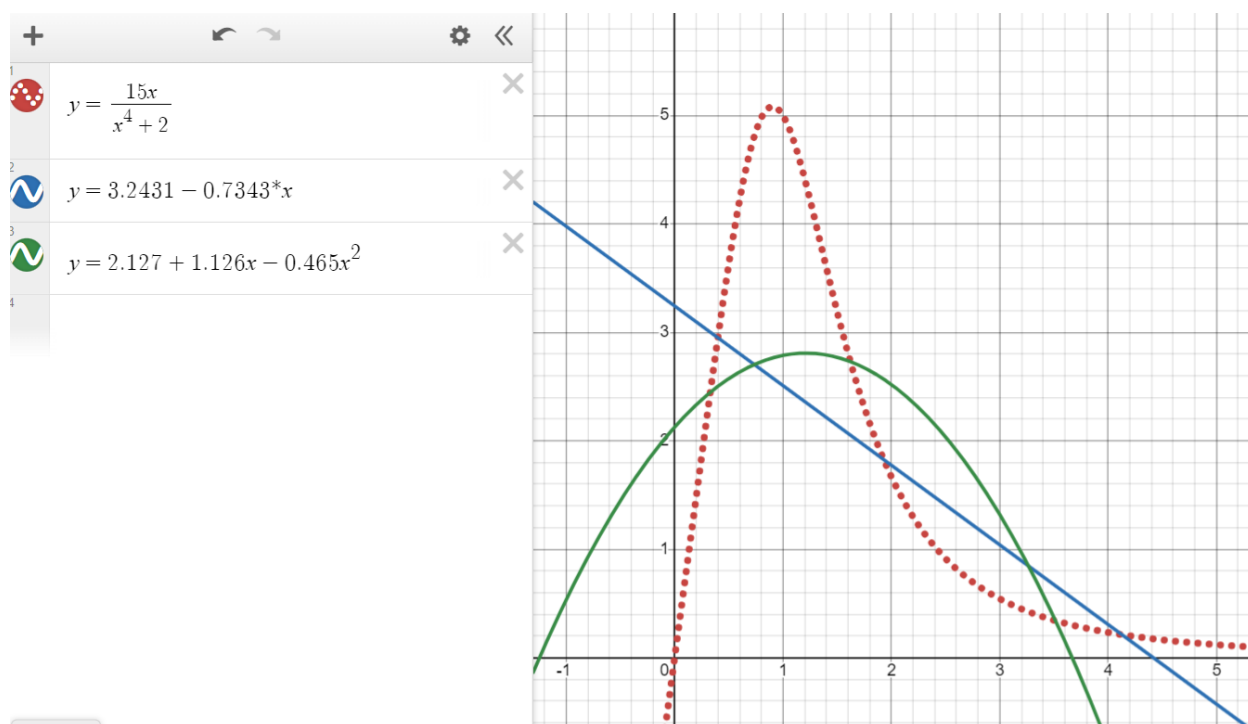
$$\begin{cases} a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9043.80576}{4251.456} \approx 2.127 \\ b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4785.47696}{4251.456} \approx 1.126 \\ c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1976.8496}{4251.456} \approx -0.465 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = 2.127 + 1.126x - 0.465x^2$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x _i	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y _i	0.0	2.962	4.98	4.419	2.806	1.667	1.023	0.662	0.449	0.318	0.233
φ(x _i)	2.127	2.503	2.73	2.809	2.738	2.519	2.151	1.634	0.969	0.154	-0.809
(φ(x _i) - y _i) ²	4.524	0.211	5.062	2.593	0.005	0.726	1.272	0.945	0.27	0.027	1.086

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} = 1.23292$$

1.23292 < 1.3972, у квадратичной аппроксимации среднее квадратичное отклонение меньше, поэтому это приближение лучше.



2. Программная реализация задачи

<https://github.com/maxbarsukov/itmo/tree/master/4%20вычмат/лабораторные/lab4>



Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

Напишите 'f' для ввода из файла, 'e' для задания или 't' для ввода с клавиатуры: e
Вывод в файл 'f' или в терминал 't'? [f/t] t
Выбран вариант вывода в терминал.

Линейная функция:

- * Функция: $f(x) = a + b * x_i$
- * Коэффициенты (a, b): [3.2432, -0.7343]
- * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 1.39765$
- * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.30636$
- * Мера отклонения: $S = 21.48774$
- * Коэффициент корреляции Пирсона: $r = -0.5534946379164877$

Полиномиальная 2-й степени функция:

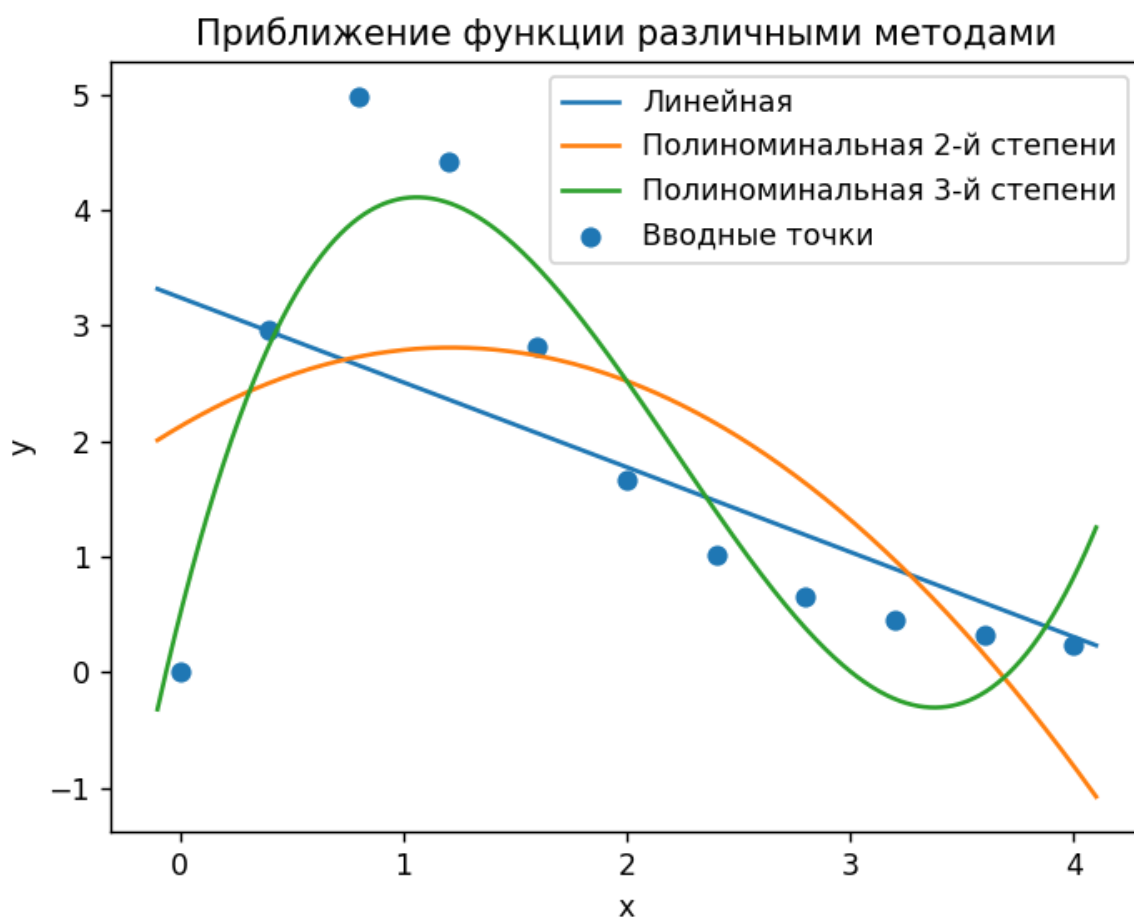
- * Функция: $f(x) = a + b * x_i + c * x_i^2$
- * Коэффициенты (a, b, c): [2.1252, 1.129, -0.4658]
- * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 1.23293$
- * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.46022$
- * Мера отклонения: $S = 16.72131$

Полиномиальная 3-й степени функция:

- * Функция: $f(x) = a + b * x_i + c * x_i^2 + d * x_i^3$
 - * Коэффициенты (a, b, c, d): [0.4892, 7.6274, -4.7261, 0.71]
 - * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 0.60032$
 - * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.87203$
 - * Мера отклонения: $S = 3.96422$
-

Лучшая функция приближения: Полиномиальная 3-й степени

Спасибо за использование программы!



Напишите 'f' для ввода из файла, 'e' для задания или 't' для ввода с клавиатуры: t

Введите 'quit', чтобы закончить ввод

1.2 7.4

2.9 9.5

4.1 11.1

5.5 12.9

6.7 14.6

7.8 17.3

9.2 18.2

10.3 20.7

quit

Вывод в файл 'f' или в терминал 't'? [f/t] t

Выбран вариант вывода в терминал.

Линейная функция:

* Функция: $f(x) = a + b * x_i$

* Коэффициенты (a, b): [5.2911, 1.4543]

* Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 0.41016$

* Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.99086$

* Мера отклонения: $S = 1.34585$

* Коэффициент корреляции Пирсона: $r = 0.9954179478701582$

Полиномиальная 2-й степени функция:

- * Функция: $f(x) = a + b * x_i + c * x_i ** 2$
 - * Коэффициенты (a, b, c): [5.9431, 1.1526, 0.026]
 - * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 0.35635$
 - * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.99310$
 - * Мера отклонения: $S = 1.01589$
-

Полиномиальная 3-й степени функция:

- * Функция: $f(x) = a + b * x_i + c * x_i ** 2 + d * x_i ** 3$
 - * Коэффициенты (a, b, c, d): [6.1779, 0.9548, 0.0669, -0.0024]
 - * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 0.35348$
 - * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.99321$
 - * Мера отклонения: $S = 0.99959$
-

Экспоненциальная функция:

- * Функция: $f(x) = a * \exp(b * x_i)$
 - * Коэффициенты (a, b): [6.8396, 0.1111]
 - * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 0.58297$
 - * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.98153$
 - * Мера отклонения: $S = 2.71887$
-

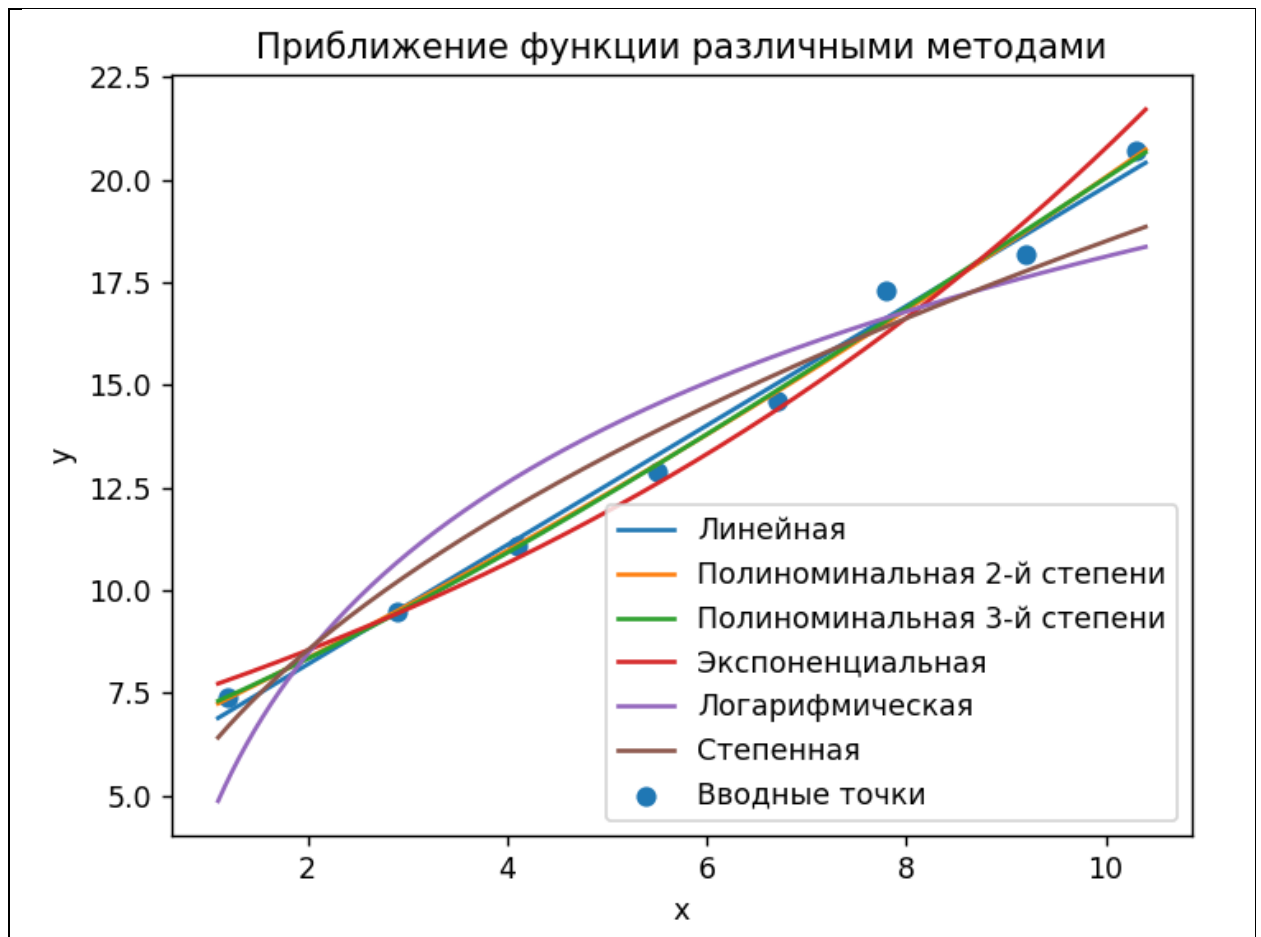
Логарифмическая функция:

- * Функция: $f(x) = a + b * \log(x_i)$
 - * Коэффициенты (a, b): [4.2959, 6.0086]
 - * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 1.52859$
 - * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.87301$
 - * Мера отклонения: $S = 18.69276$
-

Степенная функция:

- * Функция: $f(x) = a * x_i ** b$
 - * Коэффициенты (a, b): [6.1287, 0.4799]
 - * Среднеквадратичное отклонение: $\sigma = 1.00288$
 - * Коэффициент детерминации: $R^2 = 0.94535$
 - * Мера отклонения: $S = 8.04618$
-

Лучшая функция приближения: Полиномиальная 3-й степени



Вывод

В ходе данной работы была выполнена аппроксимация функций с использованием линейного, квадратичного, кубического, экспоненциального и логарифмического приближений. Также на основе этих методов был реализован Python скрипт, который реализует метод наименьших квадратов и строит графики исходной функции и аппроксимаций.

Исследование позволило определить наилучшее приближение, вычислить среднеквадратические отклонения и коэффициент корреляции Пирсона для линейной зависимости.