Épidémiologie et Déplacements

Maxence Caucheteux

École des Ponts ParisTech

May 19, 2024

Introduction

- Proposer modèle stochastique
- Construire un modèle déterministe
- Définir $\mathfrak{R}_0$ et les liens entre les deux modèles
- Analyser l'évolution épidémie en fonction des déplacements

Figure: Illustration de l'épidémiologie

Introduction

- Proposer modèle stochastique
- Construire un modèle déterministe
- Définir $\mathfrak{R}_0$ et les liens entre les deux modèles
- Analyser l'évolution épidémie en fonction des déplacements

Figure: Illustration de l'épidémiologie

Introduction

- Proposer modèle stochastique
- Construire un modèle déterministe
- Définir $\mathfrak{R}_0$ et les liens entre les deux modèles
- Analyser l'évolution épidémie en fonction des déplacements

Figure: Illustration de l'épidémiologie

Introduction

- Proposer modèle stochastique
- Construire un modèle déterministe
- Définir $\mathfrak{R}_0$ et les liens entre les deux modèles
- Analyser l'évolution épidémie en fonction des déplacements

Figure: Illustration de l'épidémiologie

Introduction

- Proposer modèle stochastique
- Construire un modèle déterministe
- Définir $\mathfrak{R}_0$ et les liens entre les deux modèles
- Analyser l'évolution épidémie en fonction des déplacements

Figure: Illustration de l'épidémiologie

Construction du modèle : intuitivement

Processus

Choix d'un individu dans la population parmi les N :

- Si cet individu est infecté, il guérit avec probabilité p
- S'il est susceptible, il devient infecté avec probabilité $q \times \tau$

avec $\tau =$ proportion d'infectés et $p, q \in]0, 1[$.

Construction du modèle : intuitivement

Processus

Choix d'un individu dans la population parmi les N :

- Si cet individu est infecté, il guérit avec probabilité p
- S'il est susceptible, il devient infecté avec probabilité $q \times \tau$

avec $\tau =$ proportion d'infectés et $p, q \in]0, 1[$.

Construction du modèle : intuitivement

Processus

Choix d'un individu dans la population parmi les N :

- Si cet individu est infecté, il guérit avec probabilité p
- S'il est susceptible, il devient infecté avec probabilité $q \times \tau$

avec $\tau =$ proportion d'infectés et $p, q \in]0, 1[$.

Construction du modèle : mathématiquement

- Définition d'un système dynamique stochastique $(\mathcal{I}_t^N)_{t\in\mathbb{N}}$
- $\mathcal{I}_t^N \in \{0,1\}^N$
- $\forall k \in [1,N]$, $\mathcal{I}_{t,k}^N = 1$ si k infecté, 0 sinon

Construction du modèle : mathématiquement

- Définition d'un système dynamique stochastique $(\mathcal{I}_t^N)_{t\in\mathbb{N}}$
- $\mathcal{I}_t^N \in \{0,1\}^N$
- $\forall k \in [1, N]$, $\mathcal{I}_{t,k}^N = 1$ si k infecté, 0 sinon

Construction du modèle : mathématiquement

- Définition d'un système dynamique stochastique $(\mathcal{I}_t^N)_{t\in\mathbb{N}}$
- $\mathcal{I}_t^N \in \{0,1\}^N$
- $\forall k \in [1,N]$, $\mathcal{I}_{t,k}^N = 1$ si k infecté, 0 sinon

Construction du modèle : mathématiquement

- Définition d'un système dynamique stochastique $(\mathcal{I}_t^N)_{t\in\mathbb{N}}$
- $\mathcal{I}_t^N \in \{0,1\}^N$
- $\forall k \in [1, N],\ \mathcal{I}_{t,k}^N = 1$ si k infecté, 0 sinon

Nombre d'infectés

Définition

Nombre d'infectés :

$$I_t^N = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{I}_{t,k}^N$$

C'est une chaîne de Markov.

Nombre d'infectés

Définition

Nombre d'infectés :

$$I_t^N = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{I}_{t,k}^N$$

C'est une chaîne de Markov.

Matrice de transition

Propriété

Pour $k \in [0, N]$,

$$\boxed{\begin{cases} Q(k, k-1) = p\frac{k}{N} \quad \text{si } k \geq 1 \\ Q(k, k+1) = q\frac{k}{N}(1 - \frac{k}{N}) \quad \text{si } \ k < N \\ Q(k, k) = (1 - \frac{k}{N})(1 - \frac{k}{N}q) + \frac{k}{N}(1 - p) \end{cases}}$$

Les autres coefficients de la matrice Q sont nuls.

Modèle déterministe : SIS

I taux d'infectés, S taux d'indivdus susceptibles

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -KSI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = KSI - \gamma I \end{cases}$$

Solution

Avec $\mathfrak{R}_0 = K/\gamma$, on a :

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{R}_0 - 1}{\left(\frac{1}{I_0}(\mathfrak{R}_0 - 1) - \mathfrak{R}_0\right) e^{-\gamma(\mathfrak{R}_0 - 1)t} + \mathfrak{R}_0} & \text{si } \mathfrak{R}_0 \neq 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{I_0} + \gamma t} & \text{si } \mathfrak{R}_0 = 1 \end{cases}$$

où $I(0) = I_0 \in]0, 1]$

Modèle déterministe : SIS

I taux d'infectés, S taux d'indivdus susceptibles

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -KSI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = KSI - \gamma I \end{cases}$$

Solution

Avec $\mathfrak{R}_0 = K/\gamma$, on a :

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{R}_0 - 1}{\left(\frac{1}{I_0}(\mathfrak{R}_0 - 1) - \mathfrak{R}_0\right) e^{-\gamma(\mathfrak{R}_0 - 1)t} + \mathfrak{R}_0} & \text{si } \mathfrak{R}_0 \neq 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{I_0} + \gamma t} & \text{si } \mathfrak{R}_0 = 1 \end{cases}$$

où $I(0) = I_0 \in]0, 1]$

Modèle déterministe : SIS

I taux d'infectés, S taux d'indivdus susceptibles

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -KSI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = KSI - \gamma I \end{cases}$$

Solution

Avec $\mathfrak{R}_0 = K/\gamma$, on a :

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{R}_0 - 1}{\left(\frac{1}{I_0}(\mathfrak{R}_0 - 1) - \mathfrak{R}_0\right) e^{-\gamma(\mathfrak{R}_0 - 1)t} + \mathfrak{R}_0} & \text{si } \mathfrak{R}_0 \neq 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{I_0} + \gamma t} & \text{si } \mathfrak{R}_0 = 1 \end{cases}$$

où $I(0) = I_0 \in]0, 1]$

Modèle déterministe : SIS

I taux d'infectés, S taux d'indivdus susceptibles

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -KSI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} = KSI - \gamma I \end{cases}$$

Solution

Avec $\mathfrak{R}_0 = K/\gamma$, on a :

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{R}_0 - 1}{\left(\frac{1}{I_0}(\mathfrak{R}_0 - 1) - \mathfrak{R}_0\right) e^{-\gamma(\mathfrak{R}_0 - 1)t} + \mathfrak{R}_0} & \text{si } \mathfrak{R}_0 \neq 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{I_0} + \gamma t} \quad \text{si } \mathfrak{R}_0 = 1 \end{cases}$$

où $I(0) = I_0 \in]0,1]$

Modèle déterministe : SIS

- $\mathfrak{R}_0 > 1$: $I(t) \longrightarrow \frac{\mathfrak{R}_0 - 1}{\mathfrak{R}_0}$
- $\mathfrak{R}_0 \leq 1$: la maladie s'éteint en temps long

Maladie	$\mathfrak{R}_0$
Rougeole	$12 - 18$
Varicelle	$10 - 12$
Rubéole	$6 - 7$
COVID-19	$2.5 - 3.5$
Tuberculose	$2 - 3$
Rhume commun	$2 - 3$
Grippe	$1.3 - 1.8$

Figure: Divers $\mathfrak{R}_0$

Modèle déterministe : SIS

- $\mathfrak{R}_0 > 1 : I(t) \longrightarrow \frac{\mathfrak{R}_0 - 1}{\mathfrak{R}_0}$
- $\mathfrak{R}_0 \leq 1$: la maladie s'éteint en temps long

Maladie	$\mathfrak{R}_0$
Rougeole	$12 - 18$
Varicelle	$10 - 12$
Rubéole	$6 - 7$
COVID-19	$2.5 - 3.5$
Tuberculose	$2 - 3$
Rhume commun	$2 - 3$
Grippe	$1.3 - 1.8$

Figure: Divers $\mathfrak{R}_0$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K \frac{k}{N} - \gamma \frac{k}{N} \right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N} \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{k}{N} q - p \frac{k}{N} \right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N}, \ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N\left(\left(1-\frac{k}{N}\right)K\frac{k}{N} - \gamma\frac{k}{N}\right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N}\left(\left(1-\frac{k}{N}\right)\frac{k}{N}q - p\frac{k}{N}\right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K\frac{k}{N} - \gamma\frac{k}{N}\right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N}\left(\left(1 - \frac{k}{N}\right)\frac{k}{N}q - p\frac{k}{N}\right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$

$$= \frac{k}{N} + \Delta_N\left(\left(1 - \frac{k}{N}\right)K\frac{k}{N} - \gamma\frac{k}{N}\right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N}\left(\left(1 - \frac{k}{N}\right)\frac{k}{N}q - p\frac{k}{N}\right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K \frac{k}{N} - \gamma \frac{k}{N} \right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N}\left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{k}{N} q - p \frac{k}{N} \right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K \frac{k}{N} - \gamma \frac{k}{N}\right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N}\left(\left(1 - \frac{k}{N}\right)\frac{k}{N} q - p\frac{k}{N}\right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K \frac{k}{N} - \gamma \frac{k}{N} \right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N} \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{k}{N} q - p \frac{k}{N} \right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K \frac{k}{N} - \gamma \frac{k}{N} \right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N} \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{k}{N} q - p \frac{k}{N} \right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N}, \ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

Intuition :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) \simeq I(\Delta_N) = I(0) + \Delta_N I'(0) + o(\Delta_N)$$
$$= \frac{k}{N} + \Delta_N \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) K \frac{k}{N} - \gamma \frac{k}{N} \right) + o(\Delta_N)$$

Calcul :

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_k(I_1^N) = \frac{k}{N} + \frac{1}{N} \left(\left(1 - \frac{k}{N}\right) \frac{k}{N} q - p \frac{k}{N} \right)$$

Identification :

$$\boxed{\Delta_N = \frac{1}{N},\ \gamma = p \text{ et } K = q}$$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

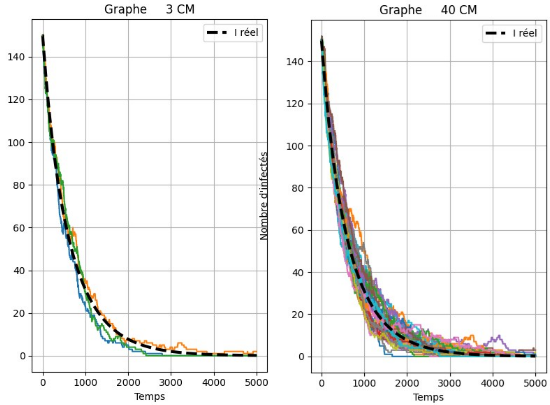

Figure: Evolution des infectés avec $\mathfrak{R}_0 < 1$

Lien entre le modèle SIS et le processus stochastique

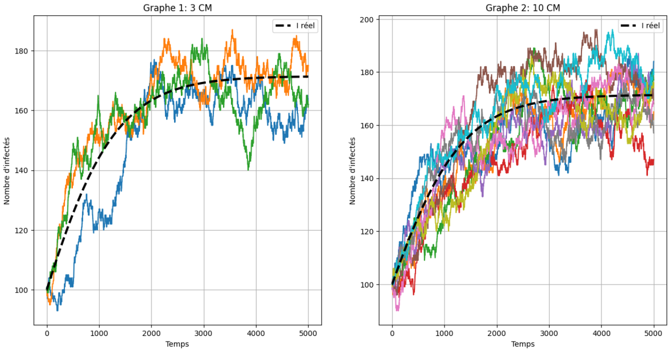

Figure: Evolution des infectés avec $\mathfrak{R}_0 > 1$

Construction du modèle à plusieurs compartiments

Soient des réels $\alpha_{i,j} > 0$ tels que $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} = n - 1$ pour tout i.

Construction intuitive

Choix d'un individu au hasard dans la population. En notant $i \in [0, n-1]$ sa ville :

- Action de déplacement avec probabilité x.
  - Si susceptible, déménagement vers $j \neq i$ avec probabilité $\frac{\varepsilon_S}{n-1}\alpha_{ij}$ et reste dans i avec probabilité $1 - \varepsilon_S$
  - Si infecté, même chose mais on remplace ε_S par ε_I
- Action sur l'état avec probabilité $1 - x$.
  - Si infecté, guérison avec probabilité p_i
  - Si susceptible, choix d'un autre individu dans la ville.
    - Si l'autre est infecté, contamination du premier avec probabilité q_i
    - Si l'autre est susceptible, rien

Construction du modèle à plusieurs compartiments

Soient des réels $\alpha_{i,j} > 0$ tels que $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} = n - 1$ pour tout i.

Construction intuitive

Choix d'un individu au hasard dans la population. En notant $i \in [0, n-1]$ sa ville :

- Action de déplacement avec probabilité x.
  - Si susceptible, déménagement vers $j \neq i$ avec probabilité $\frac{\varepsilon_S}{n-1}\alpha_{ij}$ et reste dans i avec probabilité $1 - \varepsilon_S$
  - Si infecté, même chose mais on remplace ε_S par ε_I
- Action sur l'état avec probabilité $1 - x$.
  - Si infecté, guérison avec probabilité p_i
  - Si susceptible, choix d'un autre individu dans la ville.
    - Si l'autre est infecté, contamination du premier avec probabilité q_i
    - Si l'autre est susceptible, rien

Construction du modèle à plusieurs compartiments

Soient des réels $\alpha_{i,j} > 0$ tels que $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} = n - 1$ pour tout i.

Construction intuitive

Choix d'un individu au hasard dans la population. En notant $i \in [0, n-1]$ sa ville :

- Action de déplacement avec probabilité x.
  - Si susceptible, déménagement vers $j \neq i$ avec probabilité $\frac{\varepsilon_S}{n-1}\alpha_{ij}$ et reste dans i avec probabilité $1 - \varepsilon_S$
  - Si infecté, même chose mais on remplace ε_S par ε_I
- Action sur l'état avec probabilité $1 - x$.
  - Si infecté, guérison avec probabilité p_i
  - Si susceptible, choix d'un autre individu dans la ville.
    - Si l'autre est infecté, contamination du premier avec probabilité q_i
    - Si l'autre est susceptible, rien

Construction du modèle à plusieurs compartiments

Soient des réels $\alpha_{i,j} > 0$ tels que $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} = n - 1$ pour tout i.

Construction intuitive

Choix d'un individu au hasard dans la population. En notant $i \in [0, n-1]$ sa ville :

- Action de déplacement avec probabilité x.
  - Si susceptible, déménagement vers $j \neq i$ avec probabilité $\frac{\varepsilon_S}{n-1}\alpha_{ij}$ et reste dans i avec probabilité $1 - \varepsilon_S$
  - Si infecté, même chose mais on remplace ε_S par ε_I
- Action sur l'état avec probabilité $1 - x$.
  - Si infecté, guérison avec probabilité p_i
  - Si susceptible, choix d'un autre individu dans la ville.
    - Si l'autre est infecté, contamination du premier avec probabilité q_i
    - Si l'autre est susceptible, rien

Construction du modèle à plusieurs compartiments

Soient des réels $\alpha_{i,j} > 0$ tels que $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} = n - 1$ pour tout i.

Construction intuitive

Choix d'un individu au hasard dans la population. En notant $i \in [0, n-1]$ sa ville :

- Action de déplacement avec probabilité x.
  - Si susceptible, déménagement vers $j \neq i$ avec probabilité $\frac{\varepsilon_S}{n-1}\alpha_{ij}$ et reste dans i avec probabilité $1 - \varepsilon_S$
  - Si infecté, même chose mais on remplace ε_S par ε_I
- Action sur l'état avec probabilité $1 - x$.
  - Si infecté, guérison avec probabilité p_i
  - Si susceptible, choix d'un autre individu dans la ville.
    - Si l'autre est infecté, contamination du premier avec probabilité q_i
    - Si l'autre est susceptible, rien

Construction du modèle

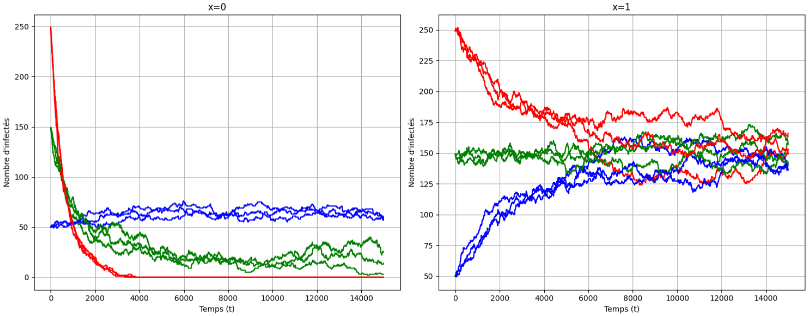

Figure: Evolution du nombre d'infectés dans les cas $x = 0$ et $x = 1$

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$

Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \frac{dI_i}{dt} = d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \frac{dS_i}{dt} = d_S \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$

Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$

Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$

Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$
Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$
Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i \right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$
Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$

Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$
Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j} k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i \right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Construction du modèle déterministe associé

Intuition : $\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = I_i(\Delta_N) \simeq I_i(0) + \Delta_N I_i'(0)$

Calcul :

$$\mathbb{E}(I_1^{N,i}) = k_i + \frac{1}{Na}\left(d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j}k_j + \beta_i \frac{(n_i - k_i)k_i}{n_i} - \gamma_i k_i\right)$$

Système d'EDO : $\forall i \in [0, n-1]$,

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j}S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

où $d_I = ax\varepsilon_I$, $d_S = ax\varepsilon_S$, $\gamma_i = a(1-x)p_i$, $\beta_i = a(1-x)q_i$ et $L_{i,j} = \alpha_{ij}/(n-1)$ si $i \neq j$ et -1 si $i = j$.

Convergence du modèle stochastique vers le modèle déterministe : simulations

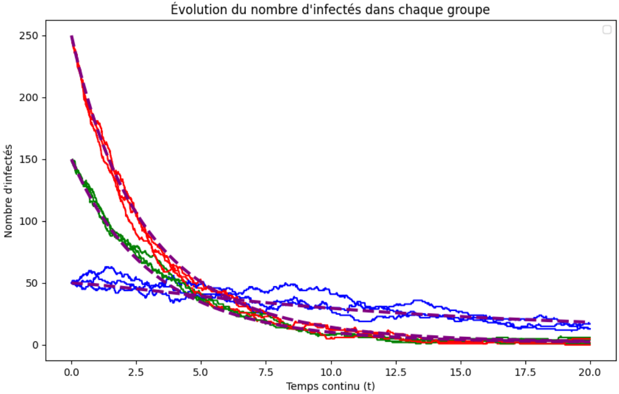

Figure: Convergence du modèle stochastique vers le modèle déterministe

Nombre de reproduction de base

Définition

Avec $F = \mathrm{Diag}(\beta_0, ..., \beta_{n-1})$, $V = \mathrm{Diag}(\gamma_0, ..., \gamma_{n-1}) - d_I L.$, on définit :

$$\boxed{\mathfrak{R}_0 = \rho(FV^{-1})}$$

Propriétés du $\mathfrak{R}_0$

Propriété

La fonction $d_I \mapsto \mathfrak{R}_0(d_I)$ est strictement décroissante et strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

Comme $d_I = ax\varepsilon_I$, le nombre de reproduction de base diminue avec ε_I.

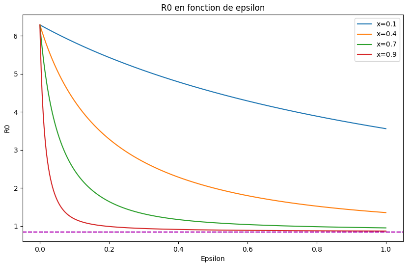

Figure: $\varepsilon_I \mapsto \mathfrak{R}_0(d_I)$

Propriétés du $\mathfrak{R}_0$

Propriété

La fonction $d_I \mapsto \mathfrak{R}_0(d_I)$ est strictement décroissante et strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

Comme $d_I = ax\varepsilon_I$, le nombre de reproduction de base diminue avec ε_I.

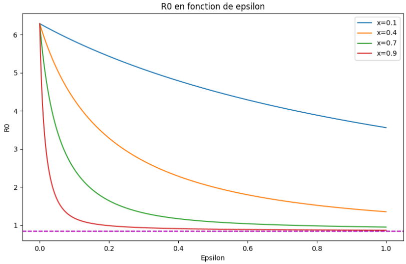

Figure: $\varepsilon_I \mapsto \mathfrak{R}_0(d_I)$

Propriétés du $\mathfrak{R}_0$

Propriété

Si $\mathfrak{R}_0 > 1$, le modèle admet un unique équilibre endémique. Si $\mathfrak{R}_0 < 1$, il n'y a pas d'équilibre endémique.

Répartition des individus dans les villes

Rappel :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j \in \Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j \in \Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

N_i le nombre de personnes dans la ville i

$$\frac{dN_i}{dt} = (d_S + d_I) \sum_{j=1}^{n} L_{ij} N_j$$

Sous forme matricielle :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = AN}$$

où $A = (d_I + d_S)L$.

Répartition des individus dans les villes

Rappel :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \dfrac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j\in\Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \dfrac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

N_i le nombre de personnes dans la ville i

$$\frac{dN_i}{dt} = (d_S + d_I) \sum_{j=1}^{n} L_{ij} N_j$$

Sous forme matricielle :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = AN}$$

où $A = (d_I + d_S)L$.

Répartition des individus dans les villes

Rappel :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \displaystyle\sum_{j \in \Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \dfrac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \displaystyle\sum_{j \in \Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \dfrac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

N_i le nombre de personnes dans la ville i

$$\frac{dN_i}{dt} = (d_S + d_I) \sum_{j=1}^{n} L_{ij} N_j$$

Sous forme matricielle :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = AN}$$

où $A = (d_I + d_S)L$.

Répartition des individus dans les villes

Rappel :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_i}{dt} = d_I \sum_{j\in\Omega} L_{i,j} I_j + \beta_i \dfrac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i \\ \dfrac{dS_i}{dt} = d_S \sum_{j\in\Omega} L_{i,j} S_j - \beta_i \dfrac{S_i I_i}{S_i + I_i} + \gamma_i I_i \end{cases}$$

N_i le nombre de personnes dans la ville i

$$\frac{dN_i}{dt} = (d_S + d_I) \sum_{j=1}^{n} L_{ij} N_j$$

Sous forme matricielle :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = AN}$$

où $A = (d_I + d_S)L$.

Répartition des individus dans les villes

$N(t) = P_t N_0$ où $P_t = e^{tA}$ et N_0 répartition initiale des individus

Propriété

En temps long, la population s'équilibre dans les différents groupes.

Répartition des individus dans les villes

$N(t) = P_t N_0$ où $P_t = e^{tA}$ et N_0 répartition initiale des individus

Propriété

En temps long, la population s'équilibre dans les différents groupes.

Conclusion

- On part d'un modèle stochastique
- Passage à la limite pour trouver un modèle déterministe à partir de ce modèle stochastique
- Introduction du $\mathfrak{R}_0$
- Laisser les individus se déplacer permet de diminuer le $\mathfrak{R}_0$

Conclusion

- On part d'un modèle stochastique
- Passage à la limite pour trouver un modèle déterministe à partir de ce modèle stochastique
- Introduction du $\mathfrak{R}_0$
- Laisser les individus se déplacer permet de diminuer le $\mathfrak{R}_0$

Conclusion

- On part d'un modèle stochastique
- Passage à la limite pour trouver un modèle déterministe à partir de ce modèle stochastique
- Introduction du $\mathfrak{R}_0$
- Laisser les individus se déplacer permet de diminuer le $\mathfrak{R}_0$

Conclusion

- On part d'un modèle stochastique
- Passage à la limite pour trouver un modèle déterministe à partir de ce modèle stochastique
- Introduction du $\mathfrak{R}_0$
- Laisser les individus se déplacer permet de diminuer le $\mathfrak{R}_0$

Conclusion

- On part d'un modèle stochastique
- Passage à la limite pour trouver un modèle déterministe à partir de ce modèle stochastique
- Introduction du $\mathfrak{R}_0$
- Laisser les individus se déplacer permet de diminuer le $\mathfrak{R}_0$

Conclusion

- On part d'un modèle stochastique
- Passage à la limite pour trouver un modèle déterministe à partir de ce modèle stochastique
- Introduction du $\mathfrak{R}_0$
- Laisser les individus se déplacer permet de diminuer le $\mathfrak{R}_0$