Exercícios: suficiência mínima, completude e ancilaridade

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Carvalho

Setembro/2023

Motivação: Ainda dentro da temática de "redução de dados", temos suficiência mínima[1], completude e ancilaridade. Podemos encarar suficiência mínima e ancilaridade como dois extremos em relação ao parâmetro de interesse, θ: se a suficiência mínima nos diz que a estatística T traz toda a informação sobre θ contida na amostra da maneira mais compacta possível, ancilaridade nos diz que a distribuição de T nem depende de θ. Já a completude é uma condição técnica, que pode ser útil para mostrar suficiência mínima (Bahadur) ou independência entre quantidades de interesse (Basu).

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Dos livros-texto:

a) KN, Ch 3.7: 6, 7, 9b, 12, 15 e 16;

b) CB, Ch6: 6.8, 6.9 e 6.31.

Extra:

1. Defina $\mathcal{P}_\sigma$ como a família de todas as distribuições normais com desvio-padrão $\sigma > 0$. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $\mathcal{P}_\sigma$.
   - Mostre que a média amostral $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ é estatística suficiente e completa;
   - Mostre que a variância amostral,

     $$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2,$$

     é ancilar para μ.
   - Conclua que $\bar{X}_n$ e S_n^2 são independentes. O que acontece se considerarmos a família de todas as distribuições normais com média $\mu \in \mathbb{R}$ e desvio-padrão $\sigma > 0$ desconhecidos?

[1] Em certo sentido, uma estatística suficiente mínima (ou minimal) é a representação mais "grossa" dos dados que ainda assim é suficiente.

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição Cauchy com locação θ e escala $\gamma = 1$, com densidade comum (com respeito a Lebesgue)
$$f_\theta(x) = \frac{1}{\pi[1 + (x-\theta)^2]}\mathbb{I}(x \in \mathbb{R}).$$
Mostre que $T(\boldsymbol{X}_n) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ é suficiente e não há como atingir nenhuma outra redução. **Dica:** ver exercícios de CB acima.

3. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma família dominada, cuja densidade comum (com respeito a Lebesgue) é
$$f_\theta(x) = \frac{\exp(-|x-\theta|)}{2}\mathbb{I}(x \in \mathbb{R}),\ \theta \in \mathbb{R}.$$
Mostre que $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ é suficiente mínima para este modelo.

4. **Desafio**: Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são i.i.d. com densidade comum com respeito a Lebesgue
$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2}\exp\left(-\frac{(x-\theta)}{\theta^2}\right)\mathbb{I}(x > \theta),$$
para $\theta > 0$.
   - Encontre estatística suficiente mínima, T, para este modelo;
   - Mostre que T não é completa.

   Dica: Considere estatísticas de ordem.