Outils Mathématiques
Année 2024-2025

Interrogation 1

6 Mars 2025
Durée : 1h

Attention : Lorsqu'un calcul est demandé, il est attendu que les étapes permettant d'aboutir au résultat soient détaillées. Plus généralement, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 (Inversion matricielle)

1/ Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Inverser les matrices A et B en appliquant la méthode du pivot.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.
Commençons par la matrice A.

$$M_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{2} & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2' = 2L_2 - L_1$$

$$\begin{aligned} 2L_2 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ -L_1 &= \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ L_2' &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$M_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & 2 \end{array}\right) \quad L_1' = L_1 - L_2$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ -L_2 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \\ L_1' &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$M_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1' = \frac{1}{2}L_1 \\ L_2' = \frac{-1}{2}L_2 \end{array}$$

$$M_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

En ce qui concerne la matrice B, on a :

$$M_0 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3' = L_3 - L_1$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -L_1 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & | & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L_3' &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1' = L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3' = L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ L_3' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -2L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & | & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ L_1' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1' = L_1 - 2L_3 \\ L_2' = L_2 + 2L_3 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ -2L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & | & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ L_1' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ L_2' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc B est inversible et son inverse est $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer C^2 puis $C^2 - 3C$.

On a $C^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C^2 - 3C = -2I_3$.

b) En déduire que C est inversible et donner l'expression de son inverse C^{-1}.

Ainsi, on a $\frac{-1}{2}(C-3I_3)C = I_3$.

Donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{-1}{2}(C-3I_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Diagonalisation)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A en le laissant sous forme factorisée. En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$. L'ensemble des valeurs propres de A est donc $\{1, 2, 3\}$.

2/ Trouver une base de chacun des sous-espaces propres de la matrice A.

Espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $AX = 3X$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 3x = 3x \\ 2x + 2y = 3y \\ 4x + z = 3z \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 3y \\ 4x + z = 3z \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} y = 2x \\ 2z = 4x \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 2x \end{cases}$$

Ainsi, $AX = 3X$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix} = xe_1$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc (e_1) est base de $E_3(A)$.

Espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $AX = 2X$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 3x = 2x \\ 2x + 2y = 2y \\ 4x + z = 2z \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 2y \\ z = 2z \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $AX = 2X$ si et seulement s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = ye_2$ avec $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc (e_2) est base de $E_2(A)$.

Espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $AX = X$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 3x = x \\ 2x + 2y = y \\ 4x + z = z \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y = y \\ z = z \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $AX = X$ si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = ze_3$ avec $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e_3) est base de $E_1(A)$.

3/ La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

La famille $\boxed{\underline{b}' = (e_1, e_2, e_3)}$ est une base de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.

Exercice 3 (Loi binomiale)

Rappel :

- On dit que la variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si X prend ses valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ et si pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

- On rappelle la **formule du capitaine**. Pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi Binomiale $\mathcal{B}(5;p)$.

1/ Calculer $\mathbb{E}(X)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \quad \text{formule de transfert} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{1er terme nul} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{formule du capitaine} \\
&= n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}p^{l+1}(1-p)^{n-(l+1)} \quad \text{cdv } l=k-1 \\
&= np\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}p^{l}(1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np\left(p+(1-p)\right)^{n-1} \quad \text{binôme de Newton} \\
&= np \\
&= 5p
\end{aligned}$$

2/ Calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) \quad \text{on retire les termes nuls} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

D'après la formule du capitaine (que l'on applique deux fois), on a pour $2 \leq k \leq n$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l}p^{l+2}(1-p)^{n-(l+2)} \quad \text{cdv } l=k-2 \\
&= p^2n(n-1)\sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l}p^{l}(1-p)^{(n-2)-l} \\
&= p^2n(n-1)\left(p+(1-p)\right)^{n-2} \quad \text{binôme de Newton} \\
&= p^2n(n-1) \\
&= 20p^2
\end{aligned}$$

3/ Calculer $\mathbb{V}(X)$.

En écrivant $X^2 = X(X-1) + X$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)+X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \quad \text{linéarité de l'espérance} \\ &= p^2n(n-1) + np - n^2p^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= -np^2 + np \\ &= np(1-p) \\ &\boxed{= 5p(1-p)}\end{aligned}$$

4/ Pour quelle valeur de p la variance de X est-elle maximale ?

La variance de X s'écrit $\mathbb{V}(X) = -5p^2 + 5p$. Il s'agit d'une fonction polynomiale en p de degré 2, qui atteint son maximum sur $]0,1[$ en $p = \frac{1}{2}$.

Bonus (Loi uniforme)
À ne faire que si la totalité des exercices précédents ont été traités.

Définition :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $\{1, 2, ..., n\}$ et on note $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, ..., n\})$ si X prend ses valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$ et si pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = 1/n$.

On pose $n = 19$. Soit $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, ..., n\})$.

1/ Calculer $\mathbb{E}(X)$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{somme des premiers termes d'une suite arithmétique} \\ &= \frac{n+1}{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

2/ On admet que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

On a d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} \\
&= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{indication de l'énoncé} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \quad \text{par ce qui précède} \\
&= \frac{n^2-1}{12} \quad \text{en mettant au même dénominateur} \\
&= 30
\end{aligned}$$