Exercícios: Testes de hipóteses

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Carvalho
Monitor: Isaque Pim

Dezembro/2023

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Motivação: Testes de hipóteses são ferramentas matemáticas para avaliar a compatibilidade de dados observados com afirmações sobre a configuração do espaço de medidas que os possam ter gerado. Estes instrumentos encontram vasta aplicação nas ciências aplicadas, onde afirmações científicas sobre o funcionamento do mundo são traduzidas em afirmações matemáticas do tipo discutido acima. Nesta lista de exercícios vamos ver a construção de testes uniformemente mais poderosos, de razão de verossimilhanças e o cálculo do valor p.

Dos livros-texto:

a) KN, Ch12: 10, 17, 25, 32;

b) CB, Ch8: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.8, 8.18, 8.20, 8.28, 8.31, 8.38;

b) CB, Ch9: 9.5, 9.6, 9.44.

Extra:

1. (**Existência de um TUMP**) Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são amostra aleatória de uma distribuição normal com média μ desconhecida e variância σ conhecida. Considere testar $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 = \mu \neq \mu_0$. Mostre que não existe teste uniformemente mais poderoso neste caso. **Dica**: Construa um teste da forma

$$\psi_0(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 0, \bar{X}_n \geq -\frac{\sigma z_\alpha}{\sqrt{n}} + \mu_0, \\ 1, c.c., \end{cases}$$

   e investigue o que acontece num ponto $\theta_1 < \mu_0$. Depois, construa um segundo teste, complementar e use o Teorema de Neyman-Pearson para concluir que nenhum TUMP pode existir.

2. (**Testes aleatorizados**) Tome $X_1, \ldots, X_{10}$ amostra aleatória de uma distribuição Bernoulli com parâmetro $\theta \in (0, 1)$, desconhecido. Considere testar $H_0 : \theta \leq 1/2$ *versus* $H_1 : \theta > 1/2$.

(a) Escreva um teste de razão de verossimilhanças para este caso;

(b) Mostre que não é possível atingir qualquer nível de significância $\alpha_0 \in (0, 1)$

(c) Proponha um *teste aleatorizado* que atinja um tamanho $\alpha_0 = 0.05$. Isto é, proponha um teste aleatório ψ_A tal que a decisão de aceitar ou não H_0 dependa do lançamento de uma moeda com probabilidade de sucesso ω_A, e dê uma forma para ω_A.