Компактные упаковки из четырех дисков

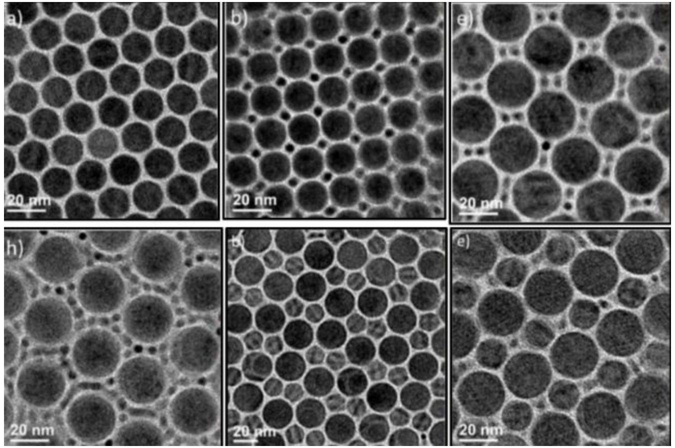
Индивидуальный программный проект

Выполнили студенты:
БПМИ227 – Калинку Максим Геннадьевич

Руководитель:
Фома Ферник,
Научный сотрудник
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ

Упаковки дисков

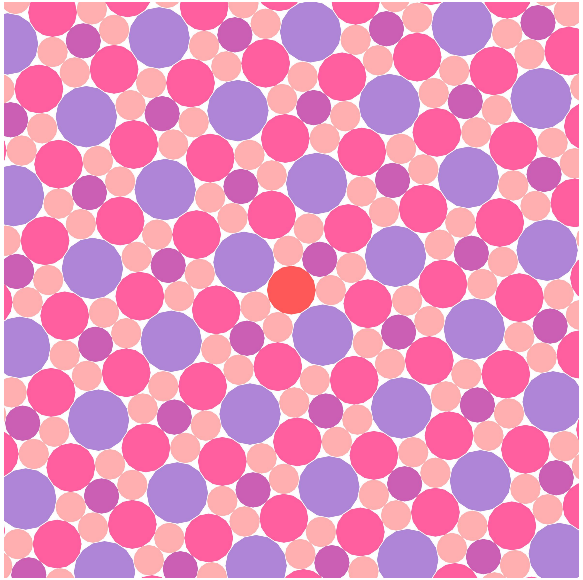
- упаковкой называют набор внутренне непересекающихся дисков на плоскости
- они возникают при моделировании структуры материалов (например, кристаллов, сыпучих веществ или нанотрубок)
- цель в этом контексте — понять, какие типичные или экстремальные свойства присущи упаковкам



Компактные упаковки

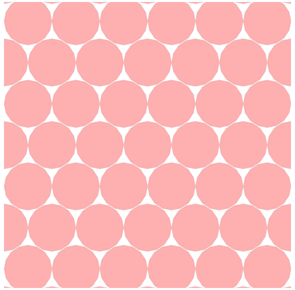
У компактных упаковок:

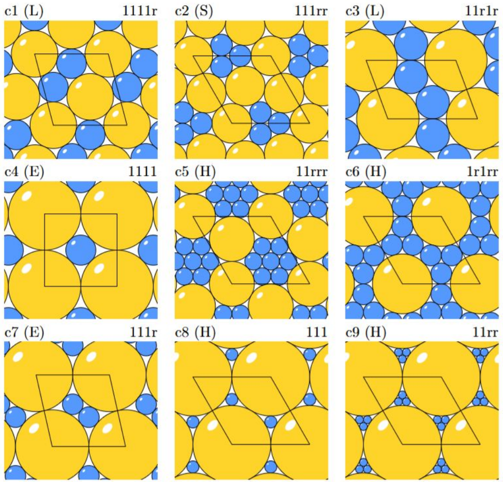
- контактный граф является триангуляцией
- смежные диски любого диска формируют **корону** (т. е. цикл в контактном графе)
- следствие: контактный граф компактной упаковки полностью её определяет (с точностью до движения)



Существующие результаты

- допустимые радиусы обозначим как $r_1 < r_2 < \ldots < r_n = 1$
- количество упаковок = **количество кортежей** $r_1, r_2, \ldots, r_n = 1$ допускающих упаковку





Ранее доказано что:

- есть всего одна компактная упаковка при n = 1 (гексагональная)
- 9 компактных упаковок при n = 2
- 164 компактных упаковок при n = 3
- конечное число упаковок при n > 3

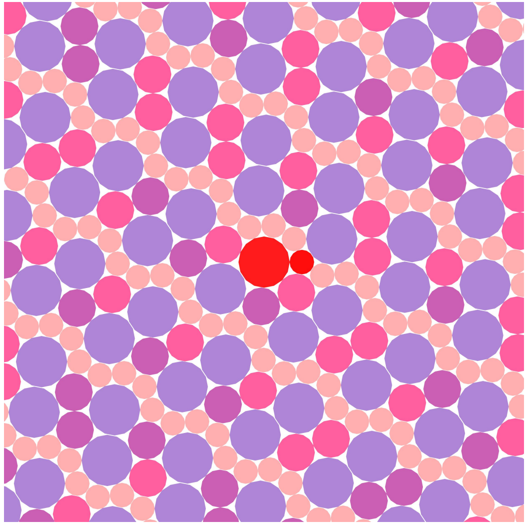
Основные результаты

- установлено что существует лишь 280 четверок $0.4 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 = 1$ (найденные с точностью до 10^{-7}) которые **потенциально** допускают компактную упаковку
- вычисления заняли ≅ 40 часов
- программа высоко оптимизирована

Уравнение короны

- углы между соседними дисками короны и центральным зависят лишь от **исходных радиусов**
- сумма этих углов равна 2π
- это задает **полиномиальное уравнение** на радиусы дисков

- конечность числа упаковок для любых $n \in \mathbb{N}$ доказана M. Messerschmidt, 2023



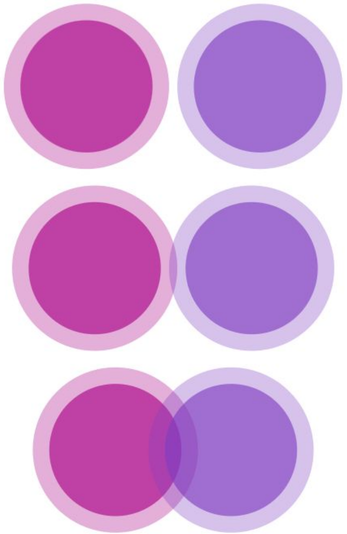
Оценка алгебраического метода

- количество возможных корон **растёт экспоненциально** с увеличением их размера
- получаемые многочлены имеют чрезвычайно большую сложность
- число комбинаций корон что радиусы допускают растет экспоненциально с числом дисков

Вывод: за разумное время найти все упаковки для $n > 3$ этим методом **не получится**

Интервальная арифметика

- заменяем точные значения радиусов и центров дисков на **приближенные** (интервалы)



Свойства интервальной арифметики:

- результаты арифметических операций на интервалах **содержит** образ функции на этой области (но они могут быть не равны)
- каждое появление переменной в вычислениях считается **независимым** от остальных (например x - x != 0)
- с уменьшением ширины интервала результаты вычислений стремятся к истинным значениям

Генерация упаковок

- не получилось построить → **упаковок точно нет**
- упаковка есть → **построить точно получится**
- получилось построить → упаковка **потенциально** есть.
- однозначно определить существование упаковки можно **только алгебраическим путем** (что легче сделать зная приблизительные значения)

Поиск приближенных значений

$[r_1, r_2] \times [s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$
TRUE

$[r_0, r_{0,5}] \times [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$
FALSE

$[r_{0,5}, r_1] \times [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$
TRUE

$[r_{0,5}, r_1] \times [s_0, s_{0,5}] \times [t_0, t_1]$
TRUE

$[r_{0,5}, r_1] \times [s_{0,5}, s_1] \times [t_0, t_1]$
FALSE

…

…

Направления дальнейшей работы

Цель дальнейшей работы - исследование всей области $[0, 1]^3]$ за разумное время. Для этого стоит:

- еще больше оптимизировать код
- добавить больше легковесных тестов отсекающих значимую долю неправильных случаев

Список литературы

[1] C. L. Henley C. N. Likos. **Complex alloy phases for binary hard-disc mixtures**. 1992.
[2] T. Fernique. ***Packing unequal disks in the Euclidean plane***. 2023.
[3] T. Kennedy. **Compact packings of the plane with two sizes of discs**. 2004.
[4] C. Munoz M. Daumas G. Melquiond. Guaranteed proofs using interval arithmetic. 2005.
[5] M. Messerschmidt. **The number of configurations of radii that can occur in compact packings of the plane with discs of n sizes is finite.** 2022.
[6] O. Sizova T. Fernique A. Hashemi. **Compact packings of the plane with three sizes of discs.** 2020