

CAPM 再认识

陈 灯 塔

WiSE, XMU

MAXCHEN@XMU.EDU.CN

Analysis of Pure Finance

2018 年 1 月 27 日

内容梗概

- 1 CAPM
- 2 均值方差均衡
- 3 贝塔系数
- 4 多期

天象

The **Copernican Revolution**: 如今日心说的基本理念为世人普遍接受 (尽管并非本轮或圆形轨道), 但在当时, Copernicus (哥白尼 1543) 的理论却显得过于超前

- 插图 Motion of Sun, Earth, and Mars
- 更复杂一点点, The **Pentagram of Venus**, 或者 **莲花五角星**
- 追源: Aristarchus of Samos, a Hellenistic author writing in the 3rd century BC, ... eclipsed by the geocentric model presented by Ptolemy and accepted in Aristotelianism.

Claudius Ptolemy (地心, 圆) \implies Nicolaus Copernicus (日心, 圆) \implies Johannes Kepler (Elliptic orbit) \implies Galileo's observations of Venus (地心 to 日心) \implies Newton used Kepler's laws of planetary motion to derive his law of universal gravitation ...

Technically, **Earth Does Not Orbit Around the Sun**

风险教条

Risk Doctrine: 风险决定收益，可是，风险是什么

- 自身方差: 通过组合可以降低风险而保持期望收益率不变
- 系统风险: 由贝塔度量，等于收益率与市场收益率的协方差除以市场收益率的方差

鸡与蛋的问题：要计算贝塔需要先知道市场收益率，而计算市场收益率需要先知道各个证券的收益率 (期望和方差，以及协方差)

- Berk and DeMarzo (2017): [Corporate Finance 4e p417] This model [CAPM] allows us to identify the efficient portfolio of risky assets without having any knowledge of the expected return of each security.

评: 如果投资者都不知道期望收益率，那么市场组合怎么产生？

- Johnstone (2017) 将这种情况称为 CAPM 的内在逻辑死循环

风险教条

市场收益率：外生 (地心说) vs 内生 (地动说)

- Lintner (1965, p25) 假定了证券价格是外生给定的，才得到 CAPM 公式
- Hansen and Richard (1987, p587) 指出价格是内生的
- Coles and Loewenstein (1988, p285) 看到收益率是内生的

Aristarchus of Samos! 可惜都屈服于风险教条 Berk and DeMarzo (2017, p424): Financial economists find the qualitative intuition underlying the CAPM compelling, so it is still **the most common and important model of risk and return**.

- Graham et al. (2009, P208): for the first time, researchers and practitioners had a model that generated **specific predictions about the risk-return characteristics of individual assets**
- Bodie et al. (2017, p277): its central conclusion that **only systematic risk will be rewarded with a risk premium**.

1 CAPM

- 市场设定
- 有效前沿
- 风险证券局部均衡

缘起

- 随机变量 (收益率) 的一阶矩 (期望收益率) 由二阶矩 (收益率的方差和协方差) 决定, 凭什么?
- 仿真 CAPM: 如何设定 DGP ?
- 假设 CAPM 正确的话, 单期投资与两期投资的贝塔有什么关系?
- CAPM 是均衡结果吗? 证券价格在哪儿? 能用到多期吗?

市场设定

单期模型

记 X_i 为风险证券 i 在 1 时刻的支付, N 只风险证券的支付向量 $\mathbf{x} = [X_1, X_2, \dots, X_N]'$ 在 0 时刻被看成是随机的。均值 $\boldsymbol{\eta} = E(\mathbf{x})$, 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega} = \text{var}(\mathbf{x})$, 定义

$$a = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{p} \quad b = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta} \quad c = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta}$$

其中 $\mathbf{p} = [P_1, P_2, \dots, P_N]'$ > 0 为基本证券价格向量。

- 市场总支付为 $X_M = \mathbf{1}'\mathbf{x}$, 市场总市值为 $P_M = \mathbf{1}'\mathbf{p} > 0$.

市场总支付的均值为 $E = E(X_M) = \mathbf{1}'\boldsymbol{\eta}$, 方差为 $Q = \text{var}(X_M) = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1} > 0$.

- N 只风险证券的收益率 (毛收益率) 向量为 $\mathbf{r} = [R_1, R_2, \dots, R_N]'$, 则 $R_i = X_i/P_i$

$$\mathbf{r} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \implies \boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{r}) = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\eta} \quad \mathbf{V} = \text{var}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}^{-1}$$

其中 $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{p})$, 即价格向量 \mathbf{p} 的对角化矩阵。显然, 从收益率的角度

$$a = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \quad b = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} \quad c = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

支付空间

- 假设市场中存在支付为常数 $X_0 > 0$ 的无风险债券，相应的收益率为 $R_0 > 1$ (无风险利率为 $R_0 - 1$)。请注意，我们还需要假设 $R_0 < \frac{b}{a}$ ，否则资本市场不存在。
- 定义二次函数 (价格被隐藏 $a = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}$)

$$h(x) \equiv (\boldsymbol{\eta} - x\mathbf{p})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\eta} - x\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\mu} - x\mathbf{1})'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - x\mathbf{1}) = ax^2 - 2bx + c \geq 0$$

- 记 \mathbf{M} 为包含 N 只纯风险证券和无风险债券的市场，则相应的支付空间为

$$\mathbf{X} = \{h_0 X_0 + \mathbf{h}'\mathbf{x} : h_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N\}$$

有时候我们仅分析包含 N 只纯风险证券的市场 \mathbf{M}_* ，它是市场 \mathbf{M} 排除了无风险债券。数学上支付空间 \mathbf{X} 是 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 空间的子集，市场 \mathbf{M} 通常不是完全市场。 L^2 是 Hilbert 空间，有很多良好的性质。

- 价值权重：当资产组合的价值为正时， $z_i = \frac{h_i P_i}{\mathbf{h}'\mathbf{p}}$ (\mathbf{z} 的第 i 个分量) 为组合中证券 i 所占的价值份额。由于 $\mathbf{z}'\mathbf{1} = 1$ ，权重是归一化的。

资产价格公设

- ① **一价律** (可定价): 基本证券都有唯一价格。存在函数关系 \wp , $\mathbf{p} = \wp(\mathbf{x})$
- ② **组合律** (可交易): 资产组合当前和未来价值的计算依照线性运算法则, 即资产组合的当前价格等于各个组成资产当前价格的线性组合, 资产组合的未来支付等于各个组成资产未来支付的线性组合。组合律表明定价函数是线性的

$$\wp(aX + bY) = a\wp(X) + b\wp(Y) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{X}$$

资产打包的整体价值, 等于拆分后各部分的价值总和

提醒: 现代投资组合理论隐含应用了组合律

- ③ **有限责任 (正性, 可上市)**: 有限责任资产组合 (支付 $X \geq 0$, 且 $P(X > 0) > 0$, 记为 $X \succeq 0$) 的价格为正

模仿支付

由 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理, 对于任意的 $X \in \mathcal{X}$, 定价函数可以唯一表示为

$$P = \wp(X) = E(X; X) \quad X; \in \mathcal{X} \quad (1.1)$$

由于支付 $X;$ 模仿了 SDF (Stochastic Discount Factor, 随机折现因子) 的功能, $X;$ 被称为 SDF 的**模仿支付** (mimicking payoff).

命题 (模仿支付)

市场 \mathcal{M} 中, 如果价格是可行的 (满足一价律和组合律), 那么

$$X; = \frac{1 + c - bR_0}{R_0} - \frac{1}{R_0} \mathbf{r}' \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1}) \quad (1.2)$$

是唯一的模仿支付。

有效前沿

收益率正交分解

收益率超平面 $\mathcal{X}_1 = \{X \in \mathcal{X} : \wp(X) = 1\}$, 超额收益率空间 $\mathcal{X}_0 = \{X \in \mathcal{X} : \wp(X) = 0\}$. 对于市场 \mathcal{M} 中任意的资产组合, 假设其收益率为 R , 均值为 $\mu = E(R)$, 那么有如下的分解式

$$R = R_{\cdot} + \theta(\mu)R_{\iota} + R_e \quad (1.3)$$

其中 $R_{\cdot} = \frac{X_{\cdot}}{\wp(X_{\cdot})}$, $R_{\iota} = \text{Proj}(1 | \mathcal{X}_0)$ 和 R_e 两两**正交** (orthogonal), 即

$$E(R_{\cdot}R_{\iota}) = E(R_{\iota}R_e) = E(R_eR_{\cdot}) = 0$$

并且

$$\theta(\mu) \equiv \frac{E(R_{\iota}R)}{E(R_{\iota}^2)} = \frac{\mu - \mu_{\cdot}}{\mu_{\iota}} = \mu + \frac{\mu - R_0}{h(R_0)} \quad \forall R \in \mathcal{X}_1 \quad (1.4)$$

在市场 \mathcal{M}_{*} 中, 有如下形式上完全对应的带星号的版本 $R = R_{*\cdot} + \theta_{*}(\mu)R_{*\iota} + R_{*e}$

组合前沿

记 F_* 为市场 M_* 的均值方差前沿: $R \in F_* \iff R = R_{*i} + \theta_*(\mu)R_{*l}$

记 F 为市场 M 的均值方差前沿, 资产组合 $R = z_0R_0 + \mathbf{z}'\mathbf{r}$

$$R \in F \iff R = R_i + \theta(\mu)R_l$$

均值方差 $(\mu - v)$ 平面上前沿 F 与 F_* 相切, 记切点组合 (tangent portfolio) 的收益率为

$$R_l = \mathbf{z}_l'\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}\mu_l &= \frac{bR_0 - c}{aR_0 - b} \\ v_l &= \frac{(\mu_l - R_0)^2}{h(R_0)} = \frac{h(R_0)}{(aR_0 - b)^2} = \frac{\mu_l - R_0}{b - aR_0} \\ \mathbf{z}_l &= \frac{1}{b - aR_0} \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1})\end{aligned}\tag{1.5}$$

两基金分离

无论是前沿 F_* 还是 F , 任意给定两个不同的前沿组合 R_p 和 R_q , $R_p \neq R_q$. 那么证券组合 R 在前沿上当且仅当组合 R 是前沿组合 R_p 和 R_q 的仿射组合

$$R = \tau R_p + (1 - \tau) R_q = R_q + \tau \cdot (R_p - R_q) \quad (1.6)$$

其中系数 $\tau = \tau_{pq}(\mu)$ 是组合 R_p , R_q 和 R 的函数

$$\tau_{pq}(\mu) \equiv \frac{\mu - \mu_q}{\mu_p - \mu_q} = \frac{\beta(\mu) - \beta(\mu_q)}{\beta(\mu_p) - \beta(\mu_q)} = \frac{E(RR_p) - E(R_p R_q)}{E(R_p^2) - E(R_p R_q)} = \frac{\text{cov}(R, R_p) - \text{cov}(R_p, R_q)}{\text{var}(R_p) - \text{cov}(R_p, R_q)} \quad (1.7)$$

F 上的组合由无风险债券和切点组合组成. 均值方差偏好的投资者只选择有效前沿上的组合, 因此, 证券投资决策只需确定出无风险债券的比例, 剩余部分投入切点组合即可。

风险证券局部均衡

CAPM 公式

回顾 $\mathbf{z}_l = \frac{1}{b-aR_0} \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1})$, $v_l = \frac{\mu_l - R_0}{b-aR_0}$. 局部均衡时 $R_M = R_l$, 有 $\mu_l = \mu_M$, 定义

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\text{cov}(\mathbf{r}, R_M)}{\text{var}(R_M)} = \frac{\text{cov}(\mathbf{r}, R_l)}{\text{var}(R_l)} = \frac{\text{cov}(\mathbf{r}, \mathbf{z}_l' \mathbf{r})}{v_l} \\ &= \frac{1}{\frac{\mu_l - R_0}{b-aR_0}} \mathbf{V} \cdot \frac{1}{b-aR_0} \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1}) = \frac{1}{\mu_M - R_0} (\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1})\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1} = (\mu_M - R_0) \boldsymbol{\beta}$$

分量形式

$$\mu_i - R_0 = \beta_i (\mu_M - R_0) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

王江 (2006, p199): 推导 CAPM 时要求借贷净额为 0, 不必要

命题 (CAPM 证券价格通解)

市场 M 中, 如果投资者都采用均值方差准则进行决策, 那么风险证券价格向量服从

$$\mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{R_0} + x\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

注意到风险证券总市值与参数 x 一一对应

$$P_M = \mathbf{1}'\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\eta}}{R_0} + x\mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1} = \frac{QR_0x + E}{R_0} \quad (1.9)$$

CAPM 公式成立时风险证券价格向量满足式 (1.8), 因此

$$a = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{p} = \frac{QR_0^2x^2 + 2ER_0x + c}{R_0^2}, \quad b = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \frac{ER_0x + c}{R_0} \quad (1.10)$$

表明 $aR_0 - b = QR_0x^2 + Ex = P_MR_0x$, $bR_0 - c = ER_0x$ 以及

$$h(R_0) = aR_0^2 - 2bR_0 + c = QR_0^2x^2$$

命题 (CAPM)

市场 M 中, 如果投资者采用均值方差准则, 那么如下四种表述等价

- ① CAPM 公式: 风险溢价 (超额期望收益率) 与市场贝塔成正比

$$\mu - R_0 \mathbf{1} = (\mu_M - R_0) \beta$$

其中 μ_M 为市场组合 R_M 的期望收益率, 以及市场贝塔 $\beta = \frac{\text{cov}(\mathbf{r}, R_M)}{\text{var}(R_M)} = \frac{P_M}{Q} \mathbf{P}^{-1} \Omega \mathbf{1}$

- ② 风险证券均衡 (M_* 均衡): 市场组合等于切点组合 $R_M = R_l$

- ③ 市场组合是前沿组合: $R_M \in \mathbf{F}$

- ④ 资本市场线: 对于任意的有效前沿组合 $R \in \mathbf{F}$, 有

$$\mu - R_0 = \frac{\mu_M - R_0}{\sigma_M} \sigma$$

其中 μ 和 σ 分别为前沿组合收益率 R 的期望和标准差

贝塔系数不是证券的特性

市场 M (包含无风险债券) 的均衡中市场收益率是内生的，只要能影响风险证券总市值 P_M 的变量，都可能改变证券的贝塔，哪怕证券自身的支付没有任何变化，例如

- ① 只改变无风险债券收益率 R_0
- ② 投资者偏好和禀赋改变，将改变均衡总市值 P_M
- ③ 只是其他某个证券 j 的支付改变或者市场新增证券

是时候抛弃这种为了迎合风险教条而进行循环论证的错误解释了

- 逻辑上，从定义式 $\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}$ 知贝塔源自收益率，怎么能颠倒过来，认为收益率 (知道 μ_i 等价于知道 R_i) 由贝塔决定呢？
- 我感觉人们把 β_i 解释为系统风险是一种想当然，被期望收益率由风险决定的风险教条所误导——只不过是將风险从自身的方差改进为所谓的系统风险而已。

2 均值方差均衡

- 均值方差决策
- 均衡价格
- 数值例子
- 允许套利机会
- 可能前沿

MV 决策

- MV 占优与均值方差均衡有什么区别与联系?
- 供给等于需求, 为什么说均值方差均衡的实质是配置均衡?
- 均值方差均衡价格能确保市场是无套利的吗?
- 均值方差决策会导致不可能前沿吗?

均值方差决策

假设投资者 k 的财富为 W_k , 持有的组合支付为 $X = h_0 X_0 + \mathbf{h}'\mathbf{x}$, 期望为 η , 方差为 q . 投资者 k 使用 MV 准则进行投资, 那么**评价函数** (merit function) $m_k(\eta, q)$ 满足

$$\partial m_k / \partial \eta > 0 \quad \partial m_k / \partial q < 0$$

也就是说: 给定初始投入 $W_k > 0$, 相同的风险 (支付的方差) 下期望支付越高越好, 同时相同的期望支付下风险越小越好。

最佳组合中纯风险证券的组合为

$$\mathbf{h}_k = g_k \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\eta} - R_0 \mathbf{p}) = g_k \mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1}) \quad (2.1)$$

其中权衡系数

$$g_k = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial m_k / \partial \eta}{\partial m_k / \partial q} > 0 \quad (2.2)$$

因此, 纯风险证券的最佳持有价值为

$$w_o = \mathbf{p}' \mathbf{h}_k = \mathbf{p}' g_k \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\eta} - R_0 \mathbf{p}) = (b - a R_0) g_k > 0 \quad (2.3)$$

市场组合等于切点组合

我们看到 $(\mathbf{h}_k = g_k \mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1}), w_o = (b - aR_0)g_k)$

$$\frac{1}{w_o} \mathbf{P} \mathbf{h}_k = \frac{1}{b - aR_0} \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0 \mathbf{1}) = \mathbf{z}_l$$

投资者持有的纯风险证券组合恰好为切点组合，与投资者的偏好参数 g_k 无关。

投资者最佳组合支付的期望和方差为

$$\eta = \mathbf{h}'_k \boldsymbol{\eta} + (W_k - \mathbf{h}'_k \mathbf{p}) R_0 = W_k R_0 + g_k h(R_0) \quad (2.4)$$

$$q = \mathbf{h}'_k \boldsymbol{\Omega} \mathbf{h}_k = g_k^2 h(R_0)$$

均衡价格

权衡系数

- 简单权衡系数：投资者 k 的评价函数为

$$m_k(X) = m_k(\eta, q) = \eta - \frac{G_k}{2W_k}q \quad (2.5)$$

- 二次权衡系数：投资者 k 的评价函数为

$$m_k(X) = m_k(\eta, q) = E(W_k U_k(R)) = \eta - \frac{G_k}{2W_k}\eta^2 - \frac{G_k}{2W_k}q \quad (2.6)$$

权衡系数为 $g_k = \frac{W_k}{G_k} - \eta$, 联合式 (2.4) 解出 g_k 得

$$g_k = \frac{W_k}{1 + h(R_0)} \left(\frac{1}{G_k} - R_0 \right) \quad (2.7)$$

如果 $0 < G_k < \frac{1}{R_0}$, 那么 $g_k > 0$, 具有二次权衡系数的投资者才不会违背 MV 准则。

投资者总财富为 $W = \sum_{k=1}^I W_k$, 无风险债券净额为 $B = \sum_{k=1}^I W_k z_{k,0}$. 均衡条件

$$W = P_M + B$$

命题 (可行均衡价格)

市场 M 中, 当投资者都采用简单权衡系数时, 可行均衡解为

$$x = -\frac{1}{GR_0} \quad (2.8)$$

其中 $G = \sum_{k=1}^I g_k = \sum_{k=1}^I \frac{W_k}{G_k}$.

当投资者都采用二次权衡系数时, 记 $G = \sum_{k=1}^I \frac{W_k}{G_k} \neq \sum_{k=1}^I g_k$, 如果 $(WR_0 - G)^2 < 4Q$, 市场均衡不存在。如果 $(WR_0 - G)^2 \geq 4Q$, 可行均衡解为

$$x = \frac{WR_0 - G \pm \sqrt{(WR_0 - G)^2 - 4Q}}{2QR_0} \quad (2.9)$$

市场组合

市场均衡时, $P_M = \frac{QR_0x+E}{R_0}$, 市场组合等于切点组合

$$\mathbf{z}_M = \mathbf{z}_l = \frac{1}{P_M} \mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta} + R_0x\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1}}{QR_0x + E}$$

市场收益率为 $R_M = \frac{X_M}{P_M}$, 期望为 $\mu_M = \frac{E}{P_M}$, 方差为 $v_M = \frac{Q}{P_M^2}$.

注意到 Q 为常数, 总市值越大市场收益率的波动越小。

- 市场支付 X_M 外生
- 市场收益率 R_M 内生 (总市值 P_M 内生)
- $c = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ 恒为常数: 均衡时风险证券收益率的期望和方差之间是存在约束的, 由于它们都由均衡价格决定, 风险证券形成一个整体, 不能将单个证券孤立出来。

数值例子

现金禀赋

均值方差占优考虑的是两两比较

- 证券 1 与证券 2 的支付同方差，而证券 1 的支付期望比较高，因此证券 1 在支付上 MV 占优于证券 2。本例子中，证券 1 与证券 3，以及证券 2 与证券 3 在支付上都没有 MV 占优关系
- 均值方差均衡后，证券 1 与证券 2 在收益率上变成没有 MV 占优关系，而证券 2 在收益率上被证券 3 MV 占优

由此我们看到，均值方差占优只是两只证券之间的关系，适合于两者选一的情形，不适合于分散化组合的情形。

一级市场

证券组合降低风险，因此常常与增值混为一谈

- 证券组合整体等于部分和，证券组合的建立过程是没有增值的，没有价值创造的
- 增值是通过生产实现的，生产决策使资产增值，而生产决策前的持有将分享该增值，证券组合的增值发生在持有的过程中
- 当然，现实世界信息是逐步明晰的，价格同步随时进行调整

允许套利机会

例子 (MV 决策与套利可能)

给定两风险证券

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{23}{20} \\ \frac{185}{164} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.150 \\ 1.128 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

以及无风险债券 $R_0 = \frac{21}{20} = 1.05$. 假设两个投资者中 $W_1 = 1, W_2 = 2$, 如果都采用简单权重系数, $G_1 = \frac{100}{41}, G_2 = \frac{400}{123}$, 那么 $G = \frac{41}{40}, x = -\frac{1}{GR_0} = -\frac{800}{861}$, 均衡价格为

$$\mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{R_0} + x\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此市场均衡时 $\mathbf{r} = \mathbf{x}$, 即 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\eta}$ 且 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}$.

注意到 $\mu_1 > \mu_2$ 且 $v_1 > v_2$, 市场可能存在套利机会。

假设 $R_1 - R_2 \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$, 则对数正态分布的参数为

$$\mu = 2 \ln \left(\frac{9}{410} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{15453}{672400} \right) = -5.751$$

$$\sigma^2 = \ln \left(\frac{15453}{672400} \right) - 2 \ln \left(\frac{9}{410} \right) = 3.865$$

在该设定下, $X_1 - X_2 = R_1 - R_2 > 0$, 而 $\wp(X_1 - X_2) = 0$, 买入证券 1 卖出证券 2 的零投入组合, 是一个套利机会。

Markowitz (1991) 强调 MV 准则与对数和指数的效用函数高度近似。然而本例子告诉我们, 它们在排除套利机会方面有重大的区别

- 均值方差均衡结果必须先检查是否存在套利机会
- 满足无套利条件下 CAPM 公式才可以作为定价公式。

可能前沿

不可能前沿

Brennan and Lo (2010,p909) 给出如下例子 (原文使用简单收益率)

$$\mu = \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0.096 \\ 0.12 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{137}{125} \\ \frac{28}{25} \\ \frac{23}{20} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{16}{625} & \frac{16}{625} & \frac{256}{15 \cdot 625} \\ \frac{16}{625} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{256}{15 \cdot 625} & \frac{1}{25} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

得

$$\mathbf{z}(\mu) = -\frac{1}{366} \begin{bmatrix} -8915 \\ 2017 \\ 6532 \end{bmatrix} + \frac{\mu}{6} \begin{bmatrix} -125 \\ 25 \\ 100 \end{bmatrix}$$

可以看到: 当 $\mu > \frac{1783}{1525} = 1.169$ 时, 证券 1 的权重小于零; 当 $\mu < \frac{2017}{1525} = 1.323$ 时; 证券 2 的权重小于零。因此, 无论收益率是多少, 前沿面上总有证券的投资权重为负。

他们发现, 当资产数目增加时, 前沿面为**不可能前沿**的概率趋近于 1。

交锋

Critical Finance Review 等学术期刊专门刊发了交锋的文章

- Levy and Roll (2015) 采用内生的收益率进行讨论，通过反向工程方法 (Levy and Roll, 2010) 直接调整 μ 和 \mathbf{V} ，相当于直接修改均衡结果。
- Ingersoll (2015) 居于支付，仅局限于风险证券的局部均衡进行讨论，没有考虑到投资者禀赋和偏好的作用，未能看到可能前沿就是社会财富的的均值方差配置。
- Brennan and Lo (2015) 居于内生的收益率进行了辩护，不可能前沿依然似是而非

CAPM 是局部均衡分析，风险证券的价格被限制在一维空间中，风险证券的收益率是内生的。把收益率当外生变量是导致不可能前沿的根源，不能让市场均衡的收益率往往出现不可能前沿。

3 贝塔系数

- 贝塔定价
- 资产变动

贝塔

- 能使用贝塔为企业的新项目定价吗?
- 能使用贝塔为期权定价吗?
- 如果新工艺出现将使企业的业绩增加, 那么期望收益率一定上升吗? 企业价值随着上升吗?
- 期望收益率不变, 贝塔可以改变吗?

贝塔定价

SDF 与贝塔

均值方差均衡下，对于市场中任意的支付为 X 的非零投入证券组合，即 $P \neq 0$ ，记收益率 $R = X/P$ (严格地说，仅在 $P > 0$ 时 R 才是收益率)，我们有如下两种等价表示式

- ① SDF 模仿支付定价： $1 = E(X, R)$ ，或者若 x 为均值方差均衡解

$$P = E(X, X) = \left(\frac{1}{R_0} - xE \right) E(X) + x E(XX_M) \quad (3.1)$$

- ② 贝塔定价： $E(R) - R_0 = \beta(E(R_M) - R_0)$ ，其中 $\beta = \frac{\text{cov}(R, R_M)}{\text{var}(R_M)}$

使用收益率研究定价，只适用于组合价格非零的情况。而采用支付的式 (3.1) 适合于市场内的任意证券组合，包括零投入组合。

例子 (期权负价格)

基本证券的设定来自 Dybvig and Ingersoll (1982, p242-4) 和 Ingersoll (1987, p200-5)

$$\eta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad R_0 = 1$$

若两投资者初始财富为 $W_1 = 1, W_2 = 2$, 简单权衡系数为 $G_1 = \frac{5}{8}, G_2 = \frac{5}{6}$. 均衡时 $\mathbf{p} = [1; 1]$.
引入欧式期权 $X = (X_1 - K)1_{X_1 \geq K}$, 其中 K 为执行价格, 如果采用 CAPM 公式进行定价

| 正态分布 | 对数正态分布 |
|--|--|
| $K = 1 \quad \kappa \lambda^{1/4} = 0.7041$ | $\frac{7}{2}N(3z) - \frac{3}{2}N(z) - 2N(5z) = 0.1748$ |
| $K = 2 \quad \kappa - \frac{1}{2} = 0.2979$ | $4N(z) - 3N(-z) - 2N(3z) = -0.1585$ |
| $K = 4 \quad \kappa \lambda - 3N(-1) = 0.007976$ | $5N(-z) - 6N(-3z) - 2N(z) = -0.2650$ |
| $K = 8 \quad \kappa \lambda^9 - 7N(-3) = -0.0005856$ | $7N(-3z) - 2N(-z) - 12N(-5z) = -0.1606$ |

扩大化：错误的定价核

对期权市场数据采用 CAPM 公式进行定价，Jarrow and Madan (1997, p23) 观测到当执行价格超过一定水平后 (虚值处于两倍标准差) 看涨期权开始出现负价格。

例子 3.1 中，如果使用 X_* 对不属于 M_* 的无风险支付 1 进行定价，有

$$E(X_* \cdot 1) = E(X_*) = \frac{b}{c+1} = \frac{32}{88+1} = \frac{32}{89}$$

然而 $\varphi(1) = E(X \cdot 1) = E(X) = \frac{1}{R_0} = 1$ ，表明使用 X_* 定价导致了错误的价格。

瞎猫逮鼠：Black and Scholes (1973) 应用 CAPM 公式的另类方法推导 BS 方程

资产变动

提示: $P_{1+} = P_1 + \frac{K}{R_0}$, 整体性, 其他证券价格保持不变

例子 (业绩提升收益下降)

假设证券 1 的支付从 X_1 增加到 $X_1 + K$.

使用例子 2.1 中的设定, 如果 $K = \frac{1}{5}$, 证券 1 的贝塔降低了 $\beta_{1+} - \beta_1 = -\frac{164}{1825}$, 并且尽管未来业绩更好, 但期望收益率却下降了

$$E(R_{1+} - R_1) = \frac{\eta_1 + K}{P_1 + \frac{K}{R_0}} - \frac{\eta_1}{P_1} = \frac{P_1 R_0 - \eta_1 K}{P_1 R_0 + K} \frac{1}{P_1} = -\frac{2}{125}$$

由于资产定价的整体性, 单个企业提高业绩并不一定能提高自身的期望收益率。

对于支付未变动的证券 2, $E(R_{2+} - R_2) = 0$, 然而 $\beta_{2+} - \beta_2 = \frac{128}{1533}$, 期望收益率不变而贝塔改变了。

提示: $P_{1+} - P_1 = \frac{E(Y)}{R_0} + x\text{var}(Y)$

例子 (业绩提升市值下跌)

假设证券 1 的支付从 X_1 增加到 $X_1 + Y$, 其中随机变量 $Y > 0$, 并且 $\text{cov}(Y, \mathbf{x}) = 0$.

对于例子 2.1 中的设定, 取 $E(Y) = \frac{1}{50}$, $\text{var}(Y) = \frac{1}{36}$, 有 $P_{1+} - P_1 = -\frac{262}{38745} < 0$, 业绩提升但市值下跌。

这有悖于常理, 然而, 注意到均值方差均衡时参数 x 为负, 对单个企业而言, 如果支付期望值的增加不足以抵消风险增加带来的折价, 整体效果是企业的价值下降。

从收益率的角度, $\beta_{1+} - \beta_1 = \frac{255\ 261\ 294}{2126\ 609\ 063}$, $E(R_{1+} - R_1) = \frac{5381}{192\ 415}$, 贝塔和期望收益率都上升

更多例子

- 支付 X_1 改变为 KX_1 , 其中常数 $K > 1$
- 风险证券的数量从 N 增加到 $N + 1$

以上情形还是在假设均衡参数 x 未发生改变的前提下得到的, 事实上, 现实市场中, 投资者的财富是时时刻刻在改变的, 均衡参数必然随时间改变。

4 多期

- 收益率时间序列
- 实证的困难
- 因子模型
- 总结

多期

- 多期模型的特点是什么?
- CAPM 能逐期成立吗?
- 因子模型来自何方? 因子大战会有什么样的未来?
- 时间序列下, 当前价格 P_t 上升, 收益率 $\frac{P_{t+1}}{P_t}$ 就下降吗?

收益率时间序列

多期和多步

在讨论多期模型之前，我们有必要对多期和多步进行区分

- ① **多步模型**：特点是信息的逐步精细化，给定概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) ，有个 \mathcal{F}_t 的逐渐变大过程， $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
- ② **多期模型**：特点是样本空间随时间改变，形成集列 $\Omega_0, \Omega_1, \cdots, \Omega_T$ ，相应定义出事件域 \mathcal{F}_t 和概率测度 $P_t : \mathcal{F}_t \rightarrow [0, 1]$. 有必要指出的是，给定两个时刻 $t < u$ ， $\Omega_t \subset \Omega_u$ 不一定成立，哪怕有 $\Omega_t \subset \Omega_u$ ， $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$ 也不一定成立

收益率

- CAPM 理论分析中我们使用的**均衡收益率**为

$$R_t = \frac{X_t}{P_{t-1}} = \frac{X_t}{\wp_{t-1}(X_t)} \quad (4.1)$$

对于普通股，其定价显然不能离开企业的生产决策。

- 市场上，我们看到居于价格过程的**时序收益率** (假设没有分红，交易价格等于均值方差均衡价格)

$$R_{|t} = \frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{\wp_t(X_{t+1})}{\wp_{t-1}(X_t)} \quad (4.2)$$

多期模型中，**价格过程 P_t 与支付过程 X_t 是并行的**：如果企业能够存活，企业根据当时的状况选取生产函数继续经营，人们不再关心 X_t 的取值而是关注 X_{t+1} 的分布，市场以此定出 t 时刻的证券价值 $P_t = \wp_t(X_{t+1})$ 。

实证的困难

CAPM 实证：支付不可观测

- ① 逐期成立: Campbell et al. (1996) p183 明确了 CAPM 实证的附加假设, 认为单期模型 CAPM 逐期成立是理论上不矛盾的。
- ② 如果基本证券的收益率平稳, 将导致 Luenberger (1998, p222) 所说的多期谬误
- ③ **DGP**: $E(Y) = \alpha + \beta E(X)$ 与 $E(Y | X) = \alpha_0 + \beta_0 X$. 进一步时序化

$$R_{|ti} - R_{t0} = \alpha_{|i} + \beta_{|i}(R_{|tM} - R_{t0}) + e_{ti} \quad (4.3)$$

通常采用 60 个样本进行滚动估计 $\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)} = \frac{\text{cov}(R_i - R_0, R_M - R_0)}{\text{var}(R_M - R_0)}$

$$\beta_{*i} = \frac{\text{cov}(R_{|tM}, R_{|ti})}{\text{var}(R_{|tM})} \quad \beta_{|i} = \frac{\text{cov}(R_{|tM} - R_{t0}, R_{|ti} - R_{t0})}{\text{var}(R_{|tM} - R_{t0})}$$

- ④ **平稳性**: 无风险债券收益率时间序列 R_{t0} 是时变的; 市场的时序收益率 $R_{|tM}$ 很可能不平稳
- ⑤ 其他问题: 数据处理; 投资者方面也是动态的; 市场因子的回归系数是时变的

因子模型

因子模型

- 起源于单因子模型，原本用来估计组合选择时需要输入的方差矩阵 \Rightarrow 估计时序贝塔 \Rightarrow RGP
- 因子大战: CAPM \Rightarrow FF3 \Rightarrow FF5, q-4, M-4; Cochrane (2011) 称之为因子的动物园
- Hou et al. (2017) 记录了大部分异象都无法复制的不幸事实，447 种异象只有 11 种仍然显著
- 收益率预测: 尽管统计意义上样本外解释能力很小，Campbell and Thompson (2008) 认为对于均值方差投资者而言，经济上还是有意义的
- 盈利和投资作为企业的特性，也许当成个性因子处理更合适
- 经济意义与统计意义也是有区别的

总结

IPO 如何定价

资产定价走到 1543 的年代：类似与地球是运动的，市场是内生的，不是外生的。因此，如下问题仍然很难回答

地球在转动，一块石子向上抛去，就会被地球的转动抛在后面，而落在抛掷点的西面？

道路曲折艰辛：Copernicus, Kepler, Galileo 历经百年

- 神经网络曲折道路：兴起、死刑、复活、追捧 (改名深度学习)
- 计算机自然语言处理：两路人马各自组织和召开自己的会议 (数学之美, p23-25)

总结

- ❶ 人们止步于 CAPM 描述的风险与收益的关系，是时候抛弃这种为了迎合风险教条而进行循环论证的错误解释
- ❷ 贝塔不是什么系统风险，不能随意的扩展到新增的项目或者衍生品中，用贝塔估计资本成本更是错上加错。
- ❸ 均值方差均衡框架下，风险证券作为一个整体被定价。孤立考察单个证券的收益率，导致贝塔决定期望收益率的错误因果推断。
- ❹ 多期的特点是不断出现未知的新状态，这对数学基础理论提出新的需求。
- ❺ 投资者在进行经济预测时，应更注重经济意义而不是统计意义。

谢 谢！