CAPM 再认识

陈 灯 塔

WiSE, XMU

MAXCHEN@XMU.EDU.CN

Analysis of Pure Finance

2018 年 1 月 24 日

https://ssrn.com/abstract=3103035 Comments Welcome

内容梗概

天象

The Copernican Revolution: 如今日心说的基本理念为世人普遍接受 (尽管并非本轮或圆形轨道), 但在当时，Copernicus (哥白尼 1543) 的理论却显得过于超前

- 插图 Motion of Sun, Earth, and Mars
- 更复杂一点点, The Pentagram of Venus, 或者 莲花五角星
- 追源: Aristarchus of Samos, a Hellenistic author writing in the 3rd century BC, ... eclipsed by the geocentric model presented by Ptolemy and accepted in Aristotelianism.

Claudius Ptolemy (地心, 圆) $\Longrightarrow$ Nicolaus Copernicus (日心, 圆) $\Longrightarrow$ Johannes Kepler (Elliptic orbit) $\Longrightarrow$ Galileo's observations of Venus (地心 to 日心) $\Longrightarrow$ Newton used Kepler's laws of planetary motion to derive his law of universal gravitation $\cdots$

Technically, Earth Does Not Orbit Around the Sun

风险教条

Risk Doctrine: 风险决定收益，可是，风险是什么

- 自身方差: 通过组合可以降低风险而保持期望收益率不变
- 系统风险: 由贝塔度量，等于收益率与市场收益率的协方差除以市场收益率的方差

鸡与蛋的问题：要计算贝塔需要先知道市场组合，而计算市场组合需要先知道各个证券的收益率 (期望和方差，以及协方差)

- Berk and DeMarzo (2017): [Corporate Finance 4e p417] This model [CAPM] allows us to identify the efficient portfolio of risky assets without having any knowledge of the expected return of each security.

  评: 如果投资者都不知道期望收益率，那么市场组合怎么产生?
- Johnstone (2017) 将这种情况称为 CAPM 的内在逻辑死循环

风险教条

市场收益率：外生 (地心说) vs 内生 (地动说)

- Lintner (1965, p25) 假定了证券价格是外生给定的，才得到 CAPM 公式
- Hansen and Richard (1987, p587) 指出价格是内生的
- Coles and Loewenstein (1988, p285) 看到收益率是内生的

Aristarchus of Samos! 可惜都屈服于风险教条 Berk and DeMarzo (2017, p424): Financial economists find the qualitative intuition underlying the CAPM compelling, so it is still the most common and important model of risk and return.

- Graham et al. (2009, P208): for the first time, researchers and practitioners had a model that generated specific predictions about the risk–return characteristics of individual assets
- Bodie et al. (2017, p277): its central conclusion that only systematic risk will be rewarded with a risk premium.

1. CAPM
   - 市场设定
   - 有效前沿
   - 风险证券局部均衡

缘起

- 随机变量 (收益率) 的一阶矩 (期望收益率) 由二阶矩 (收益率的方差和协方差) 决定，凭什么?
- 仿真 CAPM: 如何设定 DGP ?
- 假设 CAPM 正确的话，单期投资与两期投资的贝塔有什么关系?
- CAPM 是均衡结果吗？证券价格在哪儿？能用到多期吗?

市场设定

单期模型

记 X_i 为风险证券 i 在 1 时刻的支付，N 只风险证券的支付向量 $\mathbf{x} = [X_1, X_2, \cdots, X_N]'$ 在 0 时刻被看成是随机的。均值 $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{E}(\mathbf{x})$，协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{var}(\mathbf{x})$，定义

$$a = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{p} \qquad b = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta} \qquad c = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta}$$

其中 $\mathbf{p} = [P_1, P_2, \cdots, P_N]' > 0$ 为基本证券价格向量。

- 市场总支付为 $X_M = \mathbf{1}'\mathbf{x}$，市场总市值为 $P_M = \mathbf{1}'\mathbf{p} > 0$.
  市场总支付的均值为 $E = \mathrm{E}(X_M) = \mathbf{1}'\boldsymbol{\eta}$，方差为 $Q = \mathrm{var}(X_M) = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1} > 0$.
- N 只风险证券的收益率 (毛收益率) 向量为 $\mathbf{r} = [R_1, R_2, \cdots, R_N]'$，则 $R_i = X_i/P_i$

  $$\mathbf{r} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \implies \boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\eta} \quad \mathbf{V} = \mathrm{var}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}^{-1}$$

  其中 $\mathbf{P} = \mathrm{diag}(\mathbf{p})$，即价格向量 $\mathbf{p}$ 的对角化矩阵。显然，从收益率的角度

  $$a = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \qquad b = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} \qquad c = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

支付空间

- 假设市场中存在支付为常数 $X_0 > 0$ 的无风险债券，相应的收益率为 $R_0 > 1$ (无风险利率为 $R_0 - 1$). 请注意，我们还需要假设 $R_0 < \frac{b}{a}$, 否则资本市场不存在。
- 定义二次函数 (价格被隐藏 $a = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}$)

$$h(x) \equiv (\boldsymbol{\eta} - x\mathbf{p})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\eta} - x\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\mu} - x\mathbf{1})'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - x\mathbf{1}) = ax^2 - 2bx + c \geqslant 0$$

- 记 M 为包含 N 只纯风险证券和无风险债券的市场，则相应的支付空间为

$$\mathsf{X} = \{h_0 X_0 + \mathbf{h}'\mathbf{x} : h_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N\}$$

  有时候我们仅分析包含 N 只纯风险证券的市场 M_*, 它是市场 M 排除了无风险债券。数学上支付空间 X 是 $\mathsf{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 空间的子集，市场 M 通常不是完全市场。L^2 是 Hilbert 空间，有很多良好的性质。
- 价值权重: 当资产组合的价值为正时，$z_i = \frac{h_i P_i}{\mathbf{h}'\mathbf{p}}$ ($\mathbf{z}$ 的第 i 个分量) 为组合中证券 i 所占的价值份额。由于 $\mathbf{z}'\mathbf{1} = 1$, 权重是归一化的。

资产价格公设

1. 一价律 (可定价): 基本证券都有唯一价格。存在函数关系 $\wp$, $\mathbf{p} = \wp(\mathbf{x})$.
2. 组合律 (可交易): 资产组合当前和未来价值的计算依照线性运算法则，即资产组合的当前价格等于各个组成资产当前价格的线性组合，资产组合的未来支付等于各个组成资产未来支付的线性组合。组合律表明定价函数是线性的

$$\wp(aX + bY) = a\,\wp(X) + b\,\wp(Y) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathsf{X}$$

   资产打包的整体价值，等于拆分后各部分的价值总和。
3. 有限责任 (正性, 可上市): 有限责任资产组合 (支付 $X \geqslant 0$, 且 $\mathrm{P}(X > 0) > 0$, 记为 $X \gneq 0$) 的价格为正。

模仿支付

由 Hilbert 空间的 Riesz 表示定理，对于任意的 $X \in \mathsf{X}$, 定价函数可以唯一表示为

$$P = \wp(X) = \mathrm{E}(X_{:}X) \qquad X_{:} \in \mathsf{X} \tag{1.1}$$

由于支付 $X_{:}$ 模仿了 SDF (Stochastic Discount Factor, 随机折现因子) 的功能，$X_{:}$ 被称为 SDF 的模仿支付 (mimicking payoff).

命题 (模仿支付)

市场 M 中，如果价格是可行的 (满足一价律和组合律), 那么

$$X_{:} = \frac{1 + c - bR_0}{R_0} - \frac{1}{R_0}\mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1}) \tag{1.2}$$

是唯一的模仿支付。

有效前沿

收益率正交分解

收益率超平面 $\mathsf{X}_1 = \{X \in \mathsf{X} : \wp(X) = 1\}$, 超额收益率空间 $\mathsf{X}_0 = \{X \in \mathsf{X} : \wp(X) = 0\}$. 对于市场 M 中任意的资产组合，假设其收益率为 R，均值为 $\mu = \mathrm{E}\,(R)$，那么有如下的分解式

$$R = R_{:} + \theta(\mu) R_{\iota} + R_e \tag{1.3}$$

其中 $R_{:} = \frac{X_{:}}{\wp(X_{:})}$, $R_{\iota} = \mathrm{Pj}\,(1 \,|\, \mathsf{X}_0)$ 和 R_e 两两正交 (orthogonal), 即

$$\mathrm{E}(R_{:} R_{\iota}) = \mathrm{E}(R_{\iota} R_e) = \mathrm{E}(R_e R_{:}) = 0$$

并且

$$\theta(\mu) \equiv \frac{\mathrm{E}(R_{\iota} R)}{\mathrm{E}(R_{\iota}^2)} = \frac{\mu - \mu_{:}}{\mu_{\iota}} = \mu + \frac{\mu - R_0}{h(R_0)} \qquad \forall R \in \mathsf{X}_1 \tag{1.4}$$

在市场 M_* 中，有如下形式上完全对应的带星号的版本 $R = R_{*:} + \theta_*(\mu) R_{*\iota} + R_{*e}$

组合前沿

记 F_* 为市场 M_* 的均值方差前沿: $R \in \mathsf{F}_* \iff R = R_{*:} + \theta_*(\mu) R_{*\iota}$

记 F 为市场 M 的均值方差前沿, 资产组合 $R = z_0 R_0 + \mathbf{z}'\mathbf{r}$

$$R \in \mathsf{F} \iff R = R_{:} + \theta(\mu) R_{\iota}$$

均值方差 $(\mu - v)$ 平面上前沿 F 与 F_* 相切，记切点组合 (tangent portfolio) 的收益率为 $R_{\wr} = \mathbf{z}_{\wr}'\mathbf{r}$

$$\mu_{\wr} = \frac{bR_0 - c}{aR_0 - b} \tag{1.5}$$

$$v_{\wr} = \frac{(\mu_{\wr} - R_0)^2}{h(R_0)} = \frac{h(R_0)}{(aR_0 - b)^2} = \frac{\mu_{\wr} - R_0}{b - aR_0}$$

$$\mathbf{z}_{\wr} = \frac{1}{b - aR_0}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1})$$

两基金分离

无论是前沿 F$_*$ 还是 F, 任意给定两个不同的前沿组合 R_p 和 R_q, $R_p \neq R_q$. 那么证券组合 R 在前沿上当且仅当组合 R 是前沿组合 R_p 和 R_q 的仿射组合

$$R = \tau R_p + (1-\tau)R_q = R_q + \tau \cdot (R_p - R_q) \tag{1.6}$$

其中系数 $\tau = \tau_{pq}(\mu)$ 是组合 R_p, R_q 和 R 的函数

$$\tau_{pq}(\mu) \equiv \frac{\mu - \mu_q}{\mu_p - \mu_q} = \frac{\beta(\mu) - \beta(\mu_q)}{\beta(\mu_p) - \beta(\mu_q)} = \frac{\mathrm{E}(RR_p) - \mathrm{E}(R_pR_q)}{\mathrm{E}(R_p^2) - \mathrm{E}(R_pR_q)} = \frac{\mathrm{cov}(R, R_p) - \mathrm{cov}(R_p, R_q)}{\mathrm{var}(R_p) - \mathrm{cov}(R_p, R_q)} \tag{1.7}$$

F 上的组合由无风险债券和切点组合组成. 均值方差偏好的投资者只选择有效前沿上的组合，因此，证券投资决策只需确定出无风险债券的比例，剩余部分投入切点组合即可。

风险证券局部均衡

CAPM 公式

回顾 $\mathbf{z}_\wr = \frac{1}{b-aR_0}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1})$, $v_\wr = \frac{\mu_\wr - R_0}{b-aR_0}$. 局部均衡时 $R_M = R_\wr$, 有 $\mu_\wr = \mu_M$, 定义

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{r}, R_M)}{\operatorname{var}(R_M)} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{r}, R_\wr)}{\operatorname{var}(R_\wr)} = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{r}, \mathbf{z}_\wr'\mathbf{r})}{v_\wr}$$
$$= \frac{1}{\frac{\mu_\wr - R_0}{b-aR_0}}\mathbf{V} \cdot \frac{1}{b-aR_0}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1}) = \frac{1}{\mu_M - R_0}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1})$$

即

$$\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1} = (\mu_M - R_0)\boldsymbol{\beta}$$

分量形式

$$\mu_i - R_0 = \beta_i(\mu_M - R_0) \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

王江 (2006, p199): 推导 CAPM 时要求借贷净额为 0, 不必要

命题 (CAPM 证券价格通解)

市场 M 中，如果投资者都采用均值方差准则进行决策，那么风险证券价格向量服从

$$\mathbf{p}=\frac{\boldsymbol{\eta}}{R_0}+x\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1}\qquad x\in\mathbb{R} \tag{1.8}$$

注意到风险证券总市值与参数 x 一一对应

$$P_M=\mathbf{1}'\mathbf{p}=\frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\eta}}{R_0}+x\mathbf{1}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1}=\frac{QR_0x+E}{R_0} \tag{1.9}$$

CAPM 公式成立时风险证券价格向量满足式 (1.8), 因此

$$a=\mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{p}=\frac{QR_0^2x^2+2ER_0x+c}{R_0^2},\qquad b=\mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta}=\frac{ER_0x+c}{R_0} \tag{1.10}$$

表明 $aR_0-b=QR_0x^2+Ex=P_MR_0x$, $bR_0-c=ER_0x$ 以及

$$h\left(R_0\right)=aR_0^2-2bR_0+c=QR_0^2x^2$$

命题 (CAPM)

市场 M 中，如果投资者采用均值方差准则，那么如下四种表述等价

1. CAPM 公式：风险溢价 (超额期望收益率) 与市场贝塔成正比
$$\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1} = (\mu_M - R_0)\boldsymbol{\beta}$$
其中 μ_M 为市场组合 R_M 的期望收益率，以及市场贝塔 $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{cov}(\mathbf{r}, R_M)}{\mathrm{var}(R_M)} = \frac{P_M}{Q}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1}$
2. 风险证券均衡 (M$_*$ 均衡)：市场组合等于切点组合 $R_M = R_\wr$
3. 市场组合是前沿组合：$R_M \in$ F
4. 资本市场线：对于任意的有效前沿组合 $R \in$ F，有
$$\mu - R_0 = \frac{\mu_M - R_0}{\sigma_M}\sigma$$
其中 μ 和 σ 分别为前沿组合收益率 R 的期望和标准差

贝塔系数不是证券的特性

市场 M (包含无风险债券) 的均衡中市场组合是内生的，只要能影响风险证券总市值 P_M 的变量，都可能改变证券的贝塔，哪怕证券自身的支付没有任何变化，例如

1. 只改变无风险债券收益率 R_0
2. 投资者偏好和禀赋改变，将改变均衡总市值 P_M
3. 只是其他某个证券 j 的支付改变或者市场新增证券

是时候抛弃这种为了迎合风险教条而进行循环论证的错误解释了

- 逻辑上，从定义式 $\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}$ 知贝塔源自收益率，怎么能颠倒过来，认为收益率 (知道 μ_i 等价于知道 R_i) 由贝塔决定呢？
- 我感觉人们把 β_i 解释为系统风险是一种想当然，被期望收益率由风险决定的风险教条所误导——只不过是将风险从自身的方差改进为所谓的系统风险而已。

2 均值方差均衡

- 均值方差决策
- 均衡价格
- 数值例子
- 允许套利机会
- 可能前沿

MV 决策

- MV 占优与均值方差均衡有什么区别与联系？
- 供给等于需求，为什么说均值方差均衡的实质是配置均衡？
- 均值方差均衡价格能确保市场是无套利的吗？
- 均值方差决策会导致不可能前沿吗？

均值方差决策

假设投资者 k 的财富为 W_k, 持有的组合支付为 $X = h_0X_0 + \mathbf{h}'\mathbf{x}$, 期望为 η, 方差为 q. 投资者 k 使用 MV 准则进行投资，那么**评价函数** (merit function) $m_k(\eta, q)$ 满足

$$\partial m_k/\partial\eta > 0 \qquad \partial m_k/\partial q < 0$$

也就是说：给定初始投入 $W_k > 0$，相同的风险 (支付的方差) 下期望支付越高越好，同时相同的期望支付下风险越小越好。

最佳组合中纯风险证券的组合为

$$\mathbf{h}_k = g_k\mathbf{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\eta} - R_0\mathbf{p}) = g_k\mathbf{P}^{-1}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1}) \tag{2.1}$$

其中权衡系数

$$g_k = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial m_k/\partial\eta}{\partial m_k/\partial q} > 0 \tag{2.2}$$

因此，纯风险证券的最佳持有价值为

$$w_o = \mathbf{p}'\mathbf{h}_k = \mathbf{p}'g_k\mathbf{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\eta} - R_0\mathbf{p}) = (b - aR_0)g_k > 0 \tag{2.3}$$

市场组合等于切点组合

我们看到 ($\mathbf{h}_k = g_k \mathbf{P}^{-1}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1})$, $w_o = (b - aR_0)g_k$)

$$\frac{1}{w_o}\mathbf{P}\mathbf{h}_k = \frac{1}{b - aR_0}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_0\mathbf{1}) = \mathbf{z}_l$$

投资者持有的纯风险证券组合恰好为切点组合，与投资者的偏好参数 g_k 无关。

投资者最佳组合支付的期望和方差为

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbf{h}_k'\boldsymbol{\eta} + (W_k - \mathbf{h}_k'\mathbf{p})\, R_0 = W_k R_0 + g_k h(R_0) \\ q &= \mathbf{h}_k'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{h}_k = g_k^2 h(R_0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

均衡价格

权衡系数

- 简单权衡系数：投资者 k 的评价函数为

$$m_k(X) = m_k(\eta, q) = \eta - \frac{G_k}{2W_k} q \tag{2.5}$$

- 二次权衡系数：投资者 k 的评价函数为

$$m_k(X) = m_k(\eta, q) = \mathrm{E}(W_k U_k(R)) = \eta - \frac{G_k}{2W_k} \eta^2 - \frac{G_k}{2W_k} q \tag{2.6}$$

权衡系数为 $g_k = \frac{W_k}{G_k} - \eta$, 联合式 (2.4) 解出 g_k 得

$$g_k = \frac{W_k}{1 + h(R_0)} \left(\frac{1}{G_k} - R_0 \right) \tag{2.7}$$

如果 $0 < G_k < \frac{1}{R_0}$, 那么 $g_k > 0$, 具有二次权衡系数的投资者才不会违背 MV 准则。

投资者总财富为 $W=\sum_{k=1}^{I}W_k$, 无风险债券净额为 $B=\sum_{k=1}^{I}W_k z_{k,0}$. 均衡条件

$$W=P_M+B$$

命题 (可行均衡价格)

市场 M 中，当投资者都采用简单权衡系数时，可行均衡解为

$$x=-\frac{1}{GR_0} \tag{2.8}$$

其中 $G=\sum_{k=1}^{I}g_k=\sum_{k=1}^{I}\frac{W_k}{G_k}$.

当投资者都采用二次权衡系数时，记 $G=\sum_{k=1}^{I}\frac{W_k}{G_k}\neq\sum_{k=1}^{I}g_k$, 如果 $(WR_0-G)^2<4Q$, 市场均衡不存在。如果 $(WR_0-G)^2\geqslant 4Q$, 可行均衡解为

$$x=\frac{WR_0-G\pm\sqrt{(WR_0-G)^2-4Q}}{2QR_0} \tag{2.9}$$

市场组合

市场均衡时，$P_M = \frac{QR_0x+E}{R_0}$, 市场组合等于切点组合

$$\mathbf{z}_M = \mathbf{z}_\wr = \frac{1}{P_M}\mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta} + R_0x\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1}}{QR_0x + E}$$

市场组合的收益率为 $R_M = \frac{X_M}{P_M}$, 期望为 $\mu_M = \frac{E}{P_M}$, 方差为 $v_M = \frac{Q}{P_M^2}$.

注意到 Q 为常数，总市值越大市场收益率的波动越小。

- 市场支付 X_M 外生
- 市场收益率 R_M 内生 (总市值 P_M 内生)
- $c = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ 恒为常数: 均衡时风险证券收益率的期望和方差之间是存在约束的，由于它们都由均衡价格决定，风险证券形成一个整体，不能将单个证券孤立出来。

数值例子

现金禀赋

均值方差占优考虑的是两两比较

- 证券 1 与证券 2 的支付同方差，而证券 1 的支付期望比较高，因此证券 1 在支付上 MV 占优于证券 2. 本例子中，证券 1 与证券 3, 以及证券 2 与证券 3 在支付上都没有 MV 占优关系
- 均值方差均衡后，证券 1 与证券 2 在收益率上变成没有 MV 占优关系，而证券 2 在收益率上被证券 3 MV 占优

由此我们看到，均值方差占优只是两只证券之间的关系，适合于两者选一的情形，不适合于分散化组合的情形。

一级市场

证券组合降低风险，因此常常与增值混为一谈

- 证券组合整体等于部分和，证券组合的建立过程是没有增值的，没有价值创造的
- 增值是通过生产实现的，生产决策使资产增值，而生产决策前的持有将分享该增值，证券组合的增值发生在持有的过程中
- 当然，现实世界信息是逐步明晰的，价格同步随时进行调整

允许套利机会

例子 (MV 决策与套利可能)

给定两风险证券

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{23}{20} \\ \frac{185}{164} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.150 \\ 1.128 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

以及无风险债券 $R_0 = \frac{21}{20} = 1.05$. 假设两个投资者中 $W_1 = 1$, $W_2 = 2$, 如果都采用简单权衡系数， $G_1 = \frac{100}{41}$, $G_2 = \frac{400}{123}$, 那么 $G = \frac{41}{40}$, $x = -\frac{1}{GR_0} = -\frac{800}{861}$, 均衡价格为

$$\mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{R_0} + x\boldsymbol{\Omega}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此市场均衡时 $\mathbf{r} = \mathbf{x}$, 即 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\eta}$ 且 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}$.

注意到 $\mu_1 > \mu_2$ 且 $v_1 > v_2$, 市场可能存在套利机会。

假设 $R_1 - R_2 \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$，则对数正态分布的参数为

$$\mu = 2\ln\left(\frac{9}{410}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15453}{672400}\right) = -5.751$$

$$\sigma^2 = \ln\left(\frac{15\,453}{672\,400}\right) - 2\ln\left(\frac{9}{410}\right) = 3.865$$

在该设定下，$X_1 - X_2 = R_1 - R_2 > 0$，而 $\wp(X_1 - X_2) = 0$，买入证券 1 卖出证券 2 的零投入组合，是一个套利机会。

Markowitz (1991) 强调 MV 准则与对数和指数的效用函数高度近似。然而本例子告诉我们，它们在排除套利机会方面有重大的区别

- 均值方差均衡结果必须先检查是否存在套利机会
- 满足无套利条件下 CAPM 公式才可以作为定价公式。

可能前沿

不可能前沿

Brennan and Lo (2010,p909) 给出如下例子 (原文使用简单收益率)

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0.096 \\ 0.12 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{137}{125} \\ \frac{28}{25} \\ \frac{23}{20} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{16}{625} & \frac{16}{625} & \frac{256}{15\,625} \\ \frac{16}{625} & \frac{1}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{256}{15\,625} & \frac{1}{25} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

得

$$\mathbf{z}(\mu) = -\frac{1}{366}\begin{bmatrix} -8915 \\ 2017 \\ 6532 \end{bmatrix} + \frac{\mu}{6}\begin{bmatrix} -125 \\ 25 \\ 100 \end{bmatrix}$$

可以看到: 当 $\mu > \frac{1783}{1525} = 1.169$ 时，证券 1 的权重小于零；当 $\mu < \frac{2017}{1525} = 1.323$ 时；证券 2 的权重小于零。因此，无论收益率是多少，前沿面上总有证券的投资权重为负。

他们发现，当资产数目增加时，前沿面为不可能前沿的概率趋近于 1.

交锋

Critical Finance Review 等学术期刊专门刊发了交锋的文章

- Levy and Roll (2015) 采用内生的收益率进行讨论，通过反向工程方法 (Levy and Roll, 2010) 直接调整 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\mathbf{V}$, 相当于直接修改均衡结果。
- Ingersoll (2015) 居于支付，仅局限于风险证券的局部均衡进行讨论，没有考虑到投资者禀赋和偏好的作用，未能看到可能前沿就是社会财富的的均值方差配置。
- Brennan and Lo (2015) 居于内生的收益率进行了辩护，不可能前沿依然似是而非

CAPM 是局部均衡分析，风险证券的价格被限制在一维空间中，风险证券的收益率是内生的。把收益率当外生变量是导致不可能前沿的根源，不能让市场均衡的收益率往往出现不可能前沿。

3 贝塔系数

- 贝塔定价
- 资产变动

贝塔

- 能使用贝塔为企业的新项目定价吗？
- 能使用贝塔为期权定价吗？
- 如果新工艺出现将使企业的业绩增加，那么期望收益率一定上升吗？企业价值随着上升吗？
- 期望收益率不变，贝塔可以改变吗？

贝塔定价

SDF 与贝塔

均值方差均衡下，对于市场中任意的支付为 X 的非零投入证券组合，即 $P \neq 0$, 记收益率 $R = X/P$ (严格地说，仅在 $P > 0$ 时 R 才是收益率), 我们有如下两种等价表示式

1. SDF 模仿支付定价：$1 = \mathrm{E}(X_{:}R)$, 或者若 x 为均值方差均衡解

$$P = \mathrm{E}(X_{:}X) = \left(\frac{1}{R_0} - xE\right)\mathrm{E}(X) + x\,\mathrm{E}(XX_M) \tag{3.1}$$

2. 贝塔定价：$\mathrm{E}(R) - R_0 = \beta(\mathrm{E}(R_M) - R_0)$, 其中 $\beta = \frac{\mathrm{cov}(R, R_M)}{\mathrm{var}(R_M)}$

使用收益率研究定价，只适用于组合价格非零的情况。而采用支付的式 (3.1) 适合于市场内的任意证券组合，包括零投入组合。

例子 (期权负价格)

基本证券的设定来自 Dybvig and Ingersoll (1982, p242–4) 和 Ingersoll (1987, p200–5)

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad R_0 = 1$$

若两投资者初始财富为 $W_1 = 1$, $W_2 = 2$, 简单权衡系数为 $G_1 = \frac{5}{8}$, $G_2 = \frac{5}{6}$. 均衡时 $\mathbf{p} = [1; 1]$. 引入欧式期权 $X = (X_1 - K)1_{X_1 \geqslant K}$, 其中 K 为执行价格, 如果采用 CAPM 公式进行定价

	正态分布	对数正态分布
$K = 1$	$\kappa\lambda^{1/4} = 0.7041$	$\frac{7}{2}N(3z) - \frac{3}{2}N(z) - 2N(5z) = 0.1748$
$K = 2$	$\kappa - \frac{1}{2} = 0.2979$	$4N(z) - 3N(-z) - 2N(3z) = -0.1585$
$K = 4$	$\kappa\lambda - 3N(-1) = 0.007976$	$5N(-z) - 6N(-3z) - 2N(z) = -0.2650$
$K = 8$	$\kappa\lambda^9 - 7N(-3) = -0.0005856$	$7N(-3z) - 2N(-z) - 12N(-5z) = -0.1606$

错误的定价核

对期权市场数据采用 CAPM 公式进行定价，Jarrow and Madan (1997, p23) 观测到当执行价格超过一定水平后 (虚值处于两倍标准差) 看涨期权开始出现负价格。

例子 3.1 中，如果使用 $X_{*:}$ 对不属于 M$_*$ 的无风险支付 1 进行定价，有

$$\mathrm{E}(X_{*:}\cdot 1) = \mathrm{E}(X_{*:}) = \frac{b}{c+1} = \frac{32}{88+1} = \frac{32}{89}$$

然而 $\wp(1) = \mathrm{E}(X_{:}\cdot 1) = \mathrm{E}(X_{:}) = \frac{1}{R_0} = 1$, 表明使用 $X_{*:}$ 定价导致了错误的价格。

瞎猫逮鼠：Black and Scholes (1973) 应用 CAPM 公式的另类方法推导 BS 方程

资产变动

提示：$P_{1+} = P_1 + \frac{K}{R_0}$, 整体性, 其他证券价格保持不变

例子 (业绩提升收益下降)

假设证券 1 的支付从 X_1 增加到 $X_1 + K$.

使用例子 2.1 中的设定，如果 $K = \frac{1}{5}$, 证券 1 的贝塔降低了 $\beta_{1+} - \beta_1 = -\frac{164}{1825}$, 并且尽管未来业绩更好了，但期望收益率却下降了

$$\mathrm{E}(R_{1+} - R_1) = \frac{\eta_1 + K}{P_1 + \frac{K}{R_0}} - \frac{\eta_1}{P_1} = \frac{P_1 R_0 - \eta_1}{P_1 R_0 + K} \frac{K}{P_1} = -\frac{2}{125}$$

由于资产定价的整体性，单个企业提高业绩并不一定能提高自身的期望收益率。

对于支付未变动的证券 2, $\mathrm{E}(R_{2+} - R_2) = 0$, 然而 $\beta_{2+} - \beta_2 = \frac{128}{1533}$, 期望收益率不变而贝塔改变了。

提示：$P_{1+} - P_1 = \frac{\mathrm{E}(Y)}{R_0} + x\mathrm{var}(Y)$

例子 (业绩提升市值下跌)

假设证券 1 的支付从 X_1 增加到 $X_1 + Y$, 其中随机变量 $Y > 0$, 并且 $\mathrm{cov}(Y, \mathbf{x}) = 0$.

对于例子 2.1 中的设定，取 $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{50}$, $\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{36}$, 有 $P_{1+} - P_1 = -\frac{262}{38\,745} < 0$, 业绩提升但市值下跌。

这有悖于常理，然而，注意到均值方差均衡时参数 x 为负，对单个企业而言，如果支付期望值的增加不足以抵消风险增加带来的折价，整体效果是企业的价值下降。

从收益率的角度，$\beta_{1+} - \beta_1 = \frac{255\,261\,294}{2126\,609\,063}$, $\mathrm{E}(R_{1+} - R_1) = \frac{5381}{192\,415}$, 贝塔和期望收益率都上升

更多例子

- 支付 X_1 改变为 KX_1, 其中常数 $K > 1$
- 风险证券的数量从 N 增加到 $N + 1$

以上情形还是在假设均衡参数 x 未发生改变的前提下得到的，事实上，现实市场中，投资者的财富是时时刻刻在改变的，均衡参数必然随时间改变。

4 多期

- 收益率时间序列
- 实证的困难
- 因子模型
- 总结

多期

- 多期模型的特点是什么？
- CAPM 能逐期成立吗？
- 因子模型来自何方？因子大战会有什么样的未来？
- 时间序列下，当前价格 P_t 上升，收益率 $\frac{P_{t+1}}{P_t}$ 就下降吗？

收益率时间序列

多期和多步

在讨论多期模型之前，我们有必要对多期和多步进行区分

1. 多步模型：特点是信息的逐步精细化，给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, 有个 $\mathcal{F}_t$ 的逐渐变大过程，$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
2. 多期模型：特点是样本空间随时间改变，形成集列 $\Omega_0, \Omega_1, \cdots, \Omega_T$, 相应定义出事件域 $\mathcal{F}_t$ 和概率测度 $\mathrm{P}_t : \mathcal{F}_t \to [0, 1]$. 有必要指出的是，给定两个时刻 $t < u$, $\Omega_t \subset \Omega_u$ 不一定成立，哪怕有 $\Omega_t \subset \Omega_u$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$ 也不一定成立

收益率

- CAPM 理论分析中我们使用的均衡收益率为
$$R_t = \frac{X_t}{P_{t-1}} = \frac{X_t}{\wp_{t-1}(X_t)} \tag{4.1}$$
对于普通股，其定价显然不能离开企业的生产决策。
- 市场上，我们看到居于价格过程的时序收益率 (假设没有分红，交易价格等于均值方差均衡价格)
$$R_{|t} = \frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{\wp_t(X_{t+1})}{\wp_{t-1}(X_t)} \tag{4.2}$$

多期模型中，价格过程 P_t 与支付过程 X_t 是并行的：如果企业能够存活，企业根据当时的状况选取生产函数继续经营，人们不再关心 X_t 的取值而是关注 X_{t+1} 的分布，市场以此定出 t 时刻的证券价值 $P_t = \wp_t(X_{t+1})$.

实证的困难

CAPM 实证：支付不可观测

1. 逐期成立: Campbell et al. (1996) p183 明确了 CAPM 实证的附加假设，认为单期模型 CAPM 逐期成立是理论上不矛盾的。
2. 如果基本证券的收益率平稳，将导致 Luenberger (1998, p222) 所说的多期谬误
3. DGP: $\mathrm{E}(Y) = \alpha + \beta\,\mathrm{E}(X)$ 与 $\mathrm{E}(Y \mid X) = \alpha_0 + \beta_0 X$. 进一步时序化

$$R_{|ti} - R_{t0} = \alpha_{|i} + \beta_{|i}(R_{|tM} - R_{t0}) + e_{ti} \tag{4.3}$$

通常采用 60 个样本进行滚动估计 $\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{var}(R_M)} = \frac{\mathrm{cov}(R_i - R_0, R_M - R_0)}{\mathrm{var}(R_M - R_0)}$

$$\beta_{*i} = \frac{\mathrm{cov}(R_{|tM}, R_{|ti})}{\mathrm{var}(R_{|tM})} \qquad \beta_{|i} = \frac{\mathrm{cov}(R_{|tM} - R_{t0}, R_{|ti} - R_{t0})}{\mathrm{var}(R_{|tM} - R_{t0})}$$

4. 平稳性: 无风险债券收益率时间序列 R_{t0} 是时变的; 市场的时序收益率 $R_{|tM}$ 很可能不平稳
5. 其他问题: 数据处理; 投资者方面也是动态的; 市场因子的回归系数是时变的

因子模型

因子模型

- 起源于单因子模型，原本用来估计组合选择时需要输入的方差矩阵 $\Longrightarrow$ 估计时序贝塔 $\Longrightarrow$ RGP
- 因子大战：CAPM $\Longrightarrow$ FF3 $\Longrightarrow$ FF5, q-4, M-4; Cochrane (2011) 称之为因子的动物园
- Hou et al. (2017) 记录了大部分异象都无法复制的不幸事实，447 种异象只有 11 种仍然显著
- 收益率预测：尽管统计意义上样本外解释能力很小，Campbell and Thompson (2008) 认为对于均值方差投资者而言，经济上还是有意义的。
- 盈利和投资作为企业的特性，也许当成个性因子处理更合适
- 经济意义与统计意义也是有区别的

总结

IPO 如何定价

资产定价走到 1543 的年代：类似与地球是运动的，市场是内生的，不是外生的。因此，如下的问题仍然很难回答

地球在转动，一块石子向上抛去，就会被地球的转动抛在后面，而落在抛掷点的西面?

道路曲折艰辛

- 计算机自然语言处理：两路人马各自组织和召开自己的会议 (数学之美, p23-25)
- 神经网络曲折道路：兴起、死刑、复活、追捧 (改名深度学习)

总结

1. 人们止步于 CAPM 描述的风险与收益的关系，是时候抛弃这种为了迎合风险教条而进行循环论证的错误解释
2. 贝塔不是什么系统风险，不能随意的扩展到新增的项目或者衍生品中，用贝塔估计资本成本更是错上加错。
3. 均值方差均衡框架下，风险证券作为一个整体被定价。孤立考察单个证券的收益率，导致贝塔决定期望收益率的错误因果推断。
4. 多期的特点是不断出现未知的新状态，这对数学基础理论提出新的需求。
5. 投资者在进行经济预测时，应更注重经济意义而不是统计意义。

谢 谢！