Exercícios: Estimação não-(en)viesada

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Carvalho
Monitor: Isaque Pim

Outubro/2023

Motivação: Na prática estatística estamos sempre em busca de procedimentos que sejam capazes de retornar estimativas de parâmetros e funções que sejam confiáveis, no sentido de terem boa acurácia (i.e. baixo viés[1]) e alta precisão – variância pequena. Como vimos, estas duas características precisam quase sempre ser balanceadas e em geral não podem ser atingidas conjuntamente. Nesta lista vamos pensar um pouco mais sobre estimadores viesados e não-viesados e as garantias matemáticas que podemos dar sobre o seu comportamento.

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Dos livros-texto:

a) KN, Ch3.7: 1;

b) KN, Ch4.7: 1, 5a, 5b e (**Phd**) 28;

c) CB, Ch6: 6.36.

Extra:

1. Mostre que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma distribuição P_θ com $\operatorname{Var}_\theta(X_i) = \sigma^2 < \infty$, então
$$\delta(\boldsymbol{X}_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2,$$
é um estimador não-viesado para σ^2.

2. Suponha que temos uma amostra aleatória $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ de uma distribuição Normal com média μ e variância σ^2, ambas desconhecidas. Para $c > 0$, considere estimadores da forma
$$\delta_c(\boldsymbol{X}) = c \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n \right)^2, \tag{1}$$
para σ^2.

[1] Lembre-se, jovem padawan: viés zero não quer dizer estimador bom!

- Encontre o erro quadrático médio desta classe de estimadores em função de c.
- Encontre $c^\star$ de modo que $\delta_{c^\star}(\boldsymbol{X})$ seja admissível.
- $\delta_{c^\star}(\boldsymbol{X})$ é não-viesado?

3. **Informação de Fisher**. Sobre a informação de Fisher, mostre que:

   (a) Se $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória, então $I_{\boldsymbol{X}_n}(\theta) = I_n(\theta) = nI(\theta)$.

   Dica: Tome X e Y independentes e mostre que $I_{X,Y}(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta)$.

   (b) Tome $\mathcal{P}_0 = \{P_\theta : \theta \in \Omega\}$ família dominada com densidade f_θ e informação de Fisher $I(\theta)$. Considere uma função bijetora $h : \Xi \to \Omega$, que induz uma família reparametrizada $\tilde{\mathcal{P}} = \{P_\theta : \xi \in \Xi\}$, que também é dominada e tem densidade $f_\xi = f_{h(\theta)}$. Exiba a forma da informação de Fisher $\tilde{I}(\xi)$.

   (c) Considere uma família exponencial de um parâmetro em forma canônica. Escreva sua informação de Fisher em termos da função geradora de cumulantes.

   (d) Combine os dois itens anteriores para escrever a informação de Fisher $I(\mu)$ de uma família exponencial parametrizada em termos da média $\mu = E_\eta[T]$, onde T é a estatística suficiente para η.

   (e) **PhD** Sobre o item anterior, discuta se T é ENVVM para μ e comente sobre se a desigualdade de Cramér-Rao é *sharp* neste caso.

   Dica: Estude a completude de T.

4. **PhD** : Construir uma desigualdade mais geral para a cota inferior da variância de um estimador não-viesado.

   - Mostre que para duas variáveis aleatórias X, Y quaisquer[2],

   $$\mathrm{Var}_\theta(X) \geq \frac{[\mathrm{Cov}_\theta(X,Y)]^2}{\mathrm{Var}_\theta(Y)};$$

   - Considere a classe $U = \{\delta : E_\theta[\delta] = g(\theta)\}$ de estimadores não-viesados de $g(\theta)$. Tome ϵ tal que $\theta + \epsilon \in \Theta$ para todo $\theta \in \Theta$ e note que

   $$E_{\theta+\epsilon}[\delta] - E_\theta[\delta] = g(\theta+\epsilon) - g(\theta).$$

   Agora, assuma que $f_\theta(x) = 0 \implies f_{\theta+\epsilon}(x) = 0$, e defina

   $$L(x) := \frac{f_{\theta+\epsilon}(x)}{f_\theta(x)}.$$

   Mostre que para qualquer função integrável h vale:

   $$E_{\theta+\epsilon}[h(X)] = E_\theta[L(X)h(X)];$$

[2] Definidas no mesmo espaço de probabilidade.

- Encontre função integrável w tal $E_\theta[w] = 0$ e

$$E_{\theta+\epsilon}[\delta] - E_\theta[\delta] = \mathrm{Cov}_\theta(\delta, w);$$

- Conclua o argumento para encontrar, para δ não-viesado,

$$\mathrm{Var}_\theta(\delta) \geq \frac{[g(\theta+\epsilon) - g(\theta)]^2}{E_\theta\left[\{L(X)-1\}^2\right]}, \tag{2}$$

  que é a cota inferior (ou desigualdade) de Hammersley–Chapman–Robbins (HCR-LB) [3].

- A cota inferior de Cramér-Rao para um estimador δ de uma função diferenciável $g(\theta)$ vale

$$\mathrm{Var}_\theta(\delta(X)) \geq \frac{\left[\frac{d}{d\theta}g(\theta)\right]^2}{I_X(\theta)},$$

  onde $I_X(\theta)$ é a informação de Fisher baseada em X – ver SV, seção 2.3.1. Discuta como recuperar a cota inferior de Cramér-Rao a partir de HCR-LB. Quais premissas extras precisamos tomar?

5. Seja $\mathcal{P}$ família dominada paramétrica, com parâmetro $\theta \in \Omega$ e dando origem ao modelo $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{P})$. Para $\mathcal{R} \supseteq \Omega$, tome $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ um estimador não-viesado de $g(\theta)$ e $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$. Considere a seguinte desigualdade (consequência de Cauchy-Schwarz):

$$\mathrm{Var}_\theta(\delta) \geq \frac{\mathrm{cov}(\delta, \psi)}{\mathrm{Var}(\psi)}. \tag{3}$$

   Mostre que (Blyth, 1974, Thm 1) $\mathrm{cov}(\delta, \psi)$ depende de δ apenas através de $g(\theta)$ se e somente se

$$\mathrm{cov}(U, \psi) = 0, \quad \forall U \in \mathcal{U}, \tag{4}$$

   com

$$\mathcal{U} = \left\{U : E_\theta[U] = 0, E_\theta[U^2] < \infty \quad \forall \theta \in \Omega\right\},$$

   i.e., para todo estimador não-viesado de zero.

6. Suponha que g é U-estimável, e seja δ um estimador não-viesado de $g(\theta)$. Mostre que δ atinge (3) para todo $\theta \in \Omega$ e alguma $\psi(x, \theta)$ satisfazendo (4) se e somente se $g(\theta)$ tem um ENVVM, δ_0. Utilize o teorema do item anterior.

7. Mostre que se $\mathrm{Var}_\theta(\delta)$ atinge Cramér-Rao, então

$$\delta(x) = g(\theta) + \frac{\frac{dg(\theta)}{d\theta}}{I_X(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}f_\theta(x).$$

[3] O denominador da expressão é a divergência qui-quadrado (χ^2) entre $P_{\theta+\epsilon}$ e P_θ.

Bibliografia

Blyth, C. R. (1974). Necessary and sufficient conditions for inequalities of cramér-rao type. *The Annals of Statistics*, pages 464–473.