

## Лекция 5

Электрическое поле в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость. Электрический диполь. Поляризация диэлектриков. Электронная поляризация. Ориентационная (дипольная) поляризация. Поляризация жидких диэлектриков. Вектор электрического смещения. Электростатика однородных изотропных диэлектриков. Условия на границе раздела двух диэлектриков.

### Электрическое поле в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость

Как уже отмечалось, в диэлектриках при обычных условиях свободные заряды практически отсутствуют, и потому они являются плохими проводниками электричества (изоляторами). Можно было бы подумать, что при помещении изолятора в электрическое поле вообще ничего не происходит. Однако это не так: эксперименты показали, что отсутствие свободных зарядов в диэлектриках вовсе не мешает им реагировать на внешнее электрическое поле. Еще М. Фарадей обнаружил, что если между обкладками конденсатора поместить диэлектрическую пластину, то емкость конденсатора возрастает. Когда изолятор заполняет все пространство между обкладками, емкость конденсатора возрастает в  $\varepsilon$  раз, где безразмерная величина  $\varepsilon > 1$  принимает разные значения для различных материалов. Эта величина называется диэлектрической проницаемостью данного вещества.

Рассмотрим плоский конденсатор. Зарядим его и вставим внутрь диэлектрическую пластину (рисунок). Величины, относящиеся к конденсатору без диэлектрика, будем снабжать индексом 0. Так как заряд конденсатора не меняется при помещении в него диэлектрика, записываем соотношения

$$\begin{aligned} q &= C_0 U_0, & C_0 &= \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \\ q &= C U, & C &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали экспериментальный факт увеличения емкости конденсатора с диэлектри-

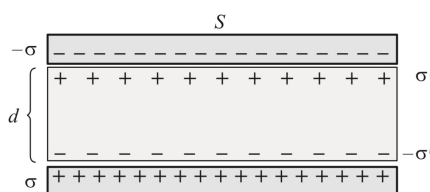


Рисунок 1: Плоский конденсатор с диэлектрической пластиной между обкладками

ком в  $\varepsilon$  раз. При том же заряде на обкладках разность их потенциалов  $U$  уменьшается в  $\varepsilon$  раз по сравнению с «пустым» конденсатором:  $U = U_0/\varepsilon$ . Поскольку поле в плоском конденсаторе однородно, получаем

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Иными словами, присутствие диэлектрика между пластинами приводит к уменьшению напряженности электрического поля в конденсаторе.

Уменьшение разности потенциалов между обкладками и увеличение емкости конденсатора мы наблюдаем и в случае помещения металлической пластины в пространство между обкладками. Там причина уменьшения разности потенциалов объясняется электростатической индукцией: на оболочке наводились индуцированные заряды, которые компенсировали внешнее поле от обкладок. Соответственно, электрическое поле существовало только в пространстве, не занятом пластиной.

В диэлектрике нет свободных зарядов, которые могут перемещаться по его объему, но идея возникновения на поверхности изолятора каких-то дополнительных зарядов (их называют в этом случае поляризационными или связанными) кажется привлекательной из-за возможности объяснить экспериментальные факты. Поэтому мы принимаем макроскопическую модель, которая, разумеется, должна быть обоснована впоследствии на микроскопическом уровне и проверена на практике вместе со всеми ее следствиями. Мы предположим, что при помещении диэлектрика в электрическое поле на его поверхности возникают поляризационные заряды с плотностью  $\sigma'$ . Поляризационные заряды создают в диэлектрике дополнительное электрическое поле  $E'$ , направленное противоположно полю от зарядов на обкладках (рисунок). Это и объясняет уменьшение величины результирующего поля  $E$  по сравнению с полем  $E_0$ . Действительно, для однородных изотропных диэлектриков

изменение поля в среде сводится только к изменению его величины:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon},$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \varepsilon \vec{E} + \vec{E}'.$$

Отсюда мы находим, какая часть результирующего поля создается поляризационными зарядами, а какая - зарядами на обкладках:

$$\vec{E}' = -(\varepsilon - 1)\vec{E} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\vec{E}_0.$$

Отрицательный знак указывает на противоположное направление поля поляризационных зарядов. Зная связь поверхностной плотности зарядов с напряженностью создаваемого ими поля

$$|\vec{E}_0| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad |\vec{E}'| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0},$$

находим

$$\sigma' = \sigma \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Заметим, что случаю проводника соответствует предел  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Действительно, тогда  $\sigma' = \sigma$ , а поле внутри материала полностью компенсируется:

$$\vec{E}' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\vec{E}_0 \rightarrow -\vec{E}_0, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \rightarrow 0.$$

При отсутствии диэлектрика ( $\varepsilon = 1$ ),  $\sigma' = 0$ ,  $E' = 0$ , и мы возвращаемся к прежним формулам электростатики в вакууме. Значения  $\varepsilon$  для некоторых диэлектриков приведены в таблице (для газов - при нормальных условиях).

Диэлектрик	$\varepsilon$	Диэлектрик	$\varepsilon$
Гелий	1,00007	Жидкий гелий	1,047
Водород	1,00027	Жидкий водород	1,23
Азот	1,00058	Жидкий азот	1,43
Лед	16	Вода	81,1
Бумага	3,5	Этиловый спирт	25,1
Фарфор	6,5	Трансформаторное масло	4,5
Титанат стронция	310	Глицерин	56,2

Рисунок 2: Значения диэлектрической проницаемости для некоторых веществ

Обратите внимание: одни и те же вещества при разных условиях имеют совершенно различные диэлектрические свойства. Значит, для их объяснения необходимо построить теорию на микроуровне, исходящую из свойств атомов и молекул.

## Электрический диполь

Чтобы понять механизм поведения диэлектриков в поле на микроскопическом уровне, нам надо сначала объяснить, как может электрически нейтральная система реагировать на внешнее электрическое поле. Простейший случай полное отсутствие зарядов - нас не интересует. Мы знаем наверняка, что в диэлектрике имеются электрические заряды - в составе атомов, молекул, ионов кристаллической решетки и т. д. Поэтому мы рассмотрим следующую по простоте конструкции электронейтральную систему - два равных по величине и противоположных по знаку точечных заряда  $+q$  и  $-q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Такая система называется электрическим диполем. Основной характеристикой диполя является электрический дипольный момент. Введем вектор  $\vec{l}$ , направленный от отрицательного заряда ( $-q$ ) к положительному ( $+q$ ), тогда вектор  $\vec{p}$ , называемый электрическим моментом диполя, определяется как

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

Рассмотрим поведение диполя во внешнем поле  $\vec{E}$  (рисунок). Пусть направление дипольного момента составляет с вектором  $\vec{E}$  угол  $\alpha$ . На положительный заряд диполя действует сила, совпадающая по направлению с  $\vec{E}$  и равная  $\vec{F}_1 = q\vec{E}$ , а на отрицательный - противоположно направленная и равная  $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$ . Вращающий момент этой пары сил равен

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha.$$

Так как  $ql = p$ , то  $M = El \sin \alpha$  или в векторных обозначениях  $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$  (Напомним, что символ  $[\vec{a}, \vec{b}]$  означает векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .) Таким образом, при неизменном дипольном моменте молекулы ( $p = \text{const}$ ) механический момент, действующий на нее, пропорционален напряженности  $\vec{E}$  внешнего электрического поля и зависит от угла между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ .

Под действием момента сил  $\vec{M}$  диполь поворачивается, при этом совершается работа

$$dA = Md\alpha = pE \sin \alpha d\alpha,$$

которая идет на увеличение потенциальной энергии. Отсюда следует изменение  $dW$  потенциальной энергии, связанное с поворотом диполя:

$$dW = pE \sin \alpha d\alpha.$$

Следовательно, потенциальная энергия диполя в электрическом поле равна

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const},$$

или

$$W = -pE \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{E},$$

если положить  $\text{const} = 0$ . Из рисунка видно, что внешнее электрическое поле стремится повернуть диполь таким образом, чтобы вектор его электрического момента  $\vec{p}$  совпал по направлению с вектором  $\vec{E}$ . В этом случае  $\alpha = 0$ , а следовательно, и  $M = 0$ . В то же время, при  $\alpha = 0$  потенциальная энергия диполя во внешнем поле принимает минимальное значение  $W_{\min} = -pE$ , что соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении диполя от этого положения снова возникает механический момент, который возвращает диполь в первоначальное положение. Другое положение равновесия, когда дипольный момент направлен против поля ( $\alpha = \pi, M = 0$ ), не является устойчивым. Потенциальная энергия в этом случае принимает максимальное значение  $W_{\max} = pE$ , и при небольших отклонениях от такого положения возникающие силы не возвращают диполь назад, а еще больше отклоняют его. В случае неоднородного поля на рассматриваемый

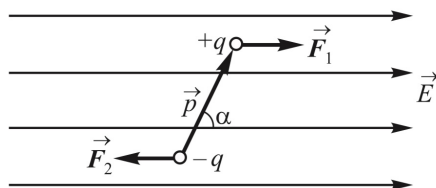


Рисунок 3: Силы, действующие на электрический диполь, помещенный во внешнее поле

диполь будет действовать еще и равнодействующая сила  $\vec{F}_{\text{равн}}$ , стремящаяся его сдвинуть. Мы рассмотрим здесь частный случай. Направим ось  $x$  вдоль поля  $\vec{E}$ . Пусть диполь под действием поля уже повернулся вдоль силовой линии, так что отрицательный заряд находится в точке с координатой  $x$ , а положительный заряд расположен в точке с координатой  $x + l$ . Представим себе, что величина напряженности поля зависит от координаты  $x$ . Тогда равнодействующая сила  $F$  равна

$$F = F_1 + F_2 = qE(x + l) - qE(x) = q \frac{\partial E}{\partial x} l = p \frac{\partial E}{\partial x}.$$

Такой же результат может быть получен из общего соотношения  $F_x = -\partial W / \partial x$ , где  $W$  - потенциальная энергия диполя во внешнем поле. Если  $E$  - растущая функция  $x$ , то  $\partial E / \partial x > 0$  и равнодействующая сил положительна. Это значит, что она стремится втянуть диполь в область возрастающего поля. Этим объясняется известный эффект, когда нейтральные кусочки бумаги притягиваются к наэлектризованной расческе. В плоском конденсаторе с однородным полем они остались бы неподвижными.

В реальных веществах не часто встречаются диполи, образованные только двумя зарядами. Обычно мы имеем дело с более сложными системами. Но понятие электрического дипольного момента применимо и к системам со многими зарядами. В этом случае он определяется как

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

где  $q_i, \vec{r}_i$  - величина заряда с номером  $i$  и его местоположение соответственно. В случае двух зарядов  $q_1 = q, q_2 = -q$  мы приходим к прежнему выражению  $\vec{p} = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{l}$ . Пусть наша система электрически нейтральна. В ней есть положительные заряды, величины которых и местоположения мы обозначим верхним индексом «+», а индексом «-» снабдим абсолютные величины отрицательных зарядов и их радиусы-векторы. Тогда записывается в виде

$$\vec{p} = \sum_i q_i^+ \vec{r}_i^+ - \sum_i q_i^- \vec{r}_i^-.$$

Электрическая нейтральность системы означает равенство полного положительного заряда и суммы абсолютных величин всех отрицательных зарядов:

$$q = \sum_i q_i^+ = \sum_i q_i^-.$$

Введем понятие «центра зарядов» - положительных  $\vec{R}^+$  и отрицательных  $\vec{R}^-$ :

$$\vec{R}^+ = \frac{\sum_i q_i^+ \vec{r}_i^+}{\sum_i q_i^+}, \quad \vec{R}^- = \frac{\sum_i q_i^- \vec{r}_i^-}{\sum_i q_i^-}.$$

Мы получили выражение аналогичное формулам для центра масс в механике, и потому мы назвали их центрами положительных и отрицательных зарядов соответственно. Электрический дипольный момент системы зарядов:

$$\vec{p} = q(\vec{R}^+ - \vec{R}^-) = q\vec{L},$$

где  $\vec{L}$  - вектор, проведенный из центра отрицательных зарядов в центр положительных зарядов. Таким образом любую систему зарядов можно представить как некий эквивалентный диполь.

Полный заряд электронеutralной системы зарядов равен нулю, и потому на больших расстояниях ее электрическое поле ведет себя как поле диполя и убывает быстрее, чем кулоновское поле точечного заряда. Найдем электрическое поле диполя. Если положительный заряд  $q$  расположен в точке с радиус-вектором  $\vec{r}^+$ , а отрицательный  $-q$  - в точке с радиус-вектором  $\vec{r}^-$ , то их суммарное электрическое поле в вакууме равно суперпозиции полей каждого из них:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{|\vec{r} - \vec{r}^+|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}^-}{|\vec{r} - \vec{r}^-|^3} \right).$$

На больших расстояниях от диполя  $r \gg r^+, r^-$  можно разложить выражение по степеням отношений  $r^+/r$  и  $r^-/r$ , пренебрегая их квадратами:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}^+|^{-3} &= (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}^+ + r^{+2})^{-3/2} \approx r^{-3} \left( 1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} \left( 1 + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right), \\ \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{|\vec{r} - \vec{r}^+|^3} &\approx \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{r^3} \left( 1 + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r^3} \left( \vec{r} - \vec{r}^+ + \vec{r} \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}^+}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Заменяя индексы «+» на «-», мы получим аналогичное выражение для второго слагаемого. Вычитая одно из другого, получаем

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \vec{r}^- - \vec{r}^+ + \vec{r} \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r}^+ - \vec{r}^-)}{r^2} \right).$$

Вектор  $\vec{l} = \vec{r}^+ - \vec{r}^-$  направлен от отрицательного заряда к положительному, и потом произведение  $\vec{p} = q\vec{l}$  есть дипольный момент системы.

В итоге приходим к окончательному выражению для поля электрического диполя  $\vec{p}$  в вакууме:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

где введено обозначение  $\vec{n} = \vec{r}/r$  для единичного вектора в направлении радиус-вектора точки наблюдения. Действительно, поле диполя  $E \propto 1/r^3$ , т. е. убывает быстрее кулоновского.

## Поляризация диэлектриков

Под действием внешнего электрического поля диэлектрики поляризуются. Процессы, происходящие в диэлектрике, можно понять, исходя из представлений о диэлектрике как о среде, состоящей из попарно связанных разноименных зарядов. В отличие от проводников в диэлектриках нет «свободных» зарядов, которые под действием внешнего поля могут двигаться по всему объему образца. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, прочно связаны между собой и способны перемещаться только в пределах своей молекулы (или атома), т. е. на расстоянии порядка  $10^{-9} - 10^{-10}$  м.

Диэлектрик может рассматриваться как система электрических диполей. Воздействие внешнего электрического поля на диэлектрик является результатом реакции этой системы диполей (или соответствующего ей эквивалентного диполя). Такое представление оказывается достаточным для объяснения большинства процессов, относящихся к диэлектрикам. Различают три вида поляризации диэлектриков: электронную, ионную и дипольную.

За меру поляризации диэлектриков принимается вектор поляризации  $\vec{P}$ , который представляет собой отношение дипольного электрического момента диэлектрика к его объему:

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Здесь  $\vec{p}_i$  - вектор дипольного момента молекулы,  $N$  - число дипольных молекул, содержащихся в объеме  $V$  диэлектрика.

Так как размерность дипольного момента в СИ  $[p] = \text{Кл} \cdot \text{м}$ , то вектор поляризации измеряется в  $\text{Кл}/\text{м}^2$ . Его размерность совпадает с размерностью поверхностной плотности зарядов. Это наводит на мысль, что вектор поляризации связан с плотностью поляризационных зарядов, возникающих на поверхности диэлектрика, помещенного во внешнее поле.

## Электронная и ионная поляризация

Атомы представляют собой положительно заряженные ядра, окруженные облаком электронов. При помещении атома в электрическое поле его электронное облако немного смещается относительно ядер. Вследствие смещения центров положительных и отрицательных зарядов у атома появляется электрический дипольный момент — возникает *электронная* поляризация, которая при выключении внешнего поля полностью исчезает. С ней сходна *ионная* поляризация в ионных кристаллах (например, в кристаллах соли  $\text{NaCl}$ ). Под действием поля положительно заряженные ионы натрия  $\text{Na}^+$  и отрицательно заряженные ионы хлора  $\text{Cl}^-$  смещаются в разные стороны из своих равновесных положений, из-за чего каждая элементарная ячейка кристалла приобретает электрический дипольный момент. Аналогичные явления происходят и в отдельных молекулах при смещении ядер входящих в них атомов и изменении равновесных расстояний между ними. Такой механизм называют «упругой поляризацией». Более или менее очевидно, что дипольный момент диэлектрика, появляющийся вследствие упругой поляризации, пропорционален величине внешнего электрического поля. Понять это можно, рассматривая поведение потенциальной энергии  $U(x)$  взаимодействия двух разноименно заряженных частиц, где  $x$  — расстояние между ними. Пусть равновесному состоянию соответствует расстояние  $x = 0$  (частицы находятся в одной точке и дипольный момент отсутствует). При малых отклонениях от положения равновесия разлагаем энергию в ряд Тейлора:

$$U(x) \approx U(0) + x \frac{dU}{dx}(0) + \frac{x^2}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(0) + \dots$$

Мы замечаем, что: 1) первая производная в точке равновесия  $x = 0$  равна нулю; 2) вторая производная в этой точке положительна (обозначим ее буквой  $k$ ). Оба этих условия соответствуют положению устойчивого равновесия. Таким образом, вблизи равновесия любая потенциальная энергия ведет себя как

$$U(x) \approx U(0) + \frac{kx^2}{2}.$$

Соответственно, при отклонении от этого положения возникает сила

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

подобная силе упругости при растяжении пружины. Если заряды  $\pm q$  «соединены» такой «пружиной», то при наложении поля  $E$  новое равновесное расстояние между частицами будет определяться соотношением  $kx_E = qE$ . В результате находим величину возникшего дипольного момента  $p = qx_E = (q^2/k) E$ . Индуцированный внешним полем дипольный момент атома (молекулы) можно записать в виде

$$p = \alpha \varepsilon_0 E,$$

где коэффициент  $\alpha$  называется поляризуемостью атома (молекулы). Он имеет размерность объема, т. е. куба длины. Единственный параметр размерности длины - это размер самого атома (молекулы). Значит, по порядку величины поляризуемость равна объему атома. На рисунке показана

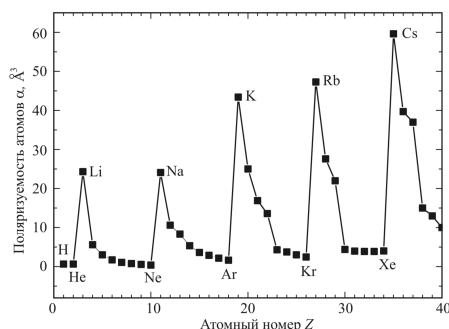


Рисунок 4: Поляризуемость  $\alpha$  свободных атомов химических элементов нескольких первых групп как функция атомного номера  $Z$  (экспериментальные данные)

электронная поляризуемость некоторых атомов первых периодов таблицы Менделеева. Видно, что поляризуемость наиболее высока у одновалентных щелочных металлов и наиболее низка у благородных газов. Здесь очевидна связь поляризуемости с валентностью элемента, что вполне естественно: если электронную конфигурацию легко деформировать, то и оторвать внешний электрон от атома тоже нетрудно. И наоборот, электронные оболочки последних элементов группы более устойчивы к внешним воздействиям. Периодичность свойств электронного облака накладывается на общий рост поляризуемости с ростом атомного номера элемента, что тоже понятно: чем дальше внешние электроны от ядра, тем легче меняется форма облачка под действием внешнего поля. Умножая индуцированный полем дипольный момент атома (молекулы) на их концентрацию  $n = N/V$  (где  $N$  — полное число таких объектов в объеме  $V$  системы), получаем поляризацию единицы объема диэлектрика — вектор поляризации

$$\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$$

## Ориентационная (дипольная) поляризация

Этот вид поляризации обусловлен наличием у молекул собственного дипольного момента. У симметричных молекул ( $H_2, O_2, N_2$  и т.п.), называемых неполярными, в отсутствие внешнего поля центры положительных и отрицательных зарядов совпадают ( $\vec{R}^+ = \vec{R}^-$ ), так что дипольный момент равен нулю. У неполярных молекул под действием электрического поля возникает упругая (электронная или ионная) поляризация, рассмотренная выше.

У некоторых несимметричных молекул ( $CO, HCl, NH$  и т.п.), называемых полярными, центры зарядов сдвинуты друг относительно друга, так что такая молекула имеет собственный постоянный дипольный момент. Векторы дипольных моментов отдельных молекул в обычном состоянии из-за теплового движения ориентированы хаотически, поэтому при отсутствии внешнего электрического поля сами дипольные моменты не могут создать собственного электрического поля внутри образца. В результате суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю. При наложении внешнего поля оно частично выстраивает дипольные моменты молекул параллельно вектору  $\vec{E}$  (тепловое движение этому, естественно, противодействует), так что образец в целом приобретает отличный от нуля дипольный момент. Такая поляризация называется ориентационной. В этом случае вектор поляризации также пропорционален напряженности внешнего поля.

Покажем это. Потенциальная энергия электрического диполя  $p_e$  в электрическом поле  $E$  дается выражением

$$W = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} = -p_e E \cos \theta,$$

где  $\theta$  - угол между диполем и напряженностью электрического поля. Вследствие теплового движения диполи ориентированы хаотично, но в этом мире хаоса все же царит некоторый порядок - распределение Больцмана. Поэтому концентрация  $n(\theta)$  диполей, направленных под углом  $\theta$  к полю, записывается в виде

$$n(\theta) = Ce^{-W/(k_B T)} = Ce^{\gamma \cos \theta}, \quad \gamma = \frac{p_e E}{k_B T}.$$

Нормировочная постоянная  $C$  определяется из условия, что интеграл от распределения Больцмана  $n(\theta)$  по полному телесному углу должен дать концентрацию  $n$  частиц:

$$n = \int n(\theta) d\Omega = 2\pi C \int_0^\pi e^{\gamma \cos \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi C \int_{-1}^1 e^{\gamma x} dx = 4\pi C \frac{\text{sh } \gamma}{\gamma},$$

где гиперболический синус определен как

$$\text{sh } \gamma = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2}.$$

Таким образом, нормированное распределение диполей имеет вид

$$n(\theta) = \frac{n}{4\pi} \frac{\gamma}{\text{sh } \gamma} e^{\gamma \cos \theta}.$$

Теперь вычисляем величину вектора поляризации. Очевидно, что он направлен вдоль поля, поэтому достаточно усреднить проекцию дипольного момента на направление  $\vec{E}$ :

$$P = \int p_e \cos \theta n(\theta) d\Omega = \frac{p_e n}{2} \frac{\gamma}{\text{sh } \gamma} \int_{-1}^1 e^{\gamma x} x dx.$$

Интеграл легко берется по частям, и мы приходим к выражению

$$P = p_e n L(\gamma), \quad L(\gamma) = \text{cth } \gamma - \frac{1}{\gamma}.$$

Функция  $L(\gamma)$  - так называемая функция Ланжевена, показывающая среднее значение косинуса угла между диполем и вектором  $\vec{E}$ , а гиперболический котангенс  $\text{cth } \gamma$  определяется как

$$\text{cth } \gamma = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{e^\gamma - e^{-\gamma}}.$$

В сильных полях (порядка мегавольт и выше)  $\gamma \gg 1$ , так что функция Ланжевена  $L(\gamma) \approx 1$  и

$$P = p_e n.$$

Это так называемое состояние насыщения, когда все дипольные моменты структурных элементов вещества выстроены вдоль поля. В обычных полях из-за малости дипольных моментов молекул  $\gamma \ll 1$ , и функцию Ланжевена можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $\gamma$ , ограничившись лишь первым ненулевым членом ряда:  $L(\gamma) \approx \gamma/3$ , где параметр  $\gamma$  определен ранее. Мы доказали, что в обычных электрических полях возникающий дипольный момент образца пропорционален напряженности электрического поля и в случае ориентационной (дипольной) поляризации диэлектрика:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности  $\chi$  (его называют диэлектрической восприимчивостью) дается выражением

$$\chi = \frac{p_e^2 n}{3 \varepsilon_0 k_B T}.$$

Линейная зависимость  $\chi$  от обратной температуры называется законом Кюри. Закон Кюри подтверждается экспериментами. Например, дипольный момент молекулы воды  $p_e = 6,14 \cdot 10^{-30}$  Кл·м. Измерения диэлектрической восприимчивости водяного пара проводились  $\chi$  при плотности пара  $\rho = 0,4181 \text{ кг/м}^3$ , полученные экспериментальные данные показаны на рисунке.

Учитывая, что молярная масса воды  $\mu = 18,016$  г/моль, а число Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>, находим концентрацию молекул:

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{0,4181 \times 6,022 \cdot 10^{23}}{18,016 \cdot 10^{-3}} = 1,40 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Подставляя численные данные, получаем

$$\chi = \frac{1,46K}{T}.$$

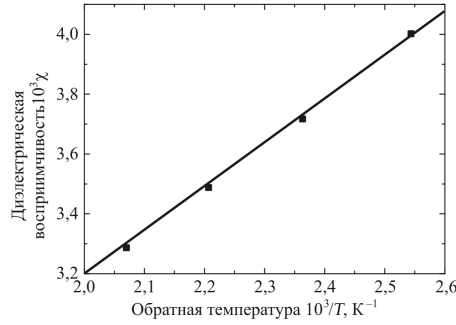


Рисунок 5: Значения восприимчивости водяного пара, измеренные в диапазоне температур от 20° С до 210° С. Экспериментальные точки хорошо описываются линейной функцией.

Наклон линейной функции (сплошная линия на рисунке) рассчитан теоретически, видно хорошее совпадение с экспериментом.

## Поляризация жидких диэлектриков

Найденные нами общие формулы для диэлектрической восприимчивости справедливы для газов: мы не учитывали влияния молекул друг на друга, что допустимо для систем, где частицы не слишком плотно упакованы. Но общий вывод остается справедливым и для конденсированных сред (жидкостей и твердых тел): во внешнем электрическом поле единица объема диэлектрика приобретает дипольный момент  $\vec{P}$ .

Молекулы в жидкостях по-прежнему обладают электронной поляризуемостью, но теперь в электрическое поле, действующее на отдельную молекулу, дает вклад поляризация молекул, находящихся в ее окружении.

Чтобы рассчитать поляризуемость молекулы в этом случае, рассмотрим сначала поле  $\vec{E}_b$  равномерно поляризованного шара радиусом  $R$ . Эту систему можно смоделировать двумя равномерно и разноименно заряженными шарами с центрами в точках  $\vec{r}^+$  и  $\vec{r}^-$ , причем расстояние между центрами шаров  $l$  мало по сравнению с их радиусами и расстоянием до точки наблюдения ( $l \ll R, r$ ). Поле внутри равномерно заряженного шара с зарядом  $Q$ :

$$\vec{E}_b = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Q}{V} \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0}.$$

Рассчитаем поле внутри сдвинутых шаров, положение центров которых описывается радиус-векторами  $\vec{r}^+$  для положительного заряда и  $\vec{r}^-$  для отрицательного:

$$\vec{E}_b^+ = \frac{Q}{V} \frac{\vec{r} - \vec{r}^+}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}_b^- = -\frac{Q}{V} \frac{\vec{r} - \vec{r}^-}{3\epsilon_0}.$$

Результирующее поле находится как векторная сумма  $\vec{E}_b = \vec{E}_b^+ + \vec{E}_b^-$ :

$$\vec{E}_b = \frac{Q}{V} \frac{\vec{r}^- - \vec{r}^+}{3\epsilon_0} = -\frac{Q}{V} \frac{\vec{l}}{3\epsilon_0},$$

где вектор  $\vec{l} = \vec{r}^+ - \vec{r}^-$  направлен от центра отрицательных зарядов к центру положительных. Дипольный момент сдвинутых шаров равен тогда  $\vec{p} = Q\vec{l}$ , его же можно выразить через вектор



поляризации:  $\vec{p} = \vec{P}V$ . Отсюда получаем выражение для электрического поля внутри равномерно поляризованного шара:

$$\vec{E}_b = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Теперь мы готовы к расчету поля, действующего на атом диэлектрической жидкости. Можно

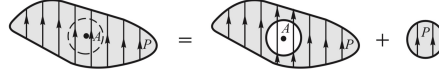


Рисунок 6: Поле в любой точке А диэлектрика можно представить в виде суммы поля равномерно поляризованного шара, мысленно «изъятого» из среды, и поля образовавшейся на его месте сферической полости.

представить этот атом помещенным в сферическую полость внутри диэлектрика. Поле  $\vec{E}_s$  в этой полости легко найти, если сообразить, что его сумма с полем  $\vec{E}_b$  равномерно поляризованного шара дает поле  $\vec{E}$  внутри однородного диэлектрика. Отсюда

$$\vec{E}_s = \vec{E} - \vec{E}_b = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Именно поле  $\vec{E}_s$  создает электронную поляризацию молекулы жидкого диэлектрика:

$$\vec{P} = \alpha n \varepsilon_0 \vec{E}_s = \alpha n \varepsilon_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \right).$$

Отсюда легко находим

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \chi = \frac{\alpha n}{1 - \alpha n/3}.$$

Это выражение для диэлектрической восприимчивости носит название формулы Клаузиуса-Моссотти. При малой поляризуемости молекулы  $\alpha n \ll 1$ , и знаменатель в этой формуле можно положить равным единице. Тогда мы придем к выражению для вектора поляризации газа.

В следующем разделе мы получим формулу связи диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости вещества:  $\varepsilon = 1 + \chi$ . Формула Клаузиуса-Моссотти позволяет предсказать диэлектрическую проницаемость жидкости, если она известна для этого же вещества в газообразном состоянии. Например, диэлектрическая проницаемость азота  $N_2$  при температуре  $t = 20^\circ C$  и давлении  $p = 0,1$  МПа равна  $\varepsilon_\Gamma = 1,00058$ . Концентрацию молекул находим из уравнения состояния идеального газа:  $n_\Gamma = p/(k_B T) = 2,47 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Отсюда вычисляем поляризуемость молекулы азота:

$$\alpha = \chi_\Gamma / n_\Gamma = (\varepsilon_\Gamma - 1) / n_\Gamma = 2,35 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Плотность жидкого азота равна  $\rho_{ж} = 0,808 \cdot 10^3 / \text{м}^3$ , молярная масса азота  $\mu_{N_2} = 0,028 \text{ кг/моль}$ , откуда получаем массу молекулы азота  $m_{N_2} = \mu_{N_2} / N_A$  и концентрацию молекул в жидком состоянии  $n_{ж} = \rho_{ж} / m_{N_2} = \rho_{ж} N_A / \mu_{N_2} = 1,74 \cdot 10^{28}$ , что в 703,5 раза больше концентрации молекул азота в газообразном состоянии. Предполагая, что поляризуемость  $\alpha$  молекул азота остается той же самой, получаем  $n_{ж} \alpha = 0,408$ , откуда по формуле Клаузиуса-Моссотти следует предсказание для величины диэлектрической проницаемости жидкого азота:

$$\varepsilon_{ж} = 1 + \frac{n_{ж} \alpha}{1 - n_{ж} \alpha/3} = 1,47.$$

Экспериментальное значение  $\varepsilon_{N_2} = 1,43$ . Заметим, что формула Клаузиуса-Моссотти получена для электронной поляризации неполярных молекул. Объяснение поведения в жидкости молекул с дипольными моментами требует более сложной теории. Подводя итоги данного раздела, сформулируем основные выводы и обсудим полученные результаты.

Внешнее электрическое поле либо создает дипольные моменты атомов и молекул, либо ориентирует существующие у них дипольные моменты. В результате диэлектрик приобретает определенный макроскопический дипольный момент. В слабых полях вектор поляризации  $\vec{P}$  пропорционален напряженности внешнего электрического поля. Это объясняется тем, что в случае упругой поляризации с увеличением  $\vec{E}$  растут дипольные моменты отдельных атомов  $\vec{p}_i$ , а при ориентационной

поляризации увеличивается степень ориентации дипольных моментов  $\vec{p}_i$  вдоль поля. Линейная зависимость имеет место лишь в простейших случаях однородных изотропных диэлектриков, где диэлектрическая восприимчивость является скаляром. В более сложных материалах направление вектора поляризации может не совпасть с направлением внешнего поля. В этом случае диэлектрическая восприимчивость представляется тензором второго ранга. Кроме того, в сильных полях надо уже учитывать члены, пропорциональные высшим степеням напряженности поля  $E$ , которыми мы пренебрегли при разложении функции Ланжевена. И это уже область нелинейной оптики. В

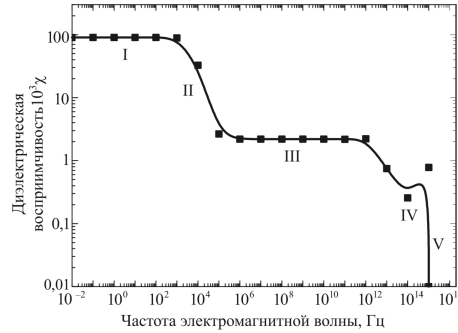


Рисунок 7: Экспериментальные данные для зависимости диэлектрической восприимчивости льда при  $t = 0^\circ \text{C}$  от частоты электромагнитной волны; указаны диапазоны частот: I — статические и низкочастотные поля, II — область длинных и средних радиоволн, III — короткие и ультракороткие радиоволны, IV — инфракрасная область, V — ультрафиолетовая область.

полную поляризацию диэлектрика в принципе могут давать вклад все три различных механизма. Однако редко бывает, чтобы все механизмы поляризации были одинаково значимы. Экспериментально вклад каждой доли можно найти, измеряя диэлектрические проницаемости при разных частотах электромагнитной волны. При малых частотах (статическое поле, которым мы сейчас занимаемся) вклад дают все три механизма поляризации (рисунок). При повышении частоты первым исчезнет вклад ориентационной части: молекулы не будут успевать поворачиваться, следуя быстро изменяющемуся электрическому полю волны. Переход к новому режиму осуществляется обычно при частотах радиодиапазона. При дальнейшем росте частоты исчезнет вклад ионной части: ионы более инерционны, нежели электроны. В диапазоне оптических частот доминирует электронная доля поляризации. При переходе к еще более высоким частотам — за ультрафиолетовой областью — даже электронные облака не будут успевать следовать за изменениями электрического поля, и поляризация диэлектрика исчезнет.

## Вектор электрического смещения

Разобравшись с поведением диэлектрика на микроскопическом уровне, вернемся к плоскому конденсатору с диэлектриком. Откуда же взялись поляризационные заряды на поверхности диэлектрической пластины между обкладками? Теперь мы знаем, что во внешнем поле, создаваемом обкладками, единица объема диэлектрика приобретает дипольный момент  $\vec{P}$ . Скажем, положительные заряды смещаются по направлению поля, а отрицательные вниз. При полной однородности поля и диэлектрика объемные нескомпенсированные заряды внутри диэлектрика не появляются. Но такой сдвиг приводит к возникновению нескомпенсированных зарядов на поверхности диэлектрической пластины. Дипольный момент диэлектрической пластины равен  $VP$ , где  $V = Sd$  — ее объем. В то же время, полный поверхностный заряд на пластине равен  $Q = \sigma' S$ , а расстояние между центрами положительных и отрицательных зарядов равно  $d$ . Поэтому дипольный момент пластины можно также записать как  $Qd = \sigma' Sd = \sigma' V$ . Из равенства  $VP = \sigma' V$  находим связь поверхностной плотности поляризационных зарядов с поляризацией:  $\sigma' = P$ .

Напряженность  $E$  суммарного поля внутри диэлектрика меньше напряженности поля  $E_0$ , создаваемого обкладками. Именно поле  $E$  действует на молекулы диэлектрика, потому  $\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E$ . Используем формулу, связывающую поле  $E'$  поляризационных зарядов с суммарным полем  $E$ :

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = \chi E = (\varepsilon - 1)E.$$

Отсюда находим связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости:

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

В общем случае вектор поляризации  $\vec{P}$  не параллелен вектору напряженности суммарного поля  $\vec{E}$ : в анизотропных диэлектриках вектор поляризации повернут на некоторый угол относительно поля. Однако мы всегда можем записать соотношение:

$$\varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}).$$

Величину  $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  принято называть специальным термином «вектор электрического смещения» (вектор индукции) и обозначать через  $\vec{D}$ . Следовательно,  $\vec{D}$  определяется равенством:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_0.$$

В рассмотренном здесь частном случае линейной зависимости поляризации от поля  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$  вектор электрического смещения равен

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Соотношение  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  имеет место для бесконечных однородных изотропных диэлектриков, в других же случаях вектор  $\vec{D}$  не параллелен  $\vec{E}$ , так как ему не параллелен вектор поляризации  $\vec{P}$ . Поле вектора  $\vec{D}$  можно графически изобразить линиями электрического смещения, которые определяются аналогично линиям напряженности электрического поля.

Найдем размерность электрического смещения  $D$ . Вектор электрического смещения точечного заряда  $q$  в вакууме равен

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

т. е.  $\vec{D}$  имеет размерность поверхностной плотности заряда: Кл/м<sup>2</sup>.

## Электростатика однородных изотропных диэлектриков

Применим теорему Остроградского-Гаусса к электрическому полю в диэлектрике. Поток вектора напряженности через замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов (свободных и поляризационных), находящихся внутри ограниченного этой поверхностью объема:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \sum q + \sum q' \right),$$

где  $\sum q'$  - поляризационные заряды. Это выражение неудобно, так как в него входят поляризационные заряды, которые, в свою очередь, зависят от напряженности электрического поля в данной точке диэлектрика.

Рассмотрим теперь поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность  $S$ :

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS.$$

Запишем выражение для поля поляризационных зарядов в виде  $\vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0$ . Тогда

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E}',$$

откуда

$$\Phi_D = \varepsilon_0 \oint_S (E_n - E'_n) dS = \varepsilon_0 \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \sum q + \sum q' \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q' \right) = \sum q.$$

Итак, мы получили, что

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q,$$

где  $\sum q$  - алгебраическая сумма свободных зарядов, окруженных поверхностью  $S$ . Подчеркнем, что линии вектора  $\vec{D}$  могут начинаться и заканчиваться на свободных зарядах, но не на поляризационных. Следует обратить внимание на отсутствие в правой части множителя  $1/\varepsilon_0$ , который имеется

в аналогичном выражении для потока вектора напряженности в вакууме. Теорема Остроградского-Гаусса в такой форме справедлива в любой диэлектрической среде - однородной и неоднородной, изотропной или анизотропной.

Из теоремы Остроградского-Гаусса для точечного заряда  $q$  внутри диэлектрика следует:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Вектор  $\vec{D}$  не определяет силу, действующую на заряд со стороны внешнего электрического поля. Силовой характеристикой по-прежнему является напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , т. е.  $\vec{F} = q\vec{E}$ . При линейной зависимости  $\vec{D}$  от  $\vec{E}$  для вычисления силы можно воспользоваться соотношением  $\vec{E} = \vec{D}/(\varepsilon_0\varepsilon)$ , откуда  $\vec{F} = q\vec{D}/(\varepsilon_0\varepsilon)$ .

Получим теперь закон Кулона для таких диэлектриков. Свободный заряд  $q_2$  создает в диэлектрике электрическое смещение  $D_2 = q_2/4\pi r^2$ , откуда следует выражение для силы взаимодействия с другим свободным зарядом  $q_1$ :

$$F = q_1 E_2 = q_1 \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Соответственно, изменится выражение для потенциала, создаваемого свободным зарядом  $q$ :

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Вследствие этого в формулах для работы по перемещению свободного заряда в поле и энергии взаимодействия свободных зарядов также появится множитель  $1/\varepsilon$ . Итак, по сравнению с аналогичными формулами для систем зарядов в вакууме для диэлектриков нужно произвести замену  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0\varepsilon$ . Поскольку приведенные выражения (при  $\varepsilon = 1$ ) являлись основным источником всех прочих соотношений, выведенных нами для вакуума, мы немедленно получаем выражения для емкостей плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов, заполненных диэлектриком:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}; \\ C &= \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)} \\ C &= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \end{aligned}$$

Для объемной плотности энергии электрического поля теперь можно написать выражение

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2},$$

которое может быть представлено в векторной форме:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}.$$

Последнее соотношение, в отличие от предыдущих, справедливо и для анизотропных диэлектриков, в которых векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не параллельны.

## Условия на границе раздела двух диэлектриков

Бесконечно протяженных однородных диэлектриков в природе не существует. На практике часто приходится иметь дело с образцами, состоящими из нескольких однородных диэлектриков с разными  $\varepsilon$  и разделенными резкой границей. В этом случае при определении полей  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  во всем пространстве следует учитывать соответствующие граничные условия.

Поместим в поле  $\vec{E}_0$  два диэлектрика с различными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . На границе раздела двух сред выделим небольшой плоский участок площадью  $S$  (рисунок).

В силу различия  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  поверхностные плотности поляризационных зарядов обоих диэлектриков будут разными:  $\sigma'_1 \neq \sigma'_2$ . Следовательно, на поверхности, по которой соприкасаются диэлектрики, возникает избыточный связанный заряд  $q_{изб}$ , обусловленный разницей в значениях  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$ .

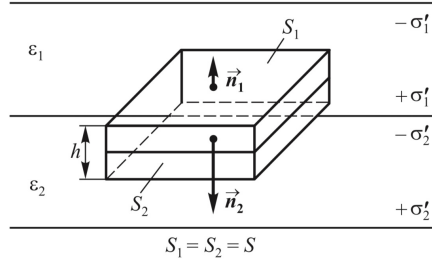


Рисунок 8: Поляризационные заряды на границе раздела двух диэлектриков

Поскольку линии вектора электрического смещения  $\vec{D}$  могут начинаться и заканчиваться только на свободных зарядах, они проходят через границу раздела диэлектриков, не прерываясь, а лишь претерпевая излом.

Граничные условия для вектора  $\vec{D}$  можно определить по теореме Остроградского-Гаусса: поток вектора  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность параллелепипеда на рисунке должен быть равен нулю, так как на границе раздела отсутствуют свободные заряды. Поскольку высоту  $h$  параллелепипеда мы устремляем к нулю, поток вектора  $\vec{D}$  записывается как

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S (D_{2n} - D_{1n}) dS = 0.$$

Так как площади верхней и нижней граней параллелепипеда произвольны, должно быть равно нулю подинтегральное выражение, т. е. на границе раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора электрического смещения непрерывна (рисунок):

$$D_{2n} = D_{1n}$$

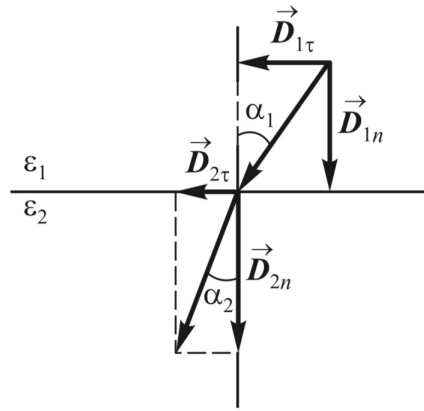


Рисунок 9: Преломление линий вектора электрического смещения на границе раздела двух диэлектриков

Нормальная составляющая вектора электрической напряженности, наоборот, терпит скачок. Для плоской пластины однородного диэлектрика  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ , и тогда можно записать

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n},$$

откуда следует

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

Электрическое поле внутри диэлектрика является суперпозицией двух полей: внешнего  $\vec{E}_0$ , создаваемого свободными зарядами, и дополнительного  $\vec{E}'$ , обусловленного связанными зарядами:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ . Поля  $\vec{E}'_1$  и  $\vec{E}'_2$ , порожденные связанными зарядами в первом и втором диэлектриках,

направлены по нормали к поверхности раздела диэлектриков (рисунок), следовательно, вклады в тангенциальную составляющую вектора  $\vec{E}$  давать не могут, откуда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Учитывая связь  $\vec{D}$  с  $\vec{E}$ , находим скачок тангенциальной составляющей вектора электрического смещения:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Учтем теперь, что тангенс угла между вектором электрического смещения и нормалью к поверхности дается отношением тангенциальной и нормальной составляющих

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}.$$

Из этих соотношений вытекает закон преломления линий вектора электрического смещения, проходящего через границу раздела двух диэлектриков:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

## Подготовка к контрольной работе №1

### ЗАДАЧА 1

Емкость плоского конденсатора равна  $C$ . Диэлектрик, заполняющий пространство между пластинами, — фарфор (диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ ). Конденсатор зарядили до разности потенциалов  $U$  и отключили от источника тока. Какую работу надо совершить, чтобы вынуть диэлектрическую пластину из конденсатора?

$C = 111$  пФ,  $\varepsilon = 6,5$ ,  $U = 600$  В,  $q = \text{const}$ ,  $A = ?$

### ЗАДАЧА 2

Найти изменение энергии конденсатора из предыдущей задачи при условии, что источник питания не отключается при удалении пластины. Какая работа совершается при удалении пластины в этом случае?

$C = 111$  пФ,  $\varepsilon = 6,5$ ,  $U = 600$  В,  $U = \text{const}$ ,  $A = ?$

## ДОПОЛНЕНИЕ

### Пироэлектрики

В ряде твердых диэлектриков поляризация существует и без электрического поля. Такие диэлектрики называются пироэлектриками. Каждая элементарная ячейка в таком кристалле обладает собственным дипольным моментом. Диполи ориентированы одинаково, поэтому кристалл оказывается спонтанно (самопроизвольно) электрически поляризованным. На противоположных его поверхностях, перпендикулярных вектору спонтанной поляризации, образуются связанные поверхностные заряды разного знака.

Если кристалл достаточно долго находится при постоянной температуре, то избыточные заряды на его поверхности компенсируются из-за собственной проводимости кристалла и из-за взаимодействия с заряженными ионами воздуха, и кристалл в целом не обнаруживает электрической поляризации.

При однородном нагревании кристалла изменяются расстояния и углы между частицами, а следовательно, и спонтанная поляризация. В результате возникают нескомпенсированная поляризация, характеризуемая вектором  $\Delta \vec{P}$ , и электрическое поле  $\vec{E}$ . Такое явление называется пироэлектрическим эффектом. Уравнение пироэлектрического эффекта имеет вид

$$\Delta \vec{P} = \vec{\gamma} \cdot \Delta T,$$

где вектор  $\vec{\gamma}$  характеризует величину пьезоэлектрического эффекта,  $\Delta T$  – приращение температуры. Электрическое поле существует до тех пор, пока не будет скомпенсировано свободными зарядами.

Пьезоэлектрический эффект наблюдается у кристаллов с низкой симметрией (турмалин, титанаты бария и свинца, триглицинсульфат и др.). У таких кристаллов есть полярное направление, не изменяющееся при всех преобразованиях симметрии (полярные диэлектрики): вдоль этого направления ориентирован вектор  $\vec{\gamma}$ .

Например, у турмалина при изменении температуры на один градус возникает поле  $E \approx 400$  В/см.

Пьезоэлектрики используют в качестве датчиков, регистрирующих изменение температуры с высокой точностью, а также для изготовления чувствительных приемников инфракрасного излучения, датчиков ударных волн, измерителей напряжения. На основе пьезоэлектриков созданы преобразователи тепловой энергии в электрическую.

Существует эффект, обратный пьезоэлектрическому. Если пьезоэлектрик поместить в электрическое поле  $\vec{E}$ , то его поляризация изменяется, что сопровождается нагреванием или охлаждением кристалла. Изменение температуры  $\Delta T$  при этом прямо пропорционально напряженности электрического поля:  $\Delta T \sim \pm E$ . Это явление называется линейным электрокалорическим эффектом. Существует и квадратичный электрокалорический эффект, когда изменение температуры  $\Delta T \sim E^2$ .

## Сегнетоэлектрики

Особой разновидностью пьезоэлектриков являются сегнетоэлектрики. Они характеризуются очень большими значениями  $\varepsilon$ , сильной нелинейной зависимостью  $\vec{P}$  от  $\vec{E}$ , доменной структурой и наличием спонтанной поляризации лишь в определенном интервале температур. В этом смысле диэлектрические свойства сегнетоэлектриков аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков, поэтому явление сегнетоэлектричества носит также название ферроэлектричества. Типичный представи-

Кристалл	Формула	$T_C$ , °C
Титанат бария	BaTiO <sub>3</sub>	133
Сегнетова соль	KNaC <sub>4</sub> H <sub>4</sub> O <sub>6</sub> × 4H <sub>2</sub> O	–18; 24
Дигидрофосфат калия	KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	–150
Дидейтерофосфат калия	KD <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	–51
Ниобат лития	LiNbO <sub>3</sub>	1210
Титанат висмута	Bi <sub>4</sub> Ti <sub>3</sub> O <sub>12</sub>	675

Рисунок 10: Температура Кюри некоторых сегнетоэлектриков

тель сегнетоэлектриков—сегнетова соль (двойная соль винной кислоты), обусловившая появление термина «сегнетоэлектрик». К сегнетоэлектрикам с более простой структурой относятся кристаллы титаната бария, титаната свинца, ниобата лития и др. Если нагревать сегнетоэлектрик, то при определенной температуре спонтанная поляризация в нем исчезнет, и кристалл переходит в обычный диэлектрик (фазовый переход). В области температур, близких к температуре фазового перехода, величина спонтанной поляризации резко меняется с изменением температуры, так что пьезоэлектрический эффект в этой области особенно велик. Кристаллическая модификация, в которой существует спонтанная поляризация, называется полярной фазой, а в которой отсутствует — неполярной фазой. Температура  $T_C$ , при которой исчезает спонтанная поляризация и происходит перестройка кристаллической структуры, носит название температуры (точки) Кюри (в честь французского физика Пьера Кюри). При переходе через точку Кюри происходит фазовый переход. Отметим, что превращение сегнетоэлектриков в обычный диэлектрик может происходить также при температуре Кюри-Вейсса  $T_0 > T_C$ , которая несколько больше температуры Кюри (фазовый переход 1 рода). Например, у сегнетоэлектрика BaTiO<sub>3</sub> температура  $T_C = 133^\circ\text{C}$ , а фазовый переход происходит при температуре  $142^\circ\text{C}$ . Необычные свойства сегнетоэлектриков объясняются его внутренней доменной структурой: в отсутствие внешнего поля в сегнетоэлектрике есть области спонтанной поляризации — домены, дипольные моменты которых скомпенсированы. Под действием внешнего электрического поля границы доменов смещаются, возникает поляризация. Вектор поляризации сегнетоэлектрика нелинейно зависит от внешнего поля. Когда поле достаточно большое, весь объем сегнетоэлектрика представляет собой один домен, дипольный момент которого ориентирован вдоль вектора  $\vec{E}$ . Существование сегнетоэлектрических доменов можно фиксировать с помощью атомно-силовой акустической микроскопии (АСАМ). Поскольку  $D = \varepsilon_0 E^* + P = \varepsilon_0 \varepsilon E$ , то диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика

$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}$$

немонотонно зависит от напряженности поля (рисунок). Вначале она увеличивается и достигает максимума  $\varepsilon_{\max} \sim 10^3 - 10^4$ , а затем при  $E \rightarrow \infty$  величина  $\varepsilon \approx 1 + \frac{P_s}{\varepsilon_0 E}$  стремится к постоянной величине. Нелинейная зависимость величины вектора поляризации  $\vec{P}$  при возрастании напряжен-

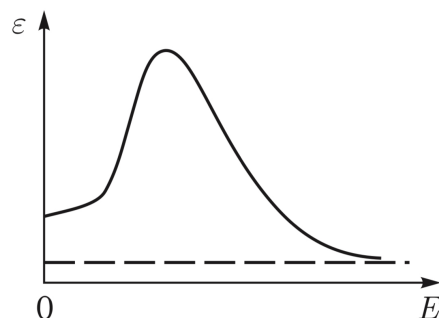


Рисунок 11: Демонстрация зависимости диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика от величины внешнего электрического поля  $E$

ности электрического поля  $\vec{E}$  представлена на рисунке ниже. В области насыщения  $P$  практически не меняется. При уменьшении поля деполаризация сегнетоэлектрика будет происходить иначе, чем его поляризация при увеличении поля. Когда внешнее поле полностью исчезает, образец в течение длительного времени остается поляризованным. Чтобы убрать эту остаточную поляризацию  $P_{\text{ост}}$ , необходимо приложить достаточно сильное электрическое поле противоположного направления с напряженностью  $E_k$ , которое называется коэрцитивным полем. Далее увеличивая напряженность поля, можно достичь полной переполаризации образца. В результате зависимость поляризации  $P$  образца от напряженности электрического поля  $E$  при полном цикле имеет вид петли гистерезиса.

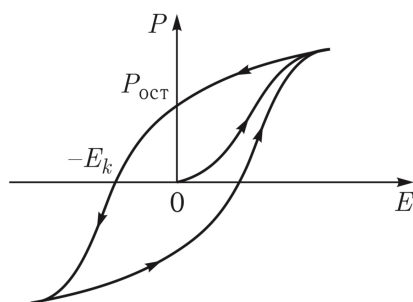


Рисунок 12: Демонстрация зависимости величины вектора поляризации  $P$  сегнетоэлектрика от величины внешнего электрического поля  $E$

## Пьезоэлектрический эффект

Пьезоэлектрический эффект (от греч. «piezo» — давлению) — эффект возникновения поляризации диэлектрика под действием механических напряжений (прямой пьезоэлектрический эффект). Этот эффект можно легко наблюдать, собрав установку, показанную на рисунке. На кристалл кварца нанесены две проводящие обкладки, которые с помощью проводов соединены с люминесцентной лампой дневного света. Груз с отверстием, направляемый вертикальным стержнем, может падать на пьезокристалл, закрепленный у основания стержня. В момент удара груза о кристалл лампа вспыхивает, что свидетельствует о появлении электрического напряжения между проводящими обкладками.

Существует и обратный пьезоэлектрический эффект — возникновение механических деформаций под действием электрического поля. Прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты наблюдаются в одних и тех же кристаллах — пьезоэлектриках. Прямой эффект открыт братьями Жаком и Пьером Кюри в 1880 г. Обратный эффект был предсказан в 1881 г. французским физиком Г.Липпманом (Нобелевская премия по физике 1908 г. «За создание метода фотографического воспроизведения цветов на основе явления интерференции»). Ему удалось наблюдать образование разности электрических потенциалов при механической деформации ртутной поверхности. Это



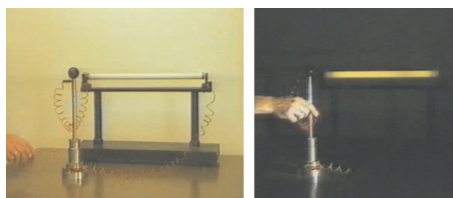


Рисунок 13: Демонстрация пьезоэффекта

привело к важнейшему открытию — сформулированной и опубликованной в 1881 году теореме об обратимости физических явлений. Эта теорема утверждает: «Зная о существовании некоторого физического явления, можно предсказать существование и величину обратного эффекта». Следуя этому выводу, Липпман высказал гипотезу, что если к кристаллу приложить электрическое поле, то произойдет изменение его размеров. Вскоре гипотеза была экспериментально подтверждена братьями Кюри. Пьезоэлектрические свойства кристаллов связаны с их структурой. Ими обладают все пироэлектрики. При механической деформации пироэлектрика меняется величина его спонтанной поляризации, что и наблюдается как прямой пьезоэлектрический эффект. Пьезоэлектрические эффекты наблюдаются также в некоторых непироэлектриках (например, в кварце). Опытным путем было установлено, что при однородных деформациях сжатия или растяжения вдоль определенных направлений, называемых полярными осями, на противоположных гранях кристалла, перпендикулярных полярной оси, возникают заряды противоположного знака. При этом знаки зарядов граней при замене сжатия растяжением изменяются на противоположные. Такой эффект называется продольным пьезоэффектом. Вместе с тем на этих гранях могут возникнуть заряды при деформациях и в направлении, перпендикулярном полярной оси (поперечный пьезоэффект). Встречные направления вдоль полярной оси не эквивалентны: при повороте кристалла на  $180^\circ$  вокруг оси, перпендикулярной полярной, кристалл не совмещается сам с собой. А это означает, что пьезоэлектрическими свойствами обладают кристаллы, не имеющие центра симметрии. Количественными характеристиками пьезоэффекта является совокупность пьезоконстант  $d$  (пьезомодулей) — коэффициентов пропорциональности между поляризацией  $P$  и механическими напряжениями  $\sigma$ :  $P = d \cdot \sigma$ .

Пьезоэлектрики способны преобразовывать механическую энергию в электрическую и, наоборот, электрическую энергию в механическую. Преобразователи, в которых используется прямой пьезоэффект, называют преобразователями генераторами; они имеют механический вход и электрический выход. Преобразователи, в которых используется обратный пьезоэффект, называют преобразователями двигателями; они имеют электрический вход и механический выход. Известно множество пьезоэлектрических устройств, работающих на основе как прямого, так и обратного эффектов. Прямой пьезоэффект используется, например, в микрофонах, звукозаписывающих устройствах, датчиках механических сил, перемещений и ускорений, бытовых зажигалках для газа и др. Первый пьезоэлектрический микрофон был создан в 1925 г. советскими учеными С. Ржевским и А. Яковлевым. Впоследствии были созданы пьезоэлектрические датчики давления и гидрофоны, позволяющие записывать сверхнизкочастотные звуки, характерные для морских обитателей. Важной деталью любого оборудования для усиления звука акустического музыкального инструмента является пьезодатчик (*transducer*). Он преобразует механические колебания струн и деки в электрический сигнал. Пьезодатчик, например, помещают под косточку струнного инструмента (пластинку, на которую опираются струны). Это *UST* (*Under – Saddle Transducer*) датчик. Если датчик приклеивают изнутри на деку инструмента, то он выдает больше информации о свойствах корпуса инструмента. Этот датчик называется *AST* (*Acoustic Soundboard Transducer*). Совмещение сигналов от *UST* и *AST* дает очень сложную и интересную картину и позволяет озвучить инструменты самого высокого класса. Установка на реактивных самолетах пьезопреобразователей сулит экономии почти трети топлива, которое расходуется на выработку электроэнергии, следовательно, позволяет увеличить дальность полета. Здесь электроэнергия вырабатывается непосредственно за счет колебаний крыльев и вибрации фюзеляжа. Успешно разрабатывается идея автономного пьезоэлектрического электропитания устройств малой мощности. В частности, создан светодатчик, батареи которого заряжаются от шума автомобилей на перекрестке. Ведутся исследования по созданию высокоэффективных преобразователей, с помощью которых механическая энергия низкочастотных вибраций, возникающих при движении поездов, автотранспорта и пр., может быть преобразована в электрическую. Это поможет осуществить контроль путей, дорог, мостов и даже леса с помощью не требующих вмешательства человека датчиков, питающихся от пьезогенераторов.

Обратный пьезоэлектрический эффект используется в пьезоизлучателях звука, в системах сверх-

точного позиционирования, например, в системе позиционирования иглы в сканирующем туннельном микроскопе или перемещения головки жесткого диска в винчестере, в адаптивной оптике для изгиба отражающей поверхности деформируемого зеркала. Пластина кварца с нанесенными на нее электродами представляет собой электромеханический преобразователь (резонатор). Если на резонатор подать переменное напряжение, совпадающее с одной из нормальных частот кварца, в пластине возникают значительные механические колебания (стоячая волна). Такие кварцевые пластины являются мощным излучателем волн сверх- высокой частоты. Пьезокварцевые пластинки применяются для стабилизации частот от 1 кГц до 200 МГц, для генерации и приема ультразвука, для резонаторов высокой добротности, для фильтров высокой избирательности, для измерения механического давления. В семидесятых годах были разработаны пьезоэлектрические струйные головки для принтеров. В большинстве таких принтеров избыточное давление в камере с чернилами создается с помощью диска из пьезоэлектрика, который изменяет свою форму (выгибается) при подведении к нему электрического напряжения (рисунок).

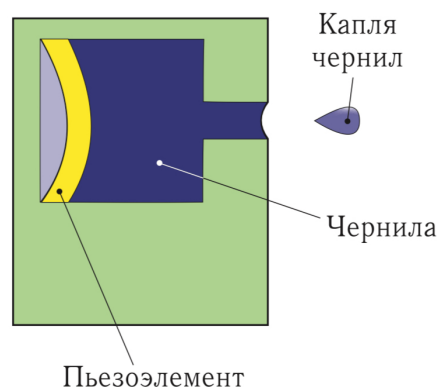


Рисунок 14: Схема устройства пьезоэлектрической струйной головки для принтеров

Выгнувшись, диск, который служит одной из стенок камеры с чернилами, уменьшает ее объем. Под действием избыточного давления жидкие чернила вылетают из сопла в виде капли. Благодаря такой технологии разрешение струйных принтеров достигло более 1000 точек на дюйм. На фоне многочисленных применений прямого и обратного пьезоэффектов несомненно особую роль играет использование пьезоэффекта в прецизионных кварцевых генераторах, позволяющих получать электрические колебания фиксированной частоты в диапазоне от нескольких кГц до сотен МГц. Основным элементом этого генератора является упоминавшийся выше кварцевый резонатор. Внешнее напряжение, прикладываемое к резонатору, вызывает деформацию пластинки, а деформация влечет появление заряда на поверхностях кварца. Таким образом, электрические колебания поддерживаются слабо затухающими механическими колебаниями. Частота этих колебаний (частота низшей моды) определяется размерами пластины и скоростью звука в ней. Кварц используется потому, что он, помимо хороших пьезоэлектрических свойств, обладает еще и одним из самых низких температурных коэффициентов расширения. Для получения высокой добротности и стабильности резонатор помещают в вакуум и поддерживают постоянной его температуру. Кварцевые генераторы являются основным элементом кварцевых часов, используются как стандарты частоты, широко применяются в цифровой технике в качестве тактовых генераторов.

## Электреты

Поляризация в отсутствие электрического поля может наблюдаться также в некоторых веществах типа смол и стекол, называемых электретами. Поляризованные при высоких температурах, а затем охлажденные, электреты сохраняют достаточно долгое время поляризацию и создают в окружающем пространстве электрическое поле. Необычные свойства электретов были известны еще в далекой древности. Лечебные свойства янтаря, являющегося природным электретом, широко использовались в лечебной практике. Считалось, что янтарь помогает при многих заболеваниях и охраняет от злых духов. Из янтаря делали не только украшения, но и различные амулеты и обереги, а многие врачеватели добавляли толченый янтарь в лекарственные препараты. Впервые электреты были исследованы японским физиком Егути в 1919 г. К настоящему времени они хорошо изучены и нашли широкое применение в технике. Все электреты имеют стабильный поверхностный заряд. Со временем происходит уменьшение заряда, обычно более быстрое в первое время после изготовления.

В дальнейшем заряды меняются незначительно в течение длительного времени. При комнатной температуре время жизни электретов очень велико (от нескольких лет до десятков и более лет). С ростом температуры время жизни экспоненциально уменьшается. Электреты используются не только как изоляционные материалы, но и для изготовления высококачественных профессиональных микрофонов и телефонов, измерительных приборов, средств контроля, диагностики и т. д. Широкое применение в технике нашли полимерные электреты, представляющие собой тонкие электризованные полимерные пленки толщиной 3–50 микрон. Так, например, большинство микрофонов в современной аудиотехнике и телефонных аппаратах изготовлено на основе полимерных электретов.

## Электрострикция

Электрострикция (от лат. «strictio» - стягивание) - деформация диэлектрика под действием внешнего электрического поля, пропорциональная квадрату напряженности поля и не зависящая от изменения его направления на обратное (в отличие от обратного пьезоэффекта).

Явление электрострикции наблюдается в той или иной степени у большинства диэлектриков. Электрическое поле взаимодействует с диполями молекул или ионов диэлектрика и создает деформирующие силы. Под действием поля атомы и молекулы смещаются, и в результате происходит электрострикция, которая присуща всем твердым и жидким диэлектрикам независимо от их симметрии и структуры.

Электрострикционные деформации диэлектриков чрезвычайно малы. Однако в некоторых сегнетокерамических материалах при переориентации доменов деформация может достигать больших значений, соизмеримых с пьезоэлектрической деформацией.

Сегнетокерамика, например, на основе магнитообата свинца, является одним из лучших электрострикционных материалов. В области фазового перехода структура такой керамики неоднородная, и деформация керамических материалов в результате электрострикции на 2-3 порядка больше, чем электрострикция диэлектриков.

Эффект электрострикции широко используется в электрострикционных преобразователях, предназначенных для измерения колебаний поверхностей твердых тел. Электрострикционная сегнетокерамика применяется в исполнительных механизмах для создания точных перемещений.

Поскольку деформации при электрострикции пропорциональны квадрату напряженности приложенного поля, то в переменном поле  $E(t) = E_0 \cos \omega t$  кристалл деформируется с частотой

$$2\omega \quad (E^2 = (1/2)E_0^2(1 + \cos 2\omega t))$$

, а в случае пьезоэлектрического эффекта частоты поля и деформации совпадают.

## Электрический пробой диэлектриков

Электрический пробой диэлектриков - резкое уменьшение электрического сопротивления (увеличение плотности тока  $j$ ) диэлектрика, наступающее при достижении определенной величины напряженности приложенного электрического поля  $E_{пр}$ , называемого электрической прочностью. Обычно значения  $E_{пр} \sim 10^5 - 10^6$  В/см. В случае пробоя образуется проводящий канал, в котором возникает большая плотность тока. Выделяющееся в канале джоулево тепло ведет к разрушению материала (проплавлению, появлению воздушного канала в результате испарения, массовому образованию дефектов в кристаллах, раскалыванию образца и пр.).

Электрический пробой - лавинообразный процесс, обусловленный тем, что носители заряда на длине свободного пробега приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа или кристаллической решетки. В результате создаются новые свободные носители заряда и т.д. Поэтому генерация носителей происходит лавинообразно. Различают поверхностный пробой и объемный пробой диэлектриков. В твердых диэлектриках может происходить как тепловой, так и электрический пробой. При тепловом пробое с ростом плотности тока растет выделение джоулева тепла и, следовательно, температура диэлектрика, что приводит к увеличению числа носителей тока. При электрическом пробое с ростом плотности тока вследствие ионизации ударом также возрастает число носителей. Присутствующие неоднородности способствуют пробое, поскольку в области нахождения неоднородности локальное поле может заметно увеличиться. Пробой твердых диэлектриков заканчивается разрушением материала изоляции. Могут, например, образовываться сквозные отверстия, проплавляются каналы, образуются трещины и т. д. Электрическая прочность жидких диэлектриков в сильной степени зависит от чистоты жидкости. Для чистых, однородных жидких

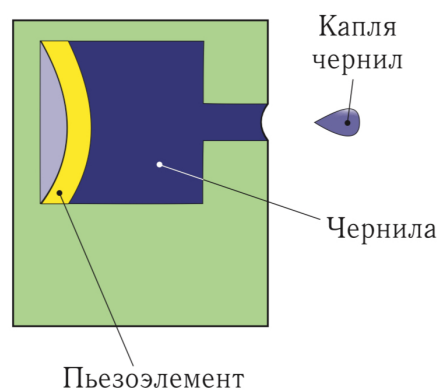


Рисунок 15: Удельное сопротивление  $\rho$  и электрическая прочность  $E_{пр}$  некоторых твердых диэлектриков, являющихся хорошими изоляторами

диэлектриков электрическая прочность близка к прочности соответствующих твердых диэлектриков. Наличие примесей и загрязнений существенно понижает  $E_{пр}$ . Пробой в газах связан с механизмом ударной ионизации и проявляется в виде электрического разряда в газах. Если пробой произошел в газообразном диэлектрике, то благодаря высокой подвижности молекул пробитый участок после снятия напряжения восстанавливает свои электрические свойства (снова становится изолятором). Пробой бывает и полезным, и вредным. К примеру, пробой изолятора на линии высокого напряжения является серьезной аварией, а пробой атмосферы во время грозы между облаком и громоотводом позволяет защитить объекты, находящиеся вблизи громоотвода.

## Контрольные вопросы

1. Что такое поляризационные заряды?
2. Что называется электрическим диполем? Чему равен электрический момент диполя? Объясните поведение диполя в однородном электрическом поле.
3. Как действует на диполь внешнее неоднородное электрическое поле?
4. Объясните механизмы различных видов поляризации диэлектрика во внешнем электрическом поле.
5. Что такое вектор поляризации диэлектрика? От чего он зависит?
6. Как связаны диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая восприимчивость вещества?
7. Как зависит от температуры диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, состоящего из полярных молекул?
8. Объясните ход кривой зависимости диэлектрической восприимчивости от частоты электромагнитного поля.
9. Каковы особенности применения теоремы Остроградского-Гаусса к диэлектрической среде?
10. Дайте определение вектора электрического смещения. Какова его размерность?
11. Объясните поведение линий вектора электрического смещения.
12. Какие изменения надо внести в закон Кулона и другие формулы электростатики в вакууме, если мы имеем дело с диэлектриками?
13. Металлический проводник опустили в керосин и зарядили. После этого его вынули с помощью изоляторов, и поместили в воду. Изменилась ли емкость проводника?
14. Выведите выражение для емкости слоистого плоского конденсатора, заполненного  $n$  слоями диэлектрика толщиной  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_i$ . Слои параллельны обкладкам.
15. Выведите выражение для емкости «поперечного» слоистого плоского конденсатора, заполненного  $n$  слоями диэлектрика площадью  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_i$ . Толщина каждого слоя одинакова и равна  $d$ . Слои ортогональны обкладкам.
16. В плоский воздушный конденсатор, заряженный и отключенный от источника, вставляется диэлектрическая пластина. Энергия конденсатора меняется. За счет чего происходит это изменение?
17. Из плоского конденсатора, заряженного и отсоединенного от источника, удаляется пластина диэлектрика. Энергия конденсатора меняется. За счет чего происходит это изменение?