ANNALES DU BACCALAUREAT SENEGALAIS

MATHEMATIQUES

SERIE S2

TOME 1

Années 1998-2007

Sujets corrigés et commentés par :

Mouhamadou KA

Professeur au Lycée Cheikh Oumar Foutiyou TALL de Saint-Louis

serigneka@yahoo.co.uk

Saint-Louis, Février 2008

AVANT-PROPOS

On trouvera dans ces annales :

— les énoncés de la plupart des sujets de mathématiques proposés au Bac S2 pour la période allant de 1998 à 2007 .

— à la suite, les corrigés de tous ces sujets (vingt-et-un en tout).

Nous faisons trois recommandations fondamentales à l'élève utilisant ce manuel :

1°) Il est inutile de chercher un exercice sur un thème tant qu'on n'a pas bien maîtrisé le cours portant sur ce thème ;

2°) Il est indispensable de commencer par chercher à résoudre les exercices et les problèmes par soi-même, de préférence en rédigeant soigneusement la solution comme si on devait la présenter à un professeur. Il ne faut surtout pas consulter trop vite les corrigés.

3°) Une lecture passive des corrigés sans effort préalable de la part de l'élève ne lui serait d'aucune utilité.

Lors de la rédaction de ces corrigés, nous avons essayé d'être le plus détaillé possible, de manière que même un élève peu doué puisse suivre. Nous avons ajouté parfois des remarques sur la difficulté des sujets ou sur les écueils qu'il faut éviter.

Les figures ont toutes été réalisées grâce à des logiciels informatiques et, pour des raisons techniques, il n'a pas été possible de respecter les unités imposées par les sujets.

L'Auteur

TABLE DES MATIERES

ENONCES

SOLUTIONS

ENONCES

BAC S2 2007 2ème groupe

EXERCICE 1 (03,5 points)

1°) Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2°) Déterminer la solution f de 'E) qui vérifie les conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$.

3°) Résoudre sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation $e^{-x}(\cos x - \sin x) = 0$.

EXERCICE 2 (4 points)

Soit $w = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1°) a) Calculer w^2.

b) Déterminer le module et un argument de w^2.

c) Donner une écriture exponentielle de w^2.

2°) En déduire un argument de w.

EXERCICE 3 (04,5 points)

Un sac contient des jetons blancs et des jetons noirs. 45% de ces jetons sont blancs. Les jetons contenus dans le sac sont numérotés 1 ou 2 et ils sont indiscernables au toucher. Parmi les jetons blancs, 40% portent le numéro 1 et parmi les jetons noirs, 60% portent le numéro 1.

On tire au hasard un jeton du sac. On considère les événements suivants :

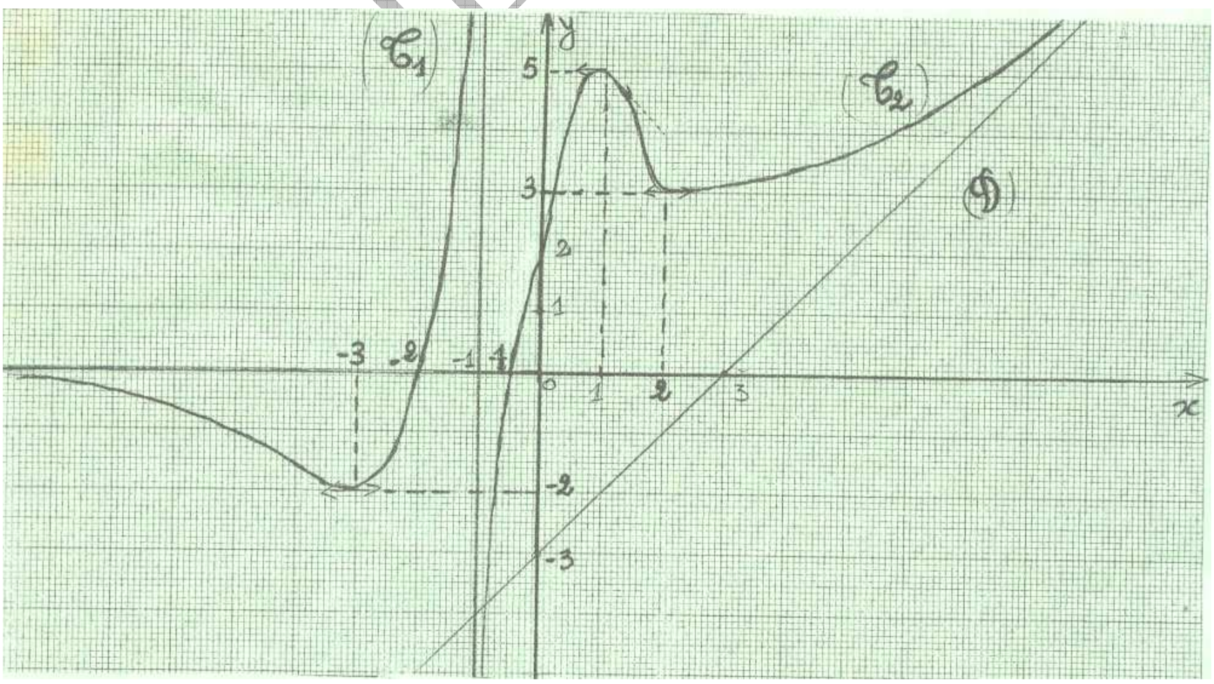
A : « le jeton tiré est blanc » ; B : « le jeton tiré est noir » ;

C : « le jeton tiré porte le numéro 1 » ; D : « le jeton tiré porte le numéro 2 ».

1°) Calculer : **a)** $p(A \cap C)$ **b)** $p(B \cap C)$ **c)** $p(C)$.

2°) Le jeton tiré porte le numéro 1. Quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

EXERCICE 4 (4 points)



Dans la figure ci-dessus, $\mathscr{C}1 \cup \mathscr{C}2$ est la représentation graphique $\mathscr{C}f$ d'une fonction numérique f définie et continue sur son ensemble de définition.

1°) a) Donner l'ensemble de définition de définition de la fonction f.

b) f est-elle dérivable en 1 ? (Justifier la réponse).

2°) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) Donner une équation de la droite (D).

4°) Préciser toutes les droites asymptotes à la courbe $\mathscr{C}f$.

5°) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

6°) Donner une équation de chacune des demi tangentes au point d'abscisse 1.

7°) Préciser les maximas et minima de la fonction f.

8°) Donner les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : **a)** f(x) = = 0 **b)** f '(x) = 0.

9°) Soit $m \in \mathbb{R}$. Précisr l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel l'équation f(x) = m admet 4 solutions réelles distinctes.

BAC S2 2007 1er groupe

EXERCICE 1 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (3 + 2i)z + 1 - 2i = 0$.

1°) a) Déterminer la solution réelle de cette équation.

b) Montrer que i est une solution de cette équation.

c) Déterminer la troisième solution de cette équation.

2°) Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et 2 + i.

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I(1 + i) et de rayon r à déterminer.

EXERCICE 2 (4 points)

1°) On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient :

$$p_1 = p_2 \; ; \; p_3 = p_4 = 2p_1 ; \; p_5 = p_6 = 3p_1.$$

a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A: " obtenir 3 ou 6" est égale à $\frac{5}{12}$.

2°) Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible; à 5m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$.

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette; à 7 m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à $\frac{2}{5}$.

On note C l'événement : " la cible est atteinte".

a) Déterminer $p(C|A)$ et $p(C|\overline{A})$. En déduire que $p(C) = \frac{29}{60}$.

b) Déterminer $p(A|C)$.

3°) Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.

Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

PROBLEME (12 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0 \; ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1°) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$.

Vérifier que $\alpha \in \;]0,2;0,3[$.

3°) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4°) Etablir la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

II. On considère la fonction f définie par : f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} \; si \; x \succ 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$

1°) Montrer que f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3°) Déterminer la limite de f en + ∞.

4°) Montrer que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$, f '(x) = $\dfrac{g(x)}{(1 + x)^2}$.

En déduire le signe de f '(x) sur $]0;+\infty[$.

5°) Montrer que f(α) = − α.
6°) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7°) Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique: 5 cm. Prendre α ≈ 0,3.

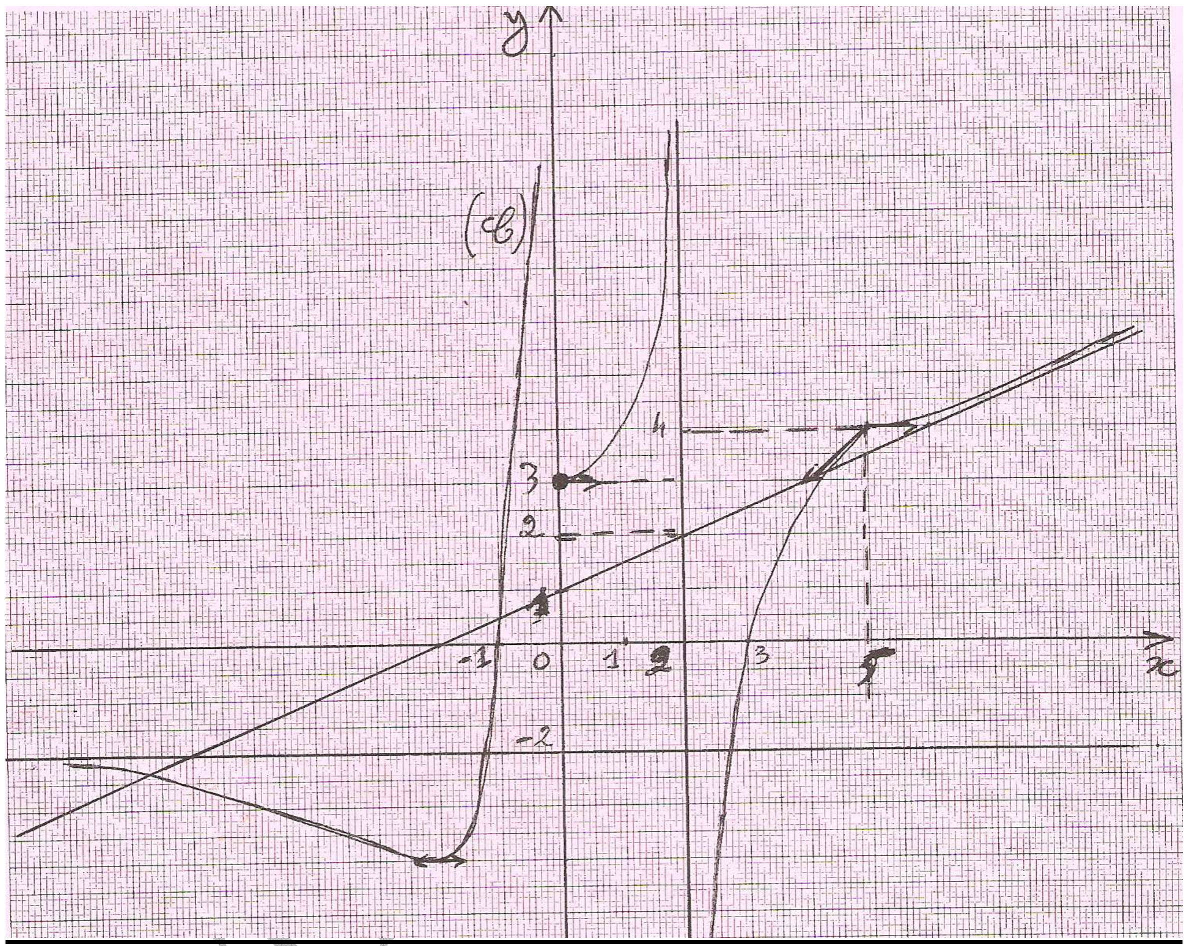
III. 1°) A l'aide d'une intégration par parties, cxalculer l'intégrale I = $\int_1^e x.\ln(x).dx$.

2°) Montrer que pour tout x élément de [1; e], $\dfrac{x \ln x}{e + 1} \leq f(x) \leq \dfrac{x \ln x}{2}$.

En déduire que $\dfrac{e^2 + 1}{4(e + 1)} \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq \dfrac{e^2 + 1}{8}$.

BAC S2   2006 $2^{\text{ème}}$ groupe

EXERCICE 1



La courbe (C) ci-dessus est celle d'une fonction f dans un repère orthonormal.
f est définie en 0 et on a f (0) = 3.

1°) Préciser l'ensemble de définition de f.

2°) Donner les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f$.

3°) La courbe admet-elle une asymptote oblique? Si oui, donner son équation.

4°) Préciser les équations des autres asymptotes.

5°) Le fonction est-elle dérivable en 5 ? Justifier la réponse.

6°) Dresser le tableau de variation de f.

7°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par g (x) = ln (f (x)).

EXERCICE 2

1°) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

2°) a) Calculer $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$;

b) En intégrant par parties, calculer l'intégrale : I = $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)}dx$.

(On remarquera que : $\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$)

EXERCICE 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient 3 boules rouges et 4 jaunes et U_2 2 rouges et 3 jaunes. On prélève au hasard une boule dans U_1 que l'on remet dans U_2, puis on tire une boule dans U_2.

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : « obtenir une boule rouge de U_1 ».
b) B : « obtenir une boule rouge de U_2 sachant que la boule remise est rouge. »
c) C : « La boule tirée de U_2 est rouge ».

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.

1°) Résoudre cette équation différentielle.
2°) Trouver la solution f de cette équation dont la courbe représentative passe par A (0 ; 2) et a en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

BAC S2   2006   1er groupe

EXERCICE 1

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive, et par z_2 l'autre solution de (E) .

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.On considère les points A, B, C d'affixes respectives z_1,z_2 et $\sqrt{3} + 1$. Placer les points A, B, et C.
Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2°) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3°) On considère l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$, où a, b et c désignent trois paramètres éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.
Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur b et le troisième, celle de c.

a) Justifier que l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)\,e^x$, où A et B sont des réels si et seulement si $1 + i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z, $az^2 - bz + c = 0$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)\,e^x$, A et B étant des constantes réelles.

EXERCICE 2

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

A- Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1°) Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 km/h et en ordonnée 1 cm pour 5 m.

NB : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les les graduations à partir de 8 m.

2°) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4°) a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

B- Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport : Y / Cause des accidents : X	Particuliers y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse : x_1	440	360
Accidents à cause mécanique : x_2	110	90

1°) Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude.
2°) Déterminer les fréquences conditionnelles $f_{y2\,/\,x1}$ et $f_{x2\,/\,y2}$.
3°) Déterminer les fréquences marginales $f_{.\,1}$ et $f_{2\,.}$.

PROBLEME

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,(1 + e^{2-x})$.

On note $\mathscr{C}$ sa corbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité : 2 cm).

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 + (1 - x)\,e^{2-x}$.

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b) En déduire le signe de h (x) sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - x \,]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

c) f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire $\mathscr{C}$ (on tracera la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2).

f) Construire $\mathscr{C}\,'$ courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

II. Soit λ un réel strictement positif. R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$ et les courbes d'équations respectives : $y = f(x)$ et $y = x$. Soit $a(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2.

1°) Calculer $a(\lambda)$ en fonction de λ.

2°) Déterminer $a = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

BAC S2 2005 2^e groupe

EXERCICE 1

On considère l'intégrale : I = $\int_0^1 e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$.

Calculer I à l'aide de deux intégrations par parties successives .

EXERCICE 2

Soit la suite (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)\, z_n + 2i. \end{cases}$

1°) Calculer z_1 et z_2.

2°) On considère la suite (U_n) définie par: $U_n = z_n + 2$.

a) Montrer que : $U_n = (2+i)(1+i)^n$

b) Exprimer z_n en fonction de n .

3°) Soit M_{n+1} , M_n , A et B les points d'affixes respectives z_{n+1} , z_n , i et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Démontrer que : $\frac{A M_{n+1}}{B M_n} = \sqrt{2}$ et que: $(\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

EXERCICE 3

Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calculer la probabilité pour qu'il soit :

a) un homme atteint de paludisme.
b) une femme atteinte de paludisme.
c) Une personne atteinte de paludisme.
d) un homme non atteint de paludisme.
e) un homme sachant qu'il est atteint de paludisme.
f) une femme, sachant que cet individu est atteint de paludisme.

EXERCICE 4

1°) Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle y '' + 25 y = 0 vérifiant f (0) = 1 et f ' (0) = − 5 .

2°) Soit g la fonction numérique définie sur $[0\ ;\ 2\pi]$ par :
g (x) = cos 5x − sin 5x ;
$\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal direct. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses.

BAC S2 2005 1er groupe

EXERCICE 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2°) **a)** Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation E : $z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1 - i)$.

En posant $u = \dfrac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation E.

3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 2

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente . Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i .

x_i	60	80	10	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont x_i et y celle dont les valeurs sont les y_i .

1°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2°) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

3°) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 francs.

a) Déduire de la question précédente que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité : $z = -5{,}95\,x^2 + 1426{,}25\,x - 59937{,}5$, où x et z sont exprimés en milliers de francs.

b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

N .B Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

Rappel : Bénéfice = Prix de vente — Prix de revient.

PROBLEME

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x)$

1°) a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$.

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe.

(Unité : 2cm) .

c) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;0[$.

2°) Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$.

a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x) = e^{-x}.\, f(x)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

d) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent .

3°) a) Montrer que $\dfrac{1}{1 + e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

b) A tout réel λ , on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} g(x)dx$. Justifier l'existence de $I(\lambda)$.

Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties .

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

PARTIE B

1°) Montrer que g est une bijection de R sur un intervalle J à préciser.
2°) a) Calculer g (0) .
b) Montrer que g^{-1} est dérivable au point ln 2 .

c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ au point d'abscisse ln 2 .

BAC S2 2004 Remplacement ENONCE

EXERCICE 1

1°) a) Montrer que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) Résoudre danc $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (E) . On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$.

2°) a) Ecrire $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire les arguments des solutions de (E) .

3°) Déduire des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on considère la transformation F qui à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' tel que : $z' = \sqrt{2}(-1+i)z + (1+\sqrt{2})i + \sqrt{2}$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F .

b) Construire l'image B du point A d'affixe -1 .

EXERCICE 2

Une étude faite sur l'effectif X des famillles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

Y \ X	[5 ; 7]	[8 ; 10]	[11 ; 13]	[14 ; 18]
[10 ; 15]	1	3	0	0
[5 ; 25]	5	9	8	3
[25 ; 35]	0	7	5	9

1°) Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y .

2°) A chaque centre x_i de classe de la série de X on associe la moyenne z_i de Y sachant que $X = x_i$.

3°) Dans la suite on considère la série (x , z) définie par le tableau suivant :

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z .

Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier la réponse) .

b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x .

c) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20 .

PROBLEME

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}\, y'' + \frac{3}{2}\, y' - y = 0$.

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point A (0 ; $-$ 1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

1°) Etudier les variations de f définie sur R par $f(x) = e^{2x} - e^{x}$.

2°) Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) . ; unité 2 cm .

a) Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln 2 .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

3°) a) Tracer (Γ) .

b) Calculer l'aire A (α) en cm² du domaine délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives : x = α (α < 0) , x = ln 2 et l'axe des abscisses .

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat .

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle [0 ; + ∞[.

1°) Démontrer que h est une bijection de [0 ; + ∞[sur un intervalle J à préciser.

2°) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 3 puis calculer $h^{-1\,\prime}(3)$.

3°) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4°) Tracer ($\mathscr{C}$ ') la courbe représentative de h^{-1} dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

BAC S2 2004 $2^{ème}$ groupe ENONCE

EXERCICE 1

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \ln(U_n) - 2 .$$

1°) Calculer U_1 et V_1 .

2°) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

3°) Ecrire V_n puis U_n en fonction de n .

4°) Etudier la convergence des suites (V_n) et (U_n) .

EXERCICE 2

1°) a) Démontrer que pour tout réel x on a : $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

2°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+e^x)$.

a) Calculer la dérivée de f .

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx .$$

EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois le dé et on note le numéro de la face de dessus.

on note P_i la probabilité de l'événement : « le résultat du lancer est i » .

1°) sachant que l'on a $P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_5 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3$, montrer que $P_1 = \dfrac{1}{15}$ et en déduire P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 .

2°) Calculer la probabilité de l'événement : « obtenir un numéro pair » .

3°) On lance cinq fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un numéro pair ?

EXERCICE 4

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduire les solutions de l'équation :

$(- iz + 3i + 3)^2 - 2\,(- iz + 3i + 3) + 2 = 0$.

2°) Soit les points A, B d'affixes $1 + i$, $1 - i$.

Déterminer le centre de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

BAC S2 2004 1er groupe

EXERCICE 1

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géometrique de premier terme $U_0 = 4$, de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$, de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

1°) a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

b) En déduire z_n .

2°) Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ i et de premier terme

$z_0 = 2\sqrt{2} + i\, 2\sqrt{2}$.

3°) Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et M_n le point d'affixe z_n .

a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1} .

b) Donner ses éléments caractéristiques .

4°) Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = z_0\, z_1\, z_2 \ldots\ldots\ldots z_n$.

a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n .

b) Démontrer que si n est impair, alors Z_n est réel .

EXERCICE 2

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1°) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500F ».

2°) soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

3°) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

PROBLEME

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{(2x - 1)\, e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f et trouver les trois réels a, b et c tels que pour tout x de D_f, on ait $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{e^x - 1}$.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .

3°) a) Déterminer la fonction dérivée de f .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\, e^{2x} - 5\, e^x + 2 = 0$.

c) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .

4°) On appelle ($\mathscr{C}$) la représentation graphique de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) dont l'unité est 2 cm.

Démontrer que les droites d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x - 2$ sont des asymptotes de ($\mathscr{C}$) respectivement en $+ \infty$ et $- \infty$.

Préciser l'autre asymptote.

5°) Soit x un réel de D_f .On considère les deux points M et M ' de ($\mathscr{C}$) d'abscisses respectives x et $- x$. Déterminer les coordonnées du milieu Ω du segment [M M '] . Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathscr{C}$) ?

6°) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) .

7°) a) Trouver les réels α et β tels que, pour tout réel x de l'ensemble D_f on ait :

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta\, e^x}{e^x - 1} .$$

b) Soit k un réel supérieur ou égal à 2 .

Déterminer l'aire $\mathscr{A}(k)$ en cm^2 de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x ;y) vérifient : $\ln 2 \leq x \leq \ln k$ et $2x - 1 \leq y \leq f(x)$.

c) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathscr{A}(k)$.

BAC S2 2003 1er groupe

EXERCICE 1

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d' avoir un test positif à cette maladie sachant qu' il est malade est 0,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n' est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note T l' événement « avoir un test positif à cette maladie »

M l' événement « être malade »

$\overline{M}$ l' événement contraire de M.

On rappelle que pour tous événements A et B on a :

$(*)$ $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A .

1°) a) Réécrire la relation $(*)$ pour A = T et B = M puis pour $A = \overline{M}$ et $B = \overline{T}$.

b) En déduire que $P(M \cap T) = P(\overline{M})\,[1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})]$.

2°) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie .

3°) a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu' il a un test positif à cette maladie .

b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu' il a un test négatif à cette maladie .

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles .

EXERCICE 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$(E) : z^3 + (1 - 8i) z^2 - (23 + 4i) z - 3 + 4i = 0$

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solutions de (E) .

c) Donner l'ensemble des solutions de (E) .

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , soit les points A, B et C d'affixes respectives 1 + 2i , 3i, — 2 + 3i .

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, — 2 , et 1

a) Montrer que les vecteurs $\vec{GA}$, $\vec{GB}$ et $\vec{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2i et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.

Donner les éléments caractéristiques de cette similitude .

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction u : [0 ;+ ∞ [→ R

$$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de u ; Calculer u (0) et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

2°) Etudier les variations de u.

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3°) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall\ x \in [0\ ;1[$, $u(x) \geq 0$.

b) $\forall\ x \in]1\ ;+\infty[$, $u(x) < 0$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par : g : [0 ;+ ∞ [→ R

$$x \mapsto x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1 .$$

1°) Déterminer D_g (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1 .

2°) a) Vérifier que : $\dfrac{x + 1}{x - 1} = 1 + \dfrac{2}{x - 1}$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - 1)}{2} \ln \left(1 + \dfrac{2}{x - 1}\right) = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g .

d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à] 0 ;1 [tel que $g(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement d'ordre 1 de α .

3°) Tracer la courbe $\mathscr{C}g$ de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm) .

PARTIE C

Soit f : [0 ; 1 [$\to$ R , la fonction définie par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\dfrac{x + 1}{1 - x}}$

1°) Montrer que f est derivable sur [0 ; 1 [et que : $f'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [0 ;1[$.

2°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}g$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \alpha$.

BAC S2 2002 2ème groupe

EXERCICE 1

Calculer I = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(2x^2 - 1\right) cos 3x dx$.

EXERCICE 2

1°) Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de z = $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.

2°) Déterminer et construire E_1 = { M(z) ; (iz — 2) ($\overline{z}$ — 1) soit un réel }

3°) Déterminer et construire E_2 = { M(z) ; arg[(iz — 2) ($\overline{z}$ — 1)] = $\frac{\pi}{2}$ } .

EXERCICE 3

Un sac contient douze jetons indiscernables au toucher sur chacun desquels est inscrite une lettre du mot « SENEGALAISES ».

1°) Déterminer la probabilité d'avoir les lettres du mot « SAGESSE » dans chacun des cas suivants :

a) On tire simultanément sept lettres du sac.

b) On tire successivement sept lettres en remettant à chaque fois la lettre tirée dans le sac après l'avoir notée.

2°) Déterminer la probabilité d'avoir dans leur ordre les lettres du mot « SAGESSE », si l'on tire successivement sans remise sept lettres du sac.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par : f (x) = x — ln (1 + e^x) .

1°) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2°) Vérifier que $e^x + 1 = e^x (1 + e^{-x})$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3°) Montrer que la droite **D** : $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f .

4°) Montrer que f est bijective. Calculer f v(0) et $(f^{-1})'(-\ln 2)$.

5°) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

BAC S2 2002 1er groupe

EXERCICE 1

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer que, dans $\mathbb{C}$, la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à zéro ($n \geq 2$)

2. En utilisant les résultats du 1) montrer que $\cos\frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{10}$.

EXERCICE 2

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences Physiques : SP.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

Note de Math / Note de SP	2	6	10	14	18	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13
14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle $X = (x_i)$ la série statistique des notes de Sciences Physiques et $Y = (y_i)$ la série statistique des notes de Mathématiques.

1. Déterminer pour chaque x_i la moyenne z_i de la série conditionnelle y/ z_i .

2. On considère la série double (x_i , z_i)

   a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points $M(x_i, z_i)$.

   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série $X = (x_i)$ et $Z = (Z_i)$.

   c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z et X par la méthode des moindres carrés.

d) Tracer cette droite.

PROBLEME

A. On considère la fonction g définie sur R + \{1} par :

g (x) = $\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}$ pour tout x > 0 et x ≠ 1 ; g (0) = 0 .

1. Montrer que g est continue à droite en zéro.
2. Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   Dresser le tableau de variation de g.
   En déduire le signe de g(x) en fonction de x.

B. On considère la fonction f définie sur R +\ {1} par :

f (x) = $\frac{-x}{\ln x}$ si x > 0 et x ≠ 1 ; f (0) = 0 .

1. Montrer que f est continue à droite et dérivable à droite au point O. En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative **C** de f au point d'abscisse 0.

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Comparer f ' (x) et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.

4. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe **C** au point d'abscisse e².

5. Soit M le point de C d'abscisse x et N le point de D de même abscisse x. On pose φ (x) = $\overline{NM}$.

   Montrer que : φ (x) = f (x) + $\frac{x + e^2}{4}$.

Déduire de A) le tableau de variations de φ ' (x) puis le signe de φ ' (x) sur]1 ;+ ∞ [.

En déduire le signe de φ (x) sur]1 ;+ ∞ [et la position de **C** par rapport à D pour les points d'abscisse x >1.

6. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe **C** et la droite D (unité 2 cm).

C. On revient à la fonction g du A).

On note Cg la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

Sans construire Cg, calculer en cm² l'aire de la partie plane comprise entre la courbe Cg, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x = e et x = e².

BAC S2 2001 2ème groupe

EXERCICE 1

1°) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.
2°) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.
3°) Résoudre :

a) dans $\mathbb{R}$: $f(x) + \sqrt{2} = 0$

b) dans $[0\,;2\pi[$: $f(x) + \sqrt{2} = 0$

EXERCICE 2

1°) Factoriser : $\alpha^2 - 2i\alpha - 1$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \alpha(\alpha + i)z + i\alpha^3 = 0$.
2°) On note r le module de α et θ un de ses arguments. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de (E) .
3°) P désigne le plan complexe ; on note S_α l'application définie sur P par :

$$S_\alpha : P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que : } z' = i\alpha z + \alpha^2 .$$

Déterminer α pour que S_α soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

EXERCICE 3

Les relevés de l'intensité (x_i) du travail fourni exprimée en kilojoules par minute et la fréquence cardiaque (y_i) (nombre de battements par minute) de 8 personnes sont consignés dans le tableau suivant :

x_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

1°) Représentez le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$.
2°) Déterminez les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$, les variances V(x) et V(y) de x et y . On précisera les formules utilisées.
3°) Déterminez la droite de régression de y en x ;la tracer.

EXERCICE 4

1°) Etablir que : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
2°) Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 7 - 4e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + 3 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f en 0 .
b) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter le résultat graphiquement.
c) Etudier les variations de f.

3°) $\mathscr{C}$ est courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e .

b) Tracer $\mathscr{C}$.

BAC S2 2001 1er groupe

EXERCICE 1

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{2z - i}{z - 2i}$.

a) — Résoudre dans $\mathbb{C}$: f (z) = z.

Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

b) — Calculer $z_1^4 + z_2^4$.

1 /Soit M (z) un point de P.

Soit (Γ) l'ensemble des points M (z) tels que f (z) soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ). Tracer (Γ).

2 / Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

EXERCICE 2

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dan sl'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.
1°) Quelle est la probabilité des événements :
A = « les deux nombres inscrits sont strictement inférieurs à 5 »
B = « le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second ».
2°) Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes; Quelle est la probabilité pour qu'à l'issue de la 7ème partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ?au moins une fois ?

PROBLEME

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x(1 - \ln x)^2 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

où ln x désigne le logarithme népérien de x, on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1. **a)** - Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

b) - Etudier les variations de g.

c) - Tracer ($\mathscr{C}$).

2. a) Soit α un réel appartenant à l'intervalle] 0, e [.

Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives :

$x = \alpha$ et $x = e$.

b) - Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathscr{A}(\alpha)$.

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite (Δ) : $y=x$

b) Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_m) : $y = mx$, recoupe-t-elle la courbe $\mathscr{C}$ en deux points M_1 et M_2 autres que O ?

c) La droite (Δ_m) coupe la droite D d'équation $x = e$ en P.

Montrer que $OM_1 \times OM_2 = OP^2$.

4. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle [e ; + ∞ [admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable?

Calculer $h(e^2)$; en déduire $(h^{-1})'(e^2)$.

c) Construire la courbe de h^{-1} dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

BAC S2 2000 Remplacement

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $Z = (1 - x)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1°) Calculer le module et un argument de Z(on discutera selon les valeurs de x) . donner pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme exponentielle de Z.

2°) Montrer que Z^{2004} est un réel dont on précisera le signe.

3°) a) Montrer que l'équation $|Z| = 2$ admet deux racines Z_1 et Z_2 .
On notera Z_1 le complexe de plus grande partie réelle et Z_2 l'autre racine.

b) Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

c) Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et vérifier que A_2, O, A_1 sont alignés.

EXERCICE 2

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de se bêtes.

1°) — Soit X le nombre de moutons tués.

a) Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type de X.

2°) — On estime qu'un mouton donne environ 20kg de viande et une chèvre 15kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.
On note A l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et B l'événement « il y a assez de viande » .

a) Calculer P(A) et P(B)

b) Calculer P(B / A) ; A et B sont-ils indépendants ?

PROBLEME

I — On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x\,e^{-x}$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) En déduire le signe de g (x) suivant les valeurs de x .

II — On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(-x) & \text{si } x < -1. \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) & \text{si } x \geq -1 . \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. (unité 2 cm) .

1°) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variations de f.

(On utilisera I. 2) .

2°) a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sur $[-1 ; +\infty[$.

3°) Montrer qu'il existe un unique point de la courbe $\mathscr{C}$ dont on précisera les coordonnées,où la tangente (T) est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

4°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, l'asymptote $\mathscr{D}$ et la tangente (T),on précisera la tangente ou les demi-tangentes à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 .

5°) a) Montrer que f est une bijection de $[-1 ; +\infty[$ sur un ensemble J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} sur le même graphique que la courbe $\mathscr{C}$.

III — Pour $\lambda \geq -1$, on note A (λ) l'aire en cm² de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \lambda . \\ x+1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

a) Calculer A (λ) à l'aide d'une intégration par parties.

b) Montrer que A (λ) admet une limite finie lorsque λ tend vers $+\infty$.

Calculer et interpréter graphiquement cette limite.

BAC S2   2000   1^er^ groupe

EXERCICE 1

On considère les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives :

$$Z_1 = 1 \; ; \; Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \; ; \; Z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

1°) a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$

b) Donner une écriture algébrique et une écriture trigonométrique de $\dfrac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

2°) Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1 .

a) Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) On désigne d'affixe Z ' , l' image par S du point M d ' affixe Z. Exprimer Z ' en fonction de Z ; en déduire l' image , par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}\; e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

EXERCICE 2

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne , on note p_i $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres p_1 , p_2, p_3 , p_4 , p_5 , p_6 , sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\dfrac{1}{30}$.

1°) a) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{12}$.

b) En déduire p_2, p_3 , p_4 , p_5 , p_6 .

2°) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) Déterminer la loi de la probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

3°) Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de S.

b) On gagne à ce jeu lorsque $S \geq 4$. Déterminer la probabilité de gagner.

PROBLEME

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1 + x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 2 cm)

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Partie A

1°) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour x < 0, f ' (x) > 0.

b) Etudier les variations de f ' sur [0 ;+ ∞[.

En déduire que pour x >0, f ' (x) >0.

c) Donner le tableau de variation de f.

3°) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ (on pourra poser u = $\frac{1}{x}$).

b) Montrer que (D) : y = x + 1 est asymptote à (C) au voisinage de — ∞ . On admettra que ($\mathscr{C}$) est en dessous de (D).

4°) a) Construire ($\mathscr{C}$), on précisera les coordonnées de I, point d'intersection de (C) et (Δ) pour x >0

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe ($\mathscr{C}$) en + ∞ .

Partie B

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2°) En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :

$F(x) = \frac{(x^2 - 1)\ln(1 + x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$

3°) Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Δ), ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Partie C

1°) **a)** Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} .

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1} .

2°) Construire ($\mathscr{C}'$) courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

3°) Déduire du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq e - 1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) . \end{cases}$

BAC S2 1999 Remplacement ENONCE

EXERCICE 1

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $- z^3 + 6z - 20i = 0$ (E)
sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure a .

2°) Notons b et c les autres solutions de (E) , b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives a, b, c. Déterminer le module et un argument de $\frac{b - a}{c - a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad ; et f l'application qui à tout point M de $\mathscr{P}$ d'affixe $z \neq i - \sqrt{3}$ associe le point M ' d'affixe z ' définie par :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} + i}$$

a) Donner l'écriture complexe de r puis l'affixe du point A ' = r (A) .
b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ dont les images par f ont pour affixe un réel négatif. On notera E cet ensemble.
c) Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathscr{P}$ dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). on note X la quantité, en tonnes de matières premières ; Y le chiffre d'affaires en milliers de francs. Dans tout l'exercice on pourra donner directement les résultats fournis par la calculatrice. Le relevé des mopis précédents est le suivant :

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

1°) a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_1 entre X et Y et r_2 entre X et Z .
b) Est-ce un ajustement entre Y et X ou entre Z et X qui permettra la meilleure estimation de X ?

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières pour Y = 39 .

PROBLEME

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in]-\infty\ ;\ 0[\ . \\ f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in [0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[\ . \end{cases}$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 2 cm) .

1°) Etudier la continuité de f en 0 .

2°) a) Montrer que pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) En déduire que $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations .

3°) Etudier les variations de f .

4°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

Soit g la restriction de f à $]1\ ;\ +\infty[$.

1°) Montrer que g est une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J à préciser .
On notera g^{-1} la bijection réciproque de g .

2°) Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une solution α sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ (on ne demande pas de calculer α).

3°) Montrer que pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

4°) Tracer dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les représentations graphiques des bijections g et g^{-1} (on notera ces dernières $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_{g-1}$) .
on prendra 2cm pour unité du repère, on indiquera en annexe la nature et l'équation de chacune des asymptotes à $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_{g-1}$.

5°) Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ défini par :

$$\begin{cases} -\ln 7 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

BAC S2 1999 $2^{ème}$ groupe ENONCE

EXERCICE 1

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' définie par :

$z' = (-1 + i\tan a)z - i\tan a + 2$

1°) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1 + i\tan a$.

2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a .

3°) Soit h_a l' homothétie de centre le point Ω d'affixe 1 et de rapport $\frac{1}{\cos a}$.

Donner une écriture complexe de la rotation r_a telle que : $f_a = r_a \circ h_a$.

EXERCICE 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 3 boules noires et 1 blanche . L'urne U_2 contient 1 boules noires et 2 blanches .
On jette un dé cubique, parfaitement équilibré . Si le dé donne 6, on tire au hasard une boule de l'urne U_2 , sinon on tire au hasard une boule de l'urne U_1 .
On désigne par :
S l'événement : « on obtient 6 avec le dé » .
N l'événement : « on tire une boule noire » .

1°) Calculer les probabilités des événements $S \cap N$ et $\overline{S} \cap N$.

2°) Calculer la probabilité de tirer une boule noire .

3°) Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 avec le dé, sachant que l'on a tiré une boule blanche .

EXERCICE 3

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right)$.

1°) a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Justifier que (V_n) , définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln U_n$ existe et est arithmétique.

2°) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \ldots\ldots \times U_n$.

a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n.

b) Déterminer les limites à l'infini de S_n et P_n .

EXERCICE 4

On considère la fonction f de $[0\ ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{2x} + 4x - 2$.

1°) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

2°) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que :

$$0{,}1 < \alpha < 0{,}2 .$$

BAC S2 1999 1^{er} groupe

EXERCICE 1

L'étude du poids P de la larve d' un insecte mesuré en fonction de l' âge x a conduit au tableau suivant :

X (mois)	1	2	3	4	5
P (mg)	7	13	25	47	88

1°) On pose y = ln P ou ln désigne le logarithme népérien.

a) Calculer les différentes valeurs prises par y à 10^{-5} près .

b) Tracer le nuage de points représentant les couples (X,Y) dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm) : y placer le barycentre G du nuage.

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X .

3°) Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

EXERCICE 2

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l' équation

$$(E)\ z^3 + (3 - 2i)\, z^2 + (1 - 4i)\, z - 1 - 2i = 0$$

1°) **a)** Vérifier que (E) admet une solution réelle .

b) Achever la résolution de l' équation (E)

2°) Dans le plan complexe on désigne par A,B,C les points d'affixes respectifs

$z_A = -1$; $z_B = -2 + i$; $z_C = i$.

a) Déterminer le module et argument de $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC .

c) Donner le centre, le rapport et l' angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C .

PROBLEME

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \quad \text{si } x \in]-\infty\,;-1[\, \cup\,]-1\,;0[$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \qquad \text{si } x \in [0\,;+\infty[$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm .

Partie A

1°) Quel est le domaine de définition de f .Calculer f (− 2) et f (3) .

2°) Montrer que la fonction f est continue en zéro .

3°) a) Etablir que la dérivée f ' de f a pour expression

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \text{si } x \in]-\infty\,;-1[\, \cup\,]-1\,;0[$$

$$f'(x) = x e^{-x}(2-x) \quad \text{si } x \in [0\,;+\infty[$$

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4°) Démontrer que l'équation f(x) =0 admet une racine unique α comprise entre −1,6 et 1,5 .

5°) a) Justifier que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) lorsque x tend vers − ∞.

b) Etudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (D) dans $]-\infty\,;0[\, \setminus \{-1\}$.

6°) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) en représentant sur la même figure les asymptotes ; les demi tangentes en O et les points d'intersection avec les axes de coordonnées .

Partie B

1°) Soit g la restriction de f à [0,2] .

Montrer que g définit une bijection de [0 ; 2] sur un intervalle J à préciser .

2°) On note g^{-1} la bijection réciproque de g .

a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b) Montrer que $g^{-1}\,'\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

3°) On appelle ($\mathscr{C}$ ') la courbe représentative de g^{-1} .

Tracer ($\mathscr{C}$ ') en utilisant la courbe C et une transformation à préciser (on placera sur la courbe ($\mathscr{C}$ ') le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$) .

Partie C

λ étant un réel strictement positif , on pose $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)dx$.

1°) a) Interpréter graphiquement $I(\lambda)$.

b) En procédant à une intégration par parties , calculer $I(\lambda)$.

2°) Quelle est la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

3°) On pose $\lambda = 2$.

a) Calculer $I(2)$.

b) En déduire la valeur en cm² de l'aire de la partie limitée par C ' et les droites d'équation $y = 0$; $x = 0$ et $x = \frac{4}{e^2}$.

BAC S2 1998 REMPLACEMENT ENONCE

EXERCICE 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z telle que : (E) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.

a) Montrer que cette équation possède une solution réelle notée z_1 . Déterminer l'autre solution z_2 de (E) .

b) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$) , on note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 .

Déterminer l'affixe du point C de l'axe (O, $\vec{e_1}$) équidistant de M_1 et M_2 .

c) Soit la rotation R_1 de centre C telle que $R_1(M_1) = M_2$.

α) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R_1 .

β) Déterminer l'affixe du point O ' image de O par R_1 .

d) Soit la rotation R_2 de centre O et d'angle orienté θ tel que Mes $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad .

α) Quelle est la nature de la composée $R_2 \circ R_1$? Justifier votre réponse .

β) Soit B d'affixe 3i. Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle BOC par $R_2 \circ R_1$. Justifier votre réponse .

EXERCICE 2

Soit la fonction f telle que $\begin{cases} f(x) = x \ln |x| & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) a) Préciser D_f et étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Montrer que f est impaire, puis étudier f sur [0 ; + ∞ [en précisant les limites éventuelles puis son sens de variation .

2°) a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale I (α) telle que $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx$ avec $\alpha \in]\,0\,;\,1]$.

b) En déduire $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$.

3°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = − 1 et x = 1 (en unités d'aires U.A.) .

EXERCICE 3

Soit a un réel non nul et la suite (U_n) : $U_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = a\,U_{n-1} + 2$

1°) <u>On suppose</u> a = 1 .

a) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

b) Calculer le centième terme decette suite.

c) Déterminer la valeur de $S = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + u_{99}$.

2°) <u>On suppose</u> a = 3 et on donne la suite (V_n) telle que .

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + 1$.

a) Montrez que (V_n) est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (U_n) est-elle convergente ? Pourquoi ?

3°) On ne donne pas a mais on donne la suite (ω_n) telle que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ \omega_n = U_n - \frac{2}{1-a}\ ;\ a \neq 1\ .$$

a) Montrer que (ω_n) est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.

b) Pour quelles valeurs de a (U_n) sera-t-elle convergente ? donner alors sa limite.

EXERCICE 4

Dans un pays A, on a évalué le nombre de personnes travaillant dans l'agriculture en fonction de l'année.

X année	1954	1962	1968	1975	1982	1990
Y nombre d'actifs agricoles en milliers	3 984	3 011	2 460	1 652	1 448	982

On note Z le rang de l'année $\begin{cases} 1954 \text{ a pour rang } Z = 0 \\ 1990 \text{ a pour rang } Z = 36 \end{cases}$

1°) Construire le nuage de points assocé à cette série statistique (Z , Y) .

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de cette série. Peut-on envisager une forte corrélation linéaire entre Z et Y ?

3°) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en z .

BAC S2   1998   1er GROUPE ENONCE

EXERCICE 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})\, z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2°) On considère dans le plan de repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A = 1 + 2i$; $Z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $Z_C = 1 + \sqrt{3} - i$; $Z_D = 1 - 2i$

a) Placer A, B, C et D dans le plan (P)

b) Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$, en déduire la nature du triangle ABD

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle,($\mathscr{C}$) dont on précisera le centre et le rayon.

3°) On considère l'équation (E) : $z^2 - 2(1+ 2\cos\theta)\, Z+5 +4\cos\theta = 0$

θ est un élément de $\mathbb{R}$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à ($\mathscr{C}$) .

EXERCICE 2

Une boite contient 5 jetons : 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, indiscernables au toucher.

1°) On extrait simultanément au hasard 2 jetons de la boîte

a) Calculer la probabilité des événements suivants .

E = « On extrait 2 jetons noirs »

F = « On extrait 2 jetons de même couleur »   (0,5pt)

b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus.

Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique   (1pt)

2°) On effectue un tirage successif de 2 jetons de la boîte ; de la manière suivante :

on tire un jeton de la boîte ; on note sa couleur et on le remet dans la boîte en ajoutant en plus dans la boîte un autre jeton de la couleur que celui qu' on a tiré ; on tire ensuite un second jeton de la boîte, on considère les événements suivants :

N_1 = « on obtient un jeton noir au premier tirage ».

N_2 = « on obtient un jeton noir au second tirage ».

B_1= « on obtient un jeton blanc au premier tirage ».

a) Calculer la probabilité de N_2 sachant N_1 : $p(N_2 / N_1)$

puis la probabilité de N_2 sachant B_1 : $p(N_2 / B_1)$ (0,5pt)

b) En déduire $p(N_2)$ (1pt)

<u>PROBLEME</u> (12 points)

1°) a) Etudier la continuité de f en zéro. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Etudier la dérivabilité de f en zéro.

Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

2°) a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ on précisera le domaine de dérivabilité de f.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de f.

3°) Etudier les branches infinies de la courbe de f.

4°) Tracer la courbe représentative de f dans le plan de repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 4cm).

5°) α étant un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$, calculer en cm² l'aire $q(\alpha)$ de l'ensemble des points M $\binom{x}{y}$ tels que : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

à l'aide d'une intégrale par parties .

6°) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} q(\alpha)$ et interpréter le résultat obtenu.

CORRIGES

BAC S2 2006 2e groupe. SOLUTION

EXERCICE 1

1°) D_f = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, d'après la courbe fournie par l'énoncé (toute droite verticale coupe ($\mathscr{C}$) une fois, sauf la droite d'équation x = 2 !)

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \mathbf{-2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f = \mathbf{3}$,

$\lim\limits_{x \to 2^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f = -\infty$ (résultats obtenus par lecture graphique).

3°) L'asymptote oblique passe, par exemple, par les points A (0 ,1) et B (— 2 , 0) .Son équation est donc : $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + 1}$.

4°) Les autres asymptotes ont pour équations **: y = — 2 ; x = 0 ; x = 2** .

5°) f n'est pas dérivable en 5 car la courbe présente en ce point deux demi-tangentes : une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 1 et une demi-tangente horizontale à droite.

6°)

x	$-\infty$		-2		0		2		5		$+\infty$
f ' (x)		$-$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
f	-2	↘	-4	↗	$+\infty$ ‖ 3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

7°) g (x) existe si et seulement si f (x) > 0, ce qui équivaut à, d'après la figure, (ou le tableau variation) : x ∈ **] — 1 ; 2 [∪]3 ; + ∞ [** = D_g .

EXERCICE 2

1°) On trouve facilement après réduction au même dénominateur du second membre et idntification des numérateurs : **a = 1 ; b = — 1 .**

2°) a) $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^e \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^e = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$.

b) On pose : u (x) = ln x et v ' (x) = $\frac{1}{(1+x)^2}$. En utilisant la remarque de l'énoncé, on en déduit que : u ' (x) = $\frac{1}{x}$ et v (x) = $-\frac{1}{1+x}$. D'où :

$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(x+1)}dx = \left[-\frac{\ln x}{1+x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x(x+1)}dx$. Cette dernière intégrale ayant déjà été calculée au 1°, on trouve finalement : $\mathbf{I = -\frac{1}{1+e} + 1 - \ln(e+1) + \ln 2}$.

EXERCICE 3

Notons R_1 (respectivement J_1) l'événement : « la boule tirée de l'urne U_1 est rouge » (respectivement « la boule tirée de l'urne U_1 est jaune ») .

Notons R_2 (respectivement J_2) l'événement : « la boule tirée de l'urne U_2 est rouge » (respectivement « la boule tirée de l'urne U_2 est jaune ») .

a) p(A) = p(R_1) = $\frac{3}{7}$

b) $p(B) = p(R_2 / R_1)$. Or si R_1 est réalisé, c'est-à-dire si la boule tirée de U_1 est rouge, la composition de l'urne U_2 après qu'on y ait introduit cette boule est : 3 rouges et 3 jaunes. dans ces conditions, la probabilité d'avoir une boule rouge de U_2 est : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\mathbf{p\,B) = \frac{1}{2}}$.

c) $p(C) = p(R_2) = p(R_2 / R_1) \times p(R_1) + p(R_2 / J_1) \times p(J_1)$, d'après la formule des probabilités totales. On a $p(J_1) = \frac{4}{7}$ et par un raisonnement analogue au b) on voit que: $p(R_2 / J_1) = \frac{1}{3}$.

Par suite : $p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$, soit $\mathbf{p\,(C) = \frac{17}{42}}$.

EXERCICE 4

1°) L'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$ qui a pour solutions $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

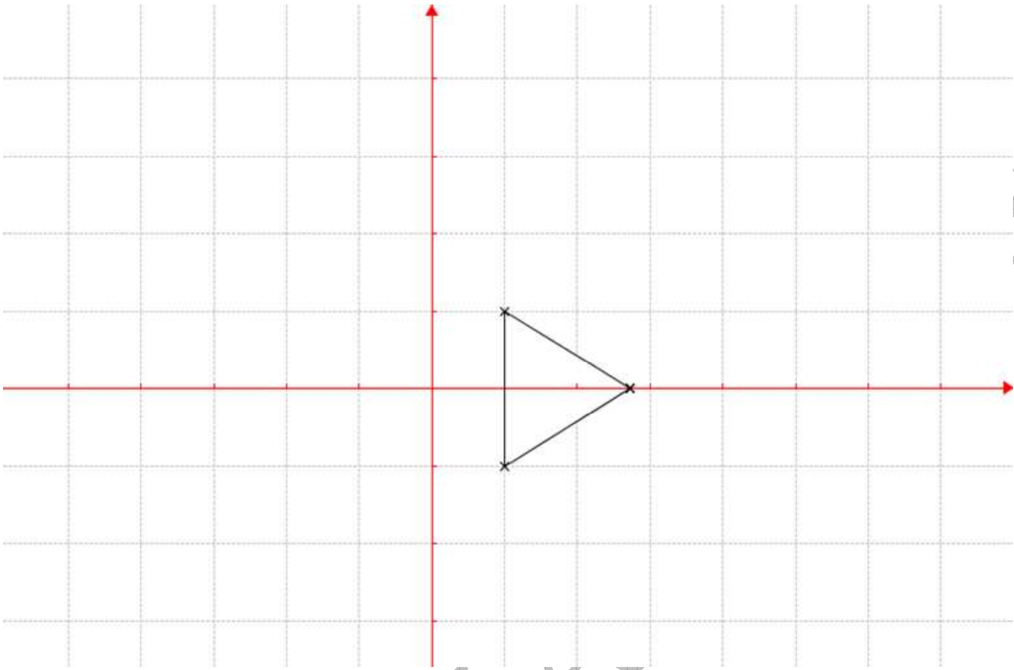
$$y = A\,e^{-x} + B\,e^{2x} .$$

2°) Les conditions imposées équivalent à : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.
On a $f'(x) = -A\,e^{-x} + 2B\,e^{2x}$. Donc on doit avoir : $A + B = 2$ et $-A + 2B = 1$, d'où après dse calculs faciles : $A = B = 1$.
La fonction f cherchée est donc définie par : $\mathbf{f\,(x) = e^{-x} + e^{2x}}$.

BAC S2 2006 1er groupe. SOLUTION

EXERCICE 1

1°) a) Le discriminant réduit de l'équation est $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$. D'où les solutions :
$z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$. **S = {1 — i ; 1 + i }** .



2°) a)

Montrons que le triangle ABC est équilatéral. En effet, en posant $z_C = \sqrt{3} + 1$:, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3} - i}{-2i}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

et : $AB = |z_2 - z_1| = |-2i| = 2$; $AC = |z_C - z_1| = |\sqrt{3} - i| = 2$.

Ainsi, AB = AC et l'angle géométrique BAC mesure $\frac{\pi}{3}$ radians ou 60° : **le triangle ABC est équilatéral.** On aurait pu égalament démontrer que : AB = AC = BC car :

$$BC = |z_C - z_1| = |\sqrt{3} + i| = 2.$$

2°) L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ qui a pour solutions, d'après 1°, $1 - i$ et $1 + i$. Les solutions de l'équation différentielle proposée sont donc les fonctions de la forme :

$$\mathbf{y = e^x (A \cos x + B \sin x)}$$

3°) a) En effet, les solutions de l'équation différentielle $a y'' - b y' + c y = 0$ sont de la forme : $x \mapsto (A \cos x + B \sin x) e^x$ si et seulement si l'équation $ar^2 - br + c = 0$ a des solutions complexes conjuguées de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $\alpha = \beta = 1$ autrement dit dit si et seulement si $1 + i$ et $1 - i$ sont exactement les solutions de l'équation $ar^2 - br + c = 0$.

b) L'événement en question est réalisé, d'après ce qui précède, si et seulement si $1 + i$ est solution de l'équation $ar^2 - br + c = 0$, c'est-à-dire si et seulement si :

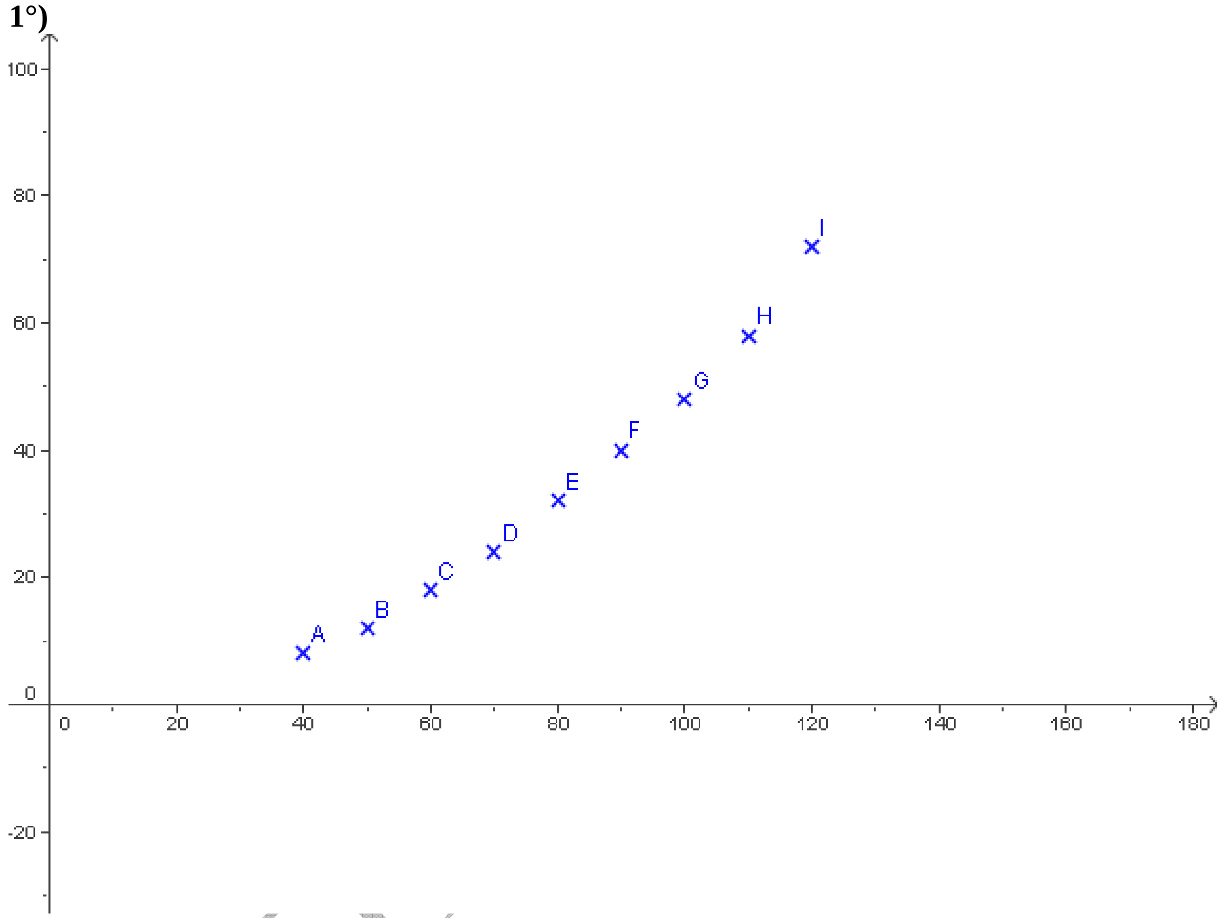
$a(1 + i)^2 - b(1 + i) + c = 0 \Leftrightarrow 2ia - b - bi + c = 0 \Leftrightarrow (c - b) + i(2a - b) = 0$

$\Leftrightarrow c = b = 2a$. Cherchons parmi les $6^3 = 216$ triplets qu'il est possible d'obtenir quand on lance trois fois de suite un dé, combien d'entre eux satisfont à cette condition. Remarquons tout d'abord que c est nécessairement pair. Si c = 2, on obtient le triplet (1, 2, 2) .Si c = 4 , on obtient le triplet (2, 4, 4) . Enfin si c = 6, on obtient le triplet (3, 6, 6). Ainsi, seuls 3 triplets peuvent vérifier cette condition. La probabilité de l'événement en question est donc $\mathbf{\frac{3}{216}}$.

EXERCICE 2

Partie A

1°)



1°) Pour avoir les paramètres de la série statistique (X , Y) , nous présentons les calculs dans un tableau :

X	40	50	60	70	80	90	100	110	120	$\Sigma\, x_i = 720$
Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72	$\Sigma\, y_i = 312$
$x_i\, y_i$	320	600	1080	1680	2560	3600	4800	6380	8640	$\Sigma\, x_i\, y_i = 29660$
x_i^2	1600	2500	3600	4900	6400	8100	10000	12100	14400	$\Sigma\, x_i^2 = 63600$
y_i^2	64	144	324	576	1024	1600	2304	3364	5184	$\Sigma\, y_i^2 = 14584$

$\overline{x} = \frac{1}{9} \times \Sigma\, x_i = 80$; $\overline{y} = \frac{1}{9} \times \Sigma\, y_i = 34,66$; $\sigma_{xy} = \frac{1}{8}\, \Sigma\, x_i\, y_i - \overline{x} \times \overline{y} = 522,22$.

$V(x) = \frac{1}{9}\, \Sigma\, x_i^2 - \overline{x}^{\,2} = 666,667 \Rightarrow \sigma_x \simeq 25,8199$.

$V(y) = \frac{1}{8}\, \Sigma\, y_i^2 - \overline{y}^{\,2} = 418,66 \Rightarrow \sigma_y \simeq 20,4613$.

2°) $D_{y/x}$ a pour équation : $y - \overline{y} = a\,(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \dfrac{522{,}22}{666{,}667} \simeq 0.7833$.

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est **$y = 0{,}7833x - 28$** .

3°) Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors : $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \simeq$ **0,988** .

r étant très proche de 1 (supérieur à 0,9) , on peut estimer qu'on a une bonne corrélation.

4°) a) Si x = 150, on obtient en remplaçant dans l'équation de $D_{y/x}$ précédente, y = 89,45.
Cette distance étant supérieure à 85m, **l'automobiliste percutera bien l'obstacle**.
b) Pour ne pas heurter l'obstacle, il faut que la distance de freinage (y) soit inférieure ou égale à 85m, soit : $0{,}7833x - 28 \leq 85 \Rightarrow x \leq 144{,}26$.
La vitesse maximale est donc d'environ 144 km/h .

<u>Partie B</u>

1°) Il y a eu N = 440 + 360 + 110 + 90 = 1000 accidents.

2°) $f_{y_2/x_1} = \dfrac{360}{440 + 360} = 0,45$ ou **45 %** . $f_{x_2/y_2} = \dfrac{90}{360 + 90} = 0,2$ ou **20 %** .

3°) $f_{\cdot 1} = \dfrac{n_{\cdot 1}}{N}$ où $n_{\cdot 1}$ désigne l'effectif partiel marginal de y_1 , c'est-à-dire la somme des effectifs partiels contenus dans la colonne de y_1 .

Ainsi, $f_{\cdot 1} = \dfrac{440 + 110}{1000} = 0,55$ ou **55 %** .

De même : $f_{2\cdot} = \dfrac{110 + 90}{1000} = 0,2$ ou **20 %** .

<u>PROBLEME</u>

<u>Partie I</u>

1°) a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -e^{2-x} - (1 - x)\,e^{2-x} = (x - 2)\,e^{2-x}$ (formule de dérivation d'un produit) . h ' (x) est donc du signe de (x — 2), puisqu'une exponentielle est toujours positive, et le tableau de variation de h en découle.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
h ' (x)	—		+
h	↘	0	↗

b) Sur $]-\infty\ ; 2]$, h est décroissante, d'après le tableau précédent et par conséquent :

$\forall\ x \leq 2$, $h(x) \geq h(2)$ avec $h(2) = 0$: h est positive sur $]-\infty\ ; 2]$.

Sur $[2\ ; +\infty[$, h est croissante, d'après le tableau précédent et par conséquent :

$\forall\ x \geq 2$, $h(x) \leq h(2)$ avec $h(2) = 0$: h est positive sur $[2\ ; +\infty[$.

On en conclut que <u>$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$</u> .

2°) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$, par conséquent : $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$, par conséquent : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{2-x} = +\infty$, donc $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^2 \times \dfrac{x}{e^x} = \mathbf{0}$, car on sait que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$.

d) D'autre part : $f(x) - x = x\, e^{2-x} > 0$ pour $x > 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de son asymptote oblique Δ.

3°) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^{2-x} + x(-e^{2-x}) = (1 - x)\, e^{2-x} = h(x)$: formule de dérivation d'un produit. Or on a vu à la question 1.b que h est positive sur $\mathbb{R}$ .Il en résulte que f' est positive sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en 2 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	
f	$-\infty$	↗			$+\infty$

b) f étant continue (comme produit de fonctions continues) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'après le tableau de variation précédent.Elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} .

c) $f(2) = 4$, donc $f^{-1}(4) = 2$. Or on a vu que $f'(2) = 0$:donc $\mathbf{f^{-1}}$ **n'est pas dérivable en 4** .

d) Au point d'abscisse 2, $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale, car $f'(2) = 0$ .Cette tangente (T) a pour équation $y = f(2) = 4$. Pour déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (T), éudions le signe de $f(x) - 4$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$f(x) > 4 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x > 2$: **$(\mathscr{C})$ est donc au-dessus de (T) sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$ et en-dessous sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$** .

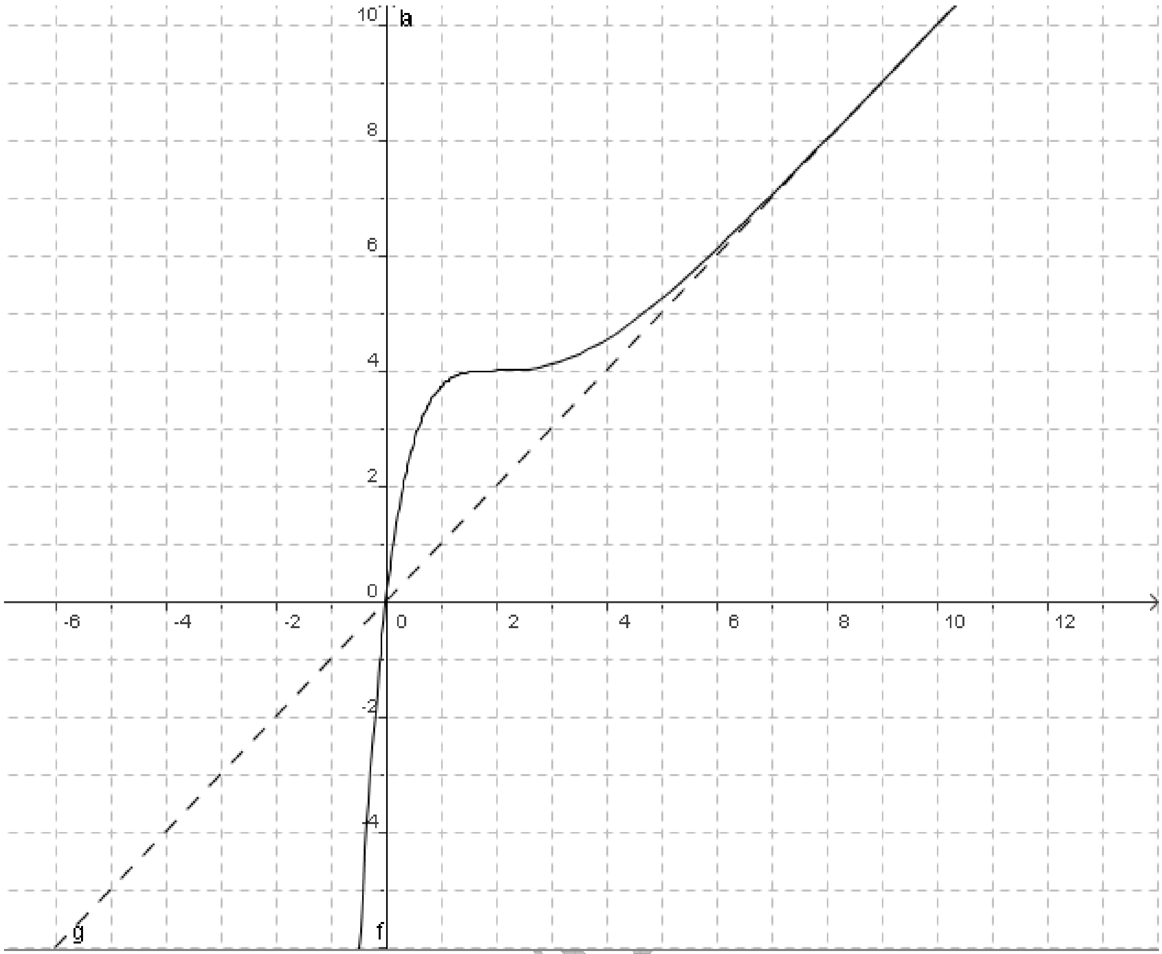
N.B. Au point d'abscisse 2, on a un point d'inflexion : $(\mathscr{C})$ « traverse » sa tangente.

e) et **f)** : cf. ci-dessous.

Partie II

$a(\lambda) = 4 \times \int_0^{\lambda} [f(x) - x]dx = 4 \times \int_0^{\lambda} x e^{2-x} dx$. Intégrons par parties en posant :

$u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2-x}$. Cela entraine que : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{2-x}$.



D'où : a (λ) = 4 × $\left(\left[-xe^{2-x}\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{2-x}dx \right)$ = 4 × $\left[-xe^{2-x} - e^{2-x}\right]_0^{\lambda}$ = **4[e² — (λ + 1)e^{2 − λ}]** .

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (\lambda + 1)e^{2-\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^2 \dfrac{\lambda + 1}{e^{\lambda}} = 0$ car : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda}{e^{\lambda}} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{1}{e^{\lambda}} = 0$, par conséquent : a = $\lim\limits_{\lambda \to +\infty}$ a (λ) = **4 e²** : cela représente l'aire hachurée, c'est-à-dire l'aire de la portion du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite Δ : y = x située au-dessus de l'axe (Ox) (c'est l'aire d'une partie infinie du plan, et pourtant elle est finie !) .

Commentaires : Sujet classique et faisable dans le temps imparti. L'auteur du sujet s'est arrangé pour que les calculs ne soient pas trop longs. A noter la prédominance des exercices portant sur la statistique dans les sujets récents. Les élèves ont donc intérêt désormais à bien maîtriser ce thème et surtout de connaître les différentes notations !

BAC S2 2005 2^e groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

On pose d'abord : $u = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ et $v' = e^x$ d'où : $u' = -\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ et $v = e^x$.

Par conséquent : $I = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\pi}{4}e^x\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}e - 1 + \int_0^1 \frac{\pi}{4}e^x\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$ (*) .

Posons alors $J = \int_0^1 e^x\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$ et intégrons à nouveau par parties en posant :

$u = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ et $v' = e^x$ d'où : $u' = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ et $v = e^x$. On obtient alors :

$J = \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\pi}{4}e^x\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$, soit $J = \frac{\sqrt{2}}{2}e - \frac{\pi}{4}I$. Reportant ceci dans (*) , on a :

$I = \frac{\sqrt{2}}{2}e - 1 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e - \frac{\pi}{4}I\right) \Rightarrow \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)I = \frac{\sqrt{2}}{2}e\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \sqrt{2}e\left(\frac{4+\pi}{8}\right) - 1$.

D'où : $\frac{16+\pi^2}{16}I = \frac{\sqrt{2}\,e(4+\pi) - 8}{8} \Rightarrow$ $\boldsymbol{I = \frac{2\sqrt{2}\,e(4+\pi) - 16}{(16+\pi^2)}}$.

EXERCICE 2

1°) $z_1 = (1 + i) z_0 + 2i = (1 + i) i + 2i = \mathbf{-1 + 3i}$ **.**
$z_2 = (1 + i) z_1 + 2i = (1 + i)(-1 + 3i) + 2i = \mathbf{-4 + 4i}$.

2°) a) On a $U_{n+1} = z_{n+1} + 2 = (1 + i) z_n + 2i + 2 = (1 + i) z_n + 2(1 + i) = (1 + i)(z_n + 2)$.
Ainsi : $U_{n+1} = (1 + i)U_n$ donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $(1 + i)$ .Il en résulte que : $U_n = (1 + i)(U_0)^n = (1 + i)(z_0 + 2)^n = (1 + i)(i + 2)^n = \mathbf{(1 + i)(2 + i)^n}$.
b) On en déduit que : $z_n = U_n - 2 = \mathbf{(1 + i)(2 + i)^n - 2}$

On a : $Z = \frac{z_{n+1} - i}{z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{(1 + i) z_n + i}{z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{(1 + i)\left(z_n + \frac{i}{1 + i}\right)}{z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$. Or, $\frac{i}{1 + i} = \frac{i(1 - i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

D'où : $Z = 1 + i$. Par conséquent : $|Z| = \frac{|z_{n+1} - i|}{|z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i|} = \frac{AM_{n+1}}{BM_n} = |1 + i| = \sqrt{2}$,

et $\arg Z = \arg(z_{n+1} - i) - \arg\left(z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = (\overrightarrow{BM_n}, \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

EXERCICE 3

Soit P l'événement : « l'individu choisi est atteint de paludisme » ;
H l'événement : « l'individu choisi est un homme »
F l'événement : « l'individu choisi est une femme » .

Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par : $p(H) = 0.48 \Rightarrow p(F) = 0.52$; $p(P \mid H) = 0,04$; $p(P \mid F) = 0,07$;

a) $p(P \cap H) = p(P \mid H) \times p(H) = 0,04 \times 0,48 = \mathbf{0,0192}$.

b) $p(F \cap P) = p(P \mid F)\, p(F) = 0{,}07 \times 0{,}52 = \mathbf{0{,}0364}$ **.**
c) $p(P) = p(F \cap P) + p(H \cap P) = 0{,}0192 + 0{,}0364 = \mathbf{0{,}0556}$
d) $p(H \cap \overline{P}) = p(\overline{P} \mid H) \times p(H)$. Or, $p(\overline{P} \mid H) = 1 - p(P \mid H) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Donc $p(H \cap \overline{P}) = 0{,}96 \times 0{,}48 = \mathbf{0{,}4608}$.

e) $p(H \mid P) = \dfrac{p(H \cap P)}{p(P)} = \dfrac{0{,}0192}{0{,}0556} = \mathbf{0{,}345}$.

f) $p(F \mid P) = \dfrac{p(F \cap P)}{p(P)} = \dfrac{0{,}0364}{0{,}0556} = \mathbf{0{,}655}$.

EXERCICE 4

1) L'équation caractéristique est : $r^2 + 25 = 0$, d'où les racines : $r = 5i$ et $r = -5i$.
La forme générale des solutions est donc : $y = A \cos 5x + B \sin 5x$.
$f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$ et $y' = -5A \sin 5x + 5B \cos 5x$ donc :
$f'(0) = -5 \Rightarrow 5B = -5 \Rightarrow B = -1$.
La fonction cherchée est donc celle vérifiant : $f(x) = \cos 5x - \sin 5x$.
2) Les abscisses x de ces points vérifient $g(x) = 0$, soit :

$$\cos 5x = \sin 5x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2k\pi \text{ ou } 5x = -\frac{\pi}{2} + 5x + 2k'\pi$$

La seconde alternative est manifestement impossible. La première équivaut à :
$x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ .Dans $[0 ; 2\pi[$, on trouve 5 solutions (pour les valeurs de $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \}$ d'où 5 points d'intersection :

$A_1\left(\dfrac{\pi}{20} ; 0\right)$ $A_2\left(\dfrac{9\pi}{20} ; 0\right)$ $A_3\left(\dfrac{17\pi}{20} , 0\right)$ $A_4\left(\dfrac{5\pi}{4} ; 0\right)$ $A_5\left(\dfrac{33\pi}{20} ; 0\right)$

Commentaire : : Il y avait beaucoup de calculs dans ce sujet, et il était difficile, à notre avis, pour un élève de tout trouver en 2 heures ! d'autre part, il fallait bien interpréter les probabilités conditionnelles !

BAC S2 2005 1er groupe SOLUTION

EXERCICE 1

1°) Les solutions sont les racines cubiques de l'unité :

$z_0 = \mathbf{1}$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $S = \{ z_0 , z_1 , z_2 \}$.

2°) a) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\,i - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i$.

Finalement : $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

b) L'équation E équivaut à : $u^3 = 1$, d'où d'après 1°, $u = z_0$ ou $u = z_1$ ou $u = z_2$ .on en déduit que : $z = z_0(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ ou $z = z_1(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ ou $z = z_2(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.

Les solutions de (E) sont, sous forme exponentielle :

$z_0' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_1' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $z_2' = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

Sous forme trigonométrique, les solutions de (E) s'expriment ainsi :

$z_0' = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $z_1' = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$;

$z_2' = 2\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

Sous forme algébrique, on obtient :

$z_0' = (\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{i}\sqrt{\mathbf{2}})$; $z_1' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$;

$z_2' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$.

3°) En comparant les écritures trigonométrique et algébrique de z_1', il vient :

$2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et

$2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 2

1°) Pour avoir les paramètres de la série statistique (x_i , y_i) , nous présentons les calculs dans un tableau :

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84
$x_i\,y_i$	57120	64400	63000	62640	71400	51840	36900	16800
x_i^2	3600	64000	10000	14400	19600	25600	32400	40000
y_i^2	906304	648025	396900	272484	260100	104976	42025	7056

$\Sigma x_i = 1040$; $\Sigma y_i = 4032$; $\Sigma x_i y_i = 424100$; $\Sigma x_i^2 = 152000$; $\Sigma y_i^2 = 2637870$.

$\overline{x} = \frac{1}{8} \times \Sigma x_i = 130$; $\overline{y} = \frac{1}{8} \times \Sigma y_i = 504$; $\sigma_{xy} = \frac{1}{8}\Sigma x_i y_i - \overline{x} \times \overline{y} = -12507{,}5$.

$V(x) = \dfrac{1}{8}\ \Sigma\, x_i^2 - \overline{x}^{\,2} = 2100 \Rightarrow \sigma_x \simeq 45.825$.

$V(y) = \dfrac{1}{8}\ \Sigma\, y_i^2 - \overline{y}^{\,2} = 75717{,}75 \Rightarrow \sigma_y \simeq 275{,}17$.

Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors : $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y} \simeq$ **— 0,99** .

Cette valeur de r justifie bel et bien la recherche d'un ajustement linéaire, car la corrélation est très forte (r très proche de — 1) .

2°) $D_{y/x}$ a pour équation : $y - \overline{y} = a\,(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \dfrac{-12507{,}5}{2100} \simeq -5{,}95$.

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est $\mathbf{y = -5{,}95\,x + 1277{,}5}$.

3°) a) Le prix de vente est : yx (nombre d'exemplaires × prix de vente d'un exemplaire) .
Le prix de revient est : 25 y + 28000 (nombre d'exemplaires × prix de fabrication d'un exemplaire + frais de conception) . Le bénéfice z est donc :
z = Prix de vente — Prix de revient = yx — (25 y + 28000) .
Soit : $z = (-5{,}95\,x + 1277{,}5)\,x - 25\,(-5{,}95\,x + 1277{,}5) - 28000$.
Après réduction, on trouve : $\mathbf{z = -5{,}95\,x^2 + 1426{,}25\,x - 59937{,}5}$.

b) Le bénéfice z (x) est maximal si $z'(x) = 0 \Leftrightarrow -11{,}9\,x + 1426{,}25 = 0 \Leftrightarrow$ **x = 119,85** .
En reportant cette valeur de x dans z (x) , on trouve que le bénéfice maximal est :
$\mathbf{z_{max} = 25532{,}65}$.

PROBLEME

Partie A

1°) a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$: $f_1 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ (quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)

$f_2 : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) .

$\forall\ x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = -\dfrac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$. f ' (x) est donc négative pour tout réel x et on obtient le tableau de variation suivant :

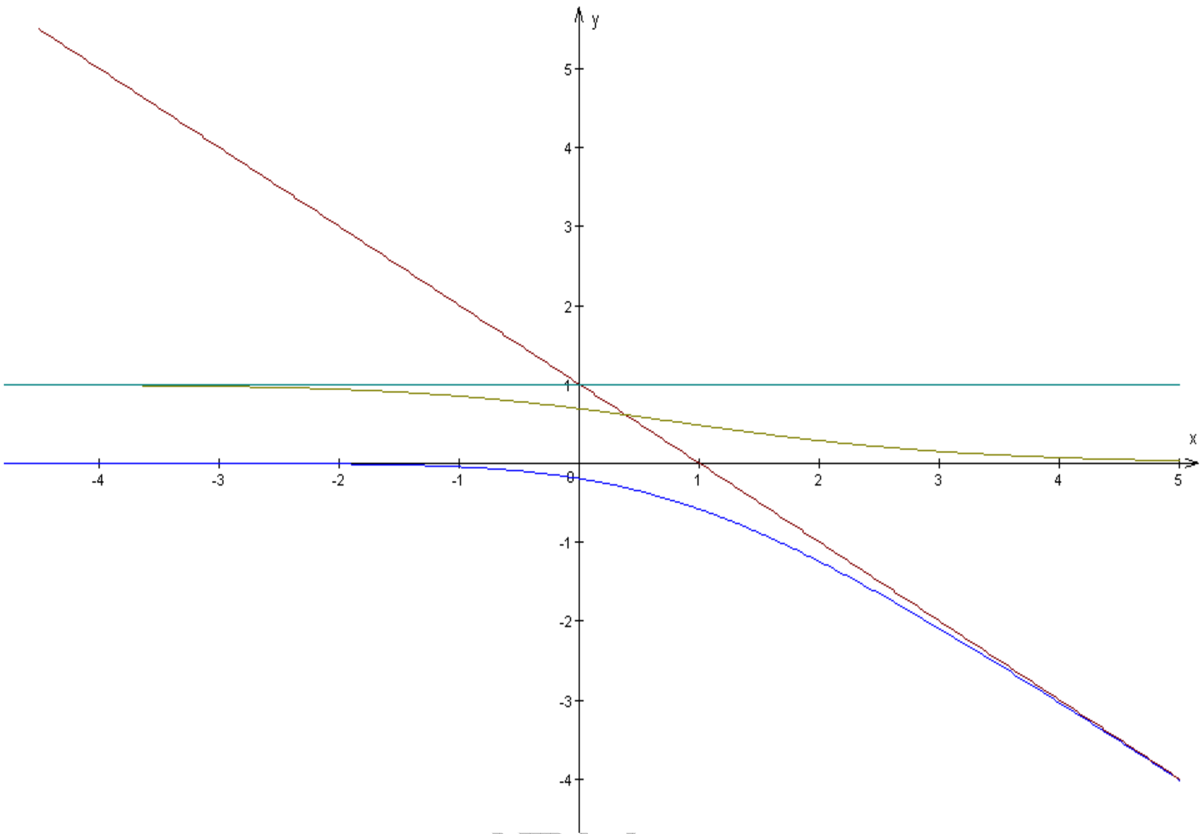
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f ' (x)	—
f	0 ↘ $-\infty$

b) $f(x) - 1 + x = \dfrac{e^x}{1 + e^x} - 1 + x - \ln(1 + e^x) = \dfrac{-1}{1 + e^x} + x - \ln(1 + e^x)$

$= \dfrac{-1}{1 + e^x} + x - \ln\left[\, e^x\,(1 + e^{-x})\,\right] = \dfrac{-1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^{-x})$ car $\ln(e^x) = x$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - 1 + x \,] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{-1}{1 + e^{x}} - \ln(1 + e^{-x}) \right] = 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ de f admet donc la droite d'équation $y = -x + 1$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.



c) f est continue et strictement décroissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty\,;0[$.

2°) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables :

$g_1 : x \mapsto e^{-x}$ dérivable comme composée des fonctions dérivables $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^{x}$.

$g_2 : x \mapsto \ln(1 + e^{x})$ dérivable comme composée des fonctions dérivables $x \mapsto 1 + e^{x}$ et $x \mapsto \ln x$.

b) $\forall\, x \in D_f$, $g'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{x}) + e^{-x} \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1} = e^{-x} \left(\dfrac{e^{x}}{1 + e^{x}} - \ln(1 + e^{x}) \right)$

D'où : $g'(x) = e^{-x} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^{x})}{e^{x}}$ et en faisant le changement de variable $v = e^{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{v \to +\infty} \frac{\ln(1 + v)}{v} = \lim_{v \to +\infty} \frac{\ln(1 + v)}{1 + v} \times \frac{1 + v}{v} = 0 \times 1 = \mathbf{0} .$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{v \to 0} \frac{\ln(1 + v)}{v} = \mathbf{1} \qquad (\text{ quand } x \to -\infty,\ v = e^{x} \to 0) .$$

d) $g'(x)$ est du même signe que $f(x)$, d'après **2°. b)** et $f(x)$ est négative pour tout x réel d'après **1°)** , par suite, $g'(x)$ est négatif $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Le tableau de variations de g en découle .

x	$-\infty$	$+\infty$
g ' (x)	—	
g	1 ↘	0

3°) a) $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^{x}\,e^{-x}}{e^{x}(e^{-x}+1)} = \dfrac{1}{1+e^{x}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Si $\lambda > 0$, g étant continue sur $\mathbb{R}$, l'est *a fortiori* sur $[0\,;\,\lambda\,]$,donc $\int_0^{\lambda} g(x)dx$ existe .

Si $\lambda < 0$, g étant continue sur $\mathbb{R}$, l'est *a fortiori* sur $[\,\lambda\,;\,0\,]$,donc $\int_{\lambda}^{0} g(x)dx$ existe, or $\int_0^{\lambda} g(x)dx = -\int_{\lambda}^{0} g(x)dx$, donc $\int_0^{\lambda} g(x)dx$ existe .

Enfin, si $\lambda = 0$, $\int_0^{0} g(x)dx = 0$ .On intègre $I(\lambda)$ par parties en posant :

$u(x) = \ln(1+e^{x})$; $v\,'(x) = e^{-x}$ et donc : $u\,'(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$; $v(x) = -e^{-x}$. D'où :

$I(\lambda) = \left[-e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda}\dfrac{1}{1+e^{x}}dx = \left[-e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda}\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ (en utilisant 3° a.).

On trouve donc : $I(\lambda) = -e^{-\lambda}\ln(1+e^{\lambda}) + \ln 2 + \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^{\lambda}$

Soit : $\mathbf{I(\lambda) = -e^{-\lambda}\ln(1+e^{\lambda}) + \ln 2 - \ln(1+e^{-\lambda}) + \ln 2}$.

c) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda}\ln(1+e^{\lambda}) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^{\lambda})}{e^{\lambda}} = \lim\limits_{v \to +\infty}\dfrac{\ln(1+v)}{v} = 0$ ($v = e^{x}$) .
$\lim\limits_{\lambda \to +\infty}\ln(1+e^{-\lambda}) = \ln 1 = 0$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$.
Il en résulte que : $\mathbf{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = 2\ln 2}$ **.**

Partie B

1°) g est continue et strictement décroissante, donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $J =]\,0\,;\,1\,[$ (cf. tableau de variation de g) .
2°) a) g (0) = **ln 2** .
b) $g\,'(0) = f(0) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 \neq 0 \Rightarrow g^{-1}$ est dérivable en $x_0 = \ln 2$ et :

$$g^{-1}\,'(\ln 2) = \frac{1}{g\,'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \mathbf{\frac{2}{1 - 2\ln 2}} \ .$$

Cette équation est : $Y = g^{-1}\,'(\ln 2)(X - \ln 2) + g^{-1}(\ln 2)$. Or, $g^{-1}(\ln 2) = 0$.

L'équation est donc : $\mathbf{Y = \dfrac{2}{1 - 2\ln 2}(X - \ln 2)}$.

BAC S2 2004 Remplacement SOLUTION

1°) a) $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \dfrac{-1+3i+3-i}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2+2i}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Les solutions sont les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire les nombres

$z_0 = \mathbf{1}$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$.

c) En utilisant la remarque de l'énoncé, on voit que pour toute solution Z de (E) ,

$\left(\dfrac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)$ est une racine cubique de l'unité , donc que : $\left(\dfrac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right) = z_0$ ou $\left(\dfrac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right) = z_1$ ou

$\left(\dfrac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right) = z_3$, soit $Z_0 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ ou $Z_1 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\ z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ou enfin
:

$Z_2 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\ z_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

$$\mathbf{S} = \left\{ \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \ ; \ \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \ ; \ \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right\}$$

2°) a) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}} = \mathbf{\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}}$.

b) Les arguments des solutions de (E) sont, d'après les calculs précédents :

$\arg Z_0 = \mathbf{\dfrac{3\pi}{4}}\ [2\pi]$; $\arg Z_1 = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} = \mathbf{\dfrac{17\pi}{12}}\ [2\pi]$; $\arg Z_2 = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3} = \mathbf{\dfrac{\pi}{12}}\ [2\pi]$.

3°) $|Z_2| = \left|\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\ z_2\right| = \left|\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right| \times |z_2| = 1$ et $\arg Z_2 = \dfrac{\pi}{12}$, donc $Z_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$.

En comparant avec l'écriture algébrique de Z_2 obtenue au 1) c , on en déduit que :

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

4°) a) S est une **similitude directe** de rapport $|\sqrt{2}\,(-1+i)| =$ **2** , d'angle $\arg(\sqrt{2}\,(-1+i))$ $= \mathbf{\dfrac{3\pi}{4}}$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}\,(-1+i)} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}{(1+\sqrt{2})^2+2}$,

soit $\omega = \mathbf{\dfrac{3+\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} + i\,\dfrac{2}{5+2\sqrt{2}}}$.

<u>EXERCICE 2</u>

1°) Le centre de l'intervalle [5 ; 7] est 6 ; celui de l'intervalle [8 ; 10] est 9 ; celui de l'intervalle [11 ; 13] est 12 ; celui de l'intervalle [14 ; 18] est 16 .
D'autre part, il y a 6 individus dans la classe [5 ; 7] , c'est-à-dire 6 familles dont l'effectif est compris entre 5 et 7 personnes ; 19 individus dans la classe [8 ; 10] ; 13 individus dans la classe [11 ; 13] ; 12 individus dans la classe [14 ; 18] (au total 50 individus) .

On obtient donc : $\overline{X} = \dfrac{(6\times 6)+(9\times 19)+(12\times 13)+(16\times 12)}{50} = \mathbf{11{,}1}$.

et $\overline{Y} = \dfrac{(12{,}5\times 4)+(20\times 25)+(30\times 21)}{50} = \mathbf{23{,}6}$.

$V(X) = \dfrac{(6^2\times 6)+(9^2\times 19)+(12^2\times 13)+(16^2\times 12)}{50} - (11{,}1)^2 = 10{,}77$.

Par conséquent, l'écart-type de X est : $\sigma_X = \sqrt{10{,}77} = \mathbf{3{,}28}$.

$V(Y) = \dfrac{(12{,}5^2\times 4)+(20^2\times 25)+(30^2\times 21)}{50} - (23{,}6)^2 = 33{,}54$

Par conséquent, l'écart-type de Y est : $\sigma_Y = \sqrt{33{,}54} = \mathbf{5{,}79}$.

2°) $z_1 = \dfrac{(1\times 12{,}5)+(5\times 20)+(0\times 30)}{6} = 18{,}75$

$z_2 = \dfrac{(3\times 12{,}5)+(9\times 20)+(7\times 30)}{19} = 22{,}5$

$z_3 = \dfrac{(0\times 12{,}5)+(3\times 20)+(9\times 30)}{13} = 23{,}846 \simeq 23{,}85$.

$z_4 = \dfrac{(0\times 12{,}5)+(3\times 20)+(9\times 30)}{12} = 27{,}5$.

(on calcule les effectifs en faisant la somme de chaque colonne du tableau) .
On obtient donc la série :

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

3°) a) $\overline{x} = \dfrac{1}{4} \times \Sigma x_i = 10{,}75$; $\overline{z} = \dfrac{1}{4} \times \Sigma z_i = 23{,}15$; $\Sigma x_i z_i = 1041{,}2$

$\sigma_{xz} = \dfrac{1}{4}\,\Sigma x_i z_i - \overline{x} \times \overline{z} = 11{,}4375$.

$V(x) = \dfrac{1}{4}\,\Sigma x_i^2 - \overline{x}^{\,2} = 13{,}682 \Rightarrow \sigma_x \simeq 3{,}7$.

$V(z) = \dfrac{1}{4}\,\Sigma z_i^2 - \overline{z}^{\,2} = 9{,}796 \Rightarrow \sigma_z \simeq 3{,}13$.

Le coefficient de corrélation linéaire vaut alors : $r = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x \times \sigma_z} \simeq \mathbf{-\,0{,}987}$.

Cette valeur de r justifie bel et bien la recherche d'un ajustement affine, car la corrélation est très forte (r très proche de — 1) .

b) $D_{z/x}$ a pour équation : $z - \overline{z} = a(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x^{\,2}} \simeq 0{,}8356$.

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est **$y = 0{,}8356\,x + 14{,}167$**.

c) Si x = 20, alors en remplaçant dans l'équation de $D_{z/x}$, on trouve z = 30,87 .
On peut estimer qu'une famille de 20 personnes consommera **30,87 kg de sucre** .

PROBLEME

Partie A

1°) L'équation caractéristique est : $-\dfrac{1}{2}r^2 + \dfrac{3}{2}r - 1 = 0$. Elle a pour solutions $r_1 = 2$ et $r_2 = 1$
La forme générale des solutions de l'équation différentielle est donc : $y = A\,e^{2x} + B\,e^{x}$.
Les conditions imposées à la solution g se traduisent par : g (0) = — 1 et g ' (0) = 0 .
En posant $g(x) = A\,e^{2x} + B\,e^{x}$, on obtient : $g'(x) = 2A\,e^{2x} + B\,e^{x}$,d'où :
A + B = — 1 et 2A + B = 0 . En résolvant cesystème, on voit que : A = 1 et B = — 2 .
Ainsi, **$g(x) = e^{2x} - 2e^{x}$** .

Partie B

1°) $f'(x) = 2(e^{2x} - e^{x})$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > x \Leftrightarrow x > 0$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f ' (x)		—		+	
f	0	↘	— 1	↗	$+\infty$

2°) a) $f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2} = 4 - 4 = 0$; $f'(\ln 2) = 2(e^{2\ln 2} - e^{\ln 2}) = 4$.
Une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln 2 est donc : **y = 4 (x — ln 2)** .

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} \times \dfrac{e^{x} - 2}{x} = +\infty$

(car: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - 2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} - \dfrac{2}{x} = +\infty$) .

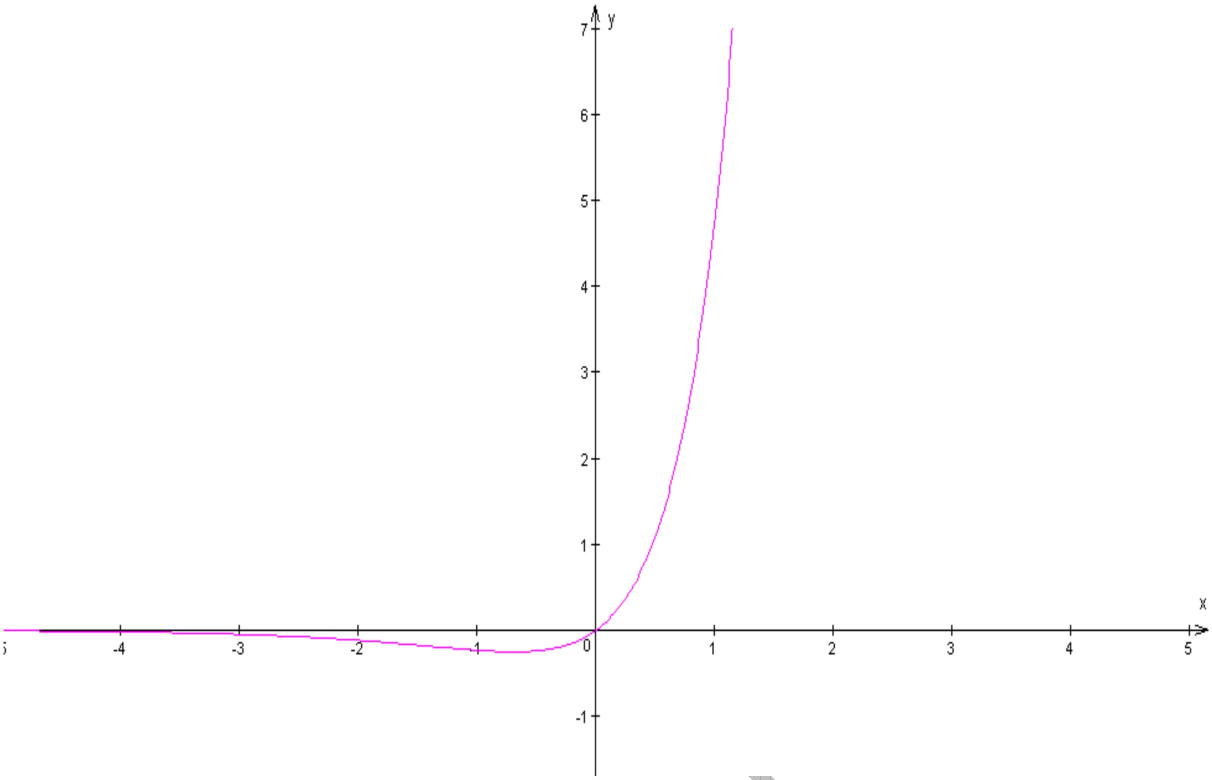
On en déduit que (Γ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

3°) a) Voir figure ci-dessous .

b) $\mathscr{A}(\alpha) = -4\int_{\alpha}^{\ln 2} f(x)dx = -4\left[\dfrac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x}\right]_{\alpha}^{\ln 2}$ = **$8 + 2\,e^{2\alpha} - 8\,e^{\alpha}$** .(ne pas oublier de multiplier par l'aire du rectangle unité) .

c) $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} 8 + 2\,e^{2\alpha} - 8\,e^{\alpha} = \mathbf{8}$ car $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} 2\,e^{2\alpha} = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} e^{\alpha} = 0$.

Cela signifie que l'aire de la partie du plan limitée par (Γ) , l'axe $(O, \vec{i})$ et l'axe $(O, \vec{j})$ vaut 8 cm².



Partie C

1°) h est continue et, d'après le tableau de variation du B 1° , strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ .Elle réalise donc une bijection de $[0 ; +\infty[$ vers $[-1 ; +\infty[$.

2°) $h(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = -1$ ou $e^{x} = 3$ (faire le changement de variable $X = e^{x}$ pour se ramener à un trinôme) .La première égalité étant manifestement impossible, il en résulte qu'on a nécessairement $e^{x} = 3$, d'où : $x = \ln 3$ .on en déduit que : $h^{-1}(3) = \ln 3$.

or, d'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque, $h^{-1}{}'(3) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(3))}$,

soit $h^{-1}{}'(3) = \dfrac{1}{h'(\ln 3)} = \dfrac{1}{2(e^{2\ln 3} - e^{\ln 3})} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$.

3°) Soit $x \in [-1 ; +\infty[$. $h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = h(y)$ (avec $y \in [0 ; +\infty[$)

$\Leftrightarrow e^{2y} - 2e^{y} - x = 0$. On pose $Y = e^{y}$ .L'équation précédente devient : $Y^2 - 2Y - x = 0$.
le discriminant de ce trinôme en Y est $\Delta = 1 + x \geq 0$. d'où les solutions :
$Y_1 = 1 - \sqrt{1 + x}$ et $Y_2 = 1 + \sqrt{1 + x}$. Comme $y \geq 0$, on a $e^{y} \geq 1$, d'où $Y \geq 1$.
Donc nécessairement $Y = Y_2 = 1 + \sqrt{1 + x} \Leftrightarrow e^{y} = 1 + \sqrt{1 + x}$
$\Leftrightarrow y = h^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x})$.

4°) Voir figure ci-dessus .

Commentaire : Bon sujet donnant un bon aperçu de presque tout le programme . C'est le seul sujet portant sur ce type de série statistique (distribution en classes) . Le problème est très classique.

BAC S2 2004 $2^{ème}$ groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

1°) $U_1 = e\sqrt{U_0} = e\sqrt{e^3} = \mathbf{e^2\sqrt{e}}$. $V_1 = \ln(U_1) - 2 = \ln(e^2\sqrt{e}) = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{2}}$.

2°) $V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{U_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2}\ln(U_n) - 1$

$= \frac{1}{2}[\ln(U_n) - 2] = \frac{1}{2}V_n$.

Par conséquent, (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme

$V_0 = \ln(U_0) - 2 = 3 - 2 = 1$.

3°) $V_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $V_n + 2 = \ln(U_n)$ d'où : $U_n = e^{V_n+2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$.

4°) $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \mathbf{0}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \mathbf{e^2}$.

EXERCICE 2

1°) a) Par réduction au même dénominateur, $e^x - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.

b) $I = \int_0^1 e^x\,dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[e^x\right]_0^1 - \left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1 = e - 1 - (\ln(1+e) - \ln 2)$

$= \mathbf{e - 1 - \ln\frac{1+e}{2}}$.

2°) a) $f'(x) = \mathbf{\frac{e^x}{1+e^x}}$ pour tout x réel .

b) On pose : $u(x) = \ln(1+e^x)$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $v(x) = e^x$.

Par conséquent : $J = \left[e^x\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ soit : $J = e\ln(1+e) - \ln 2 - I$.

Finalement, on trouve : $J = e\ln(1+e) - \ln 2 - e + 1 + \ln(1+e) - \ln 2$ ou encore :

$J = \mathbf{(e+1)\ln(1+e) + 1 - e - 2\ln 2}$ **.**

EXERCICE 3

1°) La somme des probabilités p_i est égale à 1, donc en les exprimant toutes en fonction de p_1,

on obtient : $p_1 + p_1 + 3p_1 + 2p_1 + 2p_1 + 6p_1 = 1 \Rightarrow 15p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{15}$.

Par suite : $p_2 = \frac{1}{15}$; $p_3 = \frac{1}{5}$; $p_4 = \frac{2}{15}$; $p_5 = \frac{2}{15}$; $p_6 = \frac{2}{5}$.

2°) C'est : $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{3}{5}$.

3°) On a affaire à un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{3}{5}$ .La probabilité d'avoir k

succès est : $C_5^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k}$. La probabilité d'avoir au moins 4 succès (c'est-à-dire 4 ou 5)

est donc : $C_5^4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{810}{3125} + \frac{243}{3125} = \frac{1053}{3125}$ = **0, 33696** .

<u>EXERCICE 4</u>

1°) a) Le discriminant réduit est $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$. les solutions sont donc :

$$\mathbf{z_1 = 1 - i \text{ et } z_2 = 1 + i .}$$

Sous forme trigonométrique $\mathbf{z_1 = \sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})}$ et $\mathbf{z_2 = \sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}$.

b) Posons $Z = -iz + 3i + 3$. Alors la seconde équation équivaut à : $Z^2 - 2Z + 3 = 0$ .Elle a donc les mêmes racines que l'équation du a) . D'où : $Z = 1 - i$ ou $Z = 1 + i$. Soit :

$-iz + 3i + 3 = 1 - i$ ou $-iz + 3i + 3 = 1 + i$. Donc $iz = 2 + 4i$ ou $iz = 2 + 2i$.

On obtient les solutions $z_3 = 4 - 2i$ et $z_4 = 2 - 2i$.

2°) On a $z_B - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_A - \omega)$ en désignant par ω l'affixe du centre. D'où :

$$\omega\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = z_B - e^{-i\frac{\pi}{2}} z_A \text{ , soit } \omega = \frac{1 - i + i(1 + i)}{1 + i} = 0 .$$

Le centre de la rotation est donc le point O.

<u>*Commentaire :*</u> Sujet très facile que même l'élève le plus moyen devrait pouvoir rédiger sans problème .

BAC S2 2004 1er groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

1°) a) $U_n = U_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. $V_n = V_0 + n \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$.

b) $z_n = U_n e^{iV_n} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \exp\left[i\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

2°) $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{U_{n+1}}{U_n} \exp[i(V_{n+1} - V_n)] = \frac{1}{2} \exp[i\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}$ i . Donc (z_n) est une suite géométrique complexe de raison $\frac{1}{2}$ i .Son premier terme est

$z_0 = U_0 e^{iV_0} = 4 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + i\, 2\sqrt{2}$.

3°) a) On a : $z_{n+1} = \frac{1}{2}\, i\, z_n$ donc la transformation complexe associée à F est : $z \mapsto \frac{1}{2}\, i\, z$.

Comme cette écriture est de la forme : $z \mapsto az + b$, F est une **similitude directe** .

b) Le centre de cette similitude est **O**, son rapport $\left|\frac{1}{2}\, i\right| = \mathbf{\frac{1}{2}}$ et son angle $\arg\left(\frac{1}{2}\, i\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\ [2\pi]$.

4°) a) $\arg(Z_n) = \arg z_0 + \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots\ldots + \arg z_n = \sum_{k=0}^{n} \arg(z_k) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$

$= \frac{(n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \boldsymbol{\frac{(n+1)^2\pi}{4}}$.

b) Si n est impair, posons $n = 2p - 1$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) . Alors, $(n+1)^2 = 4p^2$ et par suite : $\frac{(n+1)^2\pi}{4} = p^2\pi$, est un multiple de π . Il en résulte que : Z_n , nombre complexe dont un argument est un multiple de π , est un **réel** (et même un réel positif !)

EXERCICE 2

1°) $p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \mathbf{\frac{1}{30}}$.

2°) a) L'ensemble des valeurs de X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

$P(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$. $P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$. $P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$.

$P(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau :

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

b) $E(X) = \left(0\times\frac{1}{6}\right)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(2\times\frac{3}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{30}\right) = \frac{6}{5} = \mathbf{1{,}2}$ **.**

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left[\left(0^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(1^2\times\frac{1}{2}\right)+\left(2^2\times\frac{3}{10}\right)+\left(3^2\times\frac{1}{30}\right)\right] - \frac{36}{25} = \frac{14}{25}$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{14}}{5} \approx 0{,}748$.

3°) On a affaire à un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{30}$ .La probabilité d'avoir 3 succès est : $C_5^3 \left(\frac{1}{30}\right)^3\left(\frac{29}{30}\right)^2 \approx \mathbf{3{,}46 \times 10^{-4}}$.

PROBLEME

1°) f (x) existe si et seulement si $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. $\mathbf{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}} =]-\infty\,;0[\, \cup \,]0\,;+\infty[$.

Par réduction au même dénominateur, on a : $\forall\ x \in D_f$, $f(x) = \frac{(ax + b)\,e^x - ax - b + c}{e^x - 1}$,

d'où par identification : **a = 2 ; b = —1 ; c = 1** .

Ainsi, $\forall\ x \in D_f$, $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ (*)

2°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{f(x)} = \underline{\mathbf{-\infty}}$ car : $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x - 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$.

$\lim\limits_{x\to0^-} \mathbf{f(x)} = \underline{\mathbf{-\infty}}$ car : $\lim\limits_{x\to0^-} (2x - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{e^x - 1}$ = "$\frac{1}{0^-}$" $= -\infty$ (en effet, $e^x < 1$ si $x < 0$) .

$\lim\limits_{x\to0^+} \mathbf{f(x)} = \underline{\mathbf{+\infty}}$ car : $\lim\limits_{x\to0^+} (2x - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{e^x - 1}$ = "$\frac{1}{0^+}$" $= +\infty$ (en effet, $e^x > 1$ si $x > 0$) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x)} = \underline{\mathbf{+\infty}}$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$.

3°) a) f est dérivable sur D_f comme quotient de functions dérivables et :

$\forall\ x \in D_f$, $f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \mathbf{\frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}}$ (on a dérivé à partir de l'écriture (*)).

b) En posant $e^x = X$, l'équation équivaut à : $2X^2 - 5X + 2 = 0$, d'où $X = 2$ ou $X = \frac{1}{2}$, soit $e^x = 2$ ou $e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. **S = { ln 2 ; — ln 2 }** .

c) f ' (x) est du signe de son numérateur $2e^{2x} - 5e^x + 2$ **.** Résolvons : $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$.

En posant $e^x = X$, cette inéquation équivaut à : $2X^2 - 5X + 2 > 0$, d'où :

$X \in]-\infty\,;\frac{1}{2}[\, \cup \,]2\,;+\infty[\Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2}$ ou $e^x > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-\ln 2[\, \cup\,]\ln 2\,;+\infty[$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
f ' (x)		+		$-$	‖	$-$		+	
f	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

$M = f(-\ln 2) = -2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{e^{-\ln 2} - 1} = -2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{2} - 1} = \mathbf{-3 - 2\ln 2}$ **.**

$M = f(\ln 2) = 2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{e^{\ln 2} - 1} = 2\ln 2$.

Pour ces calculs, nous avons utilisé l'expression (*) de f (x) .

4°) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0$ (d'après (*)) donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} + 1 = 0$ (d'après (*)) donc la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

Une autre asymptote est la droite d'équation **x = 0** , car :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

5°) Ω a pour coordonnées :

$x_\Omega = \dfrac{x - x}{2} = 0$ et $y_\Omega = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(2x - 1 + \dfrac{1}{e^x - 1} - 2x - 1 + \dfrac{1}{e^{-x} - 1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(-2 + \dfrac{1}{e^x - 1} + \dfrac{e^x}{1 - e^x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-2 + \dfrac{1 - e^x}{e^x - 1}\right) = \dfrac{1}{2}(-2 - 1) = -\dfrac{3}{2}$.

Ainsi les points M et M ' sont symétriques par rapport à Ω . Il en résulte que : **Ω (0 ; $\frac{3}{2}$) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.**

6°) Voir la courbe ci-dessous .

7°)a) Par réduction au même dénominateur, on a :

$\forall\, x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{(2x + \alpha)(e^x - 1) + \beta e^x}{e^x - 1} = \dfrac{(2x + \alpha + \beta)e^x - \alpha}{e^x - 1}$ d'où par identification :

$\alpha + \beta = -1$ et $-\alpha = 2$, soit $\boldsymbol{\alpha = -2}$ **et** $\boldsymbol{\beta = 1}$.

Ainsi, $\forall\, x \in D_f$, $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ (**) .

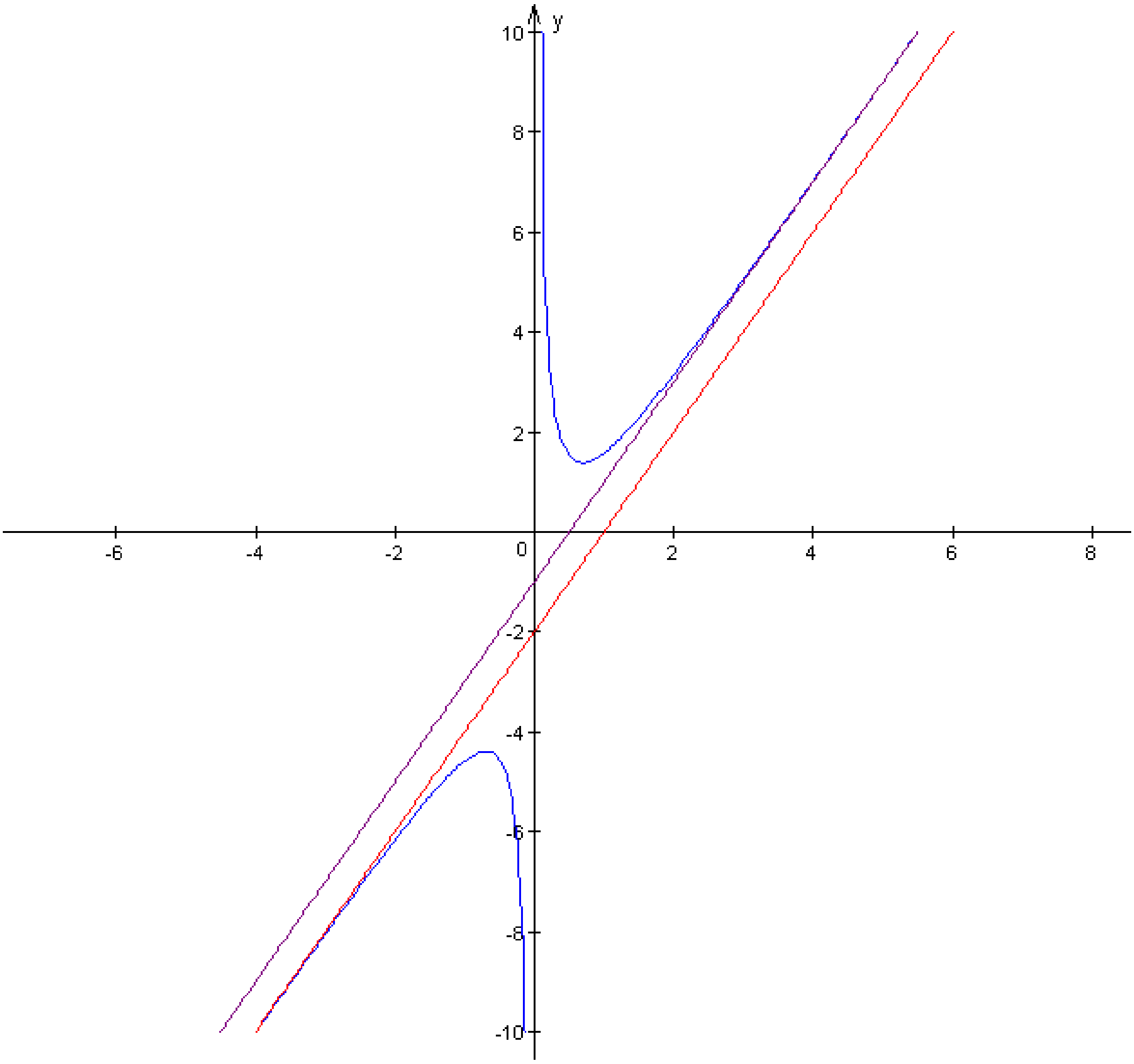
b) $\mathscr{A}(k) = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln k} \left[f(x) - (2x - 1) \right] dx = \int_{\ln 2}^{\ln k} -1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1} dx$ (d'après (**)) ,d'où :

$\mathscr{A}(k) = \left[-x + \ln(e^x - 1) \right]_{\ln 2}^{\ln k} = -\ln k + \ln(k - 1) + \ln 2 - \ln 1 = \ln \dfrac{2(k - 1)}{k}$ u . a .

En cm², on obtient : $\mathscr{A}(k) = 4\ln \dfrac{2(k - 1)}{k}$ cm² .

c) $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathscr{A}(k) = \lim\limits_{k \to +\infty} 4\ln \dfrac{2(k - 1)}{k} =$ **4 ln 2** car : $\lim\limits_{k \to +\infty} \ln \dfrac{2(k - 1)}{k} = \ln 2$.

6°)



<u>Commentaires :</u> Pour l'exercice 1, il fallait se souvenir de :

a) un nombre complexe est réel si et seulement si son argument est un multiple de π .

b) L'argument du produit d'un nombre fini de nombres complexes est égal à la somme de leurs arguments .

Pour le problème, on peut remarquer que le sens de variation de f se déduit de la résolution de *l'inéquation* $2\ e^{2x} - 5\ e^{x} + 2 > 0$ et non de celle de l'équation $2\ e^{2x} - 5\ e^{x} + 2 = 0$, comme semble le suggérer l'énoncé .

C'est un sujet très classique, exigeant d'avoir de bonnes connaissances sur tout le programme .

BAC S2 2003 1[er] groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$p(M) = 0{,}005$; $\qquad p(T \mid M) = 0{,}8$; $\qquad p(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0{,}9$.

1°) a) En substituant T et M, puis $\overline{T}$ et $\overline{M}$ dans la relation ($\ast$) , on obtient :

$\mathbf{T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})}$. $\qquad \mathbf{\overline{M} = (\overline{M} \cap \overline{T}) \cup (\overline{M} \cap T)}$ car $\overline{\overline{T}} = T$.

b) De la deuxième égalité, on déduit que : $p(\overline{M}) = p(\overline{M} \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T)$, car $\overline{M} \cap \overline{T}$ et $\overline{M} \cap T$ constituent une partition de $\overline{M}$.

Par suite : $p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M}) - p(\overline{M} \cap \overline{T}) = p(\overline{M}) - p(\overline{T} \mid \overline{M})\, p(\overline{M})$, par définition de la probabilité conditionnelle $p(\overline{T} \mid \overline{M})$.

Il en résulte que : $\mathbf{p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M})\,(1 - p(\overline{T} \mid \overline{M}))}$.

2°) $p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M})$ d'après la première des égalités du 1° a .

D'où : $p(T) = p(T \mid M) \times p(M) + p(\overline{M})\,(1 - p(\overline{T} \mid \overline{M}))$ d'après 1° b.

$p(T) = 0{,}8 \times 0{,}005 + (1 - 0{,}005)(1 - 0.9) = 0{,}004 + 0{,}995 \times 0{,}1 = 0{,}1035 = \mathbf{\dfrac{207}{2000}}$.

3°) a) $p(T \mid M) = 0{,}8 \Rightarrow \dfrac{p(T \cap M)}{p(M)} = 0{,}8 \Rightarrow p(T \cap M) = 0{,}8 \times 0{,}005 = 0{,}004$.

$P(M \mid T) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0.004}{0.1035} = \mathbf{\dfrac{8}{207}}$.

b) $p(\overline{T} \mid M) = 1 - p(T \mid M) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$.

EXERCICE 2

1°) a) Soit ib ($b \in \mathbb{R}$) une solution imaginaire pure de (E) . On a nécessairement :

$(ib)^3 + (1 - 8i)(ib)^2 - (23 + 4i)(ib) - 3 + 24i = 0$, soit :

$-b^2 + 4b - 3 + i(-b^3 + 8b^2 - 23b + 24) = 0$, ce qui équivaut au système:

$$\begin{cases} -b^2 + 4b - 3 = 0 & (1) \\ -b^3 + 8b^2 - 23b + 24 = 0 & (2) \end{cases}$$.

(1) a pour solutions 1 et 3 . Seul 3 est solution de (2) . Ainsi, on a nécessairement : b = 3, d'où l'on déduit que (E) admet la solution imaginaire pure **3i** .

b) On utilise la méthode de Hörner :

	1	1 — 8i	— (23 + 4i)	— 3 + 24i
1 + 2i		1 + 2i	14 — 2i	3 — 24i
	1	2 — 6i	— 9 — 6i	0

Donc <u>1 + 2i est solution de (E)</u> .

	1	$1 - 8i$	$-(23 + 4i)$	$-3 + 24i$
$-2 + 3i$		$-2 + 3i$	$17 + 7i$	$3 - 24i$
	1	$-1 - 5i$	$-6 + 3i$	0

Donc <u>$-2 + 3i$ est solution de (E)</u> .

c) Il résulte de **a)** et **b)** que l'ensemble des solutions de (E) est : **$S = \{ 3i \,;\, 1 + 2i \,;\, -2 + 3i \}$** .

2°) a) On a $2\,\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Désignons par z_A , z_B , z_C , z_G les affixes respectives de A, B, C et G .En termes d'affixes, la relation précédente se traduit par :

$2(z_A - z_G) - 2(z_B - z_G) + (z_C - z_G) = 0 \Leftrightarrow -z_G + 2z_A - 2z_B + z_C = 0$ soit :
$z_G = 2z_A - 2z_B + z_C = 2(1 + 2i) - 2(3i) - 2 + 3i = i$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{GA}$ a pour affixe $z_A - z_G = 1 + 2i - i = 1 + i = \underline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

$\overrightarrow{GB}$ a pour affixe $z_B - z_G = 3i - i = \underline{2i}$.

Et $\overrightarrow{GC}$ a pour affixe $z_C - z_G = -2 + 3i - i = -2 + 2i = 2(-1 + i) = \underline{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

On constate facilement que les affixes de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ forment dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) D'après la question précédente,

$(z_B - z_G) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_G)$ et $(z_C - z_G) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B - z_G)$, donc on a aussi :

$(z_G - z_B) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_G - z_A)$ et $(z_G - z_C) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_G - z_B)$, en multipliant par -1 les deux membres de chaque égalité . On en déduit que :

La similitude directe de centre G, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme A en B et B en C .

<u>PROBLEME</u>

<u>Partie A</u>

1°) u (x) est défini si et seulement si : $x \geq 0$ (en effet, x doit être dans l'ensemble de départ de u) , $x \neq 1$ (l'expression à l'intérieur de la valeur absolue doit être définie) et enfin $x^2 - 1 \neq 0$ (l'expression $\frac{2x}{x^2 - 1}$ doit être définie) . Il en résulte que **$D_u = [0\,;1\,[\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$** .

On trouve facilement : **u (0) = 0** .

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 1 \text{ donc : } \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 0 \\[3ex] \bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0.}$$

2°) La fonction $x \mapsto \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ est dérivable sur Du comme composée de trois fonctions dérivables .Sa fonction dérivée est : $x \mapsto \dfrac{-2}{(x-1)^2} \times \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}$.

La fonction $x \mapsto -\dfrac{2x}{x^2-1}$ est dérivable sur Du comme fonction rationnelle . Sa fonction dérivée est : $x \mapsto \dfrac{-2(x^2-1)+4x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$

Par conséquent, u est dérivable sur Du comme somme de deux fonctions dérivables et

$\forall\ x \in$ Du , $u'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2(x-1)(x+1)+2x^2+2}{(x^2-1)^2}$.

Soit : $u'(x) = \dfrac{4}{(x^2-1)^2}$. Donc $u'(x) \geq 0\ \ \forall\ x \in$ Du .

x	0		1		$+\infty$
u ' (x)		+	‖	+	
u	0	↗	‖	↗	0

3°) Il résulte immédiatement du tableau précédent que :
a) u est croissante sur [0 ;1 [et sa valeur minimale est 0, donc **u est positive sur [0 ;1 [.**
b) u est croissante sur] 1 ; + ∞ [et tend vers 0 en + ∞ , donc **u est négative sur] 1 ; + ∞ [** .

Partie B

1°) g (x) existe si et seulement si $\dfrac{x+1}{x-1}$ existe et est différent de 0 c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$ .Comme x est dans [0 ; + ∞ [, il en résulte que **Dg = [0 ;1 [∪] 1 ; + ∞ [** .

$\lim\limits_{x \to 1}\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| =$ « $\dfrac{2}{0^+}$ » $= +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ donc : $\lim\limits_{x \to 1} x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = +\infty$ d'où l'on déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty}$.

2°) a) On vérifie trivialement en réduisant au même dénominateur le second membre que :

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \quad (*) .$$

Posons $X = \dfrac{2}{x-1}$. Quand x tend vers + ∞ , X tend vers 0 .

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = \mathbf{1}$.

b) D'après (∗) , on peut donc dire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 1$.

Or, quand x tend vers + ∞ , $\dfrac{x+1}{x-1}$ est positif et par conséquent $g(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - 1$.

Donc la limite précédente s'écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)+1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right) = 1$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)+1}{2} = 1$ d'où l'on tire que:
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + 1 = 2$ et par suite, $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1}$.
Interprétation géométrique : **la courbe $\mathscr{C}$g admet une asymptote horizontale d'équation y = 1 .**

c) g est dérivable sur Dg comme composée de fonctions dérivables et :

$\forall\ x \in \text{Dg}$, $g'(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + x \times \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$ (d'après les calculs du 2° partie A).

Après réduction, on obtient : $g'(x) = u(x)$.
Le signe de la dérivée de g est donc déterminé par les conclusions du 3° partie A .

x	0		1		$+\infty$
g ' (x)		+	||	−	
g	-1	↗ $+\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

d) g est continue et strictement croissante, donc bijective de] 0 ;1 [vers] — 1 ; + ∞ [. Or, 0 est un élément de] — 1 ; + ∞ [. Donc 0 a un antécédent unique par g :en d'autres termes, l'équation g (x) = 0 admet une solution unique α dans] 0 ;1 [.

On a : $g(0{,}6) \simeq -0{,}168$; $g(0{,}7) \simeq 0{,}214$. Donc : $0{,}6 \leq \alpha \leq 0{,}7$.

3°) Voir ci-dessous .

<u>Partie C</u>

1°) f est dérivable sur [0 ;1[comme produit de deux fonctions :

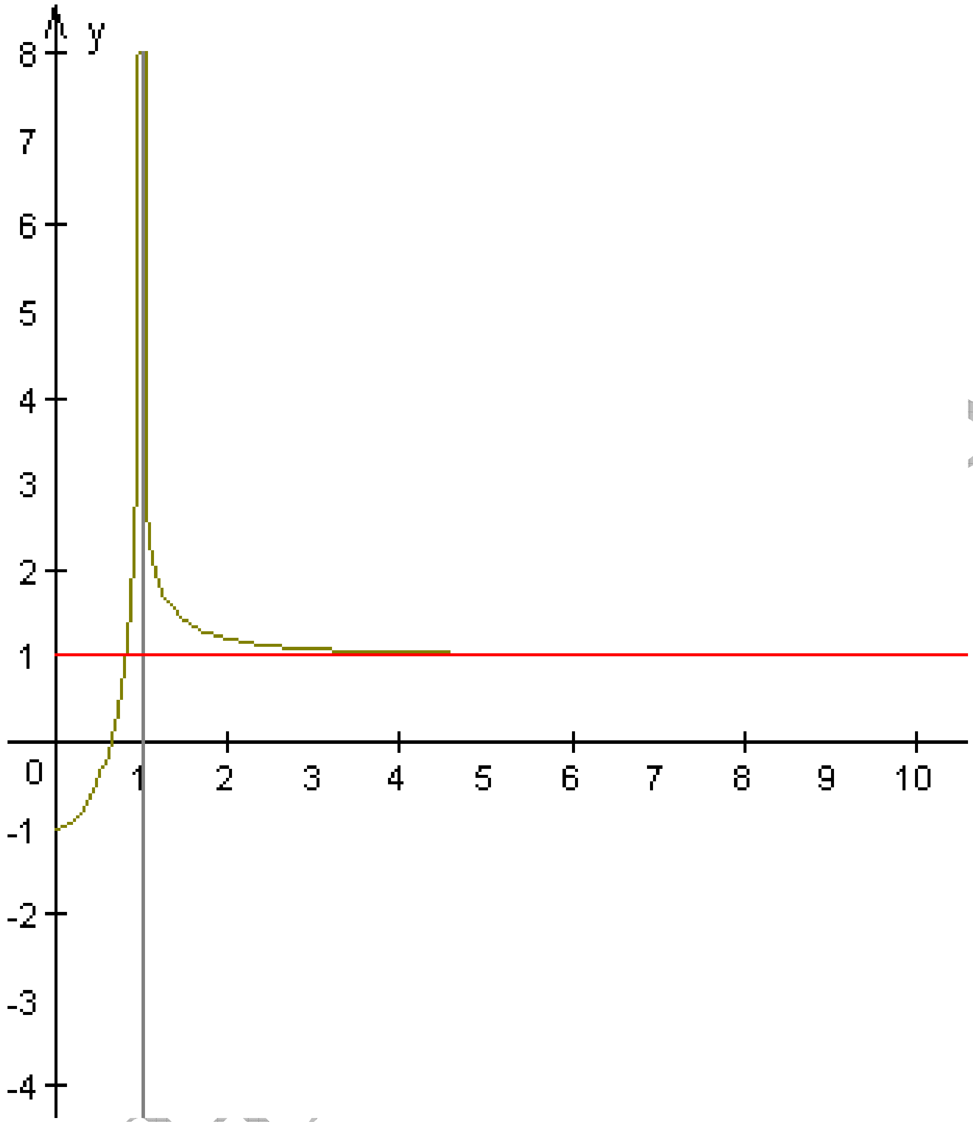
- u : $x \mapsto x^2 - 1$ dérivable sur [0 ;1[comme fonction polynôme .
- v : $x \mapsto \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ dérivable sur [0 ;1[comme composée de fonctions dérivables .

$\forall\ x \in [0\,;1[$, $f'(x) = 2x \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + (x^2-1) \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \times \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$

Explication de ce calcul : on a f = uv , donc f ' = u ' v + u v ' ; et v = ln $\sqrt{w}$ (w étant la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$) donc $v' = \frac{(\sqrt{w})'}{\sqrt{w}} = \frac{w'}{2\sqrt{w}} \times \frac{1}{\sqrt{w}}$.

En calculant, on trouve $f'(x) = 2x \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + (x^2-1) \times \frac{1}{(1-x)(1+x)}$,

Soit $f'(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right) - 1 = g(x)$ $\forall\ x \in [0\,;1[$.($\ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$) .



3°) Cette aire vaut $-\int_0^{\alpha} g(x)dx = -\left[f(x)\right]_0^{\alpha}$ = f (0) — f (α) = — f (α)

= $\boldsymbol{(\alpha^2 - 1)\ln\sqrt{\frac{\alpha+1}{1-\alpha}}}$ u.a . En cm^2 , cette aire vaut 4 α^2 — 1) ln $\sqrt{\frac{\alpha+1}{1-\alpha}}$.

BAC S2 2002 2$^{\text{ème}}$ groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

Il faut faire une double intégration par parties :

On pose d'abord : u (x) = $2x^2 - 1$ et v ' (x) = cos 3x d'où : u ' (x) = 4x et v (x) = $\frac{1}{3}$ sin 3x .

D'où : I = $\left[\frac{1}{3}\left(2x^2-1\right)\sin 3x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{4}{3}x\sin 3x dx = -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{4}{3}x\sin 3x dx$.

Intégrons une deuxième fois par parties en posant :

u (x) = $\frac{4}{3}$x et v ' (x) = sin 3x d'où : u ' (x) = $\frac{4}{3}$ et v(x) = $-\frac{1}{3}$ cos 3x .

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{4}{3}x\sin 3x dx = \left[-\frac{4}{9}x\cos 3x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \frac{4}{9}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos 3x dx = \frac{4}{9}\pi + \frac{4\pi}{27} .$$

Donc finalement : $\mathbf{I = -\frac{4}{9}\pi - \frac{4\pi}{27}}$

EXERCICE 2

1°) $z = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

$z = \dfrac{(1+ i\sqrt{3})(1 - i)}{2} = \dfrac{(1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)}{2}$.

En comparant les deux écritures, on obtient :

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

2°) Posons $Z = (iz - 2)(\overline{z} - 1) = i(z + 2i)\overline{(z - 1)}$.

Soit A le point d'affixe $-2i$ et B le point d'affixe 1 .

Alors, arg Z = $\frac{\pi}{2}$ + arg(z + 2i) — arg(z — 1) = $\frac{\pi}{2}$ + $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$ = $\frac{\pi}{2}$ + $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$

Le complexe Z est réel si et seulement si : arg Z est un multiple de π , c'est-à-dire si et seulement si : $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ⇔**M appartient au cercle E_1 de diamètre [AB] (privé des points A et B)** . (cf. figure 1) .

3°) Avec les mêmes notations qu'au 2° , Z est imaginaire pur si et seulement si : arg Z est un multiple de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{(k-1)\pi}{2} .$$

Si k est pair, cela signifie que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, donc que M est sur le cercle de diamètre [AB] (privé des points A et B) .

Si k est impair, cela signifie que ($\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA}$) est un multiple pair de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire un multiple de π , donc que M est sur la droite (AB) privée des points A et B .
L'ensemble E_2 est donc la réunion du demi-cercle de diamètre [AB] et de la droite [AB] privée des points A et B . (cf. figure 2) .

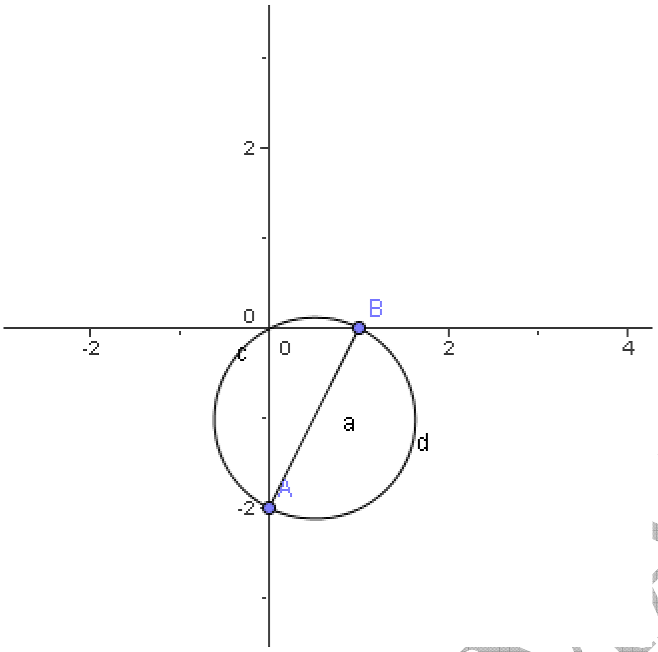


Figure 1

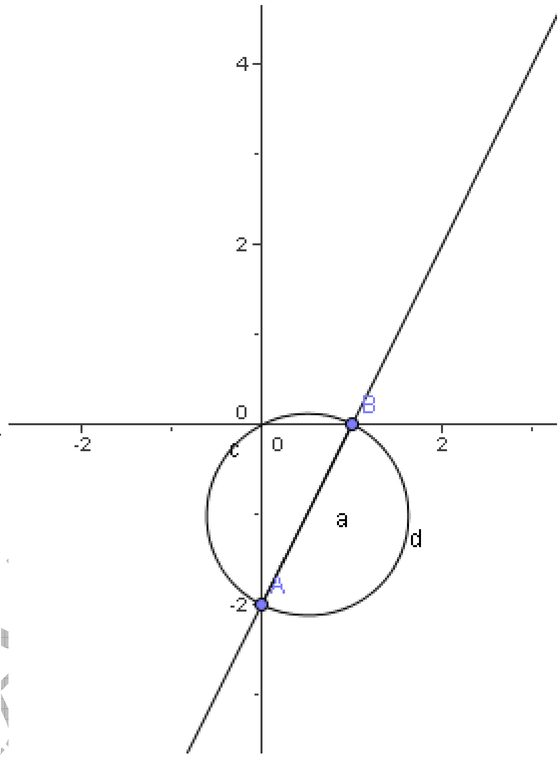


Figure 2

EXERCICE 3

1°) a) C'est la probabilité d'obtenir trois S (parmi 3), deux E (parmi3) un A (parmi 2) et un G (parmi 1) lors d'un tirage simultané de 7 lettres d'un sac en contenant 12 (3 S, 3 E, 1 N, 1 G, 2 A, 1 L, 1 I) .

Le nombre de cas favorables est : $C_3^3 \times C_3^2 \times C_2^1 \times C_1^1 = 6$.

Le nombre de cas possibles est : $C_{12}^7 = 792$ (chaque tirage est une combinaison à 7 éléments dans un ensemble à 12 éléments) .

la probabilité cherchée est donc : $\mathbf{p_1 = \frac{6}{792} = \frac{1}{132} \simeq 0,007}$ **.**

b) C'est la probabilité d'obtenir le mot « SAGESSE » ou l'un des anagrammes de ce mot lors de 7 tirages successifs avec remise d'une lettre dans une urne ayant la composition précédemment décrite .
La probabilité d'obtenir le mot « SAGESSE » lui-même est (tirages indépendants) :

$$\frac{3}{12} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{2 \times 3^5}{12^7} = \frac{1}{73728} .$$

Ce mot ayant $\frac{7!}{3! \times 2!} = 420$ anagrammes, la probabilité d'obtenir les lettres du mot « SAGESSE » est : $\mathbf{p_2 = \frac{420}{73728} = \frac{35}{6144} \simeq 5,7 \times 10^{-3}}$ **.**

2°) Nombre de cas favorables : $3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 72$: (en effet, au premier tirage, on a 3 possibilités d'obtenir un S, puisqu'on n'a encore rien tiré ; au deuxième tirage, on a 2 possibilités d'obtenir un A puisqu'on n'a pas encore tiré de A, au troisième tirage, on a 1 possibilité d'obtenir la seule lettre G, au quatrième tirage, on a 3 possibilités d'obtenir la lettre E, au cinquième tirage, on a 2 possibilités d'obtenir un S, car on en a déjà tiré un ; au sixième tirage, on a 1 possibilité d'obtenir le dernier S, et enfin au septième et dernier tirage, on a 2 possibilités d'obtenir un E, puisqu'on a déjà tiré un E sur les 3 .)

Nombre de cas possibles : $A_{12}^{7} = 3\,991\,680$ car chaque tirage est un arrangement à 7 éléments de l'ensemble des douze jetons .

La probabilité cherchée est donc : $\mathbf{p_3 = \frac{72}{3\,991\,680} = \frac{1}{55440} \simeq 1,8 \times 10^{-5}}$ **.**

EXERCICE 4

1°) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x) = 1$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} - \ln(1 + e^x) = 0$ (1) .

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ (2) . (1) et (2) entraînent que : $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ **.**

2°) La vérification est immédiate puisque $e^x \times e^{-x} = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(1 + e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln [e^x (1 + e^{-x})] = \lim\limits_{x \to +\infty} - \ln (1 + e^{-x})$,

d'où l'on déduit que : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(1 + e^x) = 0}$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln (1 + e^{-x}) = 0$.

3°) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} - \ln(1 + e^x) = - \ln 1 = 0$.

donc la droite **D** d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

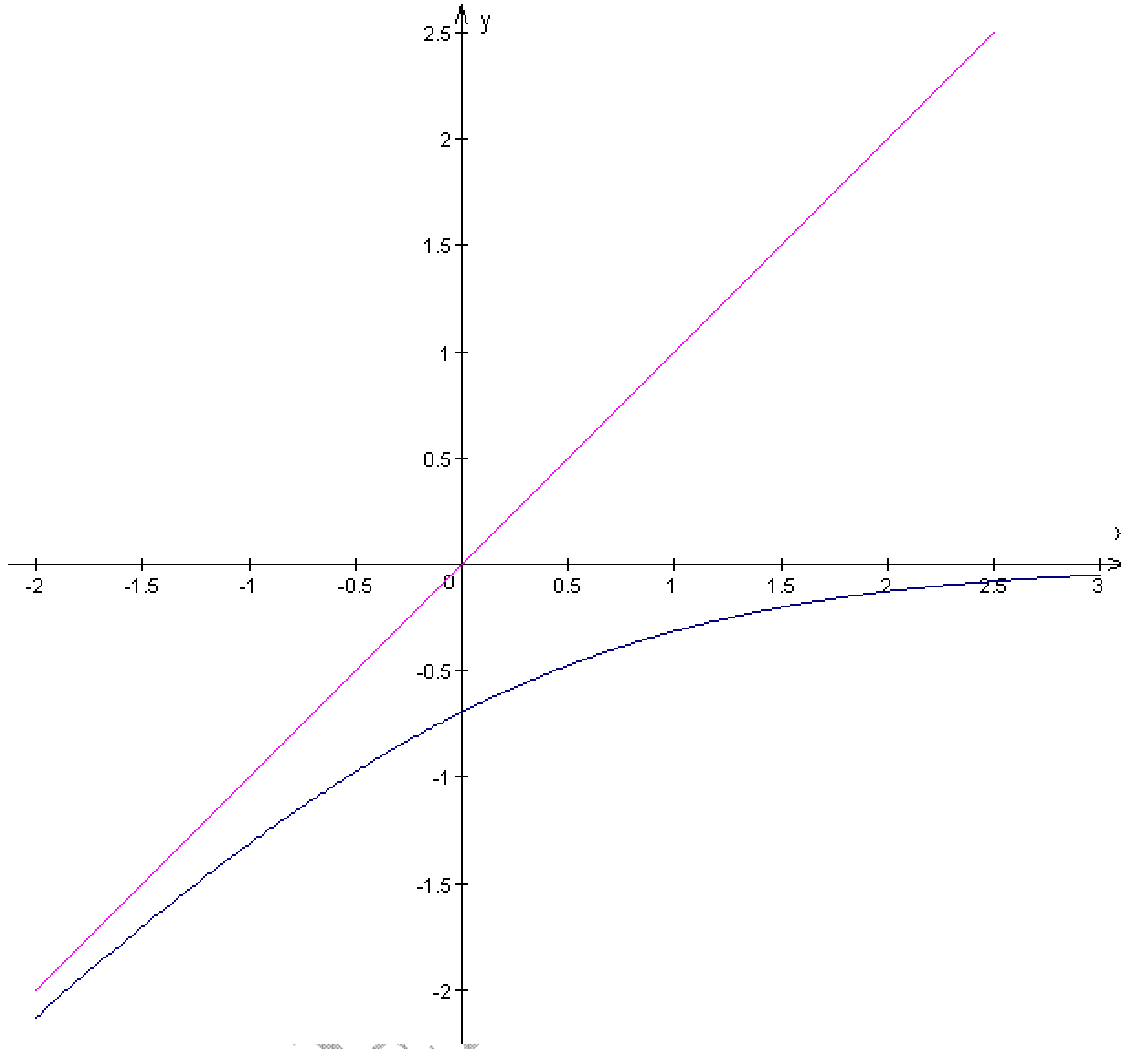
4°) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x}$. $f'(x)$ étant strictement positive, on peut dire que f est continue et strictement monotone (croissante) , donc bijective sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = \mathbf{- \ln 2} \Rightarrow f^{-1}(- \ln 2) = 0$.

D'après le théorème de la dérivation d'une fonction réciproque, $(f^{-1})'(- \ln 2) = \frac{1}{f'(0)} = \mathbf{2.}$

5°) Voir ci-dessous.

<u>*Commentaire :*</u> Sujet assez complexe et comportant parfois des calculs assez longs. Il est quasiment impossible, à notre avis , qu'un élève moyen le rédige entièrement en 2 heures !



y
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

BAC S2 2002 1er groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

1°) Les racines n$^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont, d'après le cours, les nombres de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ($0 \leq k \leq n - 1$) . Leur somme $1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \ldots\ldots + e^{i\frac{2k\pi}{n}} + \ldots\ldots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Cette somme est donc égale à :

$$1 \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0 \text{ car } e^{i2\pi} = 1 .$$

2°) Prenons n = 5 . D'après 1), on a donc : $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$. La partie réelle de cette somme ($1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$) est, par conséquent nulle .

Or, $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

et $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

La partie réelle de la somme $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$ se réduit donc à :

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} .$$

Mais : $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$ (en vertu de la formule $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ($*$))

et $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$ (car $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$) .Il vient donc :

$$1 + 2\left(2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1\right) - 2\cos\frac{\pi}{5} = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0 .$$

Ainsi, en posant $X = \cos\frac{\pi}{5}$, on voit que :

$\cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$.

3°) L'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$ a pour solutions $\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{5}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{5}$ est positif, donc nécessairement $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$ **.**

On en déduit que : $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) - 1 = \frac{-4 + 4\sqrt{5}}{16}$,

soit : : $\boldsymbol{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

et $\cos^2 \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1 + \cos \dfrac{2\pi}{5}}{2} = \dfrac{1 + \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}}{2}$ (d'après la formule $(\ast)$) .

Donc $\cos^2 \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{8}$ et comme $\cos \dfrac{\pi}{10} > 0$, on en déduit que : $\mathbf{\cos \dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{8}}}$ **.**

EXERCICE 2

1°) z_1 est la moyenne des notes de Mathématiques de ceux qui ont obtenu $x_1 = 6$ en Sciences Physiques . Ainsi $z_1 = \dfrac{(4 \times 2) + (2 \times 6) + (1 \times 10) + (0 \times 14) + (0 \times 18)}{7} \Rightarrow \mathbf{z_1 = \dfrac{30}{7}}$.

De manière analogue, on obtient : $\mathbf{z_2 = 6\ ;\ z_3 = \dfrac{286}{29}}$; $\mathbf{z_4 = \dfrac{162}{13}\ ;\ z_5 = \dfrac{74}{5}}$ **.**

2°) On obtient d'après les valeurs de z_i trouvées au 1) le tableau de la série statistique (x_i , z_i)

x_i	6	8	10	12	14
z_i	$\frac{30}{7}$	6	$\frac{286}{29}$	$\frac{162}{13}$	$\frac{74}{5}$

a) Voir ci-dessous .

b) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \dfrac{6 + 8 + 10 + 12 + 14}{5} = \underline{10}$; $\overline{z} = \dfrac{\dfrac{30}{7} + 6 + \dfrac{286}{29} + \dfrac{162}{13} + \dfrac{74}{5}}{5} = \underline{9{,}51}$

$V(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \overline{x}^2 = \underline{8} \Rightarrow \sigma_x = \underline{2\sqrt{2}}$;

$V(z) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} z_i^2}{5} - \overline{z}^2 = \underline{15{,}3} \Rightarrow \sigma_z = \sqrt{15{,}3} \simeq \underline{3{,}91}$;

$\sigma_{xz} = \text{cov}(x, z) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i z_i}{5} - \overline{x} \times \overline{z}$

$= \dfrac{(6 \times \dfrac{30}{7}) + (8 \times 6) + (10 \times \dfrac{286}{29}) + (12 \times \dfrac{162}{13}) + (14 \times \dfrac{74}{5})}{5} - (10 \times 9{,}51) \simeq \underline{11{,}02}$

D'après ces calculs, le coefficient de corrélation linéaire est égal à :

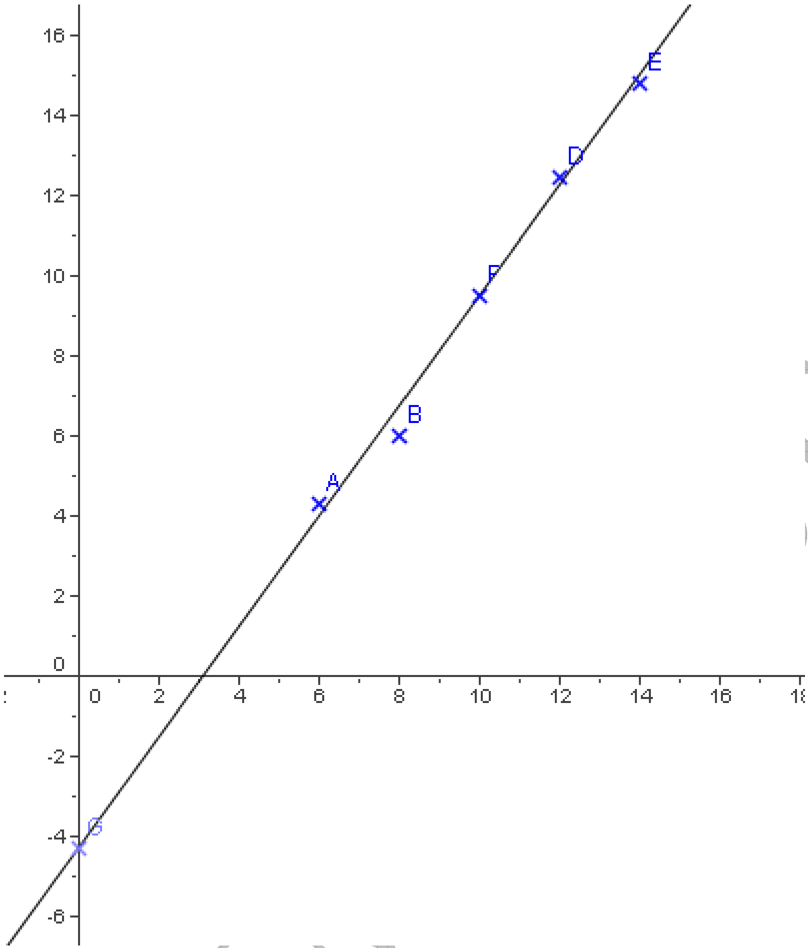
$r = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x \times \sigma_z} = \dfrac{11{,}02}{2\sqrt{2} \times 3{,}91}$ soit $\mathbf{r \simeq 0{,}99}$.

c) Une équation de $D_{z/x}$ est $z - \overline{z} = a(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xz}}{\sigma_x^2} \simeq \dfrac{11{,}02}{2\sqrt{2}} \simeq \underline{1.35}$.

Après remplacement des expressions par leurs valeurs numériques, on obtient :

$$\mathbf{D_{z/x} : z = 1{,}25\, x - 4{,}29} \text{ .}$$

d) Voir ci-dessous .



PROBLEME
Partie A

1°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln^2 x} = 0^2 = 0$.

Il en résulte que : $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0}$. Donc <u>g est continue à droite en 0 .</u>

2°) D'après l'énoncé même : Dg = [0 ; 1 [∪] 1 ; + ∞ [.

Signe de ln x autour de 1 :

x		1	
$\ln x$	$-$		$+$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{\ln^2 x} = « \dfrac{1}{0^+} » = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} -\dfrac{1}{\ln x} = « \dfrac{-1}{0^-} » = +\infty$

Il en résulte que : $\mathbf{\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty}$ **.**

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\ln x}\left(\dfrac{1}{\ln x} - 1\right)$. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} = « \dfrac{1}{0^+} » = +\infty$,

Il en résulte que : $\mathbf{\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty}$ **.**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln^2 x} = 0^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$ **.**

g est dérivable sur Dg comme somme de deux fonctions qui sont des inverses de fonctions dérivables . $\forall$ x $\in$ Dg , $g'(x) = -2(\ln x)^{-3}\dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{-2 + \ln x}{x(\ln x)^3}$.

$g'(x)$ est du signe de $Q = \dfrac{-2 + \ln x}{\ln x}$. Faisons un tableau de signe de cette expression :

x	0 1	1 e	e e^2	e^2 $+\infty$
$-2 + \ln x$	—	—	—	+
ln x	—	+	+	+
Q	+	—	—	+

<u>Tableau de variation de g :</u>

x	0	1	e	e^2	$+\infty$
g (x)	+	‖	—	0	+
g	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow 0$

On vérifie que g (x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = e . Ainsi, d'après le tableau ci-dessus :

- **g (x) est positive si x $\in$ [0 ; 1 [$\cup$] 1 ; e] .**
- **g (x) est négative si x $\in$ [e ; + ∞ [.**

<u>Partie B</u>

1°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$ .Donc :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) \times \dfrac{1}{\ln x} = 0$: <u>f est donc continue à droite en 0.</u>

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{\ln x} = 0$:

<u>f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.</u>

Il en résulte que C, courbe représentative de f, admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale (de coefficient directeur 0) .

2°) On vient de voir que $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0}$ **.**

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = « \dfrac{-1}{0^-} » = \underline{+\infty}$. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = « \dfrac{-1}{0^+} » = \underline{+\infty}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\dfrac{\ln x}{x}$ est positif au voisinage de $+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \underline{-\infty}$.

3°) f est dérivable sur Df comme quotient de fonctions dérivables .

$\forall\ x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{-\ln x + x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$ (dérivation d'un quotient) , soit $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(\ln x)^2}$.

On a aussi : $f'(x) = \dfrac{1}{\ln^2 x} - \dfrac{1}{\ln x} = g(x)$.

Ainsi f ' (x) est du signe de g (x) . Le signe de f ' (x) découle donc des conclusions du 2° de la partie A .

x	0		1		e		$+\infty$
f (x)		+	‖	+	|	—	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$

4°) $f(e^2) = \dfrac{-e^2}{2}$. $f'(e^2) = -\dfrac{1}{4}$. L'équation de la tangente au point d'abscisse e^2 est :

$y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$ soit : $y = -\dfrac{1}{4}(x - e^2) - \dfrac{e^2}{2} \Leftrightarrow : y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{e^2}{4}$.

5°) Le point M de C d'abscisse x a pour ordonnée f (x) . Le point N de D d'abscisse x a pour ordonnée $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{e^2}{4}$, d'après la question précédente . $\overline{NM}$ est la distance (verticale) entre ces deux points.

Par conséquent, $\varphi(x) = \overline{NM} = f(x) - \left(-\dfrac{1}{4}x - \dfrac{e^2}{4}\right) = f(x) + \dfrac{x + e^2}{4}$.

φ est dérivable sur Df comme somme de f et d'une fonction affine .

$\forall\ x \in D_f$, $\varphi'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{4} = g(x) + \dfrac{1}{4}$. $\qquad \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > -\dfrac{1}{4}$.

Or, d'après le tableau de variation de g , $-\dfrac{1}{4}$ est la valeur minimale de g sur $]\ 1\ ;+\infty\ [$, en d'autres termes $\forall\ x \in\ ]\ 1\ ;+\infty\ [$, $g(x) \geq -\dfrac{1}{4}$: $\varphi'(x)$ est positif sur $]\ 1\ ;+\infty\ [$.

<u>Tableau de variation de φ</u>

x	1		e^2		$+\infty$
φ ' (x)			|		
φ	$-\infty$		↗		$+\infty$

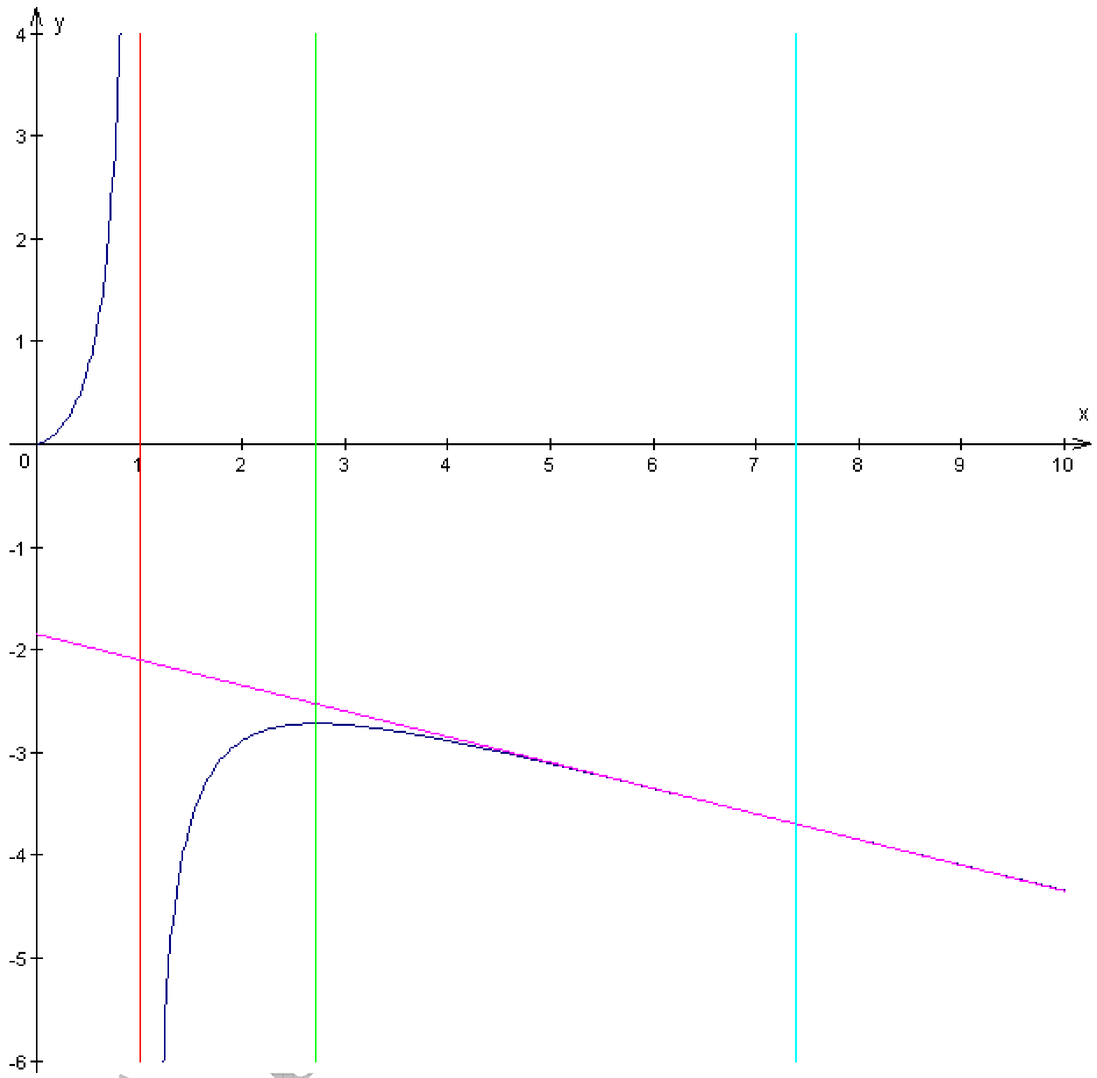
Conclusion : φ (x) est négatif sur $]\ 1\ ; e^2\ [$ et positif sur $]\ e^2\ ;+\infty\ [$. Par suite :
C est en-dessous de D sur $]\ 1\ ; e^2\ [$ et au-dessus de D sur $]\ e^2\ ;+\infty\ [$.
6°) Voir ci-dessous .

<u>Partie C</u>

La fonction g est négative entre e et e^2 (on vérifie d'ailleurs que g (e) = 0) .

Donc l'aire demandée est : $\mathscr{A} = -\int_e^{e^2} g(x)dx \times 4\ \text{cm}^2$. Or f est une primitive de g, d'où :

$$\mathscr{A} = -\left[\frac{-x}{\ln x}\right]_e^{e^2} \times 4 = \underline{(\ 2\ e^2 + 4\ e\ )\ \text{cm}^2}\ .$$



Commentaires : C'est l'un des sujets de bac les plus mal libellés. Il était quasiment impossible pour un élève de TS2 (et même de TS1 !) de traiter l'exercice 1, car le lien entre la première question et la seconde n'est pas immédiat .
C'était la première fois qu'on proposait ce genre de série statistique (exercice 2) . Beaucoup de candidats ont été déroutés, car la plupart des collègues, cette année-là, n'ont traité que les séries doubles injectives (à chaque valeur de x, correspond une seule valeur de y) .
Enfin, pour le problème, l'énoncé aurait dû indiquer aux élèves que la fonction g s'annule pour x = e, ce qui aurait simplifié la détermination du signe de g (x) .

BAC S2 2001 $2^{ème}$ groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

1°) L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i$ ou $r = -i$.
Les solutions sont donc les fonctions de la forme : **$y = A \cos x + B \sin x$.**

2°) $f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$. $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$. $f'(0) = \sqrt{3} \Rightarrow B = \sqrt{3}$.
La solution particulière est donc : $y = f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

3°) a) $f(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3} \cos x + \sin\frac{\pi}{3} \sin x = -\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{3} - x = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k'\pi$

$S = \{-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \ ; \frac{13\pi}{12} + 2k'\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\}$.

b) La résolution est la même qu'au a) . Seul l'ensemble de solutions change . On retient, parmi les solutions précédentes, celles qui appartiennent à $[0 ; 2\pi[$. D'où :

$S' = \{\frac{19\pi}{12} \ ; \frac{13\pi}{12}\}$.

EXERCICE 2

1°) $\alpha^2 - 2i\alpha - 1 = (\alpha - i)^2 - i^2 - 1 = \boldsymbol{(\alpha - i)^2}$.
Le discriminant de l'équation proposée est:
$\Delta = [-\alpha(\alpha + i)]^2 - 4(i\alpha^3) = \alpha^2((\alpha + i)^2 - 4i\alpha) = \alpha^2(\alpha^2 - 2i\alpha - 1) = \alpha^2(\alpha - i)^2$ d'après le calcul précédent . Une racine carrée de Δ est donc: $\alpha(\alpha - i)$
D'où les solutions de l'équation (E) :

$z_1 = \frac{\alpha(\alpha + i) - \alpha(\alpha - i)}{2} = \boldsymbol{\alpha i}$ et $z_2 = \frac{\alpha(\alpha + i) + \alpha(\alpha - i)}{2} = \boldsymbol{\alpha^2}$.

2°) Posons $\alpha = r e^{i\theta}$ .Alors les solutions précédentes s'écrivent :

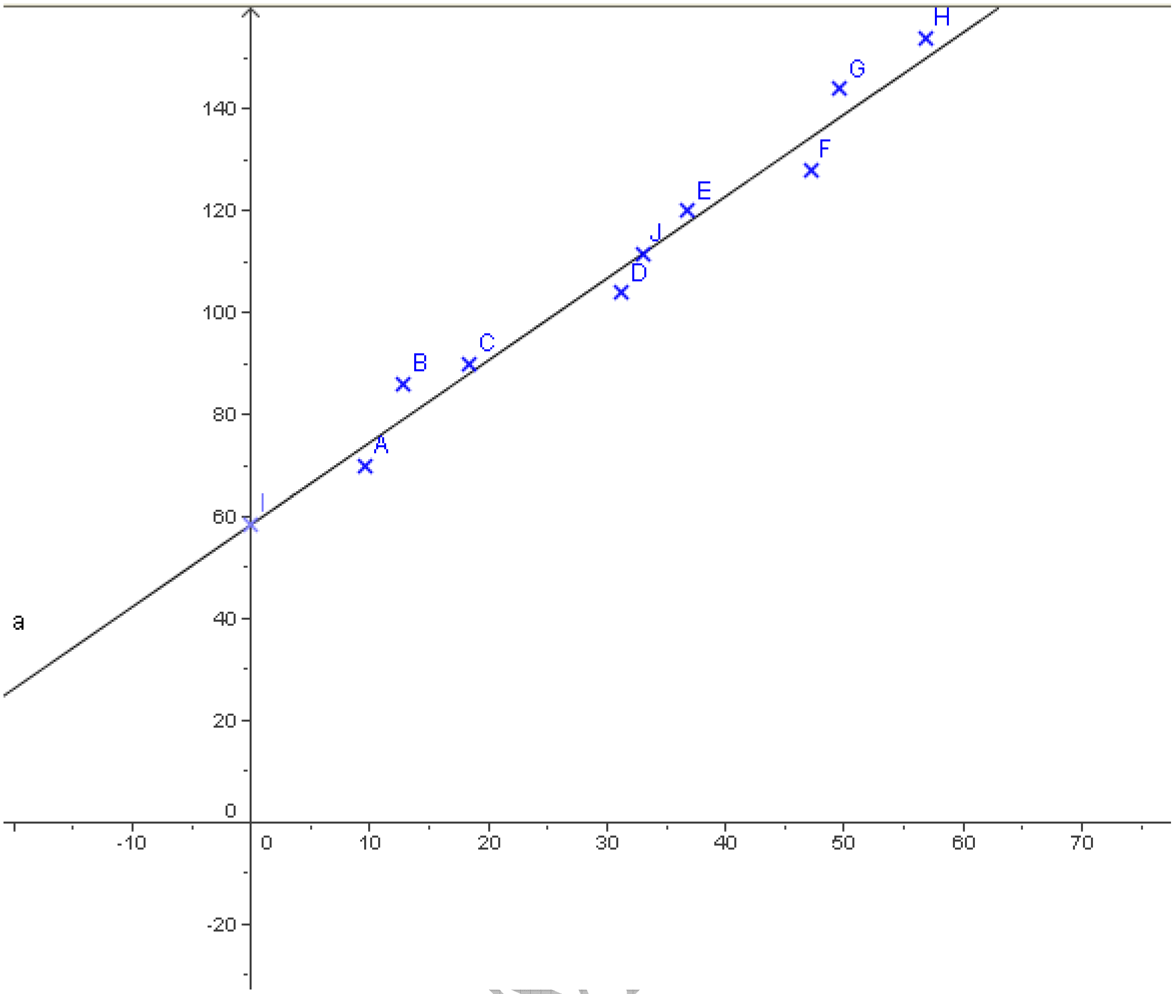
$z_1 = r e^{i\theta} i = r e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow$ **$|z_1| = r$ et $\arg(z_1) = \theta + \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$** ; et
$z_2 = r^2 e^{i2\theta} \Rightarrow$ **$|z_2| = r^2$ et $\arg(z_2) = 2\theta$ $[2\pi]$.**

3°) S_α est une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si $|i\alpha| = 1$ et $\arg(i\alpha) = \frac{5\pi}{6}$, d'où, puisque

$z_1 = i\alpha$, $r = 1$ et $\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ soit: $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc **$\alpha = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.**

EXERCICE 3

1°) Voir figure ci-dessous.



2°) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \dfrac{9{,}6 + 12{,}8 + 18{,}4 + 31{,}2 + 36{,}8 + 47{,}2 + 49{,}6 + 56{,}8}{8} = \dfrac{262{,}4}{8} = \mathbf{32{,}8}$

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \dfrac{70 + 86 + 90 + 104 + 120 + 128 + 144 + 154}{8} = \dfrac{896}{8} = \mathbf{112}$

$V(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2}{8} - \overline{x}^2$. Numériquement, on obtient :

$V(x) = \dfrac{9{,}6^2 + 12{,}8^2 + 18{,}4^2 + 31{,}2^2 + 36{,}8^2 + 47{,}2^2 + 49{,}6^2 + 56{,}8^2}{8} - (32{,}8)^2$

Soit : $V(x) = \dfrac{10836{,}48}{8} - 1075{,}84 =$ **278, 72 .**

$V(y) = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} y_i^2}{8} - \overline{y}^2$. Numériquement, on obtient :

$V(y) = \dfrac{70^2 + 86^2 + 90^2 + 104^2 + 120^2 + 128^2 + 144^2 + 154^2}{8} - 12544 = \mathbf{762}$.

3°) $D_{y/x}$ a pour équation : $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$.

Or, $\text{cov}(x, y) = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i}{8} - \overline{x}\ \overline{y}$. Numériquement, on trouve : cov(x , y) = 454 .

Finalement, on obtient :

$D_{y/x}$: $y - 112 = \dfrac{454}{278{,}72}(x - 32{,}8) \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = 1{,}63\,x + 58{,}5}$ **.**

Pour le tracé de $D_{y/x}$, voir figure ci-dessus .

EXERCICE 4

1°) La fonction $\varphi : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0. Sa fonction dérivée est $\varphi' : x \mapsto e^x$ et par conséquent, $\varphi'(0) = e^0 = 1$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2°) a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} -x + 7 = 7 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} -4e^x = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3 \ (1)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} -x + 3 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} -x \ln x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3 \ (2)$

$f(0) = -0 + 7 - 4e^0 = 3$ (3) .

(1), (2) et (3) entraînent que : **f est continue au point 0 .**

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x + 4 - 4e^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 - 4\dfrac{e^x - 1}{x} = -5$, d'après la limite obtenue au 1° . f est donc dérivable à gauche en 0 et $\mathbf{f'_g(0) = -5}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x - x\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -1 - \ln x = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Par suite, **f n'est pas dérivable à droite en 0 .**

Interprétation géométrique : Au point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ de f admet deux demi-tangentes : une demi-tangente de coefficient directeur -5 et une demi-tangente verticale .

c) f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ comme somme de deux fonctions dérivables :

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $f'(x) = -1 - 4e^x < 0$.

f est aussi dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables .

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.

$f'(x)$ est donc > 0 si $x \in]0 ; 1[$ (signe contraire de ln x) et $f'(x)$ est < 0 si $x \in]1 ; +\infty[$.

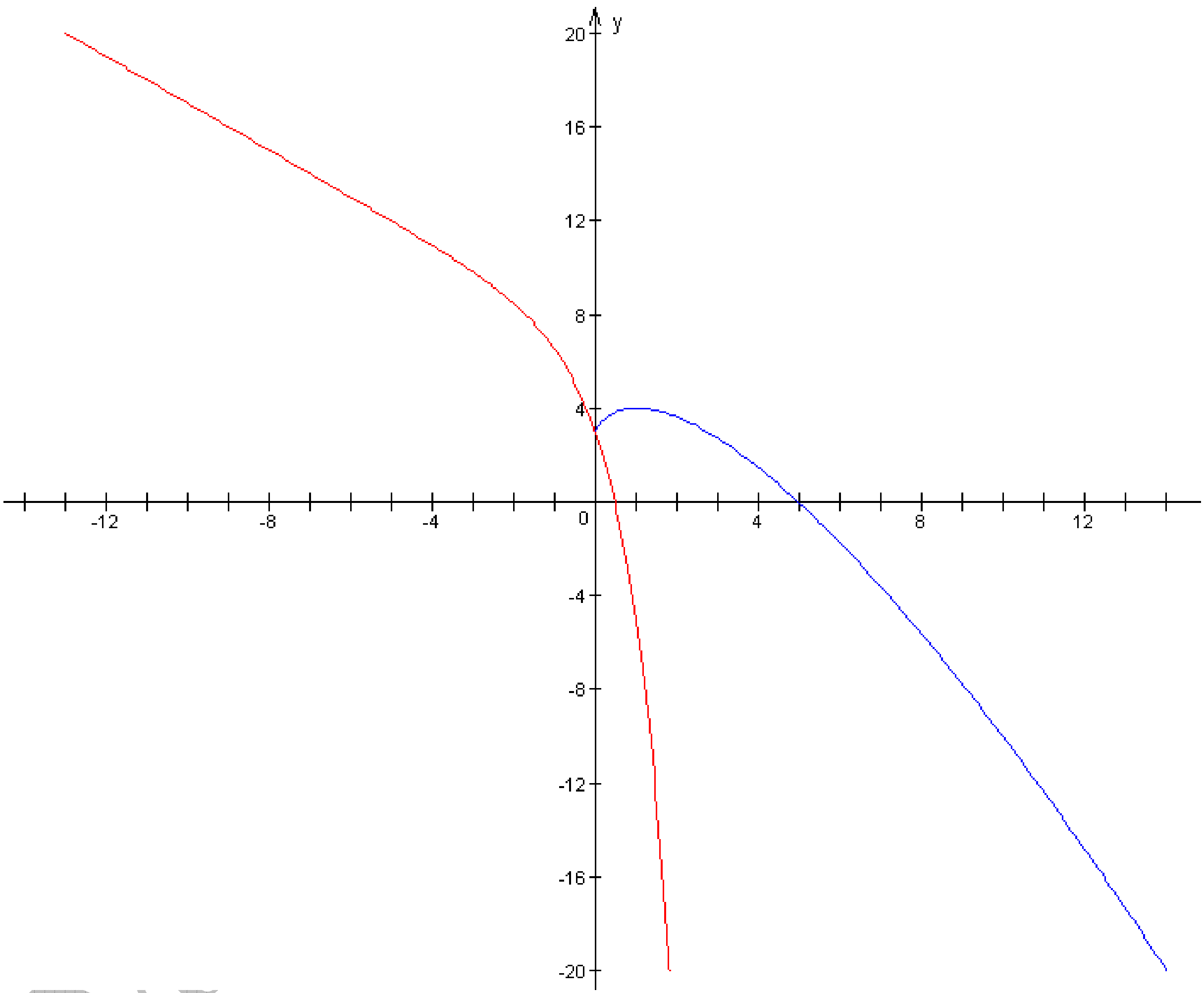
Le tableau de variation de f en résulte.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \dfrac{3}{x} - \ln x\right) = -\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f ' (x)		—	|	+	|	—	
f	$+\infty$	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

3°) a) f (e) = 3 ; f ' (e) = — 1 . L’équation de la tangente au point d’abscisse e est donc:

$$\mathbf{y - e = -(x - e)} \quad \text{ou} \quad \mathbf{y = -x + 2e}\ .$$



<u>Commentaire</u> : Il était difficile de rédiger ce sujet, en effectuant tous les calculs, dans le temps imparti.

BAC S2 2001 1[er] groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

1°) a) f (z) = z $\Leftrightarrow$ 2z — i = z^2 — 2i z $\Leftrightarrow$ z^2 — (2i + 2) z + i = 0 .
Pour résoudre cette équation, on calcule son discriminant $\Delta' = (i+1)^2 - i = i$.
Pour déterminer les racines carrées de Δ , on pose le système classique :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \qquad \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} . \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si on choisit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient à partir de la deuxième équation $y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Une racine carrée de Δ est donc $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Les solutions sont donc, sous forme algébrique :

$$z_1 = i + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = (i+1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbf{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\, i} .$$

$$z_2 = i + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = (i+1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbf{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\, i} .$$

Et sous forme trigonométrique :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = \mathbf{(\sqrt{2}-1)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} .$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = \mathbf{(\sqrt{2}+1)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} .$$

b) $z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2 z_1^2 z_2^2$. Et $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2 z_1 z_2$.
Or, $z_1 + z_2 = 2i + 2$ et $z_1 z_2 = i$ d'après l'équation du second degré obtenue au 1° .
D'où : $z_1^2 + z_2^2 = (2i+2)^2 - 2i = 6i$ et par suite : $(z_1^2 + z_2^2)^2 - 2 z_1^2 z_2^2 = (6i)^2 - 2 i^2$
Finalement, on trouve : $\mathbf{z_1^4 + z_2^4 = -34}$ **.**

2°) Soit A le point d'affixe $\frac{i}{2}$ et B le point d'affixe 2i .

On a : $f(z) = 2\frac{z - \frac{i}{2}}{z - 2i}$. f (z) est imaginaire pur si et seulement si $\frac{z - \frac{i}{2}}{z - 2i}$ est imaginaire pur , ce qui équivaut à :

$$\arg\left(z - \frac{i}{2}\right) - \arg(z - 2i) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) - (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

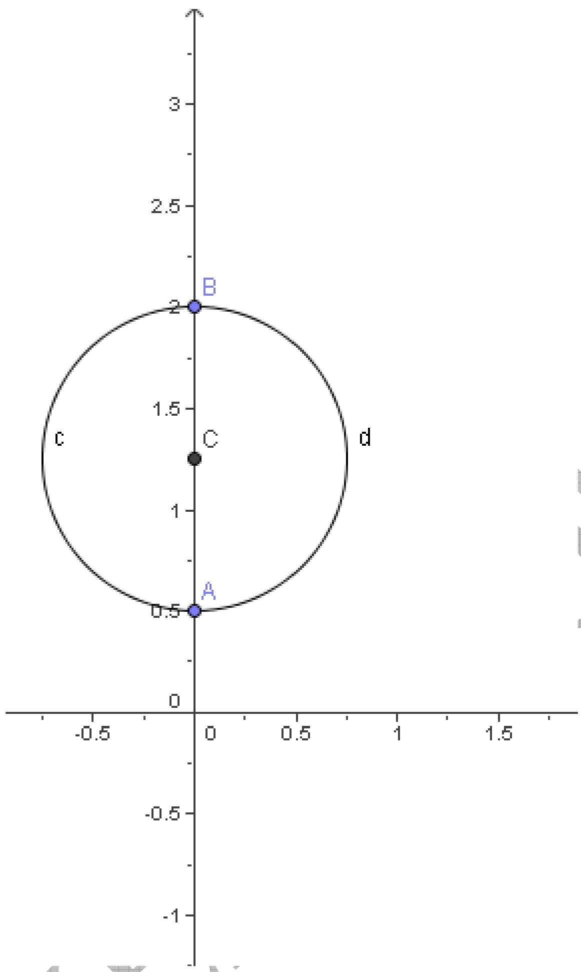
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ $\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B

(Γ) est donc le cercle de diamètre [AB] privé des points A $\left(\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{2}}\right)$ **et B (2i) .**

Dans le plan complexe, A a pour coordonnées (0 ; $\frac{1}{2}$) et B (0 ; 2) .

Soit M de coordonnées (x , y) . M $\in \Gamma$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, ce qui équivaut à :

$(0 - x) \times (0 - x) + (\frac{1}{2} - y)(2 - y) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x^2 + y^2 - \frac{5}{2}\, y + 1 = 0}$.



2°) $| f(z) | = 1 \Leftrightarrow f(z) \times \overline{f(z)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2z - i}{z - 2i} \times \frac{2\bar{z} + i}{\bar{z} + 2i} = 1$

$\Leftrightarrow 4 z \bar{z} + 2i z - 2i \bar{z} + 1 = z \bar{z} + 2i z - 2i \bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3 z \bar{z} = 3$

$\Leftrightarrow z \bar{z} = 1 \Leftrightarrow | z | = 1$.

EXERCICE 2

1°) Au premier triage, on a 4 possibilités d'obtenir un jeton de numéro strictement inférieur à 5, et au deuxième triage, on en a 3 (une de moins) . Le nombre de cas favorables à la réalisation de A est donc : card A = 4×3 .

Chaque tirage étant un arrangement à 2 éléments de l'ensemble des 10 jetons, le nombre de cas possibles est : $A_{10}^{2} = 10 \times 9$.

La probabilité de l'événement A est donc : $p(A) = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \mathbf{\frac{2}{15}}$.

Les couples satisfaisant à la condition de l'énoncé sont :

(3 , 1) (4 , 1) (5 , 1) (5 , 2) (6 , 1) (6 , 2) (7 , 1) (7 , 2) (7 , 3) (8 , 1) (8 , 2) (8 , 3) (9 , 1) (9 , 2) (9 , 3) (9 , 4) (10 , 1) (10 , 2) (10 , 3) (10 , 4) . Il y en a 20 .
(Nous avons procédé à un décompte systématique en donnant au numéro du premier jeton toutes les valeurs possibles) .

La probabilité de l'événement B est donc : $p(B) = \dfrac{20}{10 \times 9} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$ **.**

2°) On a affaire maintenant à un schéma de Bernoulli de paramètres 7 (nombre d'épreuves) et $p = \dfrac{2}{9}$ (probabilité d'obtention d'un succès) . Soit X la loi binomiale associée (égale au nombre de succès au bout des 7 épreuves) .

La probabilité que B soit réalisé exactement 2 fois au bout des 7 épreuves est :

$p(X = 2) = C_7^2 \left(\dfrac{2}{9}\right)^2 \left(\dfrac{7}{9}\right)^5 = \simeq$ **0 , 295** .

La probabilité que B n'ait pas été réalisé au bout des 7 épreuves est :

$p\,(X = 0) = C_7^0 \left(\dfrac{2}{9}\right)^0 \left(\dfrac{7}{9}\right)^7 = \simeq 2\,,126 \times 10^{-3}$.

La probabilité que B soit réalisé au moins une fois est donc :

$1 - p\,(X = 0) = \simeq$ **0 , 997** .

PROBLEME

1°) a) g (x) existe si et seulement si $x > 0 \Rightarrow D_g =]\,0\,;+\infty\,[$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\,(1 - 2\ln x + (\ln x)^2) = \lim\limits_{x \to 0^+} [x - 2x\ln x + x(\ln x)^2]$.

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} x = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x\,(\ln x)^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} [(\sqrt{x}\ln x)]^2 = 0^2 = 0$.

Il résulte de cela que : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$: **g est continue à droite en 0 .**

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty$

(car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty \Rightarrow \;\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty$).

Il en résulte que **g n'est pas dérivable à droite en 0 .**

D'autre part, **g est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$** comme produit de deux fonctions :

- $x \mapsto x$ (continue et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ comme fonction affine)
- $x \mapsto (1 - \ln x)^2$ (continue et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ comme composée de trois fonctions, à savoir $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto 1 - x$, $x \mapsto x^2$).

b) $\forall\, x > 0$, $g'(x) = (1 - \ln x)^2 + 2x\,(1 - \ln x) \times \left(-\dfrac{1}{x}\right)$ (formule de dérivation d'un produit)

D'où : $g'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2\,(1 - \ln x) = (1 - \ln x)\,(1 - \ln x - 2)$
$= (1 - \ln x)\,(-1 - \ln x) = \ln^2 x - 1$.

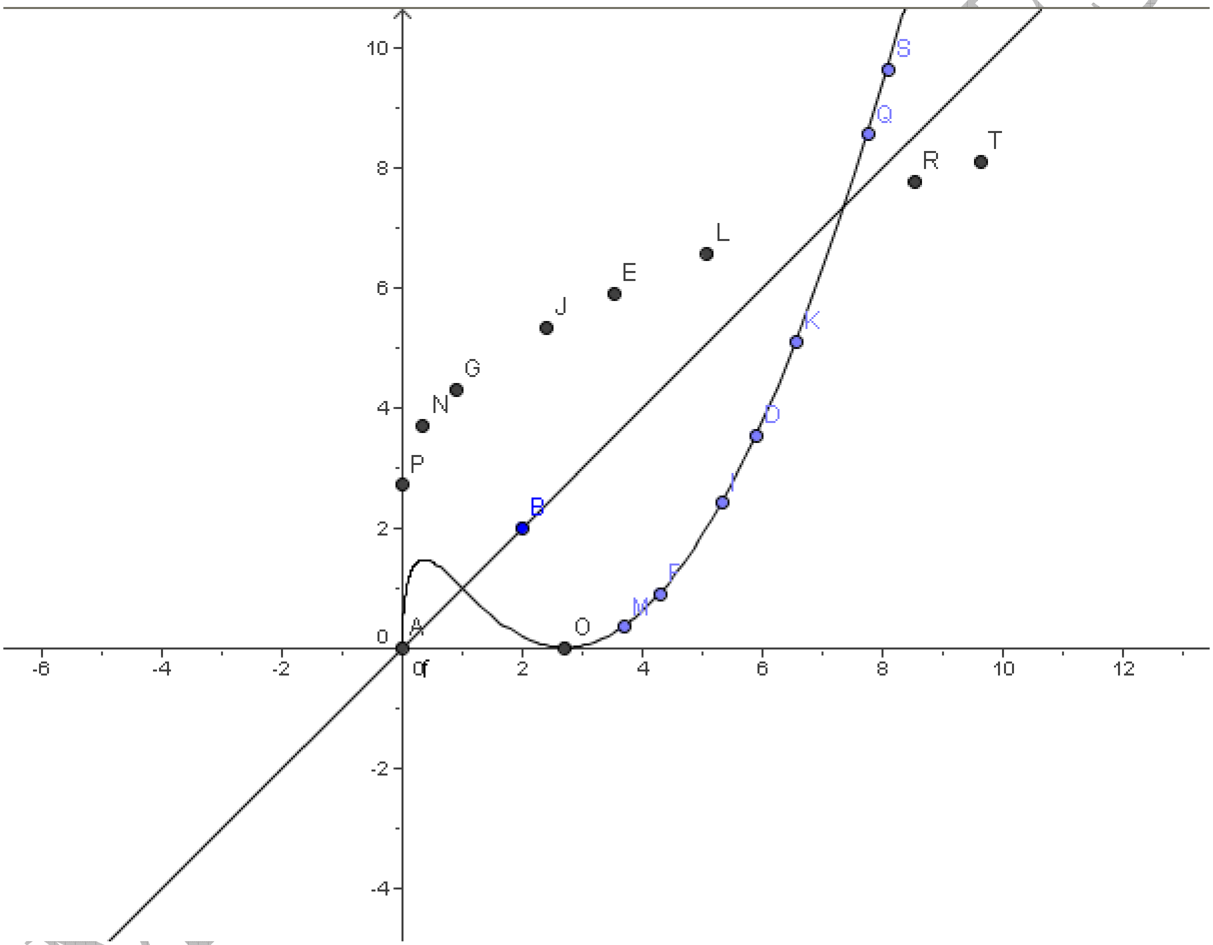
Cette dernière expression est positive si et seulement si ($\ln x < -1$ ou $\ln x > 1$) soit :

$(0 < x < \dfrac{1}{e})$ ou $(x > e)$ .Le tableau de variation de g en résulte .

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
g ' (x)		+	|	—	|	+	
g	0	↗	$2\,e^{-1}$	↘	0	↗	$+\infty$

c) La courbe ($\mathscr{C}$) admet une demi-tangente verticale en 0 car : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$, donc la courbe ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique de direction (O , $\vec{j}$) .



2°) a) La fonction g est positive sur l'intervalle] α ; e [, donc a (α) = $\int_\alpha^e g(x)dx$.

Intégrons une première fois par parties en posant :

u (x) = $(1 - \ln x)^2$ et v ' (x) = x d'où : u ' (x) = $\dfrac{-2(1 - \ln x)}{x}$ et v (x) = $\dfrac{x^2}{2}$.

a (α) = $\left[\dfrac{x^2(1-\ln x)^2}{2}\right]_\alpha^e + \int_\alpha^e x(1-\ln x)dx$. Pour x = e, la partie entre crochets vaut 0, d'où :

a (α) = $-\dfrac{\alpha^2(1-\ln\alpha)^2}{2} + \int_\alpha^e x(1-\ln x)dx$. Soit J cette dernière intégrale.

Intégrons à nouveau par parties en posant :

$u(x) = 1 - \ln x$ et $v'(x) = x$ d'où : $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On en déduit que :

$$J = \left[\frac{x^2(1-\ln x)}{2}\right]_\alpha^e + \int_\alpha^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{-\alpha^2(1-\ln\alpha)}{2} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_\alpha^e = \frac{-\alpha^2(1-\ln\alpha)}{2} + \frac{e^2 - \alpha^2}{4}$$

Finalement, on obtient:

$$a(\alpha) = -\frac{\alpha^2(1-\ln\alpha)^2}{2} + \frac{-\alpha^2(1-\ln\alpha)}{2} + \frac{e^2-\alpha^2}{4} = \frac{e^2 - 5\alpha^2}{4} + \frac{3\alpha^2\ln\alpha}{2} - \frac{\alpha^2\ln^2\alpha}{2}.$$

Soit : $\boldsymbol{a(\alpha) = \dfrac{e^2 - 5\alpha^2 + 6\alpha^2\ln\alpha - 2\alpha^2\ln^2\alpha}{4}}$

b) $\boldsymbol{\lim\limits_{\alpha\to 0^+} a(\alpha) = \dfrac{e^2}{4}}$ car $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha^2 = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha^2\ln\alpha = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha^2\ln^2\alpha = 0$.

3°) a) Résolvons l'équation $g(x) = x \Leftrightarrow x(1-\ln x)^2 = x \Leftrightarrow x[1-(1-\ln x)^2] = 0$

$\Leftrightarrow x(\ln x)(2-\ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = e^2$. Les points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et de la droite (Δ) sont donc : **O(0 , 0) A(1 , 1) et B(e^2 , e^2)** .

b) Résolvons l'équation $g(x) = mx \Leftrightarrow x(1-\ln x)^2 = mx \Leftrightarrow x[m-(1-\ln x)^2] = 0$.
Cette dernière équation admet des solutions autres que 0 si et seulement si l'équation $(1-\ln x)^2 = m$ a des solutions c'est-à-dire si et seulement si $m \geq 0$. On a alors :
$1-\ln x = \sqrt{m}$ ou $1-\ln x = -\sqrt{m} \Leftrightarrow x = e^{1-\sqrt{m}}$ ou $x = e^{1+\sqrt{m}}$.

c) P a pour coordonnées (e ; me) . M_1 et M_2 ont pour coordonnées respectivement :
$(e^{1-\sqrt{m}} ; m\,e^{1-\sqrt{m}})$ et $(e^{1+\sqrt{m}} ; m\,e^{1+\sqrt{m}})$. D'après la formule donnant la distance entre deux points en repère orthonormé :
$OP^2 = e^2 + (me)^2 = e^2(1+m^2)$; $OM_1 = \sqrt{(e^{1-\sqrt{m}})^2 + (m\,e^{1-\sqrt{m}})^2} = e^{1-\sqrt{m}}\sqrt{1+m^2}$;
$OM_2 = \sqrt{(e^{1+\sqrt{m}})^2 + (m\,e^{1+\sqrt{m}})^2} = e^{1+\sqrt{m}}\sqrt{1+m^2}$; par suite :
$OM_1 \times OM_2 = e^{1-\sqrt{m}} \times e^{1+\sqrt{m}}(1+m^2) = e^2(1+m^2) = OP^2$.

4°) a) D'après le tableau de variation du 1° b) , h est continue et strictement croissante sur $[e ; +\infty[$, donc réalise une bijection de $[e ; +\infty[$ vers $[0 ; +\infty[$. Sa bijection réciproque h^{-1} est donc définie sur **$[0 ; +\infty[$.**
b) h ' ne s'annule pas sur $]e ; +\infty[$, donc h^{-1} est dérivable sur **$]0 ; +\infty[$.**
$h(e^2) = e^2$ (déjà vu au 3° a) .d'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque,
$h^{-1}{}'(e^2) = \dfrac{1}{h'(e^2)} = \dfrac{1}{\ln^2 e^2 - 1} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ **.**
c) cf figure .

BAC S2 2000 Remplacement SOLUTION

EXERCICE 1

1°) $|Z| = |1 - x|\,\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$ d'où : $\mathbf{|Z| = |1 - x|}$ car $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$.

$\arg(Z) = \arg(1 - x) + \arg(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\ [2\pi]$

$\mathbf{\arg(Z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$ **si** $\mathbf{x < 1}$ **;** $\mathbf{\arg(Z) = \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]}$ **si** $\mathbf{x > 1}$ **;**

car : $\arg(1 - x) = 0\ [2\pi]$ si $(1 - x) > 0$ et $\arg(1 - x) = \pi\ [2\pi]$ si $(1 - x) < 0$.

Si $x < 1$, $\mathbf{Z = (1 - x)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = (1 - x)\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Si $x > 1$, $\mathbf{Z = (x - 1)(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = (1 - x)\,e^{i\frac{4\pi}{3}}}$.

Si $x = 1$, $Z = 0$ donc $\arg(Z)$ est non défini .

2°) Si $x < 1$, $\arg(Z^{2004}) = \frac{2004\pi}{3} = 668\,\pi = 0\ [2\pi]$.

Si $x > 1$, $\arg(Z^{2004}) = \frac{2004 \times 4\pi}{3} = 2672\,\pi = 0\ [2\pi]$.

Si $x = 1$, $Z^{2004} = 0$.

Ainsi , dans tous les cas, soit $Z^{2004} = 0$, soit $\arg(Z^{2004}) = 0\ [2\pi]$. Donc :

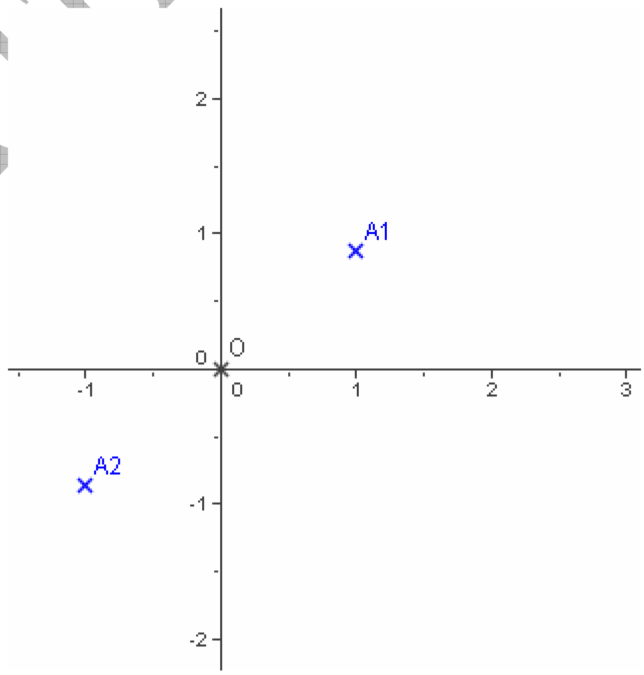
$\mathbf{Z^{2004}}$ **est un réel positif .**

3°) a) $|Z| = 2 \Leftrightarrow |1 - x| = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 2$ ou $1 - x = -2 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$.

Il y a donc deux valeurs possibles pour Z :

$\mathbf{Z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}$ et $\mathbf{Z_2 = -2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}$.

b) $Z_1 = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{1 + i\sqrt{3}}$. $Z_2 = -2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{-1 - i\sqrt{3}}$.



c) Il est clair que A_1 et A_2 sont symétriques par rapport à O, car leurs coordonnées sont opposées.

<u>EXERCICE 2</u>

1°) a) L'univers Ω est l'ensembles des combinaisons à 4 éléments de l'ensemble des 8 animaux . L'ensemble des valeurs de X est X(Ω) = {0, 1, 2, 3 } .

$p(X = 0) = \dfrac{C_5^4}{C_8^4} = \mathbf{\dfrac{1}{14}}$. $p(X = 1) = \dfrac{C_3^1 \times C_5^3}{C_8^4} = \mathbf{\dfrac{3}{7}}$ **.** $p(X = 2) = \dfrac{C_3^2 \times C_5^2}{C_8^4} = \mathbf{\dfrac{3}{7}}$ **.**

$p(X = 2) = \dfrac{C_3^3 \times C_5^1}{C_8^4} = \mathbf{\dfrac{1}{14}}$ **.**

Les résultats peuvent être résumés dans le tableau suivant :

$\mathbf{X_i}$	**0**	**1**	**2**	**3**
$\mathbf{P(X = X_i)}$	$\mathbf{\frac{1}{14}}$	$\mathbf{\frac{3}{7}}$	$\mathbf{\frac{3}{7}}$	$\mathbf{\frac{1}{14}}$

Soit F la fonction de répartition de X .

— Si $x \in]-\infty ; 0[$: $F(x) = P(X \leq x) = \mathbf{0}$

— Si $x \in [0 ; 1[$: $F(x) = P(X \leq x) = \mathbf{\dfrac{1}{14}}$

— Si $x \in [1 ; 2[$: $F(x) = P(X \leq x) = \dfrac{1}{14} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{7}{14} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

— Si $x \in [2 ; 3[$: $F(x) = P(X \leq x) = \dfrac{1}{14} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{7} = \mathbf{\dfrac{13}{14}}$

— Si $x \in [3 ; +\infty[$: $F(x) = P(X \leq x) = \dfrac{1}{14} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{14} = \mathbf{1}$ **.**

Pour la représentation graphique, cf. page suivante **.**

2°) a) $P(A) = P(X = 2) + P(X = 3) = \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{14} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$.

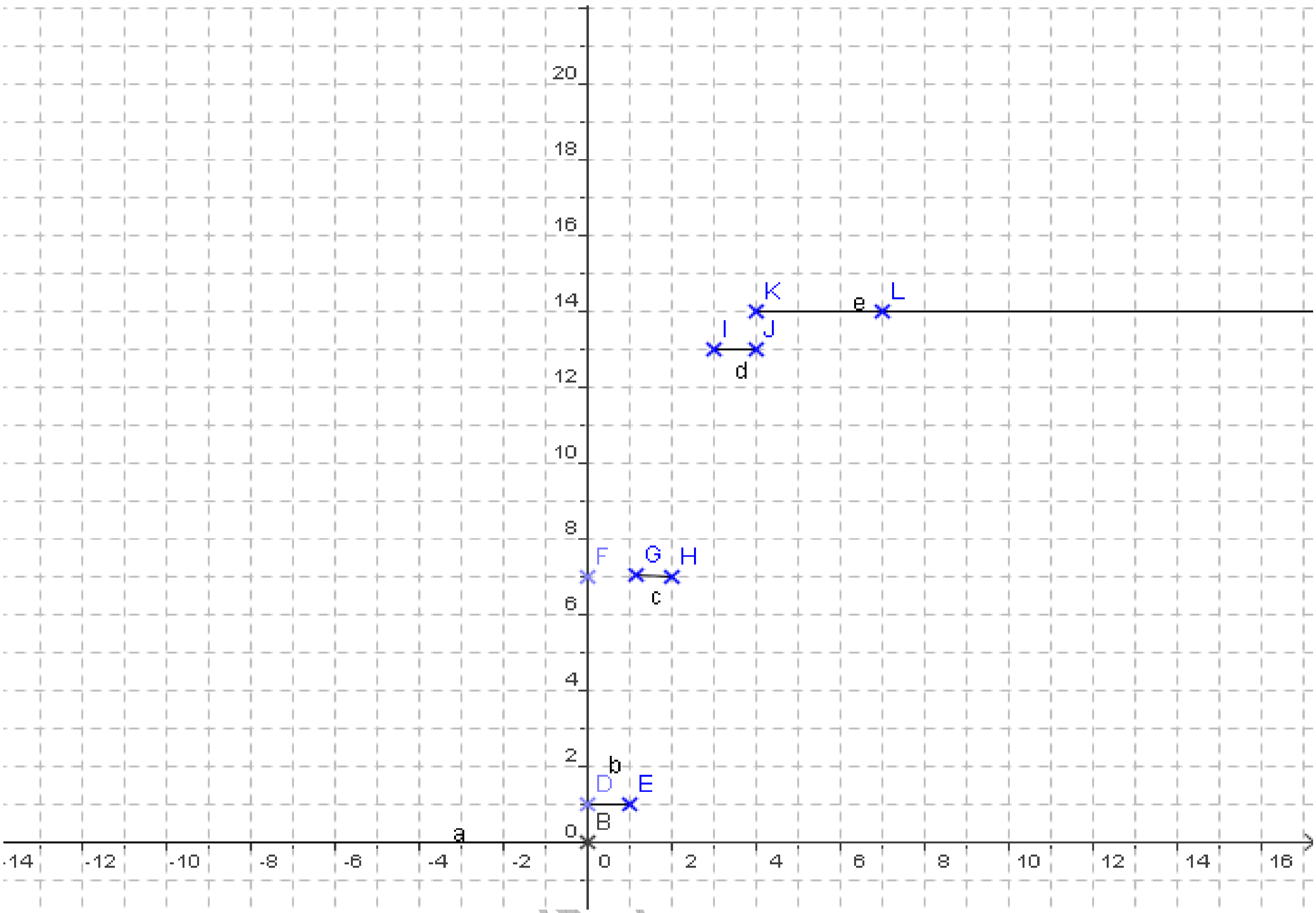
Si X = 0, on disposera de 4 × 15 = 60 kg de viande , si X = 1 de (20 + 3 × 15) = 65 kg de viande, si X = 2 de ((40 + 30) = 70 kg de viande , si X = 3 de (60 + 15) = 75 kg de viande .

Donc $P(B) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \dfrac{3}{7} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{14} = \mathbf{\dfrac{13}{14}}$ **.**

b) On constate, d'après la question précédente, que $A \subset B$ car, si on a tué au moins 2 moutons, cela entraîne qu'il y aura assez da viande (au moins 65 kg) .

D'où : $P(B| A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = \mathbf{1}$.

$P(B| A) \neq P(B)$, donc **A et B ne sont pas indépendants .**



Représentation graphique de la fonction de répartition F .

PROBLEME

I.1°) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables .

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $g'(x) = -e^{-x} + x\,e^{-x} = (x - 1)\,e^{-x}$ (formule de dérivation d'un produit) .

$g'(x)$ est donc du signe du $(x - 1)$. Le tableau de variation de g en découle .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
g	$+\infty$ ↘	$1 - e^{-1}$	↗ 1

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = 1 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 .$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - x\,e^{-x} = 1 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} -x\,e^{-x} = +\infty .$$

I . 2°) On en déduit que $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

II 1. a f est continue et dérivables sur $]-\infty\,;-1[$ comme composée de de deux fonctions : continues et dérivables : $x \mapsto -x$ et $x \mapsto \ln x$.
f est continue sur $]-1\,;+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues et dérivables : $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto 1+e^{-x}$.
Etudions la continuité et la dérivabilité en -1 .

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \ln(-x) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)(1+e^{-x}) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{f est continue en 0 .}$$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{\ln(-x)}{x+1}$. Faisons le changement de variable $u = -x$. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{\ln(-x)}{x+1} = \lim\limits_{u \to 1^+} \dfrac{\ln u}{-u+1} = \lim\limits_{u \to 1^+} -\dfrac{\ln u}{u-1} = -1$.

Ainsi **f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1) = -1$.**

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(x+1)(1+e^{-x})}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} 1 + e^{-x} = 1 + e$.

Ainsi **f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 1 + e$.**

Conclusion générale : f est continue sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Au point d'abscisse -1 , la courbe de f présente deux demi-tangentes de coefficients directeurs -1 et $1 + e$.

II.1.b) $\forall\, x \in\,]-\infty\,;-1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x} < 0$.

$\forall\, x \in\,]-1\,;+\infty[$, $f'(x) = 1 + e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = 1 - x\,e^{-x} = g(x) > 0$ d'après I .
f est donc décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f '(x)	$-$	|	$+$
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-x) = +\infty$ comme on le voit en appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée, ou alors en faisant le changement le variable $u = -x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + \dfrac{x+1}{e^x} = +\infty$

(car $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x} = 0$.

II. 2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{e^x} = 0$: **la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$.**

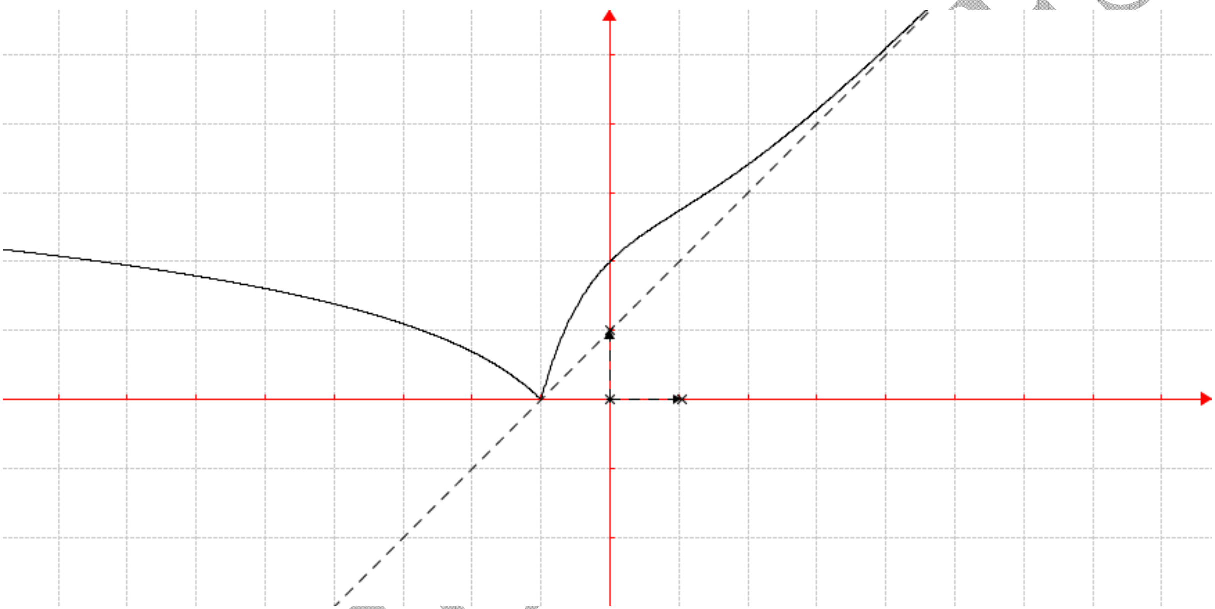
D'autre part, $f(x) - (x+1) = \dfrac{x+1}{e^x} < 0$ $\forall\, x \in\,]-1\,;+\infty[$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$

sur] — 1 ; + ∞ [.

II. 3 Si x est l'abscisse d'un point où la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$, on doit avoir f ' (x) = 1 ⇔ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 1 \text{ et } x < -1 \ (1) \\ \quad \text{ou} \\ 1 - x e^{-x} = 1 \text{ et } x > -1 \ (2) \end{cases}$

La condition (1) étant manifestement impossible et la condition (2) entraînant que x e^{-x} = 0, soit x = 0 , on en déduit que le point cherché est le point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$: il est unique .

II. 4



II. 5. a) D'après le tableau de variation du II . 1 . b) f est continue et strictement croissante de [— 1 ; + ∞ [vers [0 ; + ∞ [, donc réalise une bijection de [— 1 ; + ∞ [vers J = [0 ; + ∞ [.

II. 5. b) Voir figure ci-dessus .

III.a) A(λ) = $\int_{-1}^{\lambda}[f(x)-(x+1)]dx = \int_{-1}^{\lambda}(x+1)(1+e^{-x}-1)dx = \int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx$.

Intégrons par parties en posant :u (x) = x + 1 et v ' (x) = e^{-x} , d'où :u ' (x) =1 et v(x) = — e^{-x}

A(λ) = $\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{\lambda} + \int_{-1}^{\lambda} e^{-x}dx$ = — (λ + 1) $e^{-\lambda}$ + $\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{\lambda}$. Après calculs :

$$\mathbf{A(\lambda) = (-\lambda - 2)\, e^{-\lambda} + e^{-1}} .$$

III. b) $\lim\limits_{x \to +\infty} A(\lambda) = e^{-1}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\lambda - 2)\, e^{-\lambda} = 0$.

Cette limite représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation y = x + 1 (ensemble infini de points, mais dont l'aire est finie !) .

BAC S2 2000 1er groupe . SOLUTION

EXERCICE 1

1°) a) $Z_2 - Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d'où : $\mathbf{Z_2 - Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ **.**

$Z_3 - Z_1 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d'où : $\mathbf{Z_3 - Z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$ **.**

b) $$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}$$

et, puisque $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$, on a : $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$, soit :

$$\mathbf{\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}} \quad \mathbf{(1)}$$

On a aussi : $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$, soit :

$$\mathbf{\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)} \quad \mathbf{(2)}$$

En comparant les écritures (1) et (2), on en déduit que :

$\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$ et $\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$.

2°) a) A_1 est le centre de la similitude directe S et on a : $Z_3 - Z_1 = \frac{1}{4}\,e^{i\frac{\pi}{12}}(Z_2 - Z_1)$

d'après la question précédente . On en déduit que : $\left|\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right| = \frac{1}{4}$ et $\arg\left(\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) = \frac{\pi}{12}$,

d'où : $A_1A_3 = \frac{1}{4}A_1A_2$, donc le rapport de la similitude S est $\frac{A_1A_3}{A_1A_2} = \frac{1}{4}$, et d'autre part :

$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \frac{\pi}{12}$, donc l'angle de la similitude S est $\frac{\pi}{12}$.

Comme de plus, $S(A_1) = A_1$,on peut conclure que :

S est la similitude directe de centre A_1 , de rapport $\frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

b) On a : $Z' - Z_1 = \frac{1}{4}\,e^{i\frac{\pi}{12}}(Z - Z_1)$ soit , d'après les calculs précédents,

$$Z' = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}\right)Z + 1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Z' = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}\right)Z + \frac{16 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{16}}$$

Si $Z = b = 1 - 4\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$, alors $Z - Z_1 = - 4\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$

d'où : $Z' - Z_1 = \frac{1}{4}\ e^{i\frac{\pi}{12}}\left(- 4\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$,

soit : : $Z' - Z_1 = -\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow Z' = Z_1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} =. \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

L'image B ' de B par S a donc pour affixe **b ' =** $\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$ **.**

EXERCICE 2

1°) a) Comme les (p_i) forment une suite arithmétique de raison $\frac{1}{30}$, on a :

$$p_i = p_1 + \frac{i - 1}{30} \text{ (pour } 1 \leq i \leq 6) . (\ast) .$$

D'autre part, $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$ donc,

$p_1 + \left(p_1 + \frac{1}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{2}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{3}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{4}{30}\right) + \left(p_1 + \frac{5}{30}\right) = 1$, soit :

$6\ p_1 + \frac{15}{30} = 1 \Rightarrow$ $\mathbf{p_1 = \frac{1}{12}}$ **.**

b) Il en résulte, d'après ($\ast$) que : $p_2 = p_1 + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} \Rightarrow$ $\mathbf{p_2 = \frac{7}{60}}$ et de même :

$$\mathbf{p_3 = \frac{3}{20}\ ; \quad p_4 = \frac{11}{60}\ ; \quad p_5 = \frac{13}{60}\ ; \quad p_6 = \frac{1}{4}\ .}$$

2°) a) L'ensemble des valeurs possibles de X est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

La probabilité d'obtenir un numéro pair avec ce dé est : $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$.

L'expérience aléatoire qui consiste à tirer trois fois avec remise un jeton correspond à un schéma de Bernoulli de paramètres n = 3 (nombre d'épreuves) et $p = \frac{11}{20}$ (probabilité du succès) .

$p(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{11}{20}\right)^0 \left(\frac{9}{20}\right)^3 =$ **0,091125** ; $p(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{11}{20}\right)^1 \left(\frac{9}{20}\right)^2 =$ **0,334125** .

$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{11}{20}\right)^2 \left(\frac{9}{20}\right)^1 =$ **0,408375** ; $p(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{11}{20}\right)^3 \left(\frac{9}{20}\right)^0 =$ **0,166375**

Les résultats peuvent être résumés dans le tableau suivant :

X_i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = X_i)$	**0,091125**	**0,334125**	**0,408375**	**0,166375**

b) E(X) = np pour une loi binomiale, d'où : $\mathbf{E(X) = \frac{33}{20}}$

$\sigma(X) = \sqrt{npq}$ pour une loi binomiale, d'où : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{33}{20} \times \frac{9}{20}}$ soit $\boldsymbol{\sigma(X) \simeq 3,85}$.

3°) a) L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons à 2 éléments (paires) de l'ensemble des 6 jetons .

Donc card $\Omega = C_6^2 = 15$.

Les valeurs possibles de S sont les valeurs de $| i — j |$ pour i et j éléments de {1, 2, 3, 4, 5, 6} .
Donc la plus petite valeur de S est 1 et sa plus grande valeur est 5 .
(S = 1) est constitué des paires suivantes :{1 , 2} , {2 , 3} , {3 , 4} , {4 , 5} , {5 , 6} .

D'où : $P (S = 1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

(S = 2) est constitué des paires suivantes :{1 , 3} , {2 , 4} , {3 , 5} , {4 , 6} .

D'où : $P (S = 2) = \frac{4}{15}$.

(S = 3) est constitué des paires suivantes :{1 , 4} , {2 , 5} , {3 , 6} .

D'où : $P (S = 4) = \frac{3}{15} = \frac{1}{3}$.

(S = 4) est constitué des paires suivantes :{1 , 5} , {2 , 6} .

D'où : $P (S = 5) = \frac{2}{15}$.

Enfin, (S = 5) est constitué de la paire :{1 , 6}. D'où : $P (S = 5) = \frac{1}{15}$.

On obtient donc pour S la loi de probabilité suivante :

S_i	**1**	**2**	**2**	**4**	**5**
$P(S = S_i)$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{4}{15}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{2}{15}}$	$\mathbf{\frac{1}{15}}$

b) Cette probabilité est : $P (S = 4) + P (S = 5) = \frac{5}{15} = \mathbf{\frac{1}{3}}$.

<u>PROBLEME</u>

<u>Partie A</u>

1°) a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f (x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x\, e^{\frac{1}{x}}$. Effectuons le changement de variable : $u = \frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0^- , u tend vers $— \infty$ et $x = \frac{1}{u}$.

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} f (x) = \lim\limits_{u \to — \infty} \frac{e^u}{u} = \mathbf{0}$ (car $\lim\limits_{u \to — \infty} \frac{1}{u} = 0$ et $\lim\limits_{u \to — \infty} e^u = 0$) .

$\lim\limits_{x \to 0^+} f (x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(1 + x) = \mathbf{0}$ (car $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1 + x) = \ln 1 = 0$) .

Enfin $f (0) = 0 \times \ln (1 + 0) = \mathbf{0}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} f (x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f (x) = f (0) = 0$: **f est continue en $x_0 = 0$** .

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f (x) — f (0)}{x — 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \mathbf{0}$ (car : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = — \infty$) .

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f (x) — f (0)}{x — 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x \ln(1 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1 + x) = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: **f est dérivable en 0 et f ' (0) = 0** .

2°) a) f est dérivable sur] — ∞ ; 0 [comme produit et composée de fonctions dérivables .

$\forall\ x < 0$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

or, si x < 0, on a : x — 1 < 0 et x < 0 , d'où $\left(\dfrac{x-1}{x}\right) > 0$ et comme $e^{\frac{1}{x}} > 0$, on peut conclure

que : **$\forall$ x < 0 , f ' (x) > 0** .

b) f est dérivable sur]0 ; + ∞ [comme produit et composée de fonctions dérivables .

$\forall\ x > 0$, $f'(x) = \ln(1 + x) + \dfrac{x}{1 + x}$. f ' est elle-même dérivable sur]0 ; + ∞ [comme somme de deux fonctions dérivables et on a : $\forall\ x > 0$, $f''(x) = \dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{(1 + x)^2} > 0$.

f ' est donc strictement croissante sur]0 ; + ∞ [, et comme f ' (0) = 0 , on en déduit que :

$\forall$ x > 0 , f ' (x) > 0 .

c) Le tableau de variation de f découle de l'étude de signe ci-dessus .

x	— ∞ 0 + ∞
f ' (x)	— | +
f	— ∞ ↗ + ∞

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u \to 0^-} \dfrac{e^u}{u} =$ « $\dfrac{1}{0^-}$ » $= -\infty$. (on a posé $u = \dfrac{1}{x}$) .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1 + x) = +\infty$.

3°) En faisant le changement de variable suggéré par l'énoncé, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim\limits_{u \to 0^-} \dfrac{e^u - 1}{u} = \mathbf{1}$, car quand x tend vers — ∞ , u tend vers 0^- .

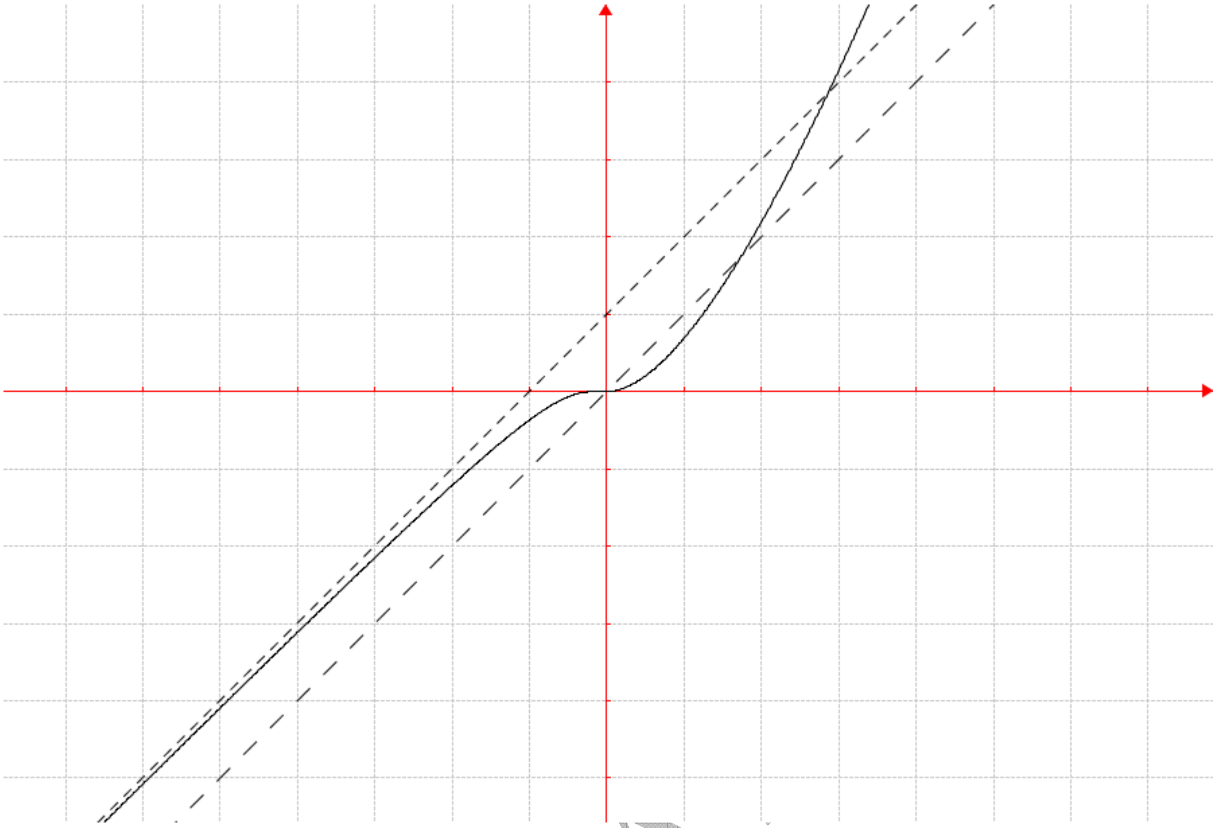
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1 = 1 - 1 = \mathbf{0}$, d'après 3° a) .

Donc la droite (D) : y = x + 1 est asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de — ∞ .

4°) a) L'abscisse x du point d'intersection I de ($\mathscr{C}$) et (Δ) (x > 0) est telle que :

$x \ln(1 + x) = x \Leftrightarrow x(\ln(1 + x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) = 1$ (car $x \neq 0$) $\Leftrightarrow 1 + x = e$

$\Leftrightarrow x = e - 1$ et puisque I appartient à la droite d'équation y = x , les coordonnées de I sont :
I (e — 1 , e — 1) .



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$: **($\mathscr{C}$) admet en + ∞ une branche parabolique de direction (O , $\vec{j}$) .**

<u>**Partie B**</u>

1°) Par réduction au même dénominateur, $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$, d'où en identifiant les numérateurs : a = 1 ; a + b = 0 ; b + c = 0 soit : a = 1 ; b = — 1 ; c = 1 .

Autrement dit, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ (∗) .

2°) La fonction F telle que : $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

Posons u (t) = ln (1 + t) et v ' (t) = t d'où : $u'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

$F(x) = \left[\dfrac{t^2 \ln(1+t)}{2}\right]_0^x - \dfrac{1}{2}\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t}dt = \dfrac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^x \left(t - 1 - \dfrac{1}{t+1}\right)dt$ d'après la question précédente . D'où :

$F(x) = \dfrac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{2} - t - \ln(t+1)\right]_0^x = \dfrac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x+1)$.

Finalement, on obtient bien : $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}(x^2 - 2x)$.

3°) En unités d'aires : $\mathscr{A} = \int_0^{e-1}[x - f(x)dx] = \left[\frac{x^2}{2} - F(x)\right]_0^{e-1} = \frac{(e-1)^2}{2} - F(e-1) + F(0)$

$= \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{(e-1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{4}\,[(e-1)^2 - 2(e-1)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 4e + 3)$.

Finalement, on trouve : $\mathscr{A} = e - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \simeq 0,621$ u.a.

Soit en cm^2 : $\mathscr{A} = 4e - e^2 - 1 \simeq$ **2,484 cm²** .

Partie C

1°) a) D'après le tableau de variation ci-dessus, f est continue et strictement croissante, doc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. f admet par conséquent une fonction réciproque f^{-1} .

b) $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$. $f'(0) = 0$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en 0 (car $f'(f^{-1}(0)) = 0$)
La tangente en 0 à la courbe de f étant horizontale (car ayant pour coefficient directeur $f'(0) = 0$) , la tangente en 0 à la la courbe de f^{-1} , qui est sa symétrique par rapport à la première bissectrice, est **verticale** .

2°) Voir figure .

3°) ($\mathscr{D}$) est constituée de deux domaines symétriques par rapport à (Δ) , donc de même aire . L'un de ces domaines a pour aire le réel $\mathscr{A}$ calculé au B. 3° . L'aire de ($\mathscr{D}$) est donc : $2\mathscr{A} = 8e - 2e^2 - 2 \simeq$ **4,968 cm² .**

Commentaire : Sujet relativement difficile et exigeant pour le réussir une maîtrise parfaite de (presque) tout le programme !

BAC S2 1999 Remplacement SOLUTION

EXERCICE 1

1°) Posons a = iα . a est solution de (E) si et seulement si $-(i\alpha)^3 + 6(i\alpha) - 20i = 0$, ce qui équivaut à $i(\alpha^3 + 6\alpha - 20) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + 6\alpha - 20$. On remarque que 2 est solution évidente .
En utilisant par exemple la méthode de Hörner , $\alpha^3 + 6\alpha - 20$ se factorise en :
$\alpha^3 + 6\alpha - 20 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 10)$. Le trinôme $\alpha^2 + 2\alpha + 10$ n'ayant pas de racines (son discriminant Δ est négatif) , il en résulte que nécessairement α = 2 , d'où : **a = 2i** .

Par suite, (E) $\Leftrightarrow (z - 2i)(pz^2 + qz + r) = 0$, p, q, r étant des nombres complexes .
En développant et en identifiant avec le premier membre de (E) , on obtient :
p = — 1, r = 10, q = — 2i . D'où :

(E) $\Leftrightarrow (z - 2i)(-z^2 - 2iz + 10) \Leftrightarrow z = 2i$ ou : $-z^2 - 2iz + 10 = 0$ .Le discriminant de cette dernière équation est : $\Delta = (-i)^2 + 10 = 9$. On obtient les solutions :
$z_1 = 3 - i$ et $z_2 = -3 - i$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

S = { 3 — i ; — 3 — i ; 2i }.

2°) $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{3-i-2i}{-3-i-2i} = \dfrac{3-3i}{-3-3i} = \dfrac{(1-i)(-1+i)}{2} = i$. Il en résulte que:

$$\left|\frac{\mathbf{b-a}}{\mathbf{c-a}}\right| = \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{arg}\left(\frac{\mathbf{b-a}}{\mathbf{c-a}}\right) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

Ces relations se traduisent géométriquement par : AB = AC et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$.

donc le triangle ABC est **rectangle et isocèle** .

3°) a) $r : z \mapsto z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. r (A) a pour affixe $a' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2i = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2i$, soit :

$$\mathbf{a' = -\sqrt{3} + i} .$$

b) $z' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i} < 0 \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i}\right) = \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = \pi\ [2\pi]$.

L'ensemble E est donc le segment [AA '] privé des points A et A' .

c) M ' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si | z ' | = 1 , ce qui équivaut à : $\left|\dfrac{z-2i}{z+\sqrt{3}-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2i| = |z+\sqrt{3}-i| \Leftrightarrow MA = MA'$.

L'ensemble F est donc la médiatrice du segment [AA '] .

EXERCICE 2

1°) **a) °)** $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \dfrac{0{,}9 + 1{,}2 + 0{,}6 + 0{,}5 + 1{,}4 + 1}{6} = \dfrac{5{,}6}{6} = \dfrac{14}{15} \simeq 0{,}933$

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{6} = \dfrac{37 + 40 + 33 + 33 + 41 + 35}{6} = \dfrac{219}{6} = 36{,}5$.

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2}{6} - \overline{x}^2$$. Numériquement, on obtient :

$$V(x) = \frac{0{,}9^2 + 1{,}2^2 + 0{,}6^2 + 0{,}5^2 + 1{,}4^2 + 1^2}{6} - (0{,}93)^2 = 0{,}1051 \Rightarrow \sigma_x \simeq 0{,}314$$

$$V(y) = \frac{\sum_{i=1}^{6} y_i^2}{6} - \overline{y}^2$$. Numériquement, on obtient :

$$V(y) = \frac{37^2 + 40^2 + 33^2 + 33^2 + 41^2 + 35^2}{6} - (36{,}5)^2 \simeq 9{,}92 \Rightarrow \sigma_y \simeq 3{,}149 .$$

$$\text{cov}(x , y) = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i y_i}{6} - \overline{x}\ \overline{y} =$$

$$\frac{(0{,}9 \times 37) + (1{,}2 \times 40) + (0{,}6 \times 33) + (0{,}5 \times 33) + (1{,}4 \times 41) + (1 \times 35)}{6} - (0{,}933 \times 36{,}5)$$

soit : cov(x , y) $\simeq$ 0,933 . on en déduit que $r_1 = \frac{\text{cov}(x , y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{0{,}933}{0{,}314 \times 3{,}149} \simeq 0{,}942$.

Ainsi le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\mathbf{r_1 \simeq 0{,}942}$.

$$\overline{z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} z_i}{6} = \frac{3{,}9 + 3{,}7 + 3{,}2 + 3{,}3 + 3{,}6 + 3{,}7}{6} \simeq 3{,}56$$

$$V(z) = \frac{\sum_{i=1}^{6} z_i^2}{6} - \overline{z}^2$$. Numériquement, on obtient :

$$V(z) = \frac{3{,}9^2 + 3{,}7^2 + 3{,}2^2 + 3{,}3^2 + 3{,}6^2 + 3{,}7^2}{6} - (3{,}56)^2 = 0{,}1064 \Rightarrow \sigma_z \simeq 0{,}326 .$$

$$\text{cov}(x , z) = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i z_i}{6} - \overline{x}\ \overline{z} =$$

$$\frac{(0{,}9 \times 3{,}9) + (1{,}2 \times 3{,}7) + (0{,}6 \times 3{,}2) + (0{,}5 \times 3{,}3) + (1{,}4 \times 3{,}6) + (1 \times 3{,}7)}{6} - (0{,}933 \times 3{,}56)$$

soit : cov(x , z) = 0,0552. on en déduit que $r_1 = \frac{\text{cov}(x , z)}{\sigma_x \times \sigma_z} = \frac{0{,}0552}{0{,}324 \times 0{,}326} \simeq 0{,}522$.

Ainsi le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z est : $\mathbf{r_1 \simeq 0{,}522}$.

b) L'ajustement est d'autant plus justifié que r est proche de1 .
r_1 étant plus proche de 1 que r_2 , on en déduit que c'est l'ajustement entre X et Y qui donne une meilleure estimation de X .

3°) $D_{y/x}$ a pour équation : $y - \overline{y} = a (x - \overline{x})$ avec $a = \frac{\text{cov}(x , y)}{V(x)}$.

soit : $D_{y/x}$: $y - 36{,}5 = \frac{0.933}{0{,}1051} (x - 0{,}933) \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = 9{,}43\, x + 27{,}69.}$

Si Y = 39, on obtient en remplaçant dans l'équation précédente : $x = \frac{39 - 27{,}69}{9{,}43} \simeq 1{,}2$.

On aura donc besoin de **1,2 tonnes de matières premières** pour espérer avoir un chiffre d'affaires de 39000 Francs .

PROBLEME

Partie A

1°) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \mathbf{0}$ (car $\lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{1}{x^2} =$ « $\frac{-1}{0^+}$ » $= -\infty$) .

D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \ln 1 = \mathbf{0}$.

Comme f (0) = 0 , il en résulte que : **f est continue en 0** .

2°) a) $\forall\ x \in]\,0\,;1\,[\ ,\ \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{1-x}{1+x}$ et (1 — x) et (1 + x) sont tous deux positifs sor l'intevalle] 0 ; 1 [. Donc :

$$\forall\ x \in]\,0\,;1\,[\ \ \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{x} = \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x} = \mathbf{\frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{x}}\ .$$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{u \to -\infty} u\, e^{-u^2}$ (on a posé $u = \frac{1}{x}$; quand x tend vers 0^-, u tend vers $-\infty$) $= \lim\limits_{v \to +\infty} -v\, e^{-v^2}$ (en faisant le changement de variable v = — u) .

Or, $\ln\left(v\, e^{-v^2}\right) = \ln v - v^2$. Donc :

$\lim\limits_{v \to +\infty} \ln\left(v\, e^{-v^2}\right) = \lim\limits_{v \to +\infty} \ln v - v^2 = \lim\limits_{v \to +\infty} v\left(\frac{\ln v}{v} - v\right) = -\infty$,

(car $\lim\limits_{v \to +\infty} v = +\infty$ et $\lim\limits_{v \to +\infty} \frac{\ln v}{v} = 0$ donc $\lim\limits_{v \to +\infty} \left(\frac{\ln v}{v} - v\right) = -\infty$) .

Finalement, on obtient : $\lim\limits_{v \to +\infty} \ln\left(v\, e^{-v^2}\right) = -\infty$, ce qui entraîne que :

$\lim\limits_{v \to +\infty} v\, e^{-v^2} = 0$ et par conséquent : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$.

On en conclut que **f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.**

D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ (d'après a)) .

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = -2$.

En effet, on sait d'après le cours que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et en faisant le changement de variable v = — x , $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim\limits_{v \to 0^-} -\frac{\ln(1+v)}{v} = -1$.

On en conclut que **f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -2$.**

Les dérivées à droite et à gauche de f en 0 étant distinctes, **f n'est pas dérivable en 0 .**

c) D'après les calculs précédents, ($\mathscr{C}$) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur $f'_g(0) = 0$, donc de vecteur directeur $\vec{i}$, et une demi-tangente à droite de coefficient directeur $f'_d(0) = -2$, donc de vecteur directeur $\vec{i} + 2\vec{j}$.
La demi-tangente à gauche a pour équation : $y = 0$.
La demi-tangente à droite a pour équation : $y = -2x$.

3°) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ 0 , 1 \}$ comme composée de fonctions dérivables .

$\forall$ x $\in$] $-\infty$; 0 [, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$, par application de la formule : $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$.

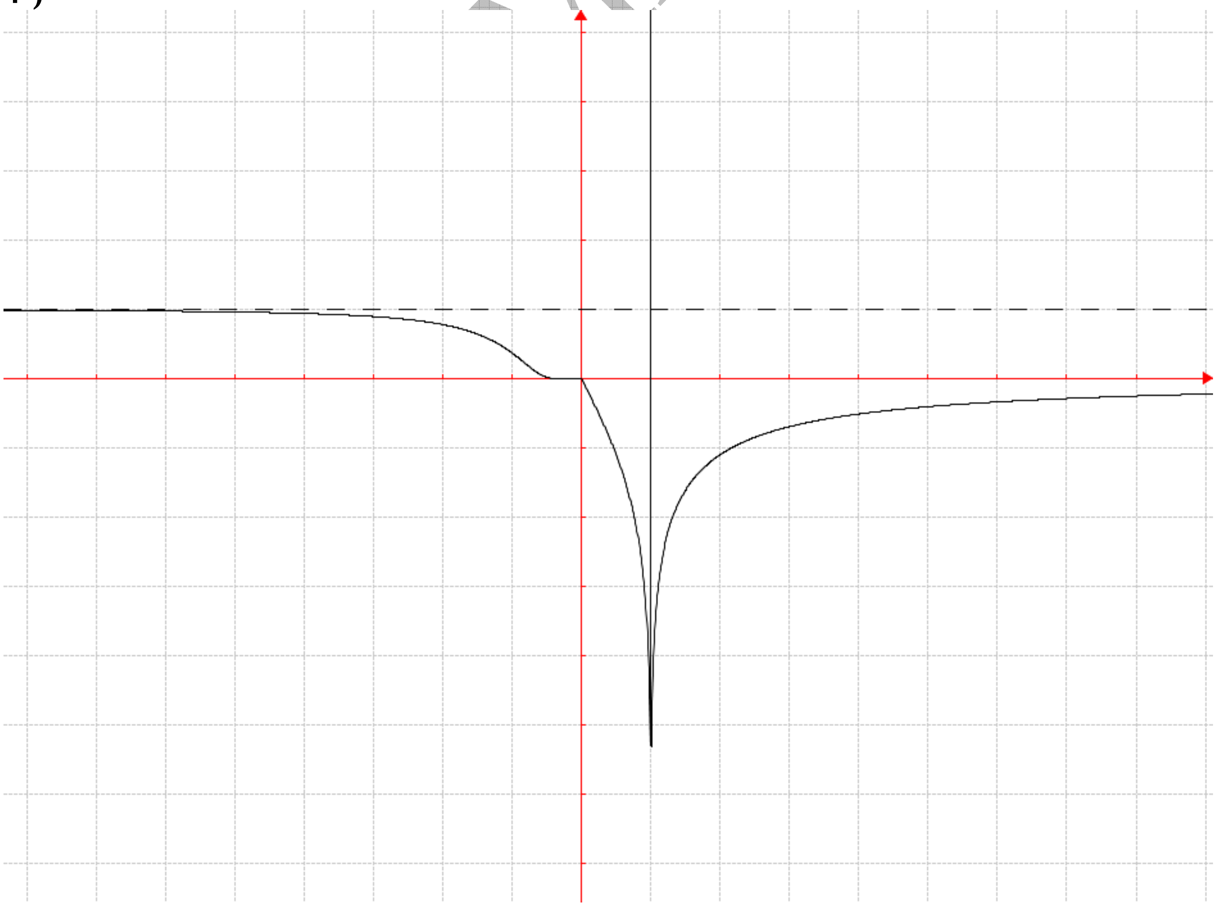
$\forall$ x $\in \mathbb{R}_+ \setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ par application de la formule :

$$[\ln |u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)} .$$

f ' (x) est donc négative sur] $-\infty$; 0 [et sur] 0 ; 1 [et positive sur] 1 ; $+\infty$ [.
Le tableau de variation de f en découle .

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f ' (x)		$-$	||	$-$	||	+	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$		|| $-\infty$	↗	0

4°)



Partie B

1°) D'après le tableau de variation de A. 3° , g est continue et strictement croissante, donc bijective sur] 1 ; + ∞ [.L'intervalle J est] — ∞ ; 0 [.

2°) — e ∈] — ∞ ; 0 [, donc — e a un antécédent (unique !) par g puisque g est bijective .

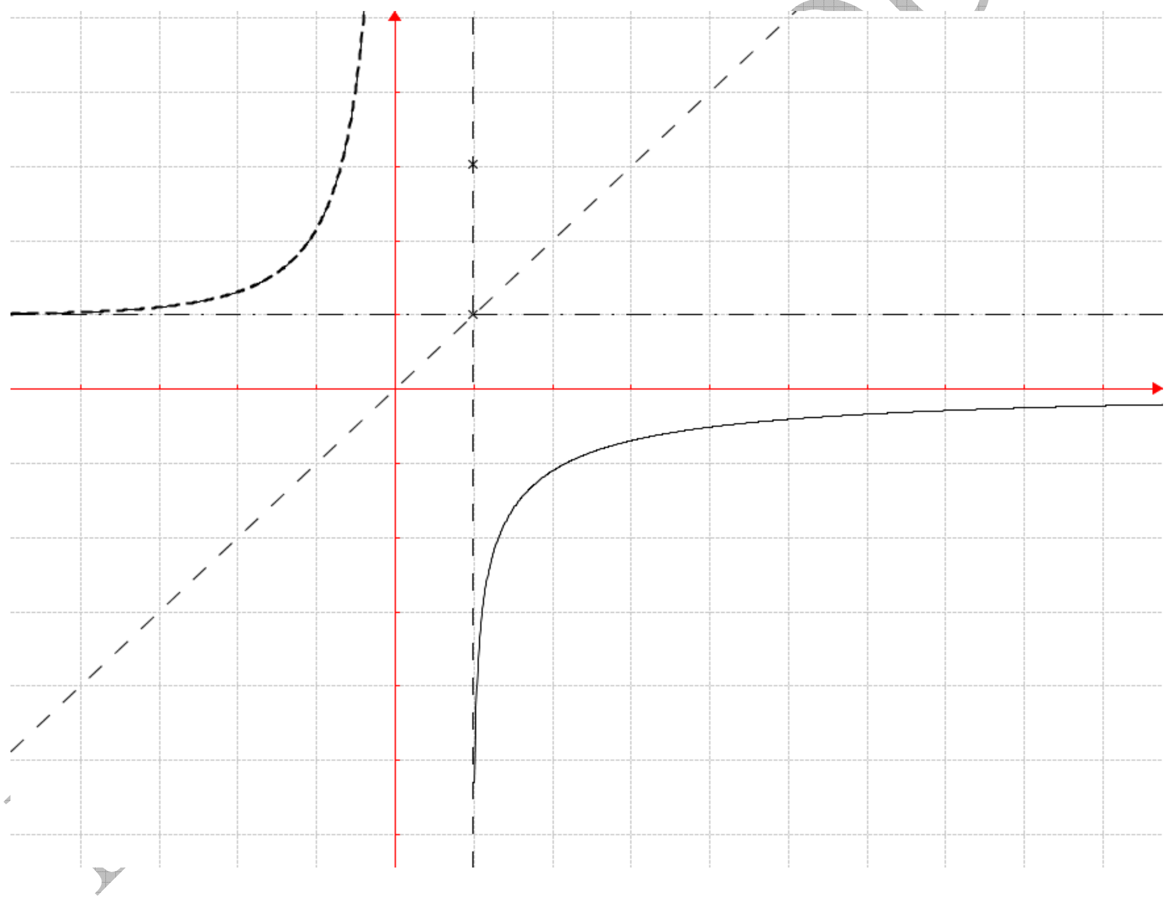
3°) Soit x ∈] — ∞ ; 0 [

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \ln \dfrac{y-1}{y+1} = x \Leftrightarrow \dfrac{y-1}{y+1} = e^x \Leftrightarrow y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Donc : $\forall\ x \in]-\infty ; 0[$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Or, on vérifie aisément que : $1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1} = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. D'où l'égalité : $\mathbf{g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}}$.

4°)



$\mathscr{C}$ g admet une asymptote verticale d'équation x = 1 et une asymptote horizontale d'équation y = 0 . $\mathscr{C}$ h admet une asymptote horizontale d'équation y = 1 et une asymptote verticale d'équation x = 0 .

5°) . $\mathscr{A} = 4 \times \int_{-\ln 7}^{-1} g^{-1}(x)dx = 4 \times \int_{-\ln 7}^{-1} \left(1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}\right)dx = 4 \times \left[x - 2\ln\left|e^x - 1\right|\right]_{-\ln 7}^{-1}$

$= 4\,[-1 - 2\ln(1 - e^{-1}) + \ln 7 + 2\ln(1 - e^{-7})] = \mathbf{4\left(\ln 7 - 1 + 2\ln \dfrac{1 - e^{-7}}{1 - e^{-1}}\right)}$

BAC S2 1999 2ème groupe SOLUTION

EXERCICE 1

1°) $| — 1 + i \tan a | = \sqrt{1 + \tan^2 a} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 a}} = \dfrac{1}{\cos a}$

(car cos a est positif, puisque $a \in \left] —\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[$) . Ainsi $\mathbf{| — 1 + i \tan a | = \dfrac{1}{\cos a}}$

On a donc : $— 1 + i \tan a = \dfrac{1}{\cos a}(— \cos a + i \sin a) = \dfrac{1}{\cos a}(\cos (\pi — a) + i \sin (\pi — a))$.

D'où l'on déduit que : $\mathbf{\arg (— 1 + i \tan a) = \pi — a}$ **.**

2°) f_a est une similitude directe de rapport $\mathbf{\dfrac{1}{\cos a}}$, d'argument $\mathbf{\pi — a}$, de centre le point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{— i \tan a + 2}{1 — (— 1 + i \tan a)} = \dfrac{— i \tan a + 2}{2 — i \tan a} = \mathbf{1}$. (Rappelons que le centre d'une similitude directe d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ a toujours pours pour affixe $\dfrac{b}{1 — a}$) .[2]

3°) r_a est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{1}{\cos a}$. Son écriture complexe est donc :

$z' — \omega = e^{\frac{i}{\cos a}} (z — \omega)$ avec $\omega = 1$, soit : $\mathbf{z' = e^{\frac{i}{\cos a}} z + 1 — e^{\frac{i}{\cos a}}}$.

EXERCICE 2

1°) $P(S \cap N) = P(N \mid S) \times P(S)$. $P(N \mid S)$ est la probabilité de tirer une boule noire de l'urne U_2 , donc $P(N \mid S) = \dfrac{1}{3}$. $P(S) = \dfrac{1}{6}$. D'où : $\mathbf{P(S \cap N) = \dfrac{1}{18}}$.

De même : $P (\overline{S} \cap N) = P(N \mid \overline{S}) \times P(\overline{S})$. $P(N \mid \overline{S})$ est la probabilité de tirer une boule noire de l'urne U_1 , donc $P(N \mid \overline{S}) = \dfrac{3}{4}$. $P(\overline{S}) = \dfrac{5}{6}$. D'où : $\mathbf{P(\overline{S} \cap N) = \dfrac{5}{8}}$.

2°) $P(N) = P(S \cap N) + P(\overline{S} \cap N) = \dfrac{1}{18} + \dfrac{5}{8} \Rightarrow \mathbf{P(N) = \dfrac{49}{72}}$ **.**

3°) $P(S \mid \overline{N}) = \dfrac{P(S \cap \overline{N})}{P(\overline{N})}$. Or, $P(S \cap \overline{N}) + P(S \cap N) = P(S)$, donc :

$P(S \cap \overline{N}) = P(S) — P(S \cap N) = \dfrac{1}{6} — \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{9}$; et $P(\overline{N}) = 1 — P(N) = 1 — \dfrac{49}{72} = \dfrac{23}{72}$

Finalement, on obtient : $\mathbf{P(S \mid \overline{N}) = \dfrac{8}{23}}$.

EXERCICE 3

1°) a) $U_{n+1} = \exp\left(1 — \dfrac{n+1}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{1 — n}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{1}{2} — \dfrac{n}{2}\right) = \exp\left(— \dfrac{1}{2} + 1 — \dfrac{n}{2}\right)$

$= e^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(1 — \dfrac{n}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \times U_n$.

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $e^{-\frac{1}{2}}$, de premier terme $U_1 = \exp(1) = e$.

b) $V_{n+1} = \ln U_{n+1} = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}} \times U_n\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + \ln(U_n) = -\frac{1}{2} + \ln(U_n) = -\frac{1}{2} + V_n$.

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

2°) a) S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{-\frac{1}{2}}$, de premier terme e , donc $S_n = e \times \dfrac{1 - e^{-\frac{n+1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}$; en remarquant que : $e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, et en réduisant au même dénominateur, on obtient après simplification : $S_n = e\sqrt{e}\left(\dfrac{1 - e^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{e} - 1}\right)$.

$\ln P_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} V_n$ (car le logarithme d'un produit de réels positifs est égale à la somme des leurs logarithmes) . Cette dernière somme est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$, de premier terme $V_0 = \ln U_0 = \ln e = 1$. D'où :

$\sum\limits_{i=0}^{i=n} V_n = (n+1)\dfrac{V_0 + V_n}{2}$. Or, $V_n = 1 - \dfrac{n}{2}$ d'après 1° b. D'où : $\sum\limits_{i=0}^{i=n} V_n = (n+1)\dfrac{4 - n}{4}$.

Par conséquent : $P_n = \exp\left((n+1)\dfrac{4-n}{4}\right)$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\frac{n+1}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \mathbf{\dfrac{e\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\dfrac{4-n}{4} = -\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \mathbf{0}$.

<u>**EXERCICE 4**</u>

1°) f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$\forall\, x \in [\,0\,;+\infty\,[,\ f'(x) = 2e^{2x} + 4 > 0$. f est donc strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - 2 = -1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x = +\infty$).

f étant continue et strictement monotone (croissante) réalise une bijection de $I = [\,0\,;+\infty\,[$ vers $\mathbf{J = [\,-1\,;+\infty\,[}$.

2°) 0 étant un élément de J, 0 a un antécédent unique par la bijection f, en d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans I .

$f(0{,}1) \simeq -0{,}378$. $f(0{,}2) \simeq 0{,}29$. $f(0{,}1) \times f(0{,}2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires f prend au moins une fois la valeur 0 sur l'intervalle $[\,0{,}1\,;0{,}2\,]$.

D'où $\alpha \in [\,0{,}1\,;0{,}2\,]$.

BAC S2 1999 1^{er} groupe SOLUTION

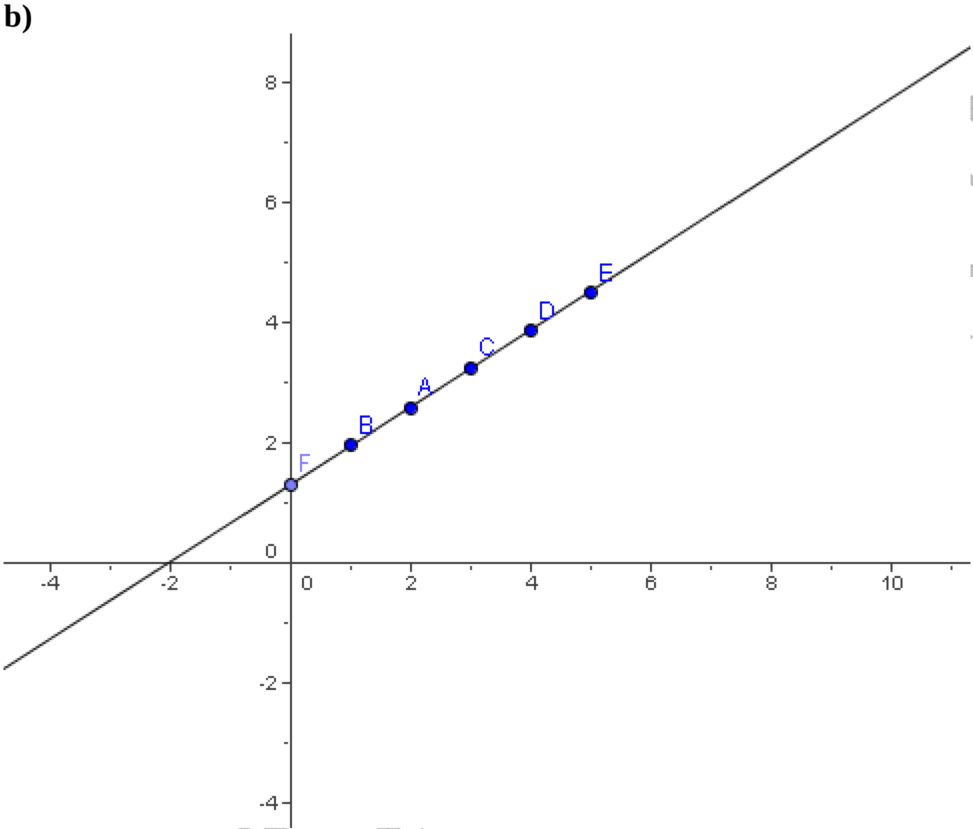
EXERCICE 1

1°) a) On trouve, en calculant les valeurs de ln P :

$y_1 = \ln 7 \simeq \mathbf{1{,}94591}$; $y_2 = \ln 13 \simeq \mathbf{2{,}56494}$; $y_3 = \ln 25 \simeq \mathbf{3{,}21887}$;

$y_4 = \ln 47 \simeq \mathbf{3{,}85014}$; $y_5 = \ln 88 \simeq \mathbf{4{,}47733}$.

b)



2°) Pour avoir les paramètres de la série statistique (X , Y) , nous présentons les calculs dans un tableau :

x_i	1	2	3	4	5	$\Sigma\, x_i = 15$
y_i	1,94591	2,56494	3,21887	3,85014	4,47733	$\Sigma\, y_i = 16{,}05719$
$x_i\, y_i$	1,94591	5,1388	9,65661	15,40056	22,38665	$\Sigma\, x_i\, y_i = 54{,}52853$
x_i^2	1	4	9	16	25	$\Sigma\, x_i^2 = 55$
y_i^2	3,7865	6,5789	10,3611	14,8235	20,0464	$\Sigma\, y_i^2 = 55{,}5964$

$\overline{x} = \frac{1}{5} \times \Sigma\, x_i = 3$; $\overline{y} = \frac{1}{5} \times \Sigma\, y_i = 3{,}21$; $\sigma_{xy} = \frac{1}{5}\, \Sigma\, x_i\, y_i - \overline{x} \times \overline{y} = 1{,}27.$

$V(x) = \frac{1}{5}\ \Sigma\, x_i^2 - \overline{x}^{\,2} = 2$. L'équation de la droite de régression de Y en X est :

$y - \overline{y} = a\,(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{V(x)} = 0{,}635$, d'où:

$$\mathbf{D_{y/x} : y = 0{,}635\ x + 1{,}3\ .}$$

3°) Le poids P au bout de six mois est, en utilisant la droite d'ajustement précédente, P tel que ln P = 0,635 × 6 + 1,3 soit ln P $\simeq$ 5,11 , d'où : P = $e^{5,11}$ $\simeq$ **165, 7 mg** .

EXERCICE 2

1°) a) Soit a une solution réelle éventuelle de (E) . On doit avoir :

$a^3 + (3 - 2i)\, a^2 + (1 - 4i)\, a - 1 - 2i = 0$, soit en séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$a^3 + 3\,a^2 + a - 1 - i\,(2a^2 + 4a + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3\,a^2 + a - 1 = 0 \\ 2a^2 + 4a + 2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant la seconde équation, on trouve que a = — 1 , et la première équation est également satisfaite pour a = — 1. Ainsi la solution réelle est **— 1** .

b) Utilisons la méthode de Hörner pour factoriser le premier membre de (E) .

	1	3 — 2i	1 — 4i	— 1 — 2i
— 1		— 1	— 2 + 2i	1 + 2i
	1	2 — 2i	— 1 — 2i	0

(E) $\Leftrightarrow$ $(z + 1)\,[\, z^2 + (2 - 2i)\, z - (1 + 2i)] = 0$. Le trinôme entre crochets a pour discriminant : $\Delta' = (1 - i)^2 + 1 + 2i = 1$; d'où les racines : $z' = -2 + i$ et $z'' = i$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : **S = { — 1 ; — 2 + i ; i }** .

2°) a) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-2 + i + 1}{i + 1} = \dfrac{i - 1}{i + 1} = \dfrac{(i - 1)^2}{(i + 1)(i - 1)} = \dfrac{-2i}{-2} = i$. Donc:

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

b) Les deux relations précédentes se traduisent géométriquement par : AB = AC et $(\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$ .Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A .

c) D'après a) , $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Rightarrow z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}\,(z_C - z_A) \Rightarrow z_C - z_A) = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,(z_B - z_A)$

On déduit de cette écriture que la similitude de centre A, de rapport 1, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, transforme B en C .

N.B. *Cette similitude n'est autre que la rotation de centre A et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$.

PROBLEME **Partie A**

1°) Pour x $\in$] — ∞ ; — 1 [$\cup$] — 1 ; 0 [, f (x) existe si et seulement si x ≠ 1 (or, 1 n'est pas élément de cet ensemble) et pour x $\in$ [0 ; + ∞ [, f (x) est toujours définie. on en conclut que :

D_f =] — ∞ ; — 1 [$\cup$] — 1 ; 0 [$\cup$ [0 ; + ∞ [.

$$f(-2) = 2 + \ln\left|\frac{-2 - 1}{-2 + 1}\right| = 2 + \ln 3\ .$$

$$f(3) = 3^2\, e^{-3} = \frac{9}{e^3}\ .$$

2°) • $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x + \ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| = 0$ (car : $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| = \ln 1 = 0$.)

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{-x} = 0$ (car : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$) .

• $f(0) = 0^2 e^{-0} = 0$.

Ces trois calculs entraînent que f est continue en 0 .

3°) a) Si $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{(x+1)^2} \times \dfrac{x-1}{x+1}$

$= 1 + \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \boldsymbol{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ **.**

Si $x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x)\ \ 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = \boldsymbol{x e^{-x} (2 - x)}$.

b) • $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - \dfrac{\ln(1-x)}{-x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - 1 - 1 = \mathbf{-1}$.

(Rappelons que : $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$) .

f est donc dérivable à gauche de 0 et : $f'_g(0) = -1$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x e^{-x} = 0$

(car $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$) .

f est donc dérivable à droite de 0 et : $f'_d(0) = 0$.

On en conclut que **f n'est pas dérivable en 0** . Au point d'abscisse 0, la courbe présente un point anguleux (deux demi-tangentes de directions différentes) .

3°) Le signe de f ' (x) découle des expressions de f ' (x) trouvées en A. 3° a) . On obtient :

x	$-\infty$	0
$x^2 + 1$	+	+
$x^2 - 1$	+	$-$
$\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	+	$-$

x	0	2 $\quad +\infty$
f ' (x)	+	$-$

d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
f ' (x)		+	‖	$-$		+		$-$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$4\,e^{-2}$	↘	0

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty$$

(car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \ln 1 = 0$.)

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$$

(car $\lim\limits_{x \to -1^-} x = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$) .

De manière analogue, on montre que : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

Enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ (en appliquant le théorème de croissance comparée qui dit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.)

4°) D'après le tableau de variation précédent, f est continue et strictement monotone, donc bijective sur $]-\infty\,;-1[$ et l'image de $]-\infty\,;-1[$ par f est $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, 0 a un antécédent unique par f, en d'autres termes, l'équation f (x) = 0 admet une solution unique dans $]-\infty\,;-1[$. Nommons α cette solution . $f(-1{,}6) \simeq -0{,}13$; $f(-1{,}5) \simeq 0{,}109$.
Comme $f(-1{,}6) \times f(-1{,}5) < 0$, s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]-1{,}6\,;-1{,}5[$; il en résulte donc que $\alpha \in\ ]-1{,}6\,;-1{,}5[$.

5°) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} [\,f(x) - x\,] = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \ln 1 = \mathbf{0}$ (théorème sur la limite d' une fonction composée : on en conclut que la droite d'équation y = x est asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $-\infty$.

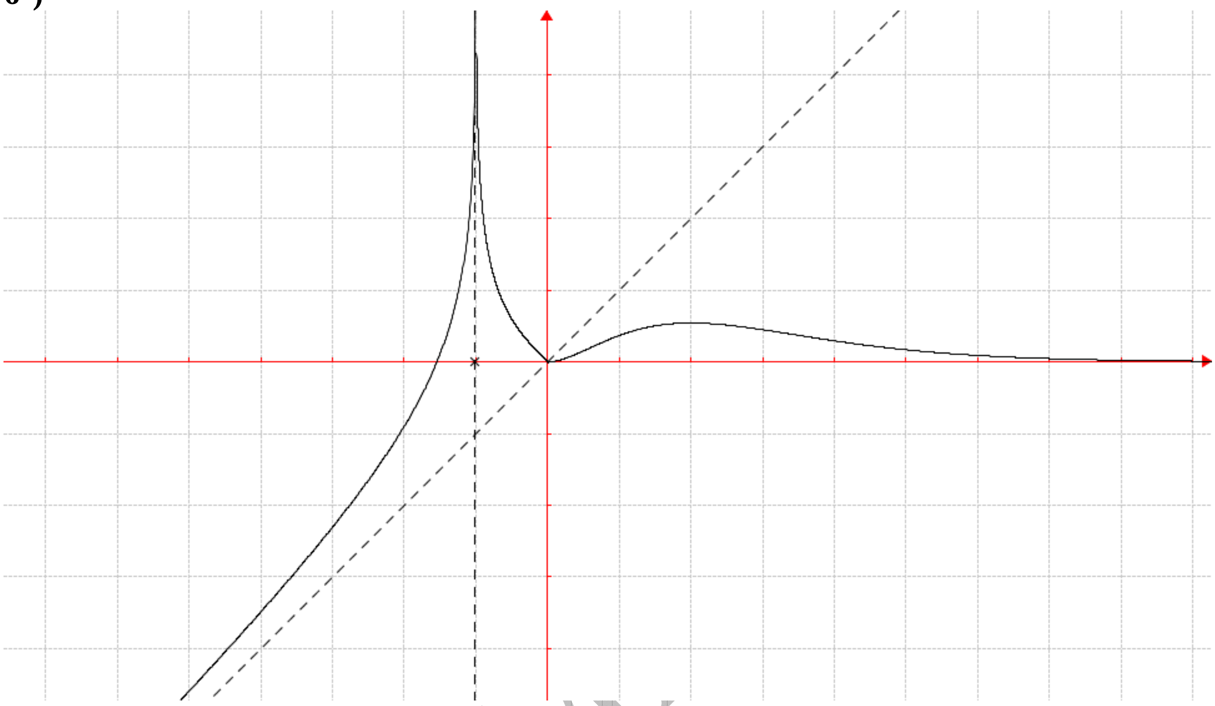
b) Pour $x \in\ ]-\infty\,;-1\,[\ \cup\ ]-1\,;0\,[$, $f(x) - x = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$. Le signe de cette dernière quantité dépend de la place de $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ par rapport à 1 . Résolvons donc : $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 1$. cela revint à : $-1 < \dfrac{x-1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow -1 - \dfrac{x-1}{x+1} < 0$ et $1 - \dfrac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x+1} < 0$ et $\dfrac{2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-1\,;0\,[$.

Conclusion : si $x \in]-1\,;0[$, on a $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 1$, d'où $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 0$,

c'est-à-dire $f(x) - x < 0$: dans ce cas ($\mathscr{C}$) est en-dessous de (D) .

si $x \in]-\infty\,;-1[$, on a $f(x) - x > 0$, d'où : ($\mathscr{C}$) est au-dessus de (D) .

6°)



Partie B

1°) D'après le tableau de variation de la partie A 3), f est continue et strictement croissante, donc bijective de [0 ; 2] vers $J = [0\,;4\,e^{-2}]$.

2°) a) $g^{-1}(x) = 1 \Leftrightarrow x = g(1) \Leftrightarrow x = e^{-1} = \mathbf{\dfrac{1}{e}}$ **.**

b) $g^{-1}{}'\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{g'\left[g^{-1}\left(\dfrac{1}{e}\right)\right]} = \dfrac{1}{g'(1)} = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$. (Application du théorème de la dérivée d'une réciproque) .

3°) On utilise la symétrie d'axe (D) (cf. schéma ci-dessus) .

Partie C

1°) a) $I(\lambda)$ est l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} x^2 e^{-x}\,dx$. Intégrons une première fois par parties en posant :

$u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{-x}$. D'où : $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -e^{-x}$.

On a : I(λ) = $\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{\lambda}$ + 2 $\int_0^{\lambda} x\ e^{-x}dx$ = — λ^2 $e^{-\lambda}$ + 2 $\int_0^{\lambda} x\ e^{-x}dx$.

Posons J (λ) = $\int_0^{\lambda} x\ e^{-x}dx$ et intégrons une deuxième fois par parties en posant :

u (x) = x et v ' (x) = e^{-x} . D'où : u ' (x) = 1 et v (x) = — e^{-x} .

On a : J(λ) = $\left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda}$ + $\int_0^{\lambda} e^{-x}dx$ = — λ $e^{-\lambda}$ + $\left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}$ = — λ $e^{-\lambda}$ — $e^{-\lambda}$ + 1 .

En reportant , on obtient finalement :

$$\mathbf{I(\lambda) = -\lambda^2 e^{-\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda} + 2 .}$$

2°) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty}$ **I (λ) = 2** (car, dans l'expression de I(λ) , tous les termes en $e^{-\lambda}$ ont pour limite 0 quand λ tend vers + ∞ .

3°) a) I (2) = — 10 e^{-2} + 2 (en remplaçant par 2 dans l'expression de I(λ)) .

b) Par symétrie orthogonale d'axe (D) , l'aire étant invariante par symétrie, cette aire est la même que celle limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) , l'axe des abscisses , l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 2, soit I (2) . Elle vaut donc : **4 (— 10 e^{-2} + 2) cm²** , soit à peu près 2,586 cm² .

BAC S2 1998 Remplacement SOLUTION

EXERCICE 1

a) Posons $z = z_1$ avec $z_1 \in \mathbb{R}$. L'équation devient : $i\, z_1^2 + (1 - 5i)\, z_1 + 6i - 2 = 0$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient : $z_1 - 2 + i\,(z_1^2 - 5\, z_1 + 6) = 0$ d'où nécessairement $\mathbf{z_1 = 2}$. Soit z_2 l'autre solution . On a $z_1\, z_2 = 6i - 2$, d'où $\mathbf{z_2 = 3i - 1}$.

b) $C \in (O, \vec{e_1}) \Rightarrow z_C \in \mathbb{R}$. C est équidistant de M_1 et $M_2 \Leftrightarrow |\, z_C - z_1 \,| = |\, z_C - z_1 \,|$

$\Leftrightarrow |\, z_C - 2 \,| = |\, z_C + 1 + 3i \,| \Leftrightarrow (z_C - 2)^2 = (z_C + 1)^2 + 9 \Leftrightarrow - 4\, z_C + 4 = 2\, z_C + 10$

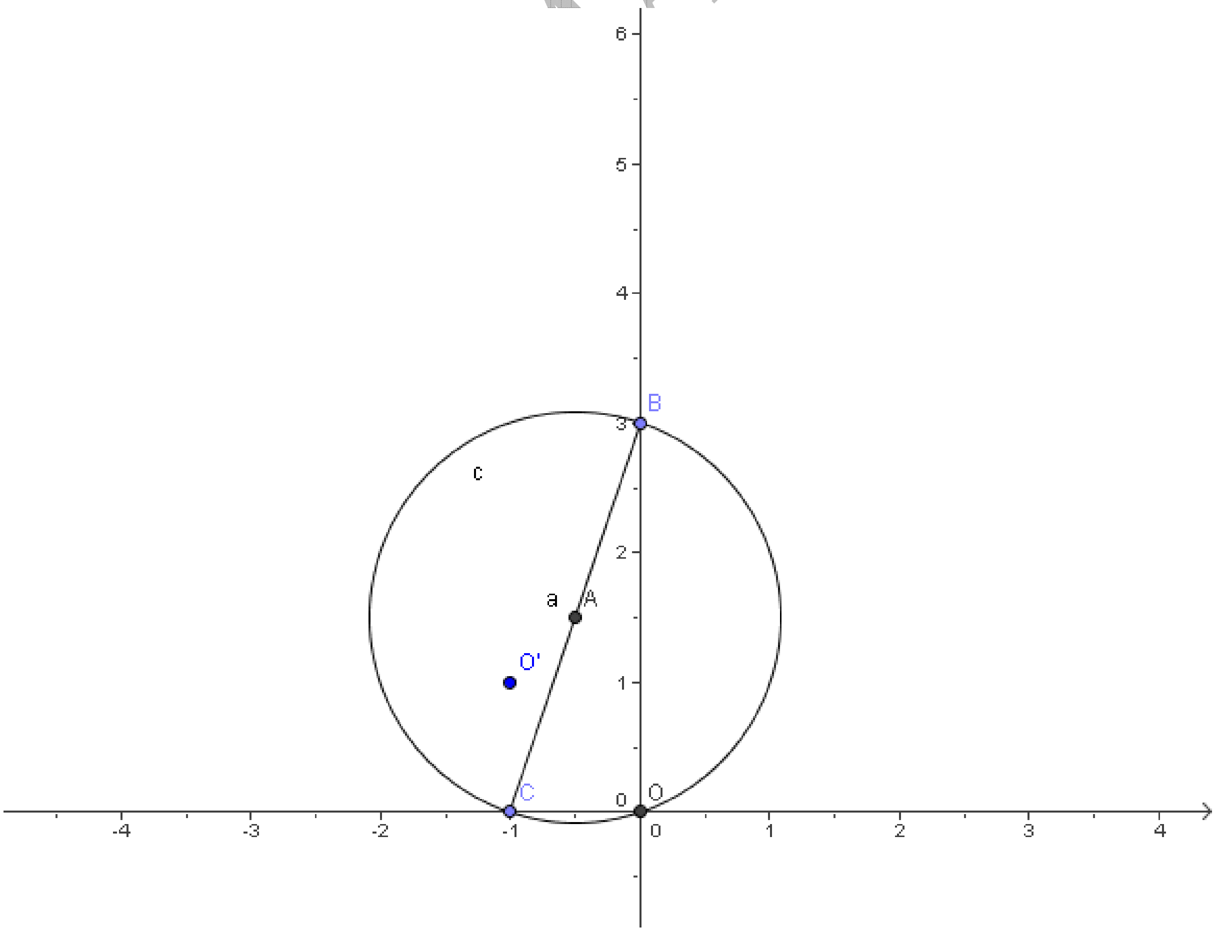
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{z_C = -1}$. Donc C est le point de coordonnées (— 1 ; 0) .

c) α) L'angle de cette rotation est : $(\overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{CM_2}) = \arg\left(\dfrac{z_2 - z_C}{z_1 - z_C}\right) = \arg\left(\dfrac{3i}{3}\right) = \arg(i) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$.

β) R_1 est l'application qui, au point M d'affixe z , associe le point M ' d'affixe z ' telle que : $z' + 1 = i\,(z + 1)$. Si $z = 0$, on obtient : $\mathbf{z' = -1 + i}$.
Donc O ' est le point de coordonnées (— 1 ; 1) .

d) α) $R_2 \circ R_1$ est une rotation, car composée de deux rotations de même centre , d'angle $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, donc une symétrie centrale de centre O..

β) Pour y voir clair, faisons un schéma :



Le triangle BOC est rectangle en C. Le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ à ce triangle est donc le milieu de [BC] , soit le point I d'affixe $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{3i - 1}{2}$ et son rayon est :

$IO = \left| \frac{3i - 1}{2} \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$. L'image de $\mathscr{C}$ par $R_2 \circ R_1$ est donc le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $I' = S_O(I)$ et de même rayon $\mathbf{\frac{\sqrt{10}}{2}}$. I ' a pour affixe $\mathbf{\frac{1 - 3i}{2}}$.

EXERCICE 2

1°) a) $D_f = \mathbb{R}$. $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -x \ln|-x| = -x \ln|x| = -f(x)$: f est impaire .

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$: f est continue en 0 .

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$: f n'est pas dérivable en 0 .

b) $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln x + 1$. Voici le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
g ' (x)		$-$		+	
g	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

2°) a) $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x \ln x \, dx$. On intègre par parties en posant :

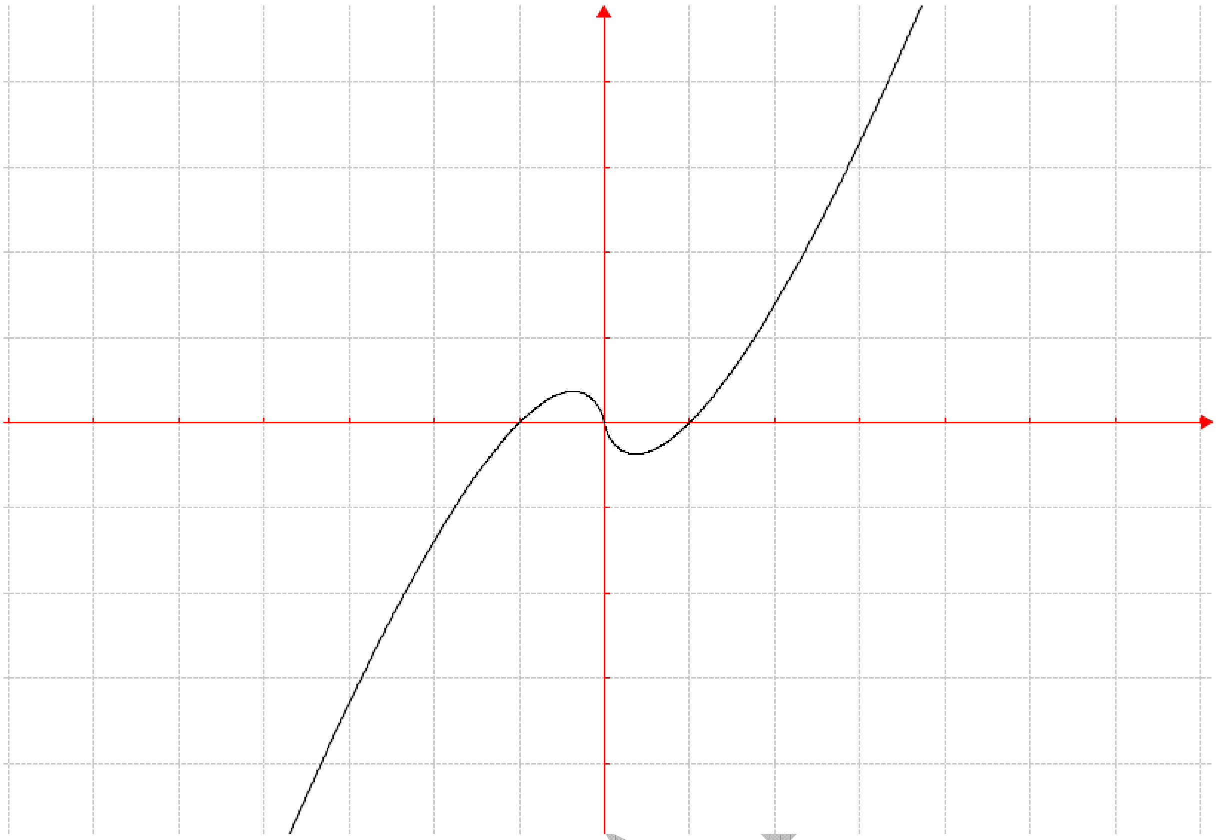
$u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$. D'où : $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$I(\alpha) = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{x}{2} dx = -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \left[\frac{x^2}{4} \right]_\alpha^1 = \mathbf{-\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4}}$.

b) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) = \mathbf{-\frac{1}{4}}$ car : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} \frac{\alpha^2}{4} = 0$.

b) $-\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .

3°)



$-\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et la droite d'équation x = 1.

L'aire demandée vaut : $-2 \lim\limits_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) = \mathbf{\frac{1}{2}}$ U.A.

EXERCICE 3

1°) a) (U_n) est une suite **arithmétique** de raison 2 car : $U_{n-1} - U_n = 2$.

b) Le centième terme est $u_{99} = u_0 + 99 \times 2 = 1 + 198 = \mathbf{199}$.

c) $S = \dfrac{100(1 + 199)}{2} = \mathbf{10\ 000}$.

2°) a) $V_{n+1} = U_{n+1} + 1 = 3 U_n + 3 = 3 V_n$ **:** (V_n) est une suite géométrique de raison **3** , de premier terme $\mathbf{V_0 = 2}$.

b) $V_n = 2 \times 3^n$. $U_n = 2 \times 3^n - 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ (car 3 > 1, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$) : la suite (U_n) **diverge.**

3°) a) $\omega_{n+1} = U_{n+1} - \dfrac{2}{1-a} = a U_n + 2 - \dfrac{2}{1-a} = a U_n - \dfrac{2a}{1-a} = a\left(U_n - \dfrac{2}{1-a}\right) = a\,\omega_n$.

(ω_n) est une suite géométrique de raison **a** , de premier terme $\omega_0 = U_0 - \dfrac{2}{1-a} = 1 - \dfrac{2}{1-a}$, soit $\omega_0 = \mathbf{\dfrac{a+1}{a-1}}$.

b) (ω_n) converge si | a | < 1 . Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n = 0$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \mathbf{\dfrac{2}{1-a}}$.

N.B. Dans le 2°, on a étudié le cas particulier où a = 3, ce qui confirme bien la non-convergence de (U_n) dans ce cas.

EXERCICE 4

1°) Tableau des valeurs de la série statistique (Z, X) :

Z	0	8	14	21	28	36
X	3984	3011	2460	1652	1448	982

2°) $\overline{z} = \frac{1}{6} \times \Sigma z_i = 17{,}833$; $\overline{y} = \frac{1}{6} \times \Sigma y_i = 2256{,}1667$

$V(z) = \frac{1}{6} \Sigma z_i^2 - \overline{z}^2$ et $\sigma_z = \sqrt{V(z)}$. On trouve : $\sigma_z = 12{,}06$.

$V(y) = \frac{1}{6} \Sigma y_i^2 - \overline{y}^2$ et $\sigma_y = \sqrt{V(y)}$. On trouve : $\sigma_y = 1019{,}67$.

$\sigma_{xy} = \frac{1}{6} \Sigma z_i y_i - \overline{z} \times \overline{y} = \frac{169\,116}{6} - (17{,}833 \times 2256{,}1667) = -12\,048{,}96$.

Le coefficient de corrélation linéaire est : $r = \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z \times \sigma_y} \simeq \mathbf{-0{,}9797}$.

r est très proche de -1 : il y a une forte corrélation linéaire entre Z et Y .

3°) $D_{y/z}$ a pour équation : $y - \overline{y} = a(z - \overline{z})$ avec $a = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z^2} \simeq -82{,}82$.

Après calculs, on trouve qu'une équation de $D_{y/x}$ est : $\mathbf{y = -82{,}82x + 3733{,}24}$.

BAC S2 1998 1^{er} groupe SOLUTION

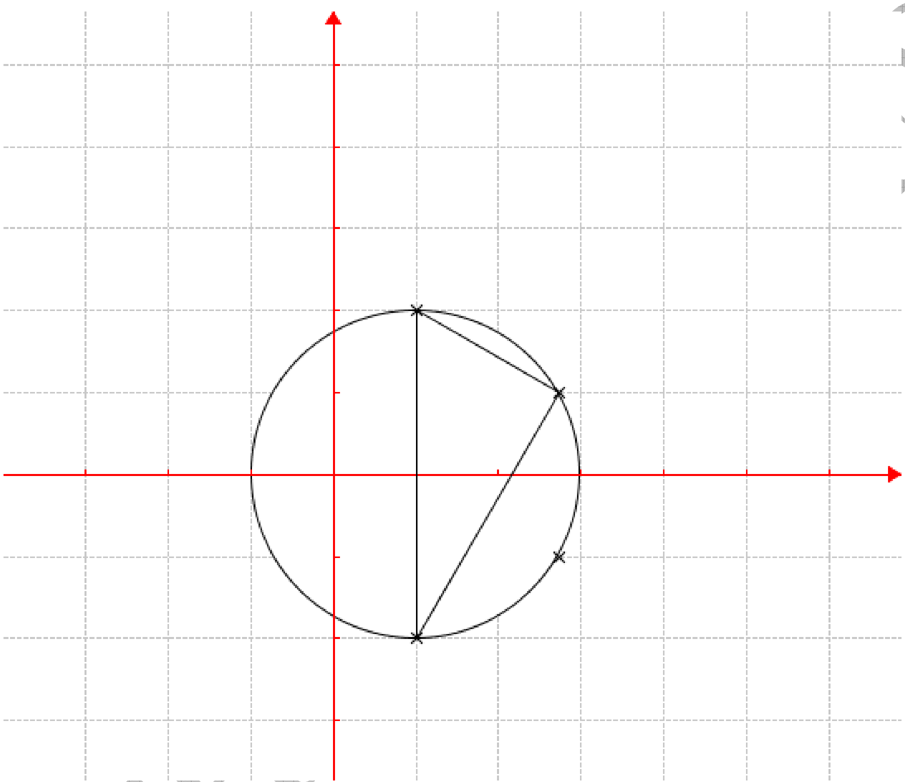
EXERCICE 1

1°) a) $\Delta' = 1 - 5 = 4i^2$. $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 1 - 2i$. $\mathbf{S = \{ 1 + 2i \,;\, 1 - 2i \}}$.

b) $\Delta' = (1+\sqrt{3})^2 - (5 + 2\sqrt{3}) = i^2$. $z_1' = 1 + \sqrt{3} + i$; $z_2' = 1 + \sqrt{3} - i$.

$$\mathbf{S' = \{ 1 + \sqrt{3} + i \,;\, 1 + \sqrt{3} - i \}}$$

2°) a)



b) La vérification est immédiate et laissée au lecteur.

Le triangle ADB est rectangle en B car : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$.

c) D'après ce qui précède, B appartient au cercle de diamètre [AD] . Montrons qu'il en est de même de C.

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1 - 2i - (1 + \sqrt{3} - i)}{1 + 2i - (1 + \sqrt{3} - i)}\right) = \arg\left(\frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + 3i}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{(-\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} - 3i)}{6}\right) = \arg\left(\frac{-4\sqrt{3}\,i}{6}\right) = \arg\left(\frac{-2\sqrt{3}\,i}{4}\right) .$$

Donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{3\pi}{2}$: Les droites (CA) et (CD) sont orthogonales, donc C appartient bien au cercle de diamètre [AD] . **Les points A, C, D, B sont cocycliques** (c'est-à-dire situés sur un même cercle) .Le centre de ce cercle est le milieu de [AD] , c'est-à-dire le point Ω d'affixe

$\omega = \frac{z_A + z_D}{2} = 1$. Ω a donc pour coordonnées **(1 ; 0)** .

Le rayon de ce cercle est $|\omega - z_A| = |1 - (1 + 2i)| = \mathbf{2}$.

3°) a) $\Delta' = (1 + 2\cos\theta)^2 - (5 + 4\cos\theta) = -4 + 4\cos^2\theta = -4\sin^2\theta = 4i^2\sin^2\theta$.

Les racines sont donc: $Z_1 = 1 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta$ et $Z_2 = 1 + 2\cos\theta - 2i\sin\theta$.

b) $|Z_1 - 1| = |2\cos\theta + 2i\sin\theta| = 2\left|e^{i\theta}\right| = 2$.

Donc le point-image de Z_1 appartient au cercle de centre Ω (1 ; 0) et de rayon 2 . la vérification est analogue pour Z_2 .

<u>EXERCICE 2</u>

1°) a) $p(E) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \mathbf{\frac{1}{10}}$; $p(F) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{4}{10} = \mathbf{\frac{2}{5}}$.

b) $p(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \mathbf{\frac{3}{10}}$; $p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \mathbf{\frac{3}{5}}$; $p(X = 2) = p(E) = \mathbf{\frac{1}{10}}$.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

X_i	0	1	2
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

2°) a) Sachant que N_1 est réalisé, la composition de la boîte devient : 3jetons noirs, 3 jetons blancs. La probabilité d'avoir un jeton noir dans ces conditions est : $\frac{3}{6}$, soit

$$\mathbf{p(N_2 \mid N_1) = \frac{1}{2}} .$$

Sachant que B_1 est réalisé, la composition de la boîte devient : 2 jetons noirs, 4 jetons blancs. La probabilité d'avoir un jeton noir dans ces conditions est : $\frac{2}{6}$, soit :

$\mathbf{p\ (N_2 \mid B_1) = \frac{1}{3}}$.

2°) b) $p\ (N_2) = p\ (N_2 \cap N_1) + p\ (N_2 \cap B_1)$ car N_1 et B_1 constituent une partition de l'univers des possibles . D'où : $p(N_2) = p(N_1)\ p\ (N_2 \mid N_1) + p(B_1)\ p\ (N_2 \mid B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$.

En fin de compte : $\mathbf{p\ (N_2) = \frac{2}{5}}$

PROBLEME

1°) a) • $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$. posons $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0^-$, $X \to -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = \lim\limits_{Y \to +\infty} - Y^3 e^{-Y} =$ **0** (poser $Y = - X$ et utiliser les croissances comparées) .

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} x\,(x \ln x) =$ **0** (produit de deux quantités qui tendent vers 0) .

• $f(0) = 0^2 e^{-0} =$ **0** .

Il résulte de ces trois calculs que **f est continue en 0** .

b) • $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} X^3 e^X$ (poser $X = \frac{1}{x}$)

$= \lim\limits_{Y \to +\infty} - Y^3 e^{-Y} = 0$ (poser $Y = - X$ et utiliser les croissances comparées) . Par conséquent, **f est dérivable à gauche de 0 et : $\mathbf{f'_g\ (0) = 0}$** .

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. Par conséquent, **f est dérivable à droite de 0 et : $\mathbf{f'_d\ (0) = 0}$** .

L' égalité de ces deux limites entraîne que f est dérivvable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Interprétation géométrique : Au point d'abscisse 0, la courbe a une tangente horizontale.

2°) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u \to 0^-} u^2 e^u =$ **0** (poser $u = \frac{1}{x}$) .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$ (produit de deux quantités qui tendent vers $+\infty$) .

b) f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. on a vu à la question précédente que f est dérivable en 0 . Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < 0$, on utilise la formule de dérivation d'un produit pour obtenir :

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4}\, e^{\frac{1}{x}} = -\frac{\mathbf{(2x+1)}}{\mathbf{x^4}}\, e^{\frac{1}{x}}$. $f'(x)$ est donc du signe de $-(2x + 1)$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
2 x + 1	$-$		+
f ' (x)	+		$-$

Pour x > 0, la même formule donne :

f ' (x) = 2x ln x + $\dfrac{x^2}{x}$ = **x (2ln x + 1)** . . f ' (x) est donc du signe de 2ln x + 1 .

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
2ln x + 1		—	|	+	
f ' (x)		—	|	+	

c) On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f ' (x)		+		—		—		+	
f	0	↗	$4\,e^{-2}$	↘		↘	$-\frac{1}{2}\,e^{-1}$	↗	$+\infty$

3°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe de f .

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$: la courbe de f admet une branche parabolique de direction (O , $\vec{j}$) au voisinage de + ∞ .

4°) Voir figure ci-dessous .

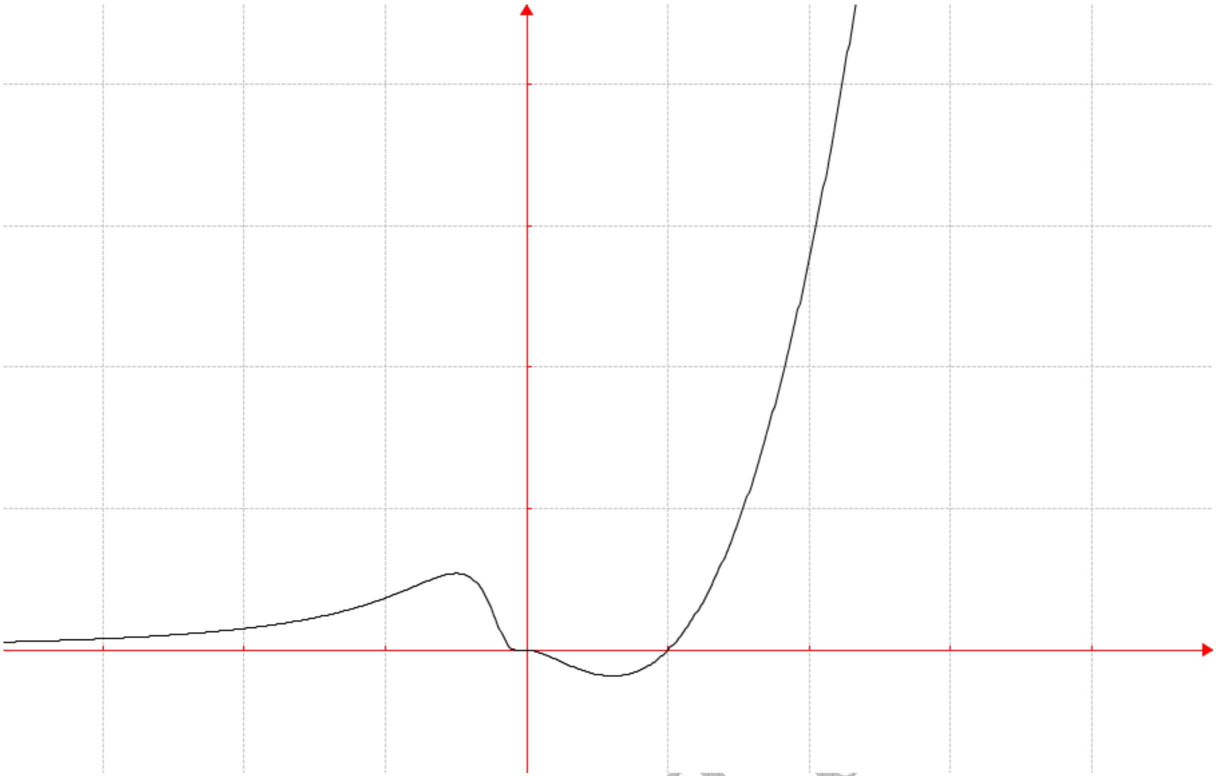
5°) q (α) = $-16\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = -16\int_{\alpha}^{1} x^2 \ln x dx$. Intégrons par parties en posant :

u (x) = ln x et v ' (x) = x² . D'où : u ' (x) = $\dfrac{1}{x}$ et v (x) = $\dfrac{x^3}{3}$.

On a : $\int_{\alpha}^{1} x^2 \ln x dx = \left[\dfrac{x^3 \ln x}{3}\right]_{\alpha}^{1} - \dfrac{1}{3}\int_{\alpha}^{1} \dfrac{x^2}{3}dx = -\dfrac{\alpha^3 \ln \alpha}{3} - \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{x^3}{9}\right]_{\alpha}^{1}$

soit $\mathbf{q(\alpha) = \dfrac{16\,\alpha^3 \ln \alpha}{3} + \dfrac{16}{9} - \dfrac{16\alpha^3}{9}}$.

6°) $\lim\limits_{\alpha \to 0} q(\alpha) = \dfrac{16}{9}$. C'est la valeur en cm², de l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe (O, $\vec{i}$) , l'axe (O , $\vec{j}$) (domaine hachuré ci-dessous) .



<u>J’ai achevé de rédiger ces annales, par la grâce de DIEU, ce 15 Janvier 2007</u>
<u>AL HAMDOU LILLAH !</u>

Bonne chance à tous les candidats qui travailleront avec ce manuel !
Soyez indulgents pour les erreurs que j’ai commises. Aucune œuvre humaine n’est parfaite !

Mouhamadou KA

BAC S2 1997 1er GROUPE ENONCE

EXERCICE 1

1°) a) Calculer le module et l' argument du nombre complexe :

$$\omega = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$$

b) En déduire ses racines carrées

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)\,Z - 4(3 + i\sqrt{3})$$

3°) Soit Z_1 la solution imaginaire pur et Z_2 l' autre solution , montrer que

$$\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i} = \omega$$

4°) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$) , soit, A, B, C les points d'affixes respectives (2i), Z_1 , Z_2 ; préciser la nature du triangle (ABC) en utilisant 1° a.

EXERCICE 2

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre « couleur » : pique, trèfle, carreau et cœur ;

Chaque « couleur »comprend huit cartes dont une carte as.

1) – On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A : « Les trois cartes sont des as »

B : « Il y a au moins 2 couleurs » parmi ces 3 cartes.

C : « Il y a pas d'as parmi les 3 cartes.

2) – On tire successivement avec remise 3cartes du jeu de 32 cartes .Le nombre de cœurs tiré définit une variable aléatoire X. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

PROBLEME

I /

1°) a) Résoudre l' équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 .$$

b) Donner la solution satisfaisant aux conditions suivantes :

$f(0)= 0$ et $f'(0)= -1$

2°) On considère la fonction $g(x) = e^x - e^{2x}$

a) Etudier les variations de g et construire sa courbe représentative Cg dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité 1 cm) .

b) A tout réel β ; on associe (P_β) l' ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient:

$$\begin{cases} \beta \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Hachurer ce domaine ; calculer en cm², l'aire $\mathscr{A}(\beta)$ de ce domaine et la limite de cette aire lorsque β tend vers $-\infty$. $-\infty$

II / On considère la fonction $h : x \mapsto | e^x - e^{2x} |$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^u - 1}{u}$, en justifiant .

2) Etudier la dérivabilité de h à droite ; puis à gauche en 0.

3) Faire l'étude complète de h puis construire $\mathscr{C}_h$ dans un second repère orthonormal

(O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) on représentera les demi tangentes en 0 à $\mathscr{C}_h$.

Ш / On considère la fonction $n(x) = \ln | e^x - e^{2x} |$

1) a/ Préciser le domaine de n.

b/ Démontrer que $n(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$

c/ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x})$

d/ En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ_1 à $\mathscr{C}_n$

On étudiera éventuellement la position de $\mathscr{C}_n$ et Δ_1.

2) a/ Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ $n(x) - x = \ln(1 - e^{x})$

b/ Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - e^{x})$ en déduire l'existence d'une deuxième asymptote Δ_2 à la courbe $\mathscr{C}_n$, étudier leur position.

3) Faire l'étude complète de n et construire $\mathscr{C}_n$ dans un troisième repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

4) Montrer que la restriction φ de n à $\mathbb{R}^*_+$ admet une bijection réciproque φ^{-1} et construire la courbe $(\mathscr{C}')$ de φ^{-1} dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

BAC S2 1997 1^er^ groupe SOLUTION

EXERCICE 1

1°) a)) $|\omega| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. On a $\omega = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\arg \omega = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

b) Lesracines carrées de ω sont les nombres complexes de module 1 de la forme :

$\omega_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)}$ (k = 0 ou k = 1) . On obtient les nombres

$\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $\omega_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\,e^{i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

2°) $\Delta = (\sqrt{3} - 7i)^2 + 16\,(3 + i\sqrt{3}) = -46 - 14\sqrt{3}\,i + 48 + 16i\sqrt{3} = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\,\omega$.

une racine carrée de Δ est donc, d'après 1° b, $2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$**,** soit $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

D'où les solutions de l'équation :

$z_1 = \frac{-\sqrt{3} + 7i + \sqrt{3} + i}{2} = \mathbf{4i}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{3} + 7i - \sqrt{3} - i}{2} = \mathbf{-\sqrt{3} + 3i}$ **.**

3°) $\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2i} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega$.

4°) $\left|\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i}\right| = |\,\omega\,| = 1$ donc $|\,z_2 - 2i\,| = |\,z_1 - 2i\,|$, d'où : AB = AC : le triangle ABC est isocèle . par ailleurs, $\arg\left(\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i}\right) = (\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AB}\,) = \frac{\pi}{3} = \arg \omega$.

Il en résulte que le triangle ABC est équilatéral .

EXERCICE 2

1°) $p\,(A) = \frac{C_4^3}{C_{32}^3} = \mathbf{\frac{1}{1240}}$.

$\overline{B}$ est l'événement :« il n ya qu'une seule couleur parmi ces trois cartes » .

$p(\overline{B}) = 4 \times \frac{C_8^3}{C_{32}^3} = \frac{7}{155}$. d'où : $p(B) = 1 - \frac{7}{155} = \mathbf{\frac{148}{155}}$.

$p(C) = \frac{C_{28}^3}{C_{32}^3} = \mathbf{\frac{819}{1240}}$ **.**

2°) On a affaire à un schéma de Bernoulli de paramètres n = 3 et $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. l'ensembles des valeurs de X est {0 , 1 , 2 , 3 } .

$p(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \mathbf{\frac{27}{64}}$; $p(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \mathbf{\frac{27}{64}}$;

$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \mathbf{\frac{9}{64}}$; $p(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \mathbf{\frac{1}{64}}$.

$E(X) = \frac{(0 \times 27) + (1 \times 27) + (2 \times 9) + (3 \times 1)}{64} = \frac{48}{64} = \mathbf{\frac{3}{4}}$.

PROBLEME

Partie I

1°) a) L'équation caractéristique est: $r^2 - 3r + 2 = 0$. Elle a pour solutions : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions :

$$\mathbf{y = A\,e^{x} + B\,e^{2x}} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

1°) b) $y' = A\,e^x + 2B\,e^{2x}$. $y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$. $y'(0) = -1 \Rightarrow A + 2B = -1$.

D'où le système : $\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \text{ et } B = -1 . \end{cases}$

La fonction cherchée est donc : $\mathbf{f(x) = e^x - e^{2x}}$.

2°) a) $g'(x) = e^x - 2e^{2x} = e^x(1 - 2e^x)$.

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^x \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \ln\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+		$-$
g	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x(1 - 2e^x) = -\infty$

(car : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (1 - 2e^x) = -\infty$.

$g\left(\ln\frac{1}{2}\right) = e^{\ln\frac{1}{2}} - e^{2\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. $g(0) = 0$: $\mathscr{C}_g$ passe par l'origine .

$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - e^x)}{x} = -\infty$

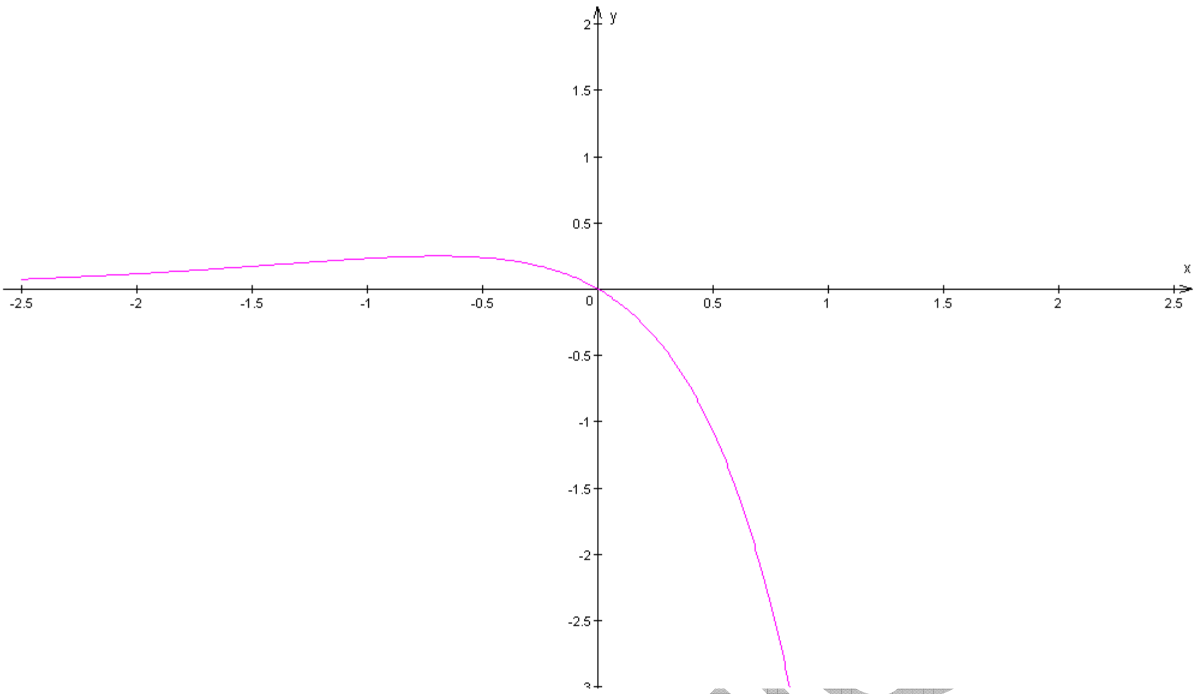
(car $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (1 - e^x) = -\infty$) .

Donc $\mathscr{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Oy) .

Pour la figure, cf, ci-dessous .

b) $\mathscr{A}(\beta) = \int_\beta^0 g(x)dx = \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_\beta^0 = \mathbf{\frac{1}{2} - e^{\beta} + \frac{e^{2\beta}}{2}}$.

$\lim_{\beta \to -\infty} \mathscr{A}(\beta) = \mathbf{\frac{1}{2}}$.



Partie II

1°) La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et $(e^x)' = e^x$. Donc sa dérivée au point $x_0 = 0$ vaut $e^0 = 1$. D'où par définition de la dérivée :

$$\lim_{u \to 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0} = \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 .$$

2°) Pour $x > 0$, , on a : $x < 2x$ donc $e^x < e^{2x}$ d'après la croissance de la fonction exponentielle, d'où $h(x) = e^{2x} - e^x$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^x \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(car $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ d'après II.1° et $\lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$) .

Pour $x < 0$, , on a : $x > 2x$ donc $e^x > e^{2x}$ d'après la croissance de la fonction exponentielle, d'où $h(x) = e^x - e^{2x}$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^x \frac{1 - e^x}{x} = -1 .$$

h n'est donc pas dérivable en 0. Cepandant, au point d'abscisse 0 , $\mathscr{C}$ h admet 2 demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs 1 et — 1 .

3°) • pour $x > 0$, $h'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$.

$h'(x) > 0 \Rightarrow x > \ln\frac{1}{2}$, ce qui est ce qui st toujours vrai si $x > 0$.

• pour $x > 0$, $h'(x) = e^x - 2e^{2x} = e^x(1 - 2e^x)$.

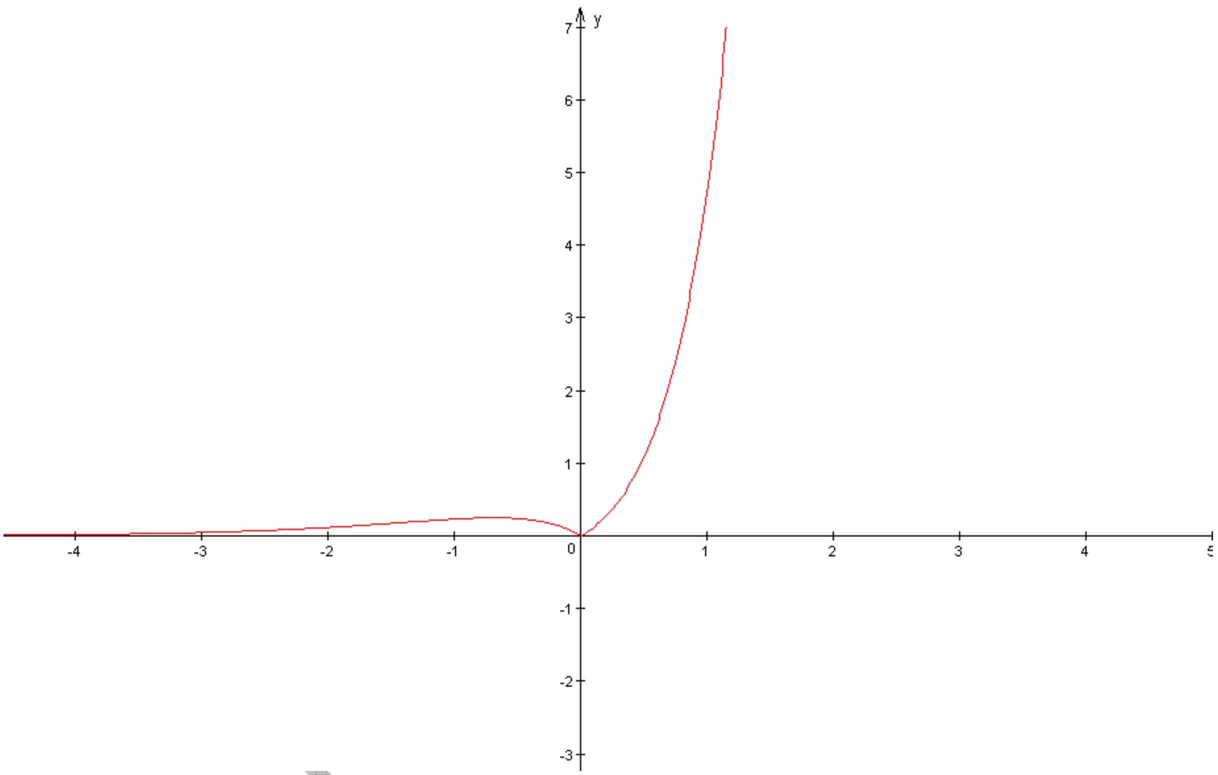
$h'(x) > 0 \Rightarrow x < \ln\frac{1}{2}$.

Le tableau de variation de h est donc:

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x}\,\frac{e^{x} - 1}{x} = +\infty \, .$$

$\mathscr{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) .



Partie III

1°) a) n est définie si et seulement si $e^{x} - e^{2x} \neq 0$. Résolvons $e^{x} - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{x}(1 - e^{x}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$. Donc $D_n = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

b) $\forall\, x > 0$, $n(x) - 2x = \ln(e^{2x} - e^{x}) - 2x = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x})] - 2x$
$= \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x}) - 2x = \ln(1 - e^{-x})$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0$.

d) Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} n(x) - 2x = 0$ et d'autre part, $1 - e^{-x} < 1$ donc $\ln(1 - e^{-x}) < 0$
pour $x > 0$. $\mathscr{C}_n$ admet donc pour asymptote oblique la droite Δ_1 d'équaion $y = 2x$ et $\mathscr{C}_n$ est en-dessous Δ_1 au voisinage de $+\infty$.

2°) a) $\forall\ x < 0$, $n(x) - 2x = \ln(e^x - e^{2x}) - x = \ln[e^x(1 - e^x)] - x$
$= x + \ln(1 - e^x) - x = \ln(1 - e^x)$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - e^x) = \ln 1 = 0$. La droite Δ_2 d'équation $y = x$ est donc asymptote à $\mathscr{C}$n au voisinage de $-\infty$ .Pour $x < 0$, on a $1 - e^x < 1$ donc $\ln(1 - e^x) < 0$.
$\mathscr{C}$n est en-dessous de son asymptote oblique Δ_2 au voisinage de $-\infty$.

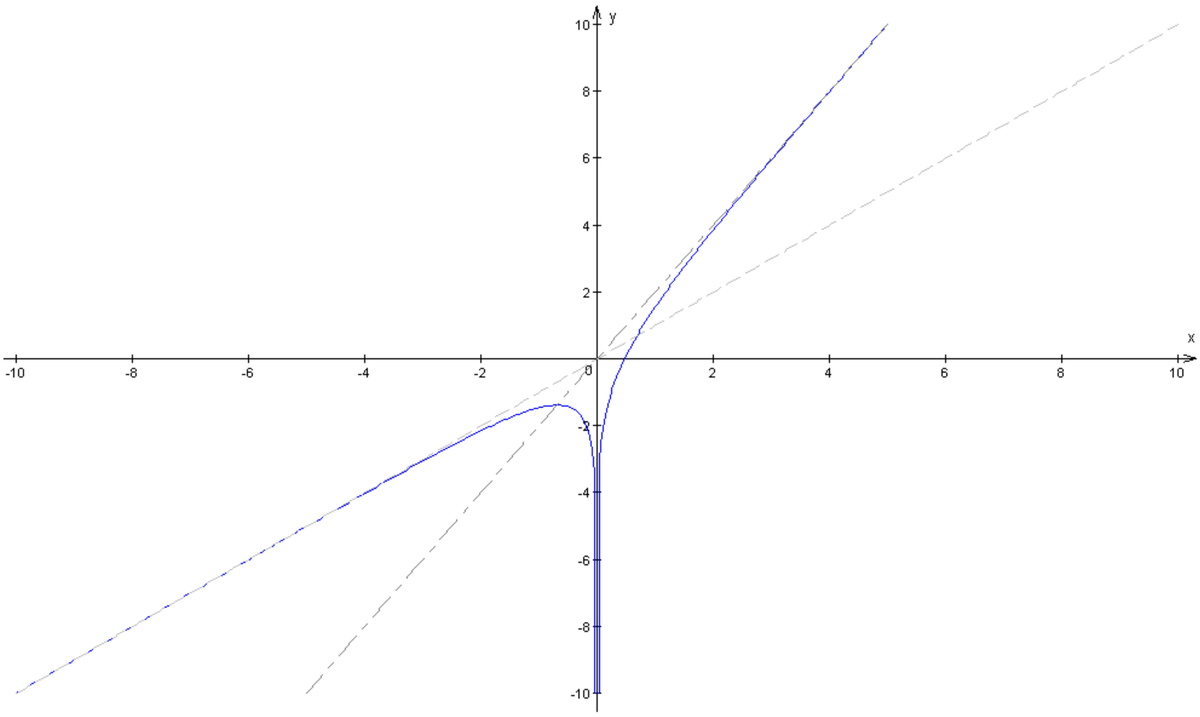
3°) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $n'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{2x}}{e^x - e^{2x}} = \dfrac{1 - 2e^x}{1 - e^x}$

• si $x < 0$, on a $1 - e^x > 0$ et $1\ \ 2e^x > 0 \Leftrightarrow x < \ln\dfrac{1}{2}$.

• si $x > 0$, on a $1 - e^x < 0$ et $1 - 2e^x > 0 \Leftrightarrow x < \ln\dfrac{1}{2}$, ce qui n'est jamais vérifié avec

$x > 0$. Il en résulte que $\forall\ x > 0$, $n'(x) > 0$.
$n(1) = \ln(e^2 - e) = \ln e(e - 1) = 1 + \ln(e - 1) > 0$.
Donc $\mathscr{C}$n coupe l'axe des abscisses entre l'origine et le point d'abscisse 1 .

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
g '(x)		+		—	||	+	
g	0	↗	$\ln\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$



4°) D'après le tableau de variation de $\mathscr{C}$n , φ est continue et strictement croissante sur

] 0 ; + ∞ [. C’est donc une bijection de] 0 ; + ∞ [vers R et admet une bijection récproque φ^{-1} : R →] 0 ; + ∞ [. Pour la construction de ($\mathscr{C}$ ') , cf courbe de la question précédente.

BAC D 1996 1er groupe

EXERCICE 1

Une urne contient dix boules : une boule porte le chiffre 0 ; trois boules portent le chiffre 1 ;et six boules portent le chiffre 2. On extrait simultanément trois boules ; on suppose que toutes les boules ont la même chance d’être prélévées.

1°) a) Quelle est la probabilité d’ obtenir au moins une boule portant le chiffre 2 ?

b) Quelle est la probabilité d’ obtenir trois boules portant le même chiffre ?

2°) On désigne par X la somme des chiffres portés par les trois boules.

a) Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer son espérance mathématique.

b) Définir et représenter la fonction de répartition de X.

EXERCICE 2

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation : $(\sin^2 \alpha)\, z^2 + (\sin 2\alpha)\, z + 1 + \cos^2 \alpha = 0$.

On désignera par z ' et z '' les solutions obtenues avec Im (z ') > 0 .

2°) Vérifier que $z'^2 + z''^2$ est un réel indépendant de α .

3°) Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on désigne par M ' et M '' les points d’affixes respectives z ' et z '' .

a) Déterminer α tel que $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$

b) α étant le réel trouvé au 3° a), montrer que M ' et M '' appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

PROBLEME

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$ et $h(x) = \ln \dfrac{2x}{x + 1}$

I – Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. En particulier, placer les points d'abscisses 0 et 2 de cette courbe ($\mathscr{C}$) ; montrer que le point I(1 , 0) est centre de symétrie de ($\mathscr{C}$)

II – On désigne par g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x < 1 \\ g(1) = 0 \\ g(x) = h(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$.

2°) Etudier la dérivabilité de g en $x_0 = 1$.

3°) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un second repère orthonormé (unité 2cm) ; on tracera la (ou les) tangente(s) à (Γ)au point I(1,0).

4°) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Déterminer $g^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $g^{-1}(x)$ si $x > 1$.

III – Soit G la fonction définie par $G(x) = \int_1^x g(t)dt$. ; $x \in \mathbb{R}$.

1°) Préciser pourquoi G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer G ' (x) .

2°) Déterminer l'expression de G (x) pour x **≤** 1 . en déduire l'aire en cm² de la partie du plan l'axe x 'O x (axe des abscisses) , la courbe (Γ) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 .