

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук  
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК 004.02

**Отчет о программном проекте на тему:**  
**Компактные упаковки из четырех дисков**

**Выполнил студент:**

группы #БПМИ227, 3 курса                      Калинку Максим

**Принял руководитель проекта:**

Ферников Фома  
Научный сотрудник  
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ

Москва 2025

# Содержание

Аннотация	3
1 Введение	4
2 Обзор литературы	5
3 Методы и подходы	5
3.1 Основные определения . . . . .	5
3.2 Построение упаковок . . . . .	5
4 Тестирование окрестностей	7
5 Поисковик	9
6 Генератор	9
7 Экспериментальное исследование	10
8 Заключение	10
Список литературы	12

## Аннотация

В данной работе исследуется задача поиска приближённых значений всех троек  $(r, s, t) \in (0, 1)^3$ , для которых существует упаковка плоскости дисками с радиусами  $r, s, t$  или 1, где контактный граф упаковки является триангуляцией (далее *компактная упаковка*). В отличие от классических подходов, основанных на анализе алгебраических уравнений для конфигураций корон [6], предложен метод тестирования  $\varepsilon$ -окрестностей точек  $(r, s, t)$  из  $(0, 1)^3$  на наличие точек, допускающих компактные упаковки. Разработанные алгоритмы гарантируют отсутствие ложноотрицательных результатов и корректность выводов для достаточно малых  $\varepsilon$ . С помощью реализованного программного обеспечения проведён вычислительный эксперимент, показавший, что только 280 окрестностей диаметром  $10^{-7}$  в  $(0.4, 0.999)^3$  могут содержать точки, допускающие компактные упаковки. Инструменты, разработанные в ходе исследования, найдут широкое применение в дальнейших изысканиях по данной тематике. Ссылка на репозиторий: <https://github.com/maxcalincu/diskpack/>.

## Ключевые слова

- компактные упаковки,
- упаковки дисков,
- интервальная арифметика,
- вычислительная геометрия

# 1 Введение

Набор дисков с непересекающимися внутренностями называется *упаковкой*. Упаковки представляют особый интерес для моделирования структуры материалов, например, кристаллов или гранулированных сред. Основная задача в этом контексте — исследование типичных и экстремальных свойств таких упаковок (см., напр., [1]). В 1964 году Тот ввёл понятие *компактной упаковки*: это упаковка, чей контактный граф (граф, соединяющий центры взаимно касающихся дисков) является триангуляцией. Эквивалентно, все её незаполненные области представляют собой криволинейные треугольники.

Существует лишь одна компактная упаковка с одним радиусом — гексагональная упаковка, где центры дисков расположены в вершинах треугольной решётки. В работе [3] доказано, что существует ровно 9 значений  $r$ , для которых возможна компактная упаковка с дисками радиусов  $r$  и 1. Доказательство основано на том, что для существования упаковки диски должны образовывать *короны* — последовательности дисков, где каждый касается следующего и все касаются центрального. Сумма углов в контактном графе такой короны должна равняться  $2\pi$ . После применения тригонометрических преобразований получается многочлен, корни которого определяют допустимые размеры дисков. Для двух дисков степень этих многочленов не превышает 8, что существенно упрощает анализ.

В работе [6] было установлено, что существует 164 пары  $(r, s)$ , допускающие упаковку с радиусами 1,  $r$ ,  $s$ . Исследование также опиралось на анализ возможных корон и соответствующих уравнений. Однако данный подход столкнулся со значительными вычислительными сложностями:

- Количество возможных корон растёт экспоненциально с увеличением их размера.
- Получаемые многочлены имеют чрезвычайно большую сложность — описание одного многочлена может занимать несколько сотен килобайт.

Ещё одним важным теоретическим результатом является доказательство конечности числа кортежей  $(r_1, r_2, \dots, r_d)$ , таких что диски с радиусами 1,  $r_1, \dots, r_d$  допускают компактную упаковку для любого  $d$  [5].

Задача о существовании компактной упаковки дисков с конечным множеством радиусов представляет собой вариант задачи о плитках Вана (см. [2], глава Complexity). Её разрешимость напрямую связана с существованием апериодичной компактной упаковки дисков. Результаты настоящей работы вносят вклад в решение этого открытого вопроса.

## 2 Обзор литературы

Статья [2] представляет собой краткий обзор современного состояния исследований в области компактных упаковок окружностей и связанных с ними открытых проблем. В работе [4] описывается метод доказательства утверждений с использованием интервальной арифметики, который лег в основу нашего подхода. Исследования [3] и [6] посвящены упаковкем дисков двух и трёх различных размеров соответственно. Теоретические положения, касающиеся корон и критериев существования компактных упаковок, заимствованы из этих работ.

## 3 Методы и подходы

### 3.1 Основные определения

Введём ключевые понятия и обозначения:

- $\text{tangent}(D_a, D_b)$  — индикатор касания дисков  $D_a$  и  $D_b$ .
- $\text{intersect}(D_a, D_b)$  — индикатор пересечения внутренностей дисков.

**Короной** диска  $D_c$  называется последовательность дисков  $(D_1, \dots, D_k)$  такая что:

- $\forall i \text{ tangent}(D_i, D_{1+(i \bmod k)})$
- $\forall i \text{ tangent}(D_c, D_i)$

Обозначается как  $(D_c : D_1, \dots, D_k)$ .

**Непрерывным отрезком** короны  $(D_c : D_1, \dots, D_k)$  называется подпоследовательность  $(D_a, \dots, D_b)$  для  $1 \leq a \leq b \leq k$ .

**Сигнатурой** короны  $(D_c : D_1, \dots, D_k)$  для компактной упаковки с радиусами  $r_1, \dots, r_d$  называется симметричная матрица  $S_{d \times d}$ , где  $S_{a,b}$  равно количеству пар соседних дисков в короне с радиусами  $r_a$  и  $r_b$ .

Диск  $D_c$  называется **уравновешенным**, если из касающихся его дисков можно образовать корону с центром в  $D_c$ .

### 3.2 Построение упаковок

Для представления координат и радиусов дисков используются интервалы. Ключевой задачей является оптимизация точности интервальных вычислений. Чем выше точность тем более качественные результаты мы получаем.

Перед добавлением нового диска необходимо проверить отсутствие пересечений его внутренности с существующими дисками. Для этого используется формула евклидова расстояния для интервалов:

$$d(D_a, D_b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} - r_a - r_b$$

Положительность  $d(D_a, D_b)$  гарантирует отсутствие пересечений для любых значений из заданных интервалов. Для отрицательных интервалов диски гарантировано пересекаются. Если ноль принадлежит интервалу  $d(D_a, D_b)$ , предполагается касание дисков.

Для определения позиции нового диска с фиксированным радиусом в случае, когда все диски имеют фиксированные значения, достаточно выбрать, каких двух касающихся дисков он касается. Действительно, имея хотя бы один диск короны с центром  $D_c$ , несложно строить следующий до тех пор, пока  $D_c$  не будет уравновешена. Таким образом, упаковку всего с двумя касающимися дисками можно развить в любую компактную упаковку.

Пусть есть взаимно касающиеся диски  $D_a, D_b, D_c$  с центрами и радиусами  $c_a = (x_a, y_a), r_a$ ,  $c_b = (x_b, y_b), r_b$  и  $c_c = (x_c, y_c), r_c$  соответственно (все значения являются действительными числами). Преобразование, переводящее вектор  $c_b - c_a$  в  $c_c - c_a$ , является поворотной гомотетией. Пусть:

$$x' = \frac{d(c_a, c_c)^2 + d(c_a, c_b)^2 - d(c_b, c_c)^2}{2d(c_a, c_b)^2}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{d(c_a, c_c)^2}{d(c_a, c_b)^2} - (x')^2}$$

Матрица преобразования тогда будет выглядеть так:

$$O_{a,b,c} = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

То есть имеем:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + O_{a,b,c} \cdot \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$$

Проверка свойства осуществляется простым вычислением  $d(c_a, c_c)$  и  $d(c_b, c_c)$ .

В дальнейшем мы будем использовать это равенство в вычислении координат новых дисков. Полученные интервалы  $x_c, y_c$  будут содержать значения координат  $D_c$  для всех корректных координат дисков  $D_a, D_b$ .

Плюсом такого подхода является то, что  $c_x$  зависит напрямую лишь от двух других дисков (а в случае уравнивания диска  $D_a$  - лишь от одного для каждого добавления, кроме первого). Это позволяет обеспечить хорошую точность интервалов.

За выполнением свойства компактности упаковки сложно следить, когда добавления происходят в случайном порядке. Для удобства мы хотим уметь уравнивать диск  $D_c$  при условии, что диски, которые его касаются, формируют непрерывный отрезок  $D_1, \dots, D'_k$ .

Пусть  $D_c : D_1, \dots, D_{k'}, \dots, D_k$  - итоговая корона и  $\forall i \ r_{j_i}$  - радиусы диска  $D_i$ .

$$\forall \alpha > k' \begin{pmatrix} x_\alpha - y_c \\ y_\alpha - y_c \end{pmatrix} = (\Pi_{i=k'}^{\alpha-1} O_{c,j_i,j_{i+1}}) \cdot \begin{pmatrix} x_{k'} - y_c \\ y_{k'} - y_c \end{pmatrix}$$

В мире интервальной арифметики такое умножение не ассоциативно. Последовательность, в которой осуществляются умножения, определяет бинарное дерево, где листьями из факторы (матрица либо вектор), а во всех других узлах находится произведение его правого и левого потомков. Утверждается, что ширина интервалов  $c_\alpha$  имеет экспоненциальную зависимость от глубины дерева произведений.

Пусть  $A$  - матрица и  $B$  - столбец либо матрица. Предположим, что интервалы  $A$  и  $B$  имеют примерно одинаковые ширины интервалов, равные  $\varepsilon_a$  и  $\varepsilon_b$  соответственно. Интервалы из произведения  $A \cdot B$  имеют вид:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Ширина такого интервала пропорциональна  $2(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$ . Следовательно, точность интервалов произведения  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$  пропорциональна  $\sum_1^n 2^{d(i)} \varepsilon_i$ , где  $d(i)$  - глубина  $A_i$  в дереве произведений. Следовательно, скобки лучше всего расставить так, чтобы бинарное дерево было сбалансированным.

Так как точность интервалов  $c_\alpha$  падает с ростом  $\alpha - k'$ , хорошей идеей будет добавлять диски в корону параллельно с обеих сторон отрезка.

## 4 Тестирование окрестностей

Пусть нам даны интервалы  $I_1, \dots, I_d$ . Мы хотим узнать, существует ли  $r_1 \in I_1, \dots, r_d \in I_d$ , допускающих компактную упаковку с хотя бы одним диском каждого радиуса. Гарантируется отсутствие ложноотрицательных результатов и корректность выводов для достаточно малых размеров интервалов.

Натуральным необходимым критерием существования является возможность постро-

ить упаковку небольшого размера, где каждый диск, не лежащий на границе, является уравновешенным. Провал в построении такой упаковки означает, что для любых конфигураций дисков, способных уместиться на ограниченной области плоскости (что полностью обусловлено графом смежности), гарантированно не является валидным. Однако на практике такой тест оказывается довольно долгим. Его есть смысл применять лишь в частных случаях на маленьких окрестностях.

Более эффективным тестом является проверка нескольких простых критериев, связанных с множеством сигнатур допустимых корон.

Переберём все возможные сигнатуры корон. Множество тех сигнатур, для которых получилось построить валидную упаковку, будем называть *множеством валидных сигнатур корон*. При дальнейшем дроблении это множество лишь уменьшится, так что допустимые сигнатуры для подинтервалов можно получить, отфильтровав имеющееся множество.

Определим два графа:

- Граф  $G$  имеет в качестве вершин интервалы  $I_1, I_2, \dots, I_d$ . В  $G$  есть ребро между  $I_i, I_j$  тогда и только тогда, когда существует  $I_x$  и сигнатуры  $A$  и  $B$  с центрами  $i$  и  $j$  соответственно такие, что  $A_{j,x} > 0$  и  $B_{i,x} > 0$ . Важным свойством графа является то, что в упаковке не могут быть два касающихся диска с размерами  $r_i \in I_i, r_j \in I_j$ , если в  $G$  нет ребра  $(i, j)$ .
- Граф  $H$  имеет в качестве вершин сигнатуры корон. Между двумя сигнатурами  $A, B$  с центрами из  $I_i, I_j$  есть ребро тогда и только тогда, когда существует  $I_x$  такой, что  $A_{x,j} > 0$  и  $B_{x,i} > 0$ . Свойством этого графа является то, что любой диск с центром в  $I_i$  и сигнатурой  $A$  не может касаться диска с центром в  $I_j$  и сигнатурой  $B$ .

Теперь мы готовы перечислить необходимые критерии:

- Граф  $G$  связан. Иначе тестировщик отвечает отрицательно.
- Пусть при удалении вершины  $v$  граф  $G$  разделяется на компоненты  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Тогда существует корона с центром в  $I_v$ , которая  $\forall i \exists j \in G_i$  такой, что корона содержит диски размера  $r_j \in I_j$ . Иначе тестировщик отвечает отрицательно.
- Пусть существуют  $i, j, k$  и сигнатура  $S$  с центром в  $I_i$  такая, что  $S_{j,k} > 0$ . Тогда в  $G$  существует цикл размера три в вершинах  $i, j, k$ . Иначе такую сигнатуру можно удалить.

Доказательство корректности этих критериев можно найти в [6]. Сложность такого алгоритма  $\mathcal{O}(d^n)$  ( $n$  = максимальное число дисков в короне) для первого шага рекурсивного дробления и линейна относительно размера множества допустимых сигнатур в дальнейшем.



## 5 Поисковик

Целью этого инструмента является поиск всех подокрестностей окрестности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$  с нормой меньше  $l$ , которые проходят тест. Алгоритм останавливается, если  $I_1, \dots, I_d$  не проходят тестирование, и рекурсивно запускается на окрестностях, в которых самый широкий интервал заменяется на левую и правую его половины соответственно.

Сложность такого алгоритма  $\mathcal{O}(\log(\frac{1}{l}) \cdot T \cdot M)$ , где  $M$  - размер множества искомым окрестностей,  $T$  - асимптотика тестировщика. Такая оценка основывается на предположении, что любая окрестность, проходящая тестирование, содержит хотя бы один интервал из финального множества. Это по большей части является правдой на практике. При уменьшении  $l$  с  $10^{-5}$  до  $10^{-7}$  поисковик работает на столько же времени дольше, как и при увеличении с  $10^{-7}$  до  $10^{-9}$ . Это позволяет получить за короткое время очень хорошие приближения к искомым конфигурациям.

## 6 Генератор

Мы хотим построить упаковку с радиусами  $r_1, \dots, r_d$ , все диски которой находятся на расстоянии не больше  $R$  от  $(0, 0)$ , а все диски, что не находятся на краю  $R$ -окрестности от 0, должны быть уравновешены.

Опишем используемый алгоритм:

- Начинаем с упаковки, имеющей диски с центрами  $(0, 0), (r_1 + r_i, 0)$  и радиусами  $r_1, r_i$  (параметр  $i$  перебирается от 1 до  $d$ ). Диск с центром в 0 будем называть  $D_{start}$ .
- Из всех дисков, которые ещё не были уравновешены, выбираем тот  $D_x$ , чья самая далёкая от центра координата ближе всего (т.е. минимизирующий функцию  $d(0, c_x) + r_x$ ).
- Утверждается, что диски, касающиеся  $D_x$ , формируют непрерывный отрезок короны  $D_1, \dots, D_{k'}$ .
- Если  $d(0, D_x) + r_x > R$  - упаковка построена. Завершаем алгоритм.
- Иначе перебираем все валидные короны  $D_x : D_1, \dots, D_{k'}, \dots, D_k$  и дополняем упаковку дисками  $D_{k'+1}, \dots, D_k$  способом, описанным выше. Возвращаемся к пункту #2. Если упаковку удалось построить - завершаем. Иначе приступаем к следующей валидной короне.

Диски  $D_x$  в упаковках, построенных таким образом, имеют точность интервалов  $\mathcal{O}(2^{d(0,D_x)})$ . Пусть  $k$  = длина минимальной последовательности  $D_{start} = D_1, D_2, \dots, D_k = D_x$  такой, что  $\forall i < k$   $D_i$  касается  $D_{i+1}$ . Учитывая то, что для построения нового диска в общем случае нужны координаты центров двух других, размер интервалов  $D_x$  равен  $\Omega(2^k) = \Omega(2^{c \cdot d(0,D_x)})$  для какого-то  $c > 0$ . Другими словами, наш способ построения упаковок близок к оптимальному.

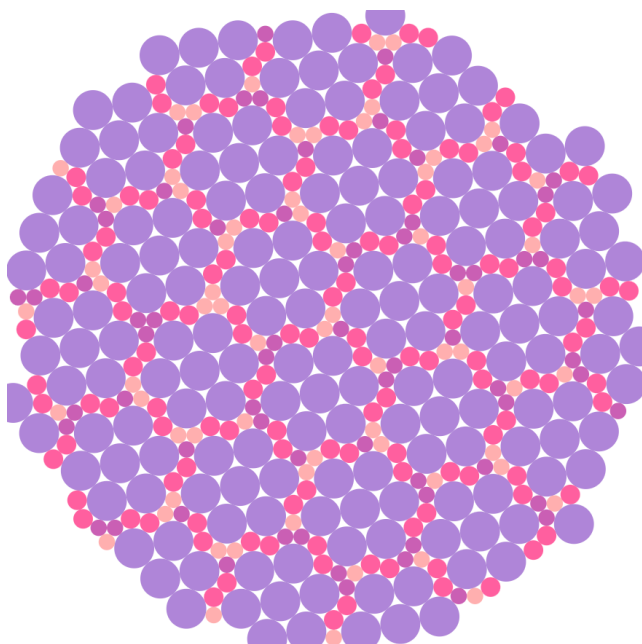
## 7 Экспериментальное исследование

Описанные выше методы были реализованы на языке C++. Ссылка на репозиторий: <https://github.com/maxcalincu/diskpack/>. Вычисления поисковика были распараллелены. Реализованный алгоритм корректно находит все упаковки двух и трёх радиусов. Обработка пространства  $[0.4, 0.999]^3$  заняла 40 часов. Полученные в результате 280 окрестностей можно найти в файле 4packings.json.

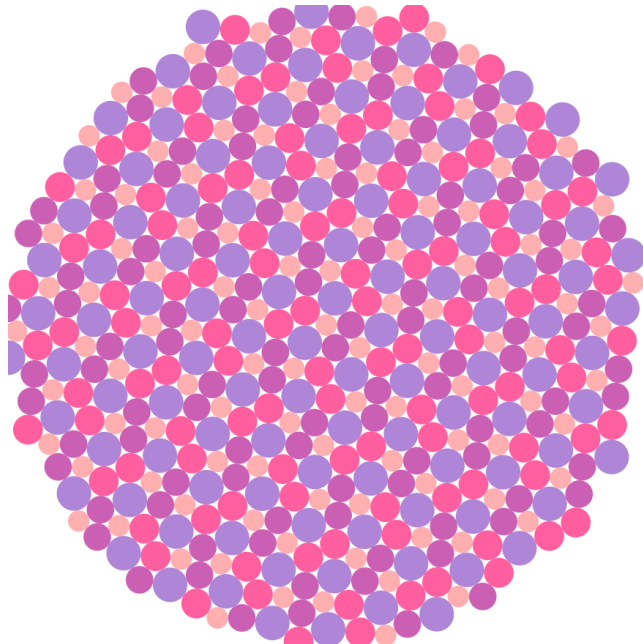
## 8 Заключение

При желании и наличии большего запаса времени возможно отыскать больше конфигураций, допускающих компактные упаковки 4 и более радиусов.

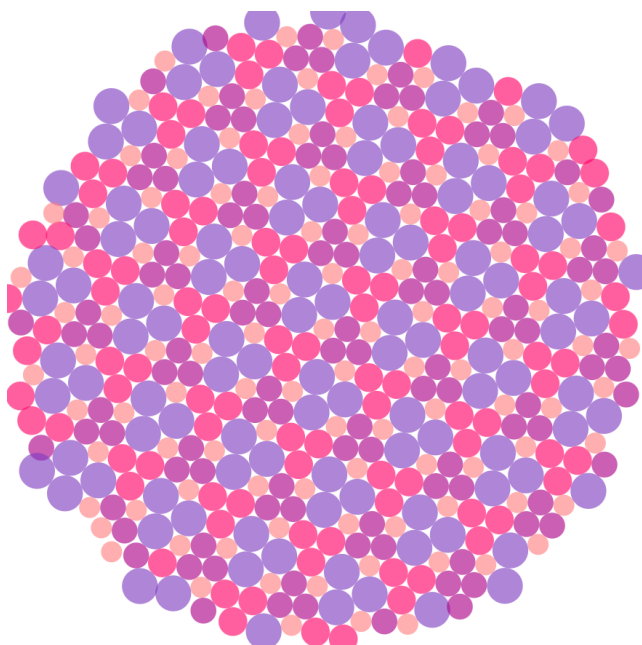
Реализации могут быть ускорены за счёт более аккуратного подбора гиперпараметров и осуществления других оптимизаций, на которые времени не хватило.



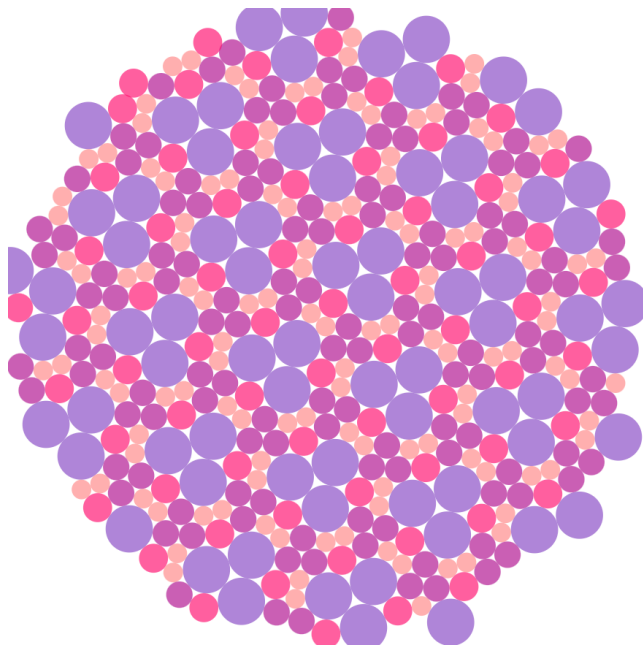
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 7.1: Примеры сгенерированных упаковок четырёх дисков

## Список литературы

- [1] C. L. Henley C. N. Likos. *Complex alloy phases for binary hard-disc mixtures*. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13642819308215284>. 1992.
- [2] Thomas Fernique. *Packing unequal disks in the Euclidean plane*. <https://arxiv.org/abs/2305.12919>. 2023.
- [3] Tom Kennedy. *Compact packings of the plane with two sizes of discs*. <https://arxiv.org/abs/math/0407145>. 2004.
- [4] C. Munoz M. Daumas G. Melquiond. *Guaranteed proofs using interval arithmetic*. <https://ieeexplore.ieee.org/document/1467639>. 2005.
- [5] Miek Messerschmidt. *The number of configurations of radii that can occur in compact packings of the plane with discs of  $n$  sizes is finite*. <https://arxiv.org/abs/2110.15831>. 2022.
- [6] Olga Sizova Thomas Fernique Amir Hashemi. *Compact packings of the plane with three sizes of discs*. <https://arxiv.org/abs/1810.02231>. 2020.