Nomogramma di Fagan con matplotlib

Max Pierini

info@maxpierini.it

May 27, 2020

Il nomogramma di Fagan semplifica l'interpretazione delle Likelihood Ratios di un test, segno o sintomo, data la probabilità di malattia priori, indicando la risultante probabilità di malattia a posteriori [1] [2] fornendo uno strumento grafico di facile utilizzo senza la necessità di effettuare calcoli.

Costruiamo passo per passo un nomogramma di Fagan con `matplotlib` in Python.

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import clear_output, display, Markdown
```

Sappiamo che gli Odds a posteriori $\mathbf{O_{po}}$ dato il risultato di un test $\odot$ (o la presenza di un segno o di un sintomo) sono pari alla Likelihood Ratio **LR** del test (o del segno/sintomo) moltiplicato per gli Odds a priori $\mathbf{O_{pr}}$

$$\mathbf{O_{po}} = \mathbf{LR} \cdot \mathbf{O_{pr}}$$

La relazione tra Odds e Probabilità è $\mathbf{O} = P/(1-P)$, possiamo dunque dire che

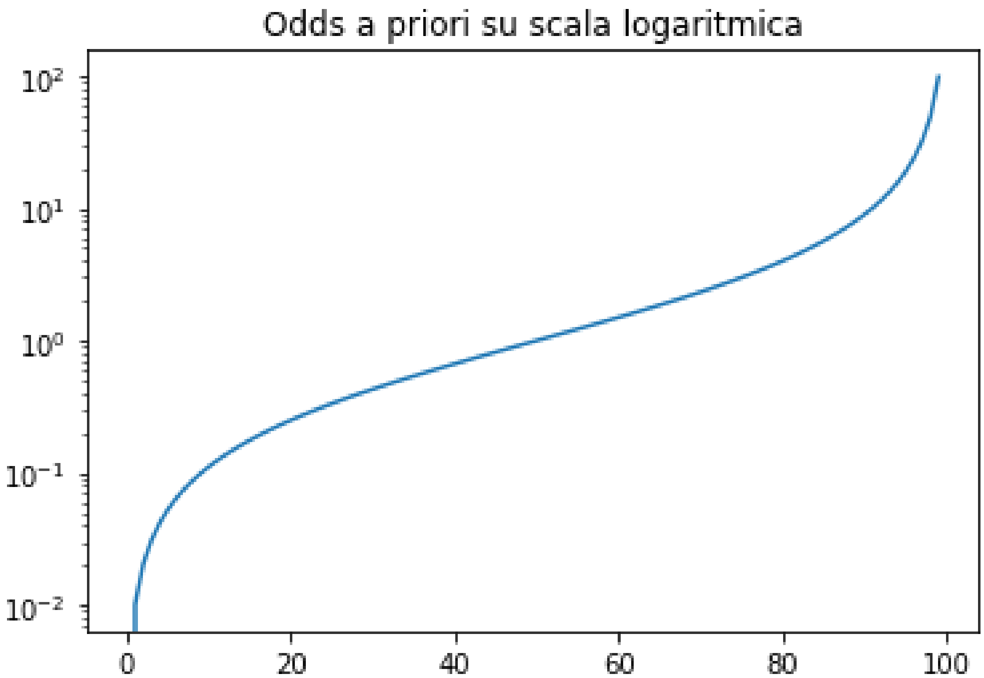
$$\frac{\mathbf{Po}}{1-\mathbf{Po}} = \mathbf{LR} \cdot \frac{\mathbf{Pr}}{1-\mathbf{Pr}}$$

dove **Po** è la probabilità di malattia a posteriori dato il risultato del test $\mathbf{Po} = P(M|\odot)$ e **Pr** è la probabilità di malattia a priori $\mathbf{Pr} = P(M)$

I tre termini di questa equazione rappresentano la base dei tre assi dei nomogramma di Fagan che lega probabilità a priori e a posteriori di malattia in base alla Likelihood Ratio. In particolare, volendo porre a sinistra nel nomogramma l'asse delle probabilità a priori, a destra l'asse delle probabilità a posteriori e al centro l'asse delle Likelhood Ratios, possiamo riscrivere

$$\frac{\mathbf{Pr}}{1-\mathbf{Pr}} = \frac{1}{\mathbf{LR}} \cdot \frac{\mathbf{Po}}{1-\mathbf{Po}}$$

[2]:
```
Pr = np.linspace(0, 1, 101)
Opr = Pr/(1-Pr)
clear_output()
plt.plot(Opr)
plt.yscale("log")
plt.title("Odds a priori su scala logaritmica");
```



Data la natura logaritmica degli Odds, useremo scale logaritmiche per tutti gli assi e dunque riscriviamo

$$\log\left(\frac{\mathbf{Pr}}{1-\mathbf{Pr}}\right) = \log\left(\frac{1}{\mathbf{LR}} \cdot \frac{\mathbf{Po}}{1-\mathbf{Po}}\right)$$

Impostiamo la base del nomogramma, ponendo i tre assi ad $x = \{-1, 0, 1\}$ e impostando come limite per l'asse y l'intero più vicino al logaritmo del massimo e del minimo Odd che vogliamo usare

$$\mathbf{O}_{max} = \log\left(\frac{P_{max}}{1-P_{max}}\right)$$

$$\mathbf{O}_{min} = \log\left(\frac{P_{min}}{1-P_{min}}\right)$$

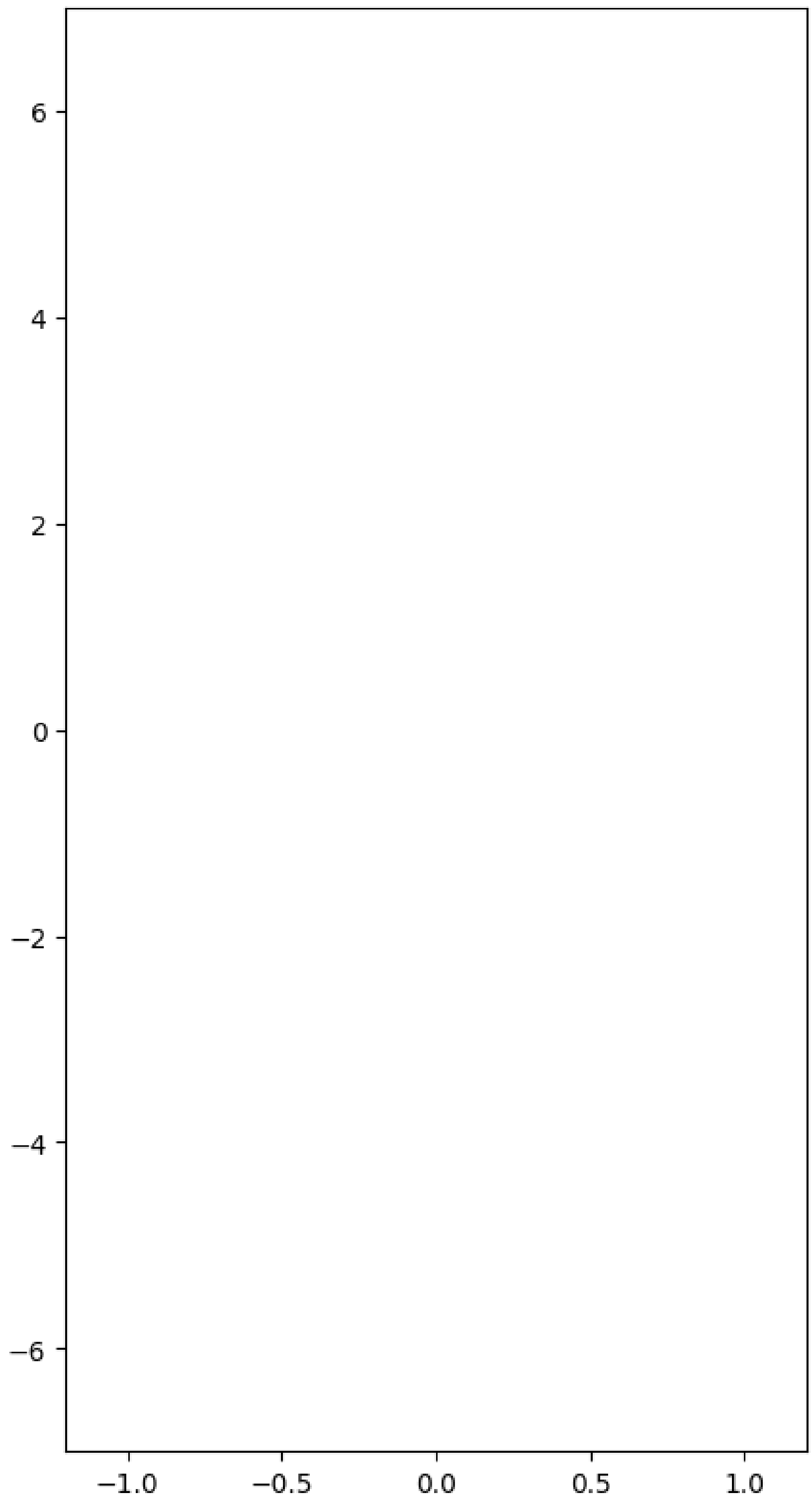
dove sceglieremo $P_{max} = 99.9\% = .999$ e $P_{min} = 0.1\% = 0.001$ dunque

[3]:
```
Pmax = .999
Pmin = .001
Omax = np.ceil(np.log(Pmax/(1-Pmax)))
Omin = np.floor(np.log(Pmin/(1-Pmin)))
display(Markdown(fr"""
$$
\mathbf{{O}}_{{max}} = {Omax:.2f}
```

```
$$

$$
\mathbf{{O}}_{{min}} = {Omin:.2f}
$$
"""))

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)
plt.show();
```

$$\mathbf{O}_{max} = 7.00$$

$$\mathbf{O}_{min} = -7.00$$



Iniziamo a disegnare il primo asse del nomogramma delle **Pr** probabilità a priori, alle ascisse $x = -1$. I segni sull'asse corrisponderanno agli Odds mentre le etichette alle Probabilità.

Scegliamo un vettore di Probabilità per i segni/etichette maggiori che vogliamo visualizzare e calcoliamo i corrispondenti valori Odds, ad esempio:

[4]:
```
Pticks = np.sort(np.concatenate([
    np.arange(.1, .999, .1),
    np.arange(.08, 0, -.02),
    np.arange(.01, 0, -.002),
    np.arange(.92, .999, +.02),
    np.arange(.99, .999, +.002),
    [.001, .999]
]))
print(f"Etichette Probabilità: {Pticks}")
```

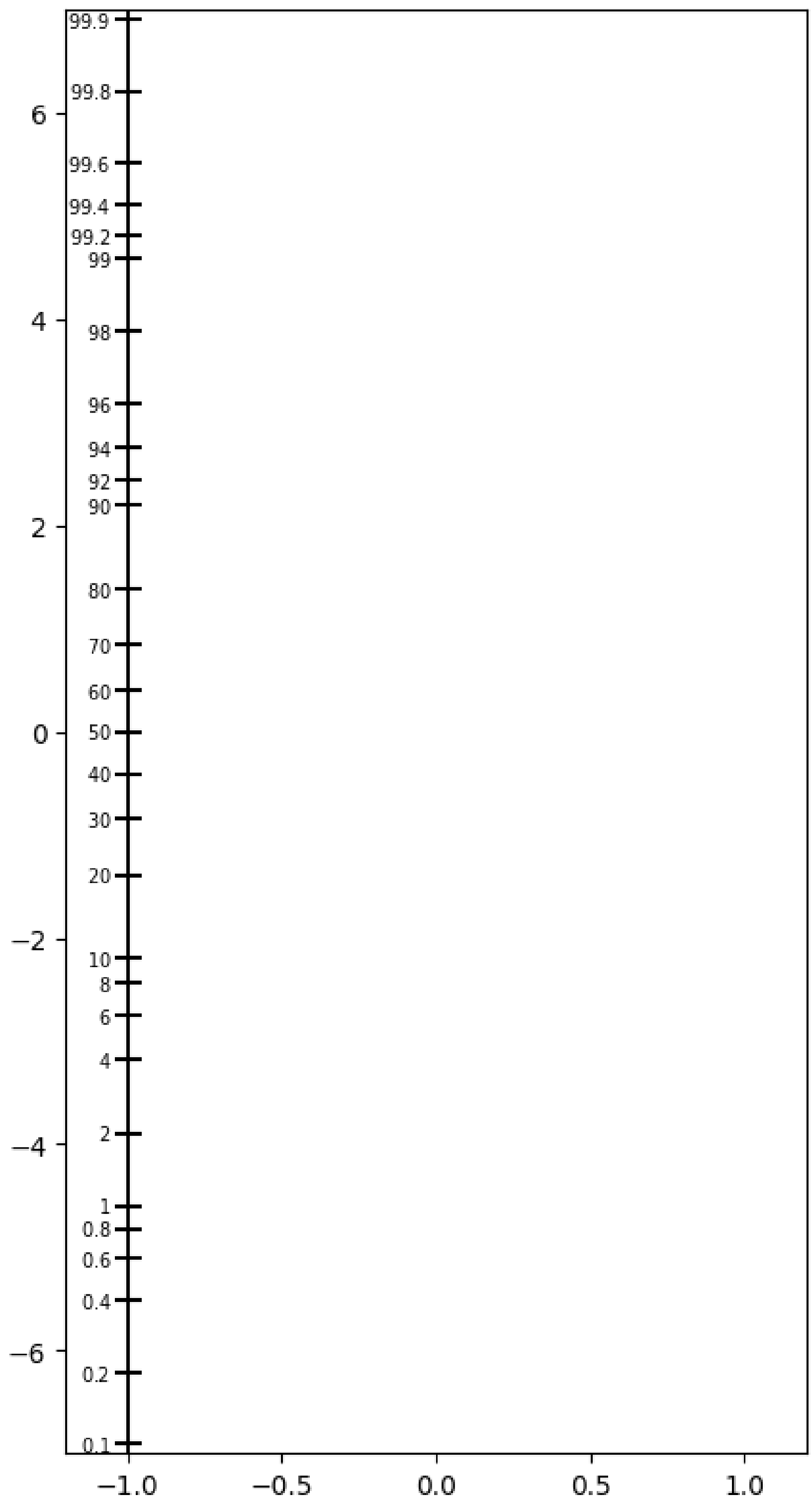
```
Etichette Probabilità: [0.001 0.002 0.004 0.006 0.008 0.01  0.02  0.04  0.06
0.08  0.1   0.2
 0.3   0.4   0.5   0.6   0.7   0.8   0.9   0.92  0.94  0.96  0.98  0.99
 0.992 0.994 0.996 0.998 0.999]
```

[5]:
```
Oticks = Pticks / (1 - Pticks)
print(f"Etichette Odds: {Oticks}")
```

```
Etichette Odds: [1.00100100e-03 2.00400802e-03 4.01606426e-03 6.03621730e-03
 8.06451613e-03 1.01010101e-02 2.04081633e-02 4.16666667e-02
 6.38297872e-02 8.69565217e-02 1.11111111e-01 2.50000000e-01
 4.28571429e-01 6.66666667e-01 1.00000000e+00 1.50000000e+00
 2.33333333e+00 4.00000000e+00 9.00000000e+00 1.15000000e+01
 1.56666667e+01 2.40000000e+01 4.90000000e+01 9.90000000e+01
 1.24000000e+02 1.65666667e+02 2.49000000e+02 4.99000000e+02
 9.99000000e+02]
```

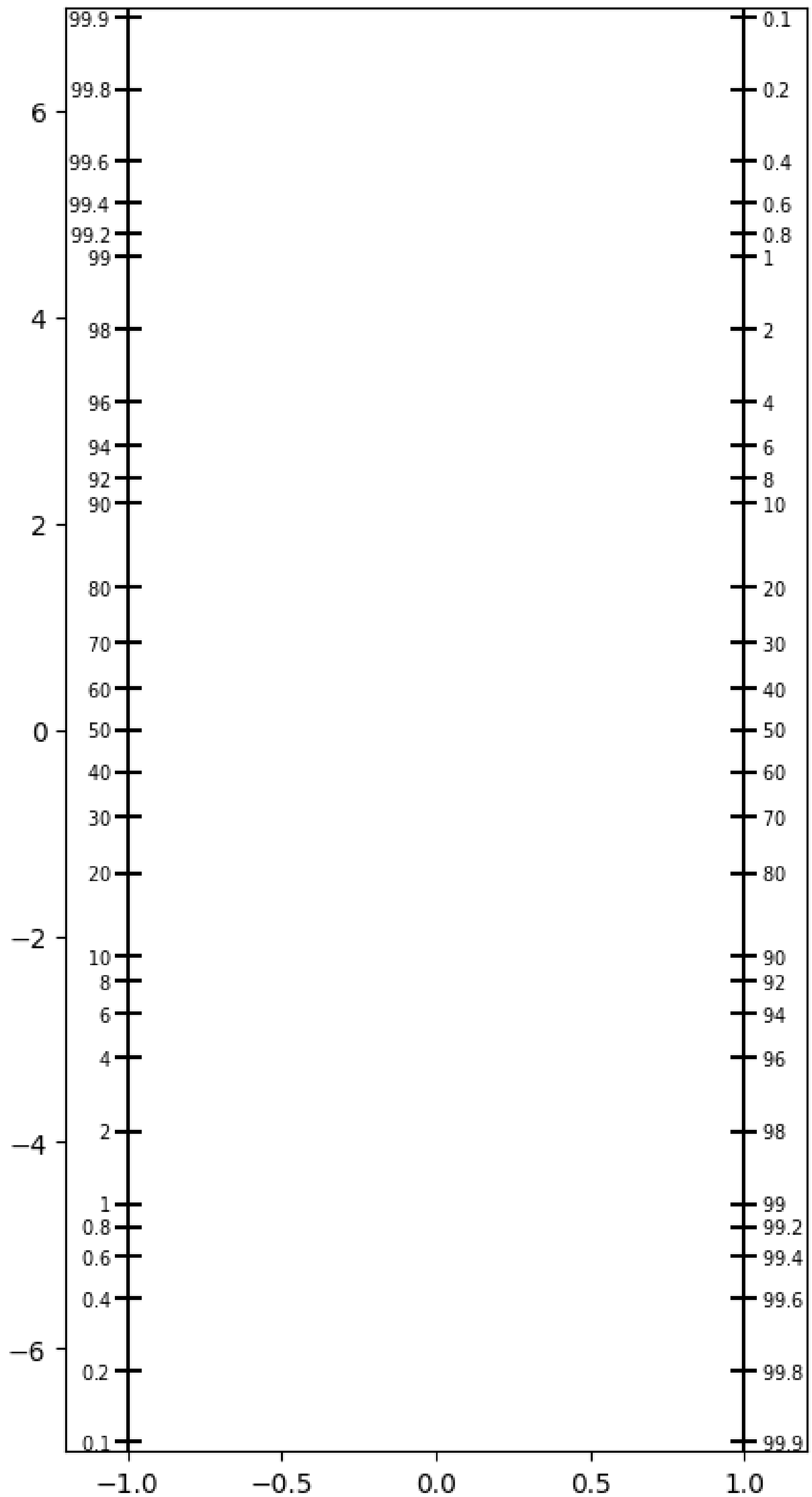
e applichiamolo al primo asse, ricordando la relazione tra Odds e Probabilità e la scala logaritmica

[6]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)

ax.axvline(-1, c="k")
ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_", c="k",␣
 ↪s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        -1.05, np.log(Otick),
        f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="right"
    )
plt.show();
```



Applichiamo il medesimo ragionamento per l'asse destro delle probabilità a posteriori, ma invertendone i valori.

[7]:
```python
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)

ax.axvline(-1, c="k")
ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_", c="k",␣
↪s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        -1.05, np.log(Otick),
        f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="right"
    )

ax.axvline(+1, c="k")
ax.scatter([+1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(1/Oticks), marker="_",␣
↪c="k", s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        +1.05, np.log(Otick),
        f"${1-Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${1-Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="left"
    )
plt.show();
```



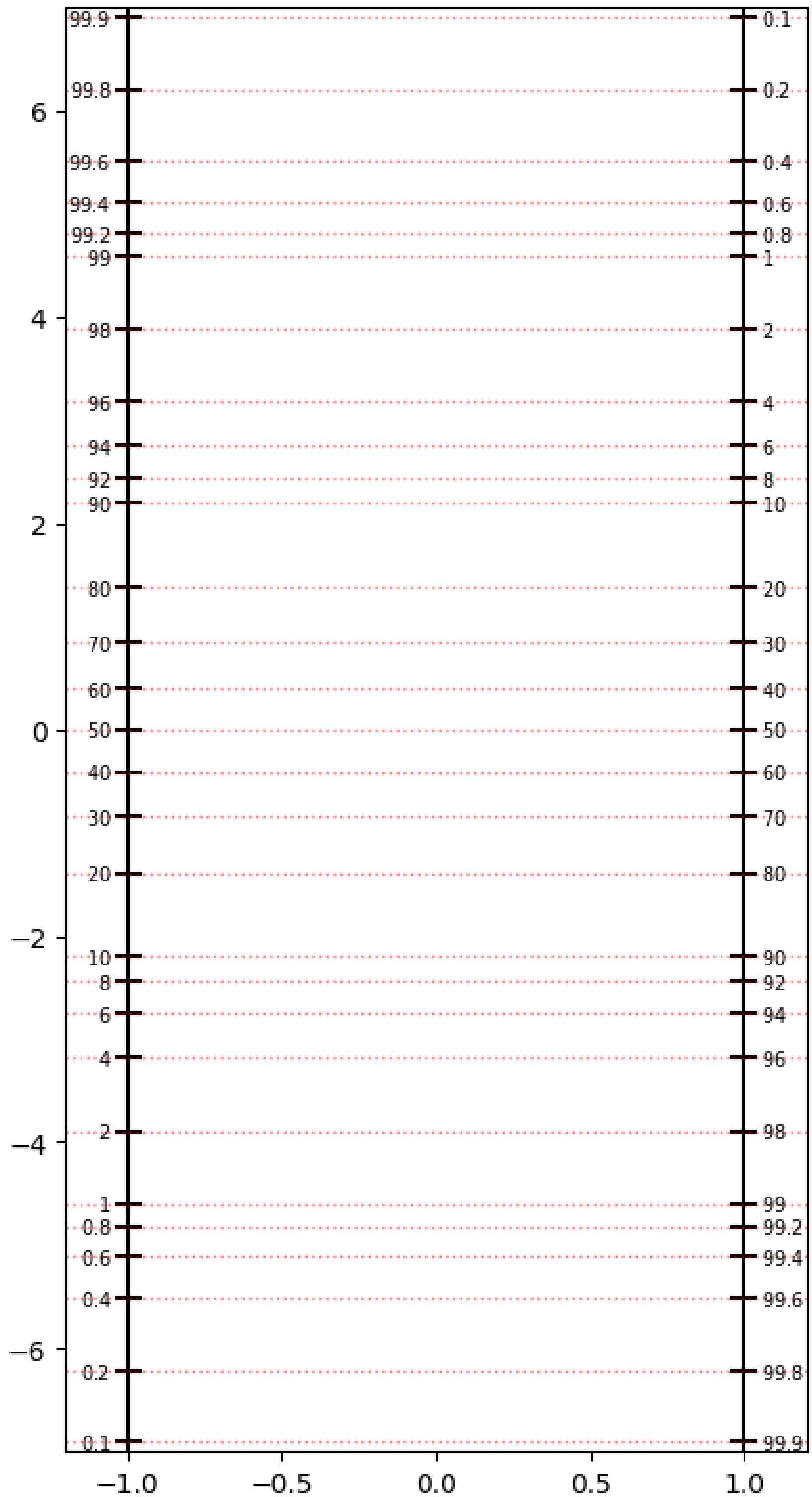
Occupiamoci ora dell'asse centrale delle Likelihood Ratios, scegliendo alcuni valori notevoli per i segni maggiori da mostrare. Ad esempio, le potenze di 10 da -3 a 3.

[8]:
```
Lticks = [10 ** int(i) for i in np.arange(-3, 3.1, 1)]
print(f"Etichette Likelihood Ratios: {Lticks}")
```

```
Etichette Likelihood Ratios: [0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000]
```

Per posizionare i segni notiamo che i valori a priori e a posteriori sono complementari lungo l'asse x (avevamo infatto invertito l'asse destro)

[9]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)

ax.axvline(-1, c="k")
ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_", c="k",␣
 ↪s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        -1.05, np.log(Otick),
        f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="right"
    )

ax.axvline(+1, c="k")
ax.scatter([+1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(1/Oticks), marker="_",␣
 ↪c="k", s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        +1.05, np.log(Otick),
        f"${1-Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${1-Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="left"
    )

# Valori complementari esempio
for Otick in Oticks:
    ax.axhline(np.log(Otick), c="r", ls=":", alpha=.5, lw=1)

plt.show();
```



Pertanto è sufficiente risolvere l'equazione

$$\frac{1-\mathbf{Pr}}{\mathbf{Pr}} = \mathbf{LR} \cdot \frac{\mathbf{Pr}}{1-\mathbf{Pr}}$$

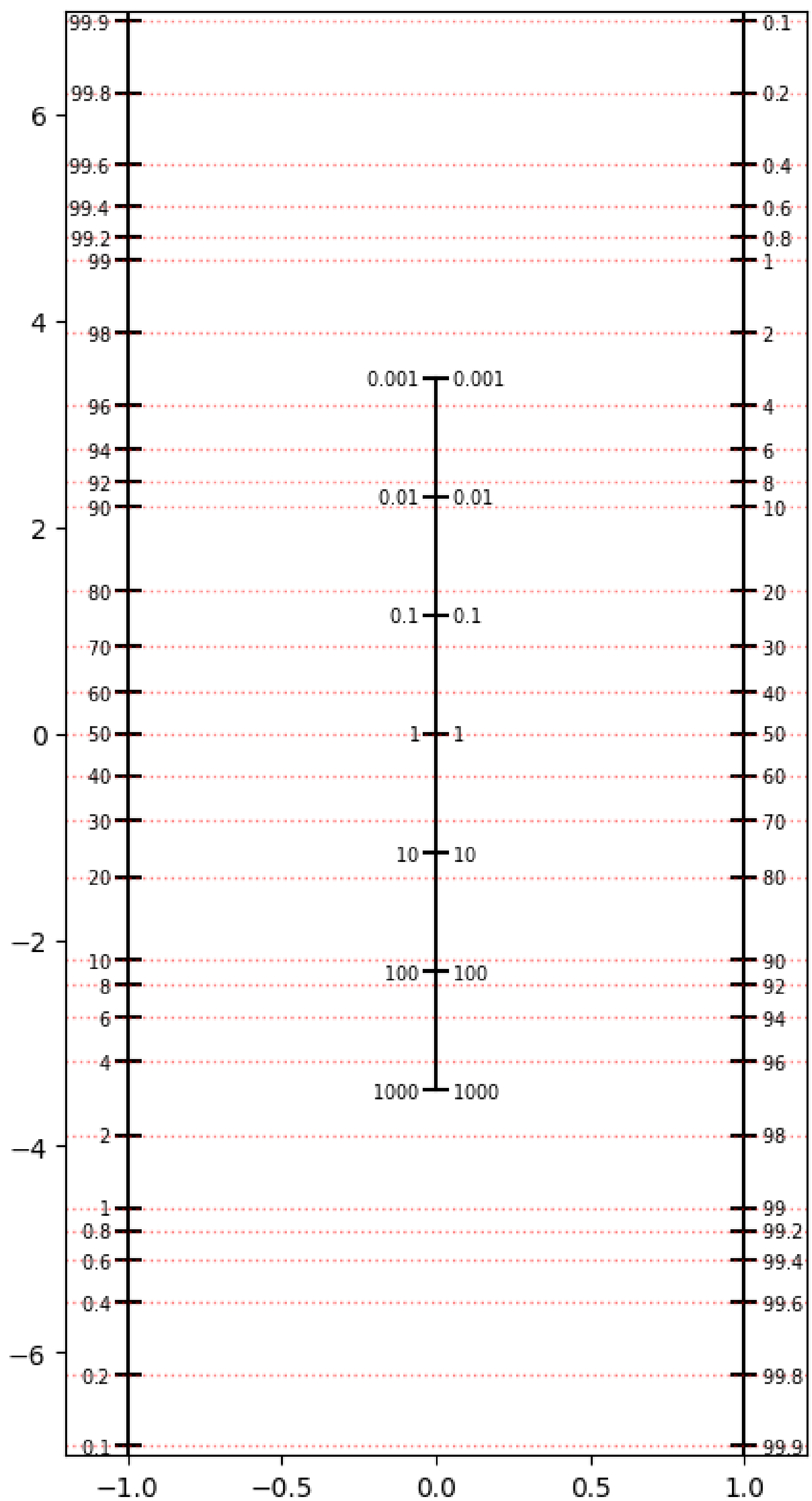
da cui otteniamo

$$\mathbf{Pr} = \frac{1}{1+\sqrt{\mathbf{LR}}}$$

e calcolare poi i corrispondenti Odds per ottenere il valore della coordinata sull'asse y del contenitore

[10]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)

ax.axvline(-1, c="k")
ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_", c="k",␣
↪s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        -1.05, np.log(Otick),
        f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="right"
    )

ax.axvline(+1, c="k")
ax.scatter([+1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(1/Oticks), marker="_",␣
↪c="k", s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        +1.05, np.log(Otick),
        f"${1-Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${1-Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="left"
    )

Ops = []
for Ltick in Lticks:
    Op = 1 / (np.sqrt(Ltick) + 1)
    Ops.append(Op)
    ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=100)
    ax.text(+.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="left")
    ax.text(-.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="right")
ax.plot([0,0], [np.log(Ops[0]/(1-Ops[0])), np.log(Ops[-1]/(1-Ops[-1]))], c="k",␣
↪ls="-")

# Valori complementari esempio
```

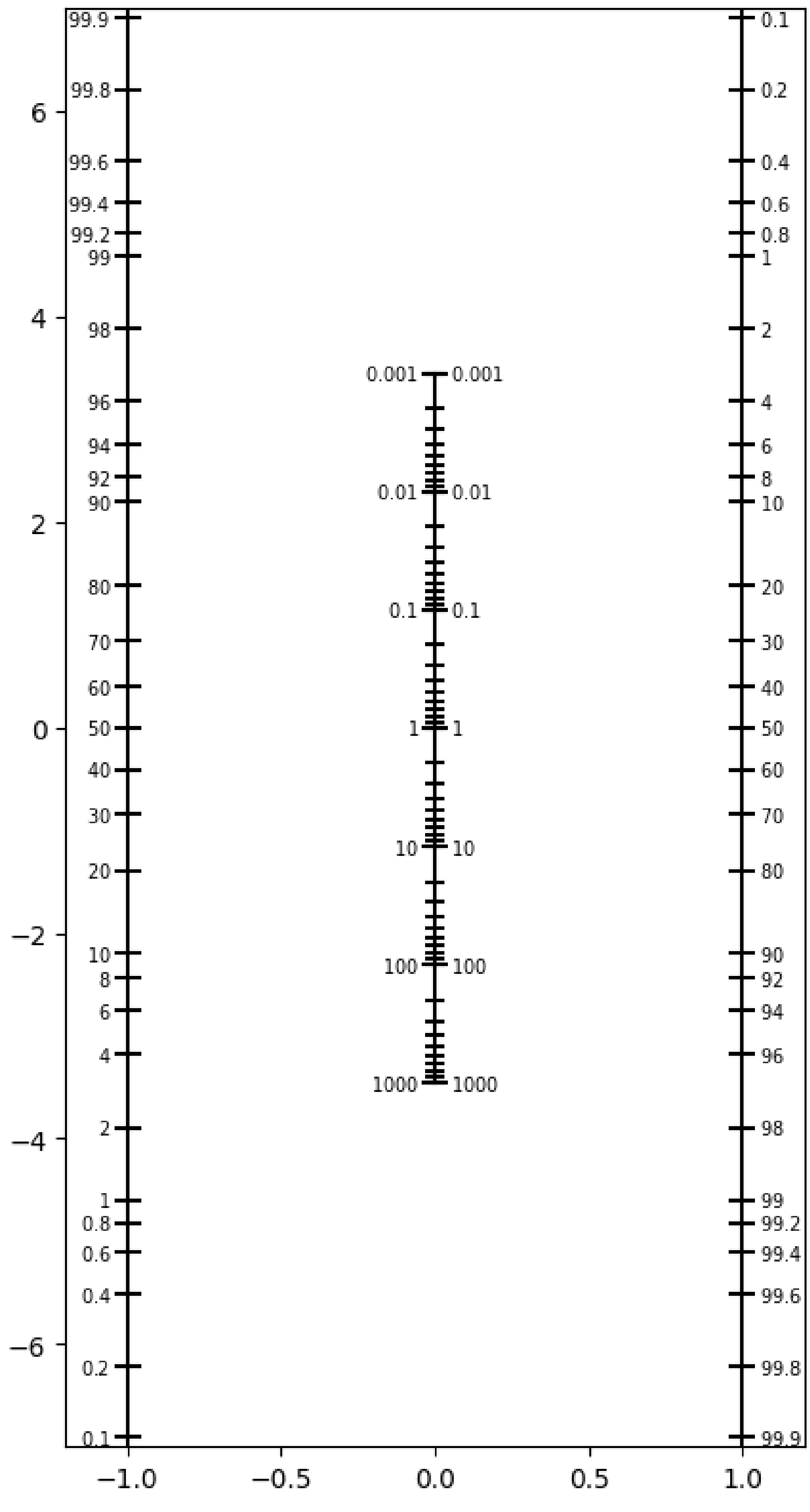
```
for Otick in Oticks:
    ax.axhline(np.log(Otick), c="r", ls=":", alpha=.5, lw=1)

plt.show();
```



Possiamo ora aggiungere dei segni minori sull'asse di **LR** e rimuovere le linee verticali dei valori complementari

[11]:
```python
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)

ax.axvline(-1, c="k")
ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_", c="k",␣
↪s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        -1.05, np.log(Otick),
        f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="right"
    )

ax.axvline(+1, c="k")
ax.scatter([+1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(1/Oticks), marker="_",␣
↪c="k", s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        +1.05, np.log(Otick),
        f"${1-Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${1-Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="left"
    )

Ops = []
for Ltick in Lticks:
    Op = 1 / (np.sqrt(Ltick) + 1)
    Ops.append(Op)
    ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=100)
    ax.text(+.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="left")
    ax.text(-.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="right")
    minors = [Ltick-10**int(np.log10(Ltick)-1)*i for i in range(9)]
    for minor in minors:
        if minor < .001:
            continue
        Op = 1 / (np.sqrt(minor) + 1)
        ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=50)
ax.plot([0,0], [np.log(Ops[0]/(1-Ops[0])), np.log(Ops[-1]/(1-Ops[-1]))], c="k",␣
↪ls="-")
```

```
plt.show();
```

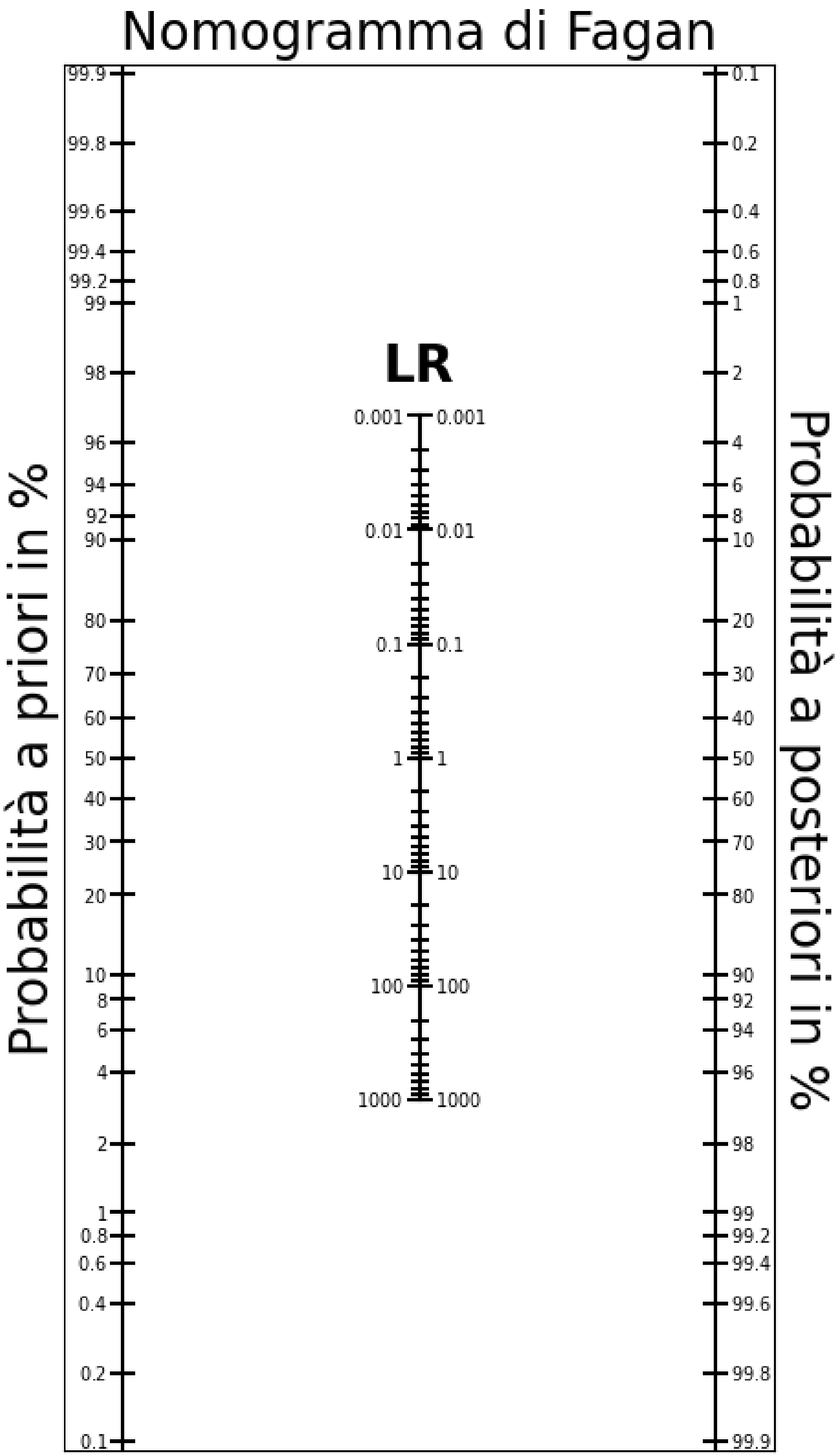


99.9
99.8
99.6
99.4
99.2
99
98
96
94
92
90
80
70
60
50
40
30
20
10
8
6
4
2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.1
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
0.1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
10
20
30
40
50
60
70
80
90
92
94
96
98
99
99.2
99.4
99.6
99.8
99.9
6
4
2
0
−2
−4
−6
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

Gli assi del nomogramma sono completi, rimuoviamo i valori di ascisse e coordinate del contenitore, aggiungiamo titolo ed etichette degli assi del nomogramma

[12]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
ax.set_ylim(Omin, Omax)

ax.axvline(-1, c="k")
ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_", c="k",␣
↪s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        -1.05, np.log(Otick),
        f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="right"
    )

ax.axvline(+1, c="k")
ax.scatter([+1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(1/Oticks), marker="_",␣
↪c="k", s=100)
for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
    ax.text(
        +1.05, np.log(Otick),
        f"${1-Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${1-Ptick:.1%}$",
        fontsize=7, va="center", ha="left"
    )

Ops = []
for Ltick in Lticks:
    Op = 1 / (np.sqrt(Ltick) + 1)
    Ops.append(Op)
    ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=100)
    ax.text(+.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="left")
    ax.text(-.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="right")
    minors = [Ltick-10**int(np.log10(Ltick)-1)*i for i in range(9)]
    for minor in minors:
        if minor < .001:
            continue
        Op = 1 / (np.sqrt(minor) + 1)
        ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=50)
ax.plot([0,0], [np.log(Ops[0]/(1-Ops[0])), np.log(Ops[-1]/(1-Ops[-1]))], c="k",␣
↪ls="-")

ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])
```

```
ax.set_title("Nomogramma di Fagan", fontsize=20)
ax.text(-1.3, 0, "Probabilità a priori in %", ha="center", va="center",␣
↪fontsize=20, rotation=90)
ax.text(+1.3, 0, "Probabilità a posteriori in %", ha="center", va="center",␣
↪fontsize=20, rotation=270)
ax.text(0, np.log(Ops[0]/(1-Ops[0]))+.5, "$\mathbf{LR}$", ha="center",␣
↪va="center", fontsize=20)

plt.show();
```



Possiamo ora testarlo per alcuni valori di Probabilità a priori e Likelihood Ratio, ricordando che i valori a priori e posteriori sono complementari sui due assi dunque la funzione per determinare la coordinata y della Probabilità a posteriori sarà

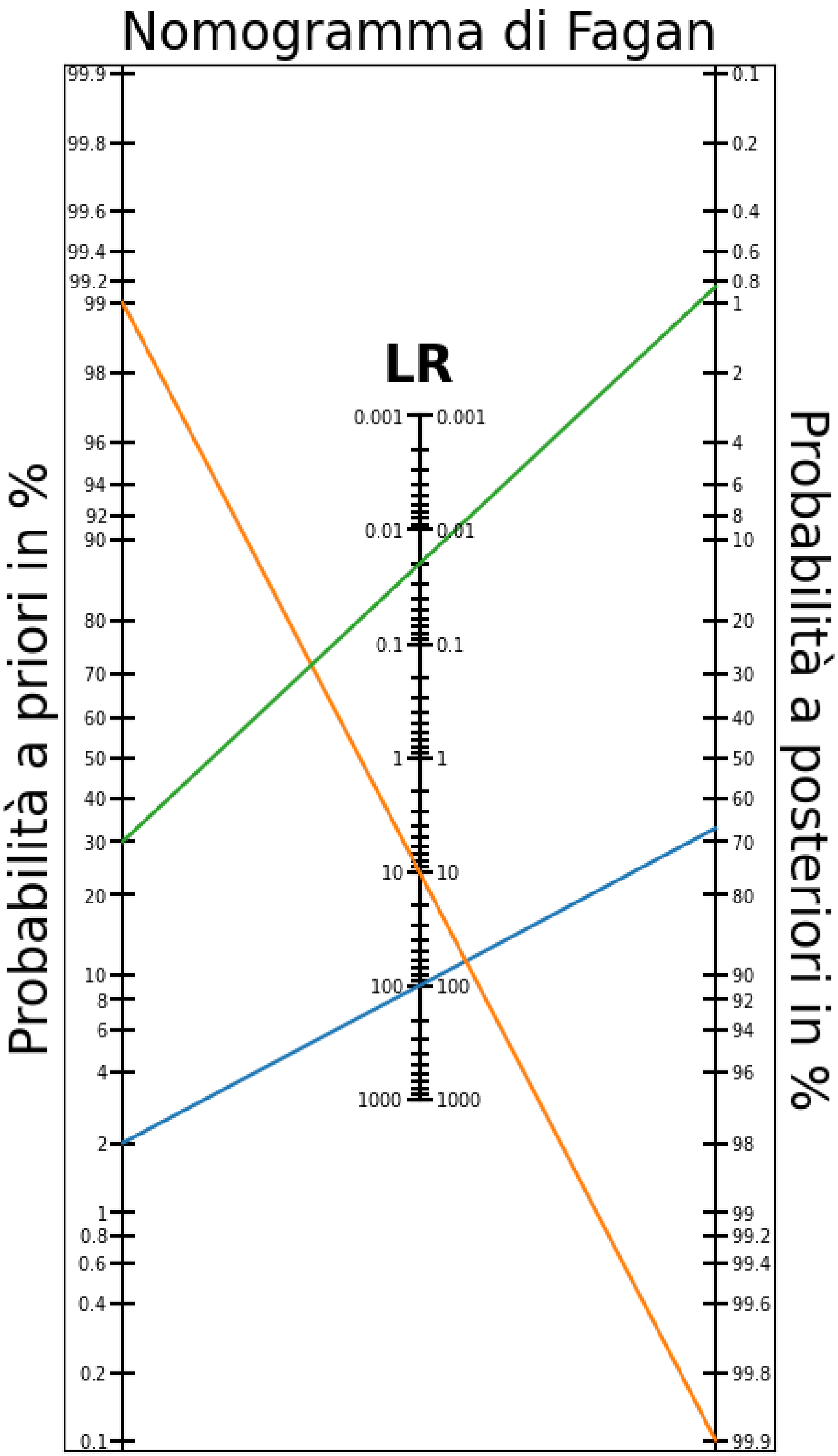
$$\log\left(\frac{\mathbf{Pr}}{1-\mathbf{Pr}}\right) = \log\left(\frac{1}{\mathbf{LR}} \cdot \frac{1-\mathbf{Po}}{\mathbf{Po}}\right)$$

[13]:
```
def Fagan(draw=[]):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,10), dpi=100)
    ax.set_xlim(-1.2, 1.2)
    ax.set_ylim(Omin, Omax)

    ax.axvline(-1, c="k")
    ax.scatter([-1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(Oticks), marker="_",␣
↪c="k", s=100)
    for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
        ax.text(
            -1.05, np.log(Otick),
            f"${Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${Ptick:.1%}$",
            fontsize=7, va="center", ha="right"
        )

    ax.axvline(+1, c="k")
    ax.scatter([+1 for _ in range(len(Pticks))], np.log(1/Oticks), marker="_",␣
↪c="k", s=100)
    for Otick, Ptick in zip(Oticks, Pticks):
        ax.text(
            +1.05, np.log(Otick),
            f"${1-Ptick:.0%}$" if Ptick<=.99 and Ptick>=.01 else f"${1-Ptick:.
↪1%}$",
            fontsize=7, va="center", ha="left"
        )

    Ops = []
    for Ltick in Lticks:
        Op = 1 / (np.sqrt(Ltick) + 1)
        Ops.append(Op)
        ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=100)
        ax.text(+.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="left")
        ax.text(-.05, np.log(Op/(1-Op)), f"${Ltick}$", fontsize=7, c="k",␣
↪va="center", ha="right")
        minors = [Ltick-10**int(np.log10(Ltick)-1)*i for i in range(9)]
        for minor in minors:
            if minor < .001:
                continue
            Op = 1 / (np.sqrt(minor) + 1)
```

```python
            ax.scatter(0, np.log(Op/(1-Op)), marker="_", c="k", s=50)
    ax.plot([0,0], [np.log(Ops[0]/(1-Ops[0])), np.log(Ops[-1]/(1-Ops[-1]))],␣
↪c="k", ls="-")

    ax.set_xticks([])
    ax.set_yticks([])
    ax.set_title("Nomogramma di Fagan", fontsize=20)
    ax.text(-1.3, 0, "Probabilità a priori in %", ha="center", va="center",␣
↪fontsize=20, rotation=90)
    ax.text(+1.3, 0, "Probabilità a posteriori in %", ha="center", va="center",␣
↪fontsize=20, rotation=270)
    ax.text(0, np.log(Ops[0]/(1-Ops[0]))+.5, "$\mathbf{LR}$", ha="center",␣
↪va="center", fontsize=20)

    for line in draw:
        Opo = line[1] * (line[0]/(1-line[0]))
        Ppo = Opo/(1+Opo)
        print(f"Pr:{line[0]:>7.2%}  LR:{line[1]:>7.2f}  Po:{Ppo:>7.2%}")
        ax.plot(
            [-1, 1], [np.log(line[0]/(1-line[0])), np.log((1-line[0])/
↪(line[0]*line[1]))]
        )

    plt.show();
```

[14]:
```python
Fagan(
    draw=[
        [.02, 100],
        [.99, 10],
        [.3, .02]
    ]
)
```

```
Pr:   2.00%  LR: 100.00  Po: 67.11%
Pr:  99.00%  LR:  10.00  Po: 99.90%
Pr:  30.00%  LR:   0.02  Po:  0.85%
```



Il nomogramma è completo e corretto.

References

[1] F. Franco and A. Di Napoli, "Rapporto di verosimiglianza del risultato positivo e negativo di un test diagnostico e teorema di bayes," *Giornale di Clinica Nefrologica e Dialisi*, vol. 28, no. 2, pp. 134–136, 2016.

[2] C. G. Caraguel and R. Vanderstichel, "The two-step fagan's nomogram: ad hoc interpretation of a diagnostic test result without calculation," *BMJ Evidence-Based Medicine*, vol. 18, no. 4, pp. 125–128, 2013.