# Outils Mathématiques
# Année 2024-2025

Interrogation 1

6 Mars 2025
Durée : 1h

**Attention : Lorsqu'un calcul est demandé, il est attendu que les étapes permettant d'aboutir au résultat soient détaillées. Plus généralement, toute réponse doit être justifiée.**

**Exercice 1** (Inversion matricielle)

**1**/ Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Inverser les matrices $A$ et $B$ en appliquant la méthode du pivot.

**2**/ Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

**a)** Calculer $C^2$ puis $C^2 - 3C$.

**b)** En déduire que $C$ est inversible et donner l'expression de son inverse $C^{-1}$.

**Exercice 2** (Diagonalisation)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**1**/ Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A$ en le laissant sous forme factorisée. En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A$.

**2**/ Trouver une base de chacun des sous-espaces propres de la matrice $A$.

**3**/ La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

**Tourner la page S.V.P.**

**Exercice 3** (Loi binomiale)

**Rappel :**

— On dit que la variable aléatoire $X$ suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0,1[$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si $X$ prend ses valeurs dans $\{0,1,...,n\}$ et si pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

— On rappelle la **formule du capitaine**. Pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Soit $p \in ]0,1[$ et soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi Binomiale $\mathcal{B}(5;p)$.

**1**/ Calculer $\mathbb{E}(X)$.

**2**/ Calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$.

**3**/ Calculer $\mathbb{V}(X)$.

**4**/ Pour quelle valeur de $p$ la variance de $X$ est-elle maximale ?

**Bonus** (Loi uniforme)
*À ne faire que si la totalité des exercices précédents ont été traités.*

**Définition :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la **loi uniforme** sur $\{1,2,...,n\}$ et on note $X \sim \mathcal{U}(\{1,2,...,n\})$ si $X$ prend ses valeurs dans $\{1,2,...,n\}$ et si pour tout $k \in \{1,2,...,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = 1/n$.

On pose $n = 19$. Soit $X \sim \mathcal{U}(\{1,2,...,n\})$ .

**1**/ Calculer $\mathbb{E}(X)$.

**2**/ On admet que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $\mathbb{V}(X)$.