Corrigé interrogation écrite 2

L2 EG : Techniques Quantitatives pour l'Économie
Année 2024-2025

21 Novembre 2024
Durée : 1h

Attention : Lorsqu'un calcul est demandé, il est attendu que les étapes permettant d'aboutir au résultat soient détaillées. Plus généralement, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 (Loi géométrique)

Rappels :

- On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.

- On rappelle l'**identité binomiale**. Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \binom{k}{n_0} x^{k-n_0} = \frac{1}{(1-x)^{n_0+1}}$$

Soit $p = 0,34$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1/ Calculer $\mathbb{E}(X)$. (2 pts)

On écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) \quad \text{formule de transfert} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

En remarquant que $k = \binom{k}{1}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= p \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k}{1} (1-p)^{k-1} \\
&= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^{1+1}} \quad \text{identité binomiale} \\
&= \frac{p}{p^2} \\
&= \frac{1}{p} \\
&\boxed{= \frac{1}{0,34}}
\end{aligned}$$

2/ Calculer $\mathbb{E}(X(X+1))$. (3 pts)

On écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X+1)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)\mathbb{P}(X=k) \quad \text{formule de transfert} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1}p \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

En remarquant cette fois-ci que $\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \frac{k(k+1)}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X+1)) &= p \sum_{k=1}^{+\infty} 2\binom{k+1}{2} (1-p)^{k-1} \\
&= 2p \sum_{l=2}^{+\infty} \binom{l}{2} (1-p)^{(l-1)-1} \quad \text{cdv } l = k+1 \\
&= 2p \sum_{l=2}^{+\infty} \binom{l}{2} (1-p)^{l-2} \\
&= 2p \frac{1}{(1-(1-p))^{2+1}} \quad \text{identité binomiale} \\
&= \frac{2p}{p^3} \\
&= \frac{2}{p^2} \\
&\boxed{= \frac{2}{0,34^2}}
\end{aligned}$$

3/ Calculer $\mathbb{V}(X)$. (1 pt)

Comme d'habitude, on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \quad \text{par } 1/ \text{ et } 2/ \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= \frac{1-p}{p^2} \\
&\boxed{= \frac{0,66}{0,34^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Loi normale)

> **Rappel** : valeur de l'intégrale de Gauss
> On a :
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec $A > 0$.

1/ Calculer la valeur de A qui permet à f d'être une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. (2 pts)
Indication : On effectuera un changement de variable afin de se ramener à l'intégrale de Gauss présentée dans le rappel.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \\
&= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}du \quad \text{cdv } u = x/\sqrt{2},\ du = dx/\sqrt{2} \\
&= A\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\
&= \sqrt{2\pi}A \quad \text{intégrale de Gauss}
\end{aligned}$$

Ainsi f est de masse 1 si et seulement si $\boxed{A = 1/\sqrt{2\pi}}$ et pour cette valeur de A, f est bien positive sur $\mathbb{R}$. C'est donc une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2/ Quelle est la parité de f ? Quelle est la parité de la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$? (1 pt)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = Ae^{-\frac{(-x)^2}{2}} = Ae^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$ donc f est paire et en utilisant la parité de f, on a $g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$ donc g est impaire.

3/ En déduire, **sans calcul**, la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. (1 pt)

Comme g est impaire (et intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est une précision nécessaire mais non attendue dans ce cours) et le domaine $]-\infty,+\infty[$ étant symétrique par rapport à 0, on a $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 0}$.

4/ Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$.
Indication : On utilisera à cet effet une intégration par parties (IPP). On admettra que le terme "crochet" donné par cette IPP est nul. (3 pts)

On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx &= A\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} x \times \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\,dx \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx\end{aligned}$$

avec $u(x) = x$, $v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Via une IPP, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx &= \big[u(x)v(x)\big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \quad \text{crochet nul, admis}\end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx &= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &\boxed{= 1} \quad \text{par choix de } A\text{, cf } 1/\end{aligned}$$

Exercice 3 (Marche aléatoire simple)
Soit μ la distribution de probabilité donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit également Q la matrice donnée par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = x+1 \text{ ou } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, Q est une matrice dont tous les coefficients sont nuls, exceptés les coefficients de la forme $Q(x, x+1)$ et $Q(x, x-1)$ qui valent $\frac{1}{2}$.

1/ Montrer que Q est stochastique. (1 pt)

Les coefficients de Q sont bien à valeurs dans $[0,1]$ et pour $x \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{y\in\mathbb{Z}} Q(x,y) &= Q(x,x+1) + Q(x-1,x) \quad \text{les autres termes sont nuls}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Q est donc stochastique.

Soit (X_n) la chaîne de Markov sur l'espace $E = \mathbb{Z}$ dont la loi initiale est μ et dont la matrice de transition est Q.

2/ Donner la loi de X_0 puis la loi de X_1. (3 pts)

X_0 suit la loi μ, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_0 = k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
Par le cours, X_1 suit la loi μQ. Donc pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k) &= \mu Q(k)\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu(l) Q(l,k)\\ &= \mu(k-1)Q(k-1,k) + \mu(k+1)Q(k+1,k) \quad \text{les autres termes sont nuls}\\ &= \frac{1}{2}(\mu(k-1)+\mu(k+1))\\ &\boxed{= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = -1 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \quad \text{cf expression de } \mu \text{ pour s'en convaincre}\end{aligned}$$

Bonus (Loi de Cauchy) (1 pt)
À ne faire que si la totalité des exercices précédents ont été traités.
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{A}{1 + \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2}$$

avec $a, A > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Calculer A de sorte que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. L'expression de A fera intervenir a.
Indication : On admettra qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est la fonction* arctan *et que* $\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}$, $\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

f est à valeurs positives et on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2} \\
&= A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{adu}{1+u^2} \quad \text{cdv } u=\frac{x-x_0}{a} \\
&= aA\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \\
&= aA[\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} \quad \text{cf indications de l'énoncé} \\
&= aA(\pi/2-(-\pi/2)) \quad \text{idem} \\
&\boxed{= aA\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si $aA\pi = 1$ i.e. $A = \frac{1}{a\pi}$.