MM 命题：重新思考

陈 灯 塔

WiSE, XMU

MAXCHEN@XMU.EDU.CN

Analysis of Pure Finance

2018 年 1 月 27 日

https://ssrn.com/abstract=2896067 Comments Welcome

内容梗概

1. MM 的贡献
2. MM 命题
3. 证券化

MM 命题: 公司价值与资本结构 (债务比率) 无关

为什么与直觉相去甚远，*MM* 命题在逻辑上有没有循环论证?

1. MM 的贡献
   - 完美市场假设
   - 无套利原理

MM1958 的贡献

1. 应用了套利方法
   - 无套利分析框架使金融学从方法论上与经济学独立开来
2. 提出完美市场 (perfect market) 假设
   - 完美市场假设就如同物理学中牛顿第一运动定律中的不受外力假设一样，使我们能从最简单的情形出发，从简化的理想世界逐步认识现实的资本市场。

完美市场假设

完美市场假设具体为：在竞争性的资本市场中

1. 完美的**市场交易**：交易是无摩擦的，并且交易价格为均衡价格
   - 没有买卖差价，对于任意的资产，买价和卖价是相等的。特别地，借贷利率相同
   - 没有交易费用，例如没有经纪费用
   - 没有税收（印花税、所得税、增值税等）
   - 没有财务困境成本，例如没有破产成本
2. 完美的**市场流动性**：以市场价格，随时买卖任意数量的资产
   - 允许卖空，即资产的持有头寸可以是任意的实数（正、负以及无理数）
   - 市场是完全流动的，也就是说随时买卖任意数量的资产是可能的。特别地，借贷（卖空债券）的金额是不受限制的
3. 完美的**市场信息**：资产价格充分反映全部信息
   - 投资者掌握未来不确定性状态的信息集，并且知晓相应的概率测度
   - 投资者是理性的，并且获悉历史和当前的完整信息
   - 信息的获取和适当处理是不需要成本的，计算是瞬间完成的

完美市场假设

- 诚然，这些假设都远离现实，是理想化的无菌世界。
- 当完美市场假设被明确下来之后，我们才可能在干净的试管里进行实验，排除各种纷繁复杂的干扰，从简单的情形入手，慢慢了解市场规律。
- 所谓的有效市场假说，实际上就是完美市场信息这一层面的要求，信息充分反应到资产价格中。
    - **有效市场假说**，还停留在描述性阶段，更多的是直觉的洞察和感悟，缺乏数学的解析表示。信息有效的定义本身就是有意地含糊其辞，信息是如何反应到价格中的，市场价格是如何汇总信息的，仍然说不清，道不明，对其中的机理尚未明了。
- 经济学对理性的定义是含糊不清的，信息采用概率模型来刻画与现实也有距离。对信息和理性等基本概念的清晰认识，将伴随着金融学的开疆拓土，乃至数学等其他学科新理论的催生，必然是一个漫长的探索过程。

无套利原理

套利机会

Varian (1987)：农夫与经济学教授玩问答游戏

- 教授自我感觉很好，如果回答不上来愿意支付农夫一美元，而如果农夫不能回答则只付半美元。
- 农夫的问题稀奇古怪："什么东东用七条腿上山，而下山时只用三条腿？"
- 教授百思不得其解，承认答不出来，并反戈回问农夫。
- 农夫答道："我也不知道答案，如果您给我约定的一美元，我就支付欠你的那半美元。"

这个段子道出了套利的本质特征就是无中生有。

弱正

如果随机变量 $X \geqslant 0$ (概率 1 意义下，即 $\mathrm{P}(X \geqslant 0) = 1$) 且 $\mathrm{P}(X = 0) < 1$，我们称 X 是**弱正的** (weak-positive)，并记为 $X \gneqq 0$。

大于等于零，且不恒为零

X 是弱正的等价于 $X < 0$ 的概率为零且 $X > 0$ 的概率为正。确定性世界中

- 标量 $x, y \in \mathbb{R}$: $x \gneqq y \iff x > y$
- 向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} \gneqq \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, and $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. ($\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, 且至少有个 i, $x_i > y_i$)

有限责任：支付为弱正的资产，因为持有者的责任有限

假设某资产组合 (P, X) 的当前价值为 P, 未来支付为 X, **套利机会** (arbitrage opportunities) 定义为：存在

$$\begin{bmatrix} -P \\ X \end{bmatrix} \gneq 0 \tag{1.1}$$

显然，该定义包含了三种情形

1. **即时套利**机会：$P < 0, X = 0$. 因为该资产组合让我们可以当前拿到一笔钱，然后安全地离开，将来没有任何责任
2. 零投入套利机会

$$P = 0, X \gneq 0 \tag{1.2}$$

   如果 $X > 0$, 称为**强套利**；进一步如果 $X = a > 0$ 退化成一正的常数，则称为**朴素套利**
3. 混合套利机会：$P < 0, X \gneq 0$

无风险套利机会 (risk-free arbitrage opportunities) 也称为确定性套利机会，包含了即时套利机会和朴素套利机会 (免费午餐)

资产价格公设

1. **一价律** (可定价): 基本证券都有唯一价格。存在函数关系 $\wp$, $\mathbf{p} = \wp(\mathbf{x})$
2. **组合律** (可交易): 资产组合当前和未来价值的计算依照线性运算法则，即资产组合的当前价格等于各个组成资产当前价格的线性组合，资产组合的未来支付等于各个组成资产未来支付的线性组合。组合律表明定价函数是线性的

$$\wp(aX + bY) = a\,\wp(X) + b\,\wp(Y) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathsf{X}$$

资产打包的整体价值，等于拆分后各部分的价值总和

提醒：现代投资组合理论隐含应用了组合律

3. 有限责任 (**正性**, 可上市): 有限责任资产组合 (支付 $X \geqslant 0$, 且 $\mathrm{P}(X > 0) > 0$, 记为 $X \gneq 0$) 的价格为正

转化成数学问题

- 金融市场的资产组合仍然在市场中，因此，资产或者状态的数目有限时，数学上，金融市场是拓扑向量空间中的一闭凸集
- 类似的，套利机会全体也是一凸集
- 如果市场不存在套利机会，则这两个集合不相交
- 根据凸集分离定理，存在一个超平面将这两个集合分离
- 令人惊喜的是，超平面的法线即为定价函数的表示式，注意到法线指向套利机会集所在的“正象限”，故定价函数是正线性的

资产定价基本定理

无套利原理：金融市场中，不存在套利机会

从效用函数的角度，无套利原理符合投资者对财富的越多越好的偏好；从市场规则的角度，它遵从有限责任的市场规范。

定理 (资产定价基本定理)

金融市场不存在套利机会，当且仅当定价函数是正线性函数。

Riesz 表示

由 Riesz 表示定理，对于资产组合 (P, X)，金融市场的正线性定价函数可以表示为

$$P = \wp(X) = \mathrm{E}(\Psi X) \qquad \Psi > 0 \tag{1.3}$$

其中正随机变量 Ψ 被称为**随机折现因子** (stochastic discount factor, SDF)，因为 Ψ 的作用类似于确定性环境中的折现因子。

此外，在不同的场合，Ψ 还被称为*定价核* (pricing kernel) 或者*状态价格密度* (state-price density)，因为求期望的本质是一积分运算，在这积分变换过程中，Ψ 的作用犹如核函数或者密度函数。

风险中性定价

我们用 0 和 1 表示现在和将来，记 B_t 为无风险资产的价格过程 (B_t 为 t 时刻的价格，通常取 $B_0 = 1$, 则 $B_1 = 1 + r$)

定义 Radon-Nikodým 导数

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = G = \Psi B_1 / B_0$$

有 $\mathrm{E}^Q(Y) = \mathrm{E}(YG)$, 其中 $\mathrm{E}^Q(\cdot)$ 表示概率测度 Q 下求期望。概率测度 Q 就是所谓的**风险中性测度** (risk-neutral measure)，因为

$$\frac{P}{B_0} = \frac{\mathrm{E}(\Psi X)}{B_0} = \frac{\mathrm{E}^Q(\Psi X / G)}{B_0} = \mathrm{E}^Q\left(\frac{X}{B_1}\right) \tag{1.4}$$

金融市场无套利就等价于存在风险中性测度

例子 (赛马)

假设三匹赛马进行比赛，设定的赔率 (odds against) o_i 为

$$o_1 = 5 \quad o_2 = 4 \quad o_3 = 2$$

那么，采用如下的策略，无论唯一胜出的是哪匹马，我们都可以稳赚九美元

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 10$$

其中 x_i 为对第 i 匹马的下注。例如，第一匹马获胜时，$5 \cdot (5+1) - (5+6+10) = 9$. 为什么会存在稳赚机会呢？因为风险中性定价公式 (1.4) 要求赔率的设定满足 $\sum_i \frac{1}{1+o_i} = 1$，否则将不存在风险中性概率，从而出现套利机会。具体地，假设 Q 世界下第 i 匹马获胜的概率为 q_i，注意到该市场设定中 $B_1 = B_0 = 1$ (把钱放口袋中)，由 (1.4) 得 $q_i = \frac{1}{1+o_i}$，但

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{7}{10} < 1$$

没有满足概率和为 1，因此不存在风险中性概率。

资产定价

- 早期，人们跟随直觉简单地把确定性世界的现值公式推广到不确定的世界中，认为风险资产的定价方法为未来支付的期望值除以资本成本，其中资本成本类比于折现率或者期望收益率：债券定价 $B_0 = \frac{B_1}{1+r}$，股票定价 $S_0 = \frac{\mathrm{E}(S_1)}{1+\mathrm{E}(R)}$
- 风险教条，认为风险决定期望收益率，因此相同风险等级的资产具有相同的折现率，例如 MM1958 里 MM 命题中的式 (3)
- 今天看来，对资本成本的研究，把金融学的资产定价和公司财务两个方向都引上了歧路 (稍后讨论)
- 后来，类似于 CAPM 和 APT 等有关收益率的结构关系，被广泛地认为是定价公式，遗憾的是，这些观念是错误的

CAPM

Sharpe1964 发表 CAPM 关系式八年后，Merton1972 才求解出资产组合的有效前沿。现在回过头来看，Sharpe1964 的几何直觉超越了时空的理性分析。

均值方差均衡下的证券价格：*CAPM* 再认识（ https://ssrn.com/abstract=3103035 ）

- CAPM 公式被解释为资产的期望收益率由贝塔度量的系统风险决定: 鸡与蛋
- CAPM 公式只是局部均衡的结果，并且当金融市场存在套利机会时，CAPM 公式仍然成立
- **扩大化**：贝塔定价导致普通欧式期权负价格，从而强调公司财务中用 CAPM 计算项目折现率或者资本成本等是人云亦云的误解误用

APT

实际上推导 APT 的结论并不需要无套利假设，参见 Reisman1988，只需要收益率的线性因子模型假设，根据 Hahn-Banach 定理，如果定价函数是连续的 (不要求正性，只需要组合律)，就存在一组系数 (称为因子溢价) 使得期望收益率估计的总均方误差有界。

让我感到意外的是，Reisman1988 已经发表近三十年了，而且是发表在经济学最重要的刊物 *Econometrica* 上，金融学相关圈子的学者们对此文献却视而不见。

2 MM 命题

- 表述与证明
- 套利：从确定性到不确定性

历史评价

在 1985 年诺贝尔经济学奖颁奖的庆典致辞中，高度评价了 Modigliani 和 Miller 的工作：

- 直到 MM 命题提出之后，更严格的理论创建才开始在公司财务中涌现
- Modigliani 和 Miller 为该领域的继续深入研究指明了方向
- 他们这些贡献的科学价值，不只是 MM 命题本身，还包括他们引入的崭新的 (套利) 分析方法
- 在 1990 年诺贝尔经济学奖的新闻公报中，更是将 MM 命题推到难以逾越的高度：MM 命题在公司财务中已经成为天然基石，或者说是公司财务理论与实证分析的规范性参照
- 新世纪后，Qian2002 将 MM 命题与一般均衡理论中的 Arrow-Debreu 定理，以及产权理论中的 Coase 定理并列在同一层次上，作为经济学家进行分析的基准点

表述与证明

MM 命题指的是 MM1958 中的命题 I，即著名的资本结构无关论命题，可以简洁表述如下：

命题 (MM 命题)

对于公司 j, 定义公司的证券价值 $V_j = S_j + D_j$, 其中 S_j 和 D_j 分别为普通股和债券的市值。如果公司的期望回报[a]为 $\mathrm{E}(X_j)$, 那么公司的证券价值与资本结构 (D_j/S_j) 无关，且等于期望回报的风险调整折现

$$V_j = S_j + D_j = \mathrm{E}(X_j)/\rho_k$$

其中公司 j 的风险等级[b]为 k, ρ_k 为等级 k 企业的风险调整折现率。

[a]此前，AER 很少有数学符号。原文命题陈述中用 $\bar{X}_j$，但证明时用 X_j. 也许是为了省点钱，据说是当时的 AER 主编 Haley 要求 MM 自掏腰包，支付字符 X 上加横线的费用。

[b]MM 将企业按一美元期望回报的现值进行分级，来自相同风险等级的回报适用相同的风险调整折现率 (资本化率或者资本成本).

证明

命题 (MM 命题经典版)

完美市场中，假设两家企业将来的回报相同而资本结构不同，那么这两家企业的证券价值相等。因此，企业的证券价值与资本结构无关。

- MM1958：停留在确定性世界中的套利方法，求期望回退到确定性世界
- HS1969：朴素套利
- MM1969：即时套利组合

循环论证

MM 挖了个大坑，大家往里跳：不计其数的证明方法 (CAPM, 一般均衡, 生产函数, 正线性定价函数, SDE ...)

在 MM 命题的证明过程中，核心任务就是证明：如果 $X_i = X_j$，那么 $V_i = V_j$. 今天看来，这个任务非常简单：市场不存在套利机会意味着存在正线性定价函数 $\wp$，使得

$$V_i = \wp(X_i) = \wp(X_j) = V_j$$

MM 命题中的各种套利证明方法，大抵无非是线性定价规则的重复论证而已。

- 循环论证，被论证的结论当成了前提：假设企业的回报与资本结构无关，就是假设企业的证券价值与资本结构无关。
- 不需要正性：MM 市场中 $r \geqslant 0$，即 $0 < \wp(1) = \frac{1}{1+r} \leqslant 1$，此时只需要一价律和组合律两个公设，市场就不存在无风险套利机会了

套利：从确定性到不确定性

围绕着 MM 命题的证明

- 虽然 MM1958 的证明只适用于确定性的世界，但是这一形式的套利论证，当时还是很新奇的，并掺杂了资本结构等障眼法，人们被迷惑了
- Rose1959 在反驳中认为，仅当两股票代表相同的事物时套利是可行的，负债企业的股票风险更高，套利交易是不可接受的。
- HS1969 的证明中构造的多空头寸具有相同的风险（方差），对冲掉不确定性。可惜他们还是认为只有方差相等，才是“合法”的套利
- MM1969 的套利方法大受欢迎：即时套利组合，尽管此处等价于朴素套利，却因为避开了凭空创造的**风险等级** (risk class) 等概念，更加符合人们在确定性世界形成的思维习惯。

MM 命题的论证打开不确定性世界的大门，随后套利方法进入资产定价领域

- Merton1973 定义的占优 (dominant) 相当于弱正的概念，成功地挖掘出期权价格的很多性质。
- Ross1977 在有限状态的市场设定中，给出了套利的严格数学定义，并证明无套利必将导致正的状态价格。
  终于，学者们意识到套利是有风险的（不确定性），只要不损失且至少一种情况可以改善，从而定义出一般意义的套利机会。
- CoxRoss1976 居于 Ross1977 的发现，总结出定价函数的线性和非负性。
- Ross1978 首次证明市场不存在套利机会时将存在正线性定价函数。对“常有”逐步释怀，紧密拥抱更加丰富多彩的“弱有”，人们得以找到资产定价的基本定理。

3 证券化

- 资本结构
- 资本成本
- 总结

价值创造

企业作为一个实体组织，有活力，有战斗力，有能动性，能创造价值。显然，企业不是简单的人、财和物的堆积，而是系统有机整合使得整体大于各组成部分的总和。因此，作为一家企业，有整体性催生的价值，我们称之为**内置价值** (built-in value).

价值创造来自如下两个惊险的跳跃

1. 建立企业整合资源产生价值，体现为内置价值 Z_0
2. 生产经营增值 J_0

债权人在 1 时刻得到的报酬为 $(1+r)D_0$，增值为

$$\wp((1+r)D_0) - D_0 = D_0 - D_0 = 0$$

也就是说，企业的全部增值由全体股东独享。

多期

注意到过程中有资金的进出以及生产函数的调整，企业的证券价值过程是主动融资过程 (有别于自融资), 即

$$V_t = Z_t + \wp_{t,t+1}(f_t(I_t)) - I_t \neq \wp_{t,t+1}(V_{t+1})$$

在 t 时刻，如果企业无法继续经营，内置价值 Z_t 将变成零，企业证券价值为清算价值

$$V_t = I_{t-} + O_t \geqslant 0$$

由于有限责任，股权价值为

$$S_t = \max(V_t - (1 + r_{t-1})D_{t-1}, 0)$$

债权价值为 $\min(V_t, (1 + r_{t-1})D_{t-1})$, 有可能资不抵债。

资本结构

资本结构

只要是用在生产中，资金是不分来路的，也分不清来路的，只关心投入的总额，具体的股权债权构成是没有影响的。

- 因为证券价值取决于公司整体的盈余能力和经营环境。由前面讨论企业的价值创造我们知道，不管资金是通过股权筹措，还是通过债权取得，只要投入的资金总量是相同的，产出也将是相同的。
- 对股东来说，的确存在最优的资本结构，如果不用担心破产问题，股东一定选择完全债权投入——最大化单位投入的增值

资本结构

我认为，影响企业负债水平的，主要有如下的因素：

- 财务危机
- 行业特性
- 融资便利性
- 代理成本

行业特性和融资便利性可能是比较重要的因素。

资本成本

重的石头比轻的落得快吗？有两千多年的时间，人们认为这是真理，因为千百万人都看到一块石头比一片树叶落得快些。当前，公司财务中对权益资本成本的诠释，是与“重物比轻物落得快”如出一辙，认识仅停留在肤浅的表面上，结论是想当然的，错误上毫无二致。

- **WACC** 简直就是毒药：它既不是债务成本，也不是希求收益率，它是债务成本与股权的希求收益率进行加权平均得到的狮身人面怪物。因此，公司财务界把 WACC 宣传为综合资本成本，并且用来指导投资决策和定价，实在是误人子弟。
- 提出 WACC 是为了给风险资产或者企业估价：如果能计算出 WACC, 记为 ρ, 则企业价值为 $V = \mathrm{E}(X)/\rho$. 居于 WACC 人们走上了歧路，衍生出希求收益用以计算 WACC, 借助自由现金流 (free cash flow, FCF) 估计企业的期望回报 $\mathrm{E}(X)$, 从而计算出企业价值。

实际上，WACC 定义为 $\mathrm{E}(X)/V$，先知道价值 V，才计算 WACC，而不是反过来。

WACC

相互冲突的两种信念：人们相信资本结构无关论，同时又相信改变资本结构能影响 WACC

- 资本结构不影响企业的价值，就意味着 $\rho = \mathrm{E}(X)/V$ 不受资本结构的影响
- 人们想当然地认为增加债务融资能够降低 WACC，因为

$$\rho = \frac{D}{V}r + \frac{S}{V}\mu = \mu - \frac{D}{V}(\mu - r)$$

权益资本成本 μ 高于债务成本 r，增加债务 D 使得 WACC 下降

  - 这种天真的错误是因为静态和割裂地看问题，认为权益资本成本是固定的，殊不知

$$\mu = \frac{\mathrm{E}(X) - rD}{S} = \frac{\rho V - rD}{V - D}$$

  如果 μ 是常数，由 $0 = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}D} = \frac{V}{(V-D)^2}(\rho - r)$ 得 $\rho = r$，与 $\rho > r$ 相矛盾
  - 如果企业的现金充裕而回购部分债券，股价将上升

确定性世界思维和孤立思维

- 有必要指出的是，市场存在多个风险资产时，希求收益率或者期望收益率不是资产自身孤立决定的，是由整个市场综合决定的。例如赛马例子 1.1 中，第 i 匹马赔率的设定，显然不完全是自身单枪匹马来设定的，是三匹马联合设定的，否则可能出现套利机会。
- https://ssrn.com/abstract=3103035 业绩提升但期望收益率下降；业绩提升但企业价值下降
- WACC 本身是确定性世界和孤立思维的产物，正如期望定价法被精算师们使用了几个世纪终被废弃一样，虽然当前 WACC 估值方法盛行，实际上传承的依然是期望定价法的衣钵，我们相信它终将也会被废弃。
- 就像科学界终究抛弃“以太”理论那样，*我们要扔掉权益资本成本，尽快废弃 WACC*，让虚无的东西回归到虚无。

为什么资产定价，不是定出股票在明天的价格？

总结

从确定性世界进入不确定性世界的过程中，人们逐步认识套利实质的演进历程

1. 完美市场假设，无套利原理
2. MM 命题的循环论证
3. 资本结构，不能脱离企业的生产属性和分配制度。行业特性和融资便利性可能是比较重要的影响因素。
4. 资本成本等观念的误导，权益资本成本是虚无的

谢 谢！