Exercices EDP

Maxence Caucheteux

28 avril 2024

Ex 2.18
On énonce et démontre au préalable deux lemmes.

Lemme 1 (caractère local de la trace)
Si deux fonctions $u, v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ coïncident sur un voisinage du bord $\partial\Omega$ (dans $\bar{\Omega}$), alors elles ont même trace.

Preuve
Par le cours, par continuité de u, v on a :

$$\boxed{\gamma(u) = u_{|\partial\Omega} = v_{|\partial\Omega} = \gamma(v)}$$

Ce qui conclut.

Lemme 2
Soient $u, v \in H^1(\Omega)$ coïncidant sur un voisinage de $\partial\Omega$ (dans $\bar{\Omega}$), alors u, v ont même trace.

Preuve
Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $\partial\Omega$ (dans $\bar{\Omega}$) tel que $u_{|\mathring{\mathcal{U}}} = v_{|\mathring{\mathcal{U}}}$. Par densité de $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on prend (u_n) une suite de fonctions $H^1(\Omega)$ continues sur $\bar{\Omega}$ convergeant vers u dans L^2. On a donc a fortiori la convergence de $(u_{n|\mathring{\mathcal{U}}})$ vers $u_{|\mathring{\mathcal{U}}}$ dans L^2. Alors, par caractère local de la trace (lemme 1) et continuité de la trace,

$$\gamma(u_n) = \gamma(u_{n|\mathring{\mathcal{U}}}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \gamma(u_{|\mathring{\mathcal{U}}}) = \gamma(v_{|\mathring{\mathcal{U}}}) = \gamma(v)$$

Mais on a également par continuité de la trace :

$$\gamma(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \gamma(u)$$

Par unicité de la limite, $\boxed{\gamma(u) = \gamma(v)}$. Ce qui conclut.

Application de ces lemmes à l'exercice
Ici, u n'est pas continue sur le disque fermé en question. En effet, il y a une discontinuité en 0. A priori, il ne suffit donc pas de dire que u est H^1 et qu'elle s'annule en le bord du disque pour dire qu'elle est dans $H^1_0(\Omega)$. Mais c'est en fait le cas par les lemmes, qui nous assurent qu'on peut ne pas tenir compte de la discontinuité en 0.

Ainsi, on écrit :
– Il est clair que u s'annule pour (x, y) de norme euclidienne $1/e$.

– On cherche maintenant à montrer que $u \in H^1(\Omega)$

1/ On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2 &= \int_{r=0}^{1/e}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\ln(-\ln(r)))^2 r dr d\theta \quad \text{changement polaire licite}\\ &= 2\pi\int_{r=0}^{1/e} r(\ln(-\ln(r)))^2 dr\\ &\leq \int_{r=0}^{1/e} r(\ln r)^2 dr \quad \ln x \leq x\end{aligned}$$

On a $r(\ln r)^2 =_{r\to 0} o(1/\sqrt{r})$ par croissances comparées donc l'intégrale précédente est finie par Riemann.

Il faut s'assurer également que $\|\nabla u\|_{L^2} < +\infty$ mais le calcul est plus long. . .

On conclut ainsi que $u \in H^1_0(\Omega)$.

Ex 2.19
V est un sous espace vectoriel de L^2 par linéarité du Laplacien et car la fonction nulle, de Laplacien nul, est dans V.

$(.,.)$ est un **produit scalaire** sur V :
– Elle est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
– Elle est linéaire à droite et à gauche par linéarité du Laplacien et par linéarité à droite et à gauche du produit scalaire dans L^2.
– Elle est définie, positive essentiellement car le ps de L^2 l'est.

Soit (u_n) une suite de Cauchy d'éléments de V. Comme $\|u_n\|_V^2 = \|u_n\|_2^2 + \|\Delta u_n\|_2^2$, (u_n) et (Δu_n) sont deux suites de Cauchy d'éléments de L^2. Comme L^2 est un Hilbert, ces deux suites y convergent. Il existe donc $u, \tilde{u} \in L^2$ telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ et $\Delta u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{u}$ dans L^2.

Il reste à montrer que $u \in V$ et que (u_n) converge vers u dans V. À cet effet, on travaille dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. La convergence dans L^2 implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par le cours, on a donc aussi $\Delta u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Delta u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (résultat sur les distributions). Mais $\Delta u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{u}$ dans L^2 donc également dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on obtient que $\boxed{\Delta u = \tilde{u} \in L^2}$, donc $u \in V$.

Par ailleurs, comme $\Delta u = \tilde{u}$, on a :

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_V^2 &= \|u_n - u\|_2^2 + \|\Delta(u_n - u)\|_2^2\\ &= \|u_n - u\|_2^2 + \|\Delta u_n - \tilde{u}\|_2^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

par convergence dans L^2 de (u_n) vers u et de (Δu_n) vers $\tilde{u}$.

Ainsi, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ dans V.
V est donc un espace de Hilbert.

Ex 2.21
J'ai l'impression qu'il manque un 2 en facteur dans le terme de droite. Je donne la preuve avec la modification de l'énoncé que je suggère.

On commence par montrer l'inégalité pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on écrit, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ réalisant le maximum de u, on a :

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty^2 &= |u(x_0)|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{x_0} (u^2)'(t)dt \quad \text{car } u \text{ est à support compact} \\
&= \int_{-\infty}^{x_0} 2u'(t)u(t)dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{x_0} 2|u'(t)||u(t)|dt \\
&\leq 2\left(\int_{-\infty}^{x_0} (u'(t))^2dt\right)\left(\int_{-\infty}^{x_0} (u(t))^2dt\right) \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\boxed{\leq 2\|u'\|_2\|u\|_2}
\end{aligned}$$

On étend à présent cette inégalité à $H^1(\mathbb{R})$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans cet espace, il existe une suite (v_n) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers u dans $H^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|v_n\|_\infty^2 \leq 2\|v_n\|_2\|v_n'\|_2 \quad (*)$$

Comme $\|v_n\|_{H^1}^2 \geq \|v_n\|_2^2$ et $\|v_n\|_{H^1}^2 \geq \|v_n'\|_2^2$, on a par convergence de (v_n) vers u dans H^1 :

$$\|v_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u\|, \quad \|v_n'\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u'\|$$

Par ailleurs, (v_n) est une suite de Cauchy de L^∞ par l'inégalité dans le cas $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car (v_n) et (v_n') sont respectivement des suites de Cauchy de L^2 car elles y convergent. Comme L^∞ est un Banach, (v_n) converge uniformément vers une fonction $\tilde{u} \in L^\infty$.

On montre alors que $\tilde{u} = u$. On passe par $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à cet effet. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on montre que $(v_n, \varphi) \longrightarrow (u, \varphi)$. En effet, on a par Cauchy-Schwarz :

$$|(v_n - u, \varphi)| \leq \|v_n - \varphi\|_2\|\varphi\|_2 \longrightarrow 0$$

Et de même $(v_n, \varphi) \longrightarrow (\tilde{u}, \varphi)$ car :

$$\begin{aligned}
|(v_n - \tilde{u}, \varphi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} (v_n - \tilde{u})\varphi\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |v_n - \tilde{u}||\varphi| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \|v_n - \tilde{u}\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |\varphi| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers u et $\tilde{u}$. Par unicité de la limite dans cet espace, on a finalement $u = \tilde{u}$.

On peut donc passer à la limite dans $(*)$ et obtenir l'inégalité :

$$\boxed{\|u\|_\infty^2 \leq 2\|u\|_2\|u'\|_2}$$

Ex 2.25 - Inégalité de Hardy dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$
1/ C'est une IPP en intégrant 1 et en dérivant f^2. Elle est licite par convergence de deux termes.

2/ Avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(x)^2}{|x|^2}dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi^2(r,\theta,\varphi)\sin(\theta)drd\theta d\varphi \quad \text{changement sphérique} \\
&\leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty 4\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 r^2 \sin(\theta)drd\theta d\varphi \quad \text{par } 1/ \\
&\boxed{\leq 4\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi(x)|^2 dx}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Ex 2.26
1/ Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Les dérivées partielles de ψ sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ donc $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 < +\infty$.

Par ailleurs, un changement sphérique montre que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|}dx = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r\sin(\theta)|\psi(r,\theta,\varphi)|drd\theta d\varphi < +\infty$$

Cela nous assure l'existence de $\mathcal{E}(\psi)$.

2/ C'est Cauchy-Schwarz en écrivant $\frac{|\psi(x)|^2}{|x|} = \frac{|\psi(x)|}{|x|} \times |\psi(x)|$, suivi de l'inégalité (2.3).

3/a) C'est la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ (cf cours).

b) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. L'inégalité de Hardy dans le cas $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ nous assure que $x \mapsto \frac{\phi(x)}{|x|}$ est dans L^2.

De plus :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_n(x)\phi(x)}{|x|}dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)\phi(x)}{|x|}dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi_n(x)-u(x)||\phi(x)|}{|x|}dx \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|^2}\right)^{1/2} \|\psi_n - u\|_{L^2} \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|^2}\right)^{1/2} \|\psi_n - u\|_{H^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \psi_n \to u \text{ dans } H^1
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_n(x)\phi(x)}{|x|}dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)\phi(x)}{|x|}dx}$$

c) On note $f_n : x \mapsto \frac{\psi_n(x)}{|x|}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 &\leq 4\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\psi_n - \psi_m)|^2 \ \text{ Hardy dans le cas } \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\\ &\leq 4\|\psi_n - \psi_m\|_{H^1}^2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ (\psi_n) \text{ est de Cauchy dans} H^1 \text{ car y converge}\end{aligned}$$

Donc (f_n) est de Cauchy dans L^2.

d) Comme $L^2(\mathbb{R}^3)$ est complet et que (f_n) est une suite de Cauchy de cet espace, elle converge dans cet espace vers une fonction $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

e) (f_n) converge vers v dans L^2 donc a fortiori dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, la question 3/a) nous assure que (f_n) converge vers $f : x \mapsto \frac{u(x)}{|x|}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, on a $f = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et comme les deux sont L^2, l'égalité a lieu dans L^2.

f) On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_n(x)^2}{|x|}dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)^2}{|x|}dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_n(x) - u(x)}{|x|}(\psi_n(x) + u(x))dx\right|\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi_n(x) - u(x)|}{|x|}|\psi_n(x) + u(x)|dx \ \text{ inégalité triangulaire}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi_n(x) - u(x)|^2}{|x|^2}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi_n(x) + u(x)|^2\right)^{1/2} \quad \text{C-S}\\ &\boxed{= \|(\psi_n - u)/|x|\|_{L^2} \times \|\psi_n + u\|_{L^2}}\end{aligned}$$

Or $\|(\psi_n - u)/|x|\|_{L^2} \to 0$ (convergence dans L^2). Par ailleurs, $(\|\psi_n + u\|_{L^2})$ est bornée car (ψ_n) converge dans H^1 donc dans L^2 donc y est bornée. Ainsi $\|(\psi_n - u)/|x|\|_{L^2} \times \|\psi_n + u\|_{L^2} \to 0$, puis :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_n(x)^2}{|x|}dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)^2}{|x|}dx}$$

g) Les ϕ_n sont $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ donc on peut leur appliquer (2.4) et ensuite on passe à la limite (ce qui est licite par les questions précédentes) pour obtenir l'inégalité voulue.

4/ Par inégalité de Hardy (question 3/), pour $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - 2\|\nabla u\|_{L^2} \geq -2$$

Par suite $\boxed{I > -\infty}$.

Ex 3.10
Dans tout l'exercice, on appelle (I) le problème aux limites et (II) la formulation variationnelle.
1/ $\boxed{\text{(II)} \implies \text{(I)}}$
Avec $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = b(v)$.

Un calcul montre que :

$$\boxed{\operatorname{div}(A.\nabla u) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}$$

Ainsi, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
(-\operatorname{div}(A.\nabla u), \varphi) &= \left(-\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \varphi\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \varphi\right) \quad \text{linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \quad \text{dérivée de distributions} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \quad \text{linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left([A\nabla u]_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \\
&= (A\nabla u, \nabla\varphi) \\
&= (f, \varphi) \quad \text{par (II)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{-\operatorname{div}(A.\nabla u) = f}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$\boxed{\text{(I)} \implies \text{(II)}}$
Avec $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $-\operatorname{div}(A.\nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
b(\varphi) &= (f, \varphi) \\
&= (-\operatorname{div}(A.\nabla u), \varphi) \quad \text{par (I)} \\
&= (A\nabla u, \nabla\varphi) \quad \text{même calcul que précédemment} \\
&= a(u, \varphi)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{b(\varphi) = a(u,\varphi)}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Continuité de b. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|b(v)| &= |\int_\Omega fv| \\
&\leq (\int_\Omega |f|^2)^{1/2}(\int_\Omega |v|^2)^{1/2} \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\boxed{\leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}}
\end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de b.

Continuité de $a(u,.)$. On montre carrément la continuité de a, qui implique celle de $a(u,.)$ car ça nous sera utile dans la suite.

Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \left| \int_\Omega \sum_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} A_{ij} \right| \quad \text{calcul direct} \\
&= \left| \sum_{ij} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} A_{ij} \right| \quad \text{linéarité} \\
&\leq \sum_{ij} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| |A_{ij}| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \|A\|_\infty \sum_{ij} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \quad \text{puisque les } A_{ij} \text{ sont bornées par hypothèse} \\
&\leq \|A\|_\infty \left(\sum_i \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \right) \left(\sum_j \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} \right) \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \|A\|_\infty d^2 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\boxed{\leq \|A\|_\infty d^2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}}
\end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de a.

Ainsi, comme $a(u,.)$ et b sont continues et que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ (par construction), l'égalité précédente est en fait vraie dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\boxed{\forall v \in H_0^1(\Omega),\ a(u,v) = b(v)}$$

Donc (II) est vérifié.

Bilan : (I) et (II) sont équivalents.

2/ Pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u)(A\nabla u) \\
&\geq \alpha \int_\Omega (\nabla u)^\top \nabla u \quad \text{hypothèse de l'énoncé} \\
&= \alpha t \int_\Omega (\nabla u)^T \nabla u + \alpha(1-t)\int_\Omega (\nabla u)^T \nabla u \\
&\boxed{\geq \alpha t \|\nabla u\|_2^2 + \alpha \frac{1-t}{C_\Omega^2}\|u\|_2^2} \quad \text{Poincaré car } \Omega \text{ ouvert borné}
\end{aligned}$$

Ainsi, avec $t = \frac{1-t}{C_\Omega^2} \in]0,1[$, en posant $\beta = \alpha t$ on obtient que :

$$\boxed{a(u,u) \geq \beta \|u\|_{H^1}}$$

Donc a est coercive.

3/ On remarque que :
– $H_0^1(\Omega)$ est un Hilbert.
– b est linéaire et continue.
– a est bilinéaire, continue et coercive.

Par le théorème de **Lax-Milgram**, (II) admet une unique solution et comme (I) et (II) sont équivalents, (I) admet également une unique solution.

Ex - Variante de l'ex 3.10

$\boxed{\text{(I)} \implies \text{(II)}}$ Si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $-\text{div}(A\nabla u) + \lambda u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
– La continuité de b est déjà acquise par l'exerice précédent.
– Continuité de a (dans cette question, la continuité de $a(u,.)$ suffit mais on montre celle de a car on en a besoin pour la suite). Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \|A\|_\infty d^2 \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \int_\Omega |\lambda||u||v| \quad \text{IT + Ex précédent} \\
&\leq \|A\|_\infty d^2 \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|\lambda\|_\infty \|u\|_2^2 \|v\|_2^2 \quad \text{CS} + \lambda \text{ bornée} \\
&\boxed{\leq (\|A\|_\infty d^2 + \|\lambda\|_\infty)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}}
\end{aligned}$$

Donc a est continue.

De plus,

$$\begin{aligned}
b(\varphi) &= (f,\varphi) \\
&= (-\text{div}(A\nabla u) + \lambda u, \varphi) \quad \text{par (I)} \\
&= (A\nabla u, \varphi) + (\lambda u, \varphi) \quad \text{par calcul de l'exo précédent} \\
&\boxed{= a(u,\varphi)}
\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que dans l'exercice précédent, l'égalité précédente est en fait vraie $H^1(\Omega)$ et on obtient ainsi (II).

$\boxed{\text{(II)} \implies \text{(I)}}$ Avec $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = b(v)$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
(-\mathrm{div}(A\nabla u) + \lambda u, \varphi) &= (-\mathrm{div}(A\nabla u), \varphi) + (\lambda u, \varphi) \\
&= (A\nabla u, \varphi) + (\lambda u, \varphi) \quad \text{Même calcul que l'ex précédent} \\
&= a(u, \varphi) \\
&= b(\varphi) \quad \text{par (II)} \\
&\boxed{= (f, \varphi)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{-\mathrm{div}(A\nabla u) + \lambda u = f}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les deux problèmes sont donc équivalents.

2/ Pour $u \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u)^T (A\nabla u) + \int_\Omega \lambda u^2 \\
&\geq \alpha \int_\Omega (\nabla u)^T \nabla u + \alpha \int_\Omega u^2 \quad \text{Hypothèses de l'énoncé} \\
&\boxed{= \alpha \|u\|_{H^1}^2}
\end{aligned}$$

D'où la coercivité voulue.

3/ Même conclusion que dans l'exercice précédent. . .