Exercices EDP

Maxence Caucheteux

4 août 2024

Exercice 1.71
Pour K compact de $\mathbb{R}^2$. Avec $K = K_1 \times K_2$ où K_1,K_2 compacts de $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
|(T,\varphi)| &= \left|\int_0^{+\infty} \varphi(z,2z)dz\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} |\varphi(z,2z)|dz \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&= \int_{[0,+\infty[\cap K_1} |\varphi(z,2z)|dz \\
&\boxed{\leq \lambda([0,+\infty[\cap K_1)\|\varphi\|_\infty}
\end{aligned}$$

Et $\lambda([0,+\infty[\cap K_1) < +\infty$ car K_1 est un compact de $\mathbb{R}$. Ainsi, T définit une distribution.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial T}{\partial x} + 2\frac{\partial T}{\partial x}, \varphi) &= -(T, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) - 2(T, \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \\
&= -\int_0^{+\infty} (\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,2z) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z,2z))dz \\
&= -\int_0^{+\infty} \nabla\varphi(\gamma(z)).\gamma'(z)dz
\end{aligned}$$

avec $\gamma : z \mapsto (z, 2z)$.
Puis :

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial T}{\partial x} + 2\frac{\partial T}{\partial x}, \varphi) &= -\int_0^{+\infty} (\varphi \circ \gamma)'(t)dt \\
&= [\varphi \circ \gamma(z)]_0^{+\infty} \\
&= \varphi(0,0) \\
&\boxed{= (\delta_{(0,0)}, \varphi)}
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial x} + 2\frac{\partial T}{\partial y} = \delta_{(0,0)}}$$

Exercice 1.72

1/ Pour $x \neq 0$, $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour $x = 0$, $v_n(0) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Ainsi, $\boxed{v_n \xrightarrow[n\infty]{\text{CVS}} v = 0}$ presque partout.

2/ Pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{]-\infty,-\alpha[\cup]\alpha,+\infty[} |v_n(x)|dx &= \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{n}{1+n^2x^2}dx + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{-n\alpha} \frac{du}{1+u^2}du + \int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}du \quad \text{cdv } u = nx \\ &\boxed{= \pi - 2\operatorname{Arctan}(n\alpha) \longrightarrow 0}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{v_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^1(]-\infty,-\alpha[\cup]\alpha,+\infty[)}$.

3/ w_n définit une distribution car elle est L^1_{loc}. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(w_n, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w_n(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_K g_n(x)dx\end{aligned}$$

avec $K = \operatorname{Supp}(\varphi)$ compact, $g_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)\varphi(x)$. Les g_n sont mesurables et $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}\|\varphi\|_\infty$ intégrable sur K. Si bien que par convergence dominée,

$$\boxed{(w_n, \varphi) = \int_K g_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_K \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)\varphi(x)dx = (\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}, \varphi)}$$

On conclut que $\boxed{w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4/ v_n est L^1_{loc} donc définit une distribution. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(v_n, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1+n^2x^2}\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(u/n)}{1+u^2}du \quad \text{cdv } u = nx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_n(u)du\end{aligned}$$

avec $g_n(u) = \frac{\varphi(u/n)}{1+u^2}$. Les g_n sont mesurables car continues et pour $u \in \mathbb{R}$, $g_n(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varphi(0)}{1+u^2}$. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$, $|g_n(u)| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+u^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable en $\pm\infty$ par Riemann. La convergence dominée nous donne donc :

$$\boxed{(v_n, \varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+u^2}du = \pi\varphi(0)}$$

D'où $(v_n, \varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\pi\delta_0, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i.e. $\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R})}$.

Exercice 1.77

1/ Si $f \in L^1_{\text{loc}}$, F est également L^1_{loc}, par exemple car pour $K \subset \mathbb{R}$ compact,

$$\begin{aligned}
\int_K |F(x)|dx &= \int_K \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx \\
&\leq \int_K \left|\int_0^x |f(t)|dt\right| dx \quad \textbf{(*)} \\
&\leq \int_K \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dtdx \quad \text{avec } x_1 = \inf K,\ x_2 = \sup K \\
&\boxed{\leq \lambda(K) \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt < +\infty} \quad \text{car} f \in L^1_{\text{loc}}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

(*) : Inégalité triangulaire, mais on doit bien garder les deux modules car si on ne met pas les deux et que $x < 0$ on majore par un truc négatif, ce qui est terrifiant humainement parlant.

Montrons maintenant que $\frac{dF}{dx} = f$ au sens des distributions.

2/ On traite d'abord le cas où f est continue. Avec f continue, une **IPP** (licite car tout est donc C^1 et par convergence de deux termes) nous donne le résultat :

$$\begin{aligned}
(\frac{dF}{dx}, \varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)dx \\
&= -[F(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} F'(x)\varphi(x)dx \quad \text{IPP licite}
\end{aligned}$$

Le premier terme étant nul car φ est à support compact et en se rappelant que $F' = f$, on obtient $(\frac{dF}{dx}, \varphi) = (f, \varphi)$, puis $\frac{dF}{dx} = f$.

3/ Cas général : si f est simplement L^1_{loc}. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. On note K le support de φ qui est donc compact. On a donc $f \in L^1(K)$. Par **densité** des fonctions continues dans $L^1(K)$, il existe g continue telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. On écrit :

$$\begin{aligned}
|(\frac{dF}{dx} - f, \varphi)| &= |-(F, \varphi') - (f, \varphi)| \\
&= |-(F - G, \varphi') - (G, \varphi') - (f, \varphi)| \\
&= |-(F - G, \varphi') + (\frac{dG}{dx}, \varphi) - (f, \varphi)| \\
&= |-(F - G, \varphi') + (g, \varphi) - (f, \varphi)| \quad \text{par } \mathbf{2}/ \\
&= |-(F - G, \varphi') + (g - f, \varphi)| \\
&\leq |(F - G, \varphi')| + |(g - f, \varphi)| \quad \text{inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

Or, on remarque que :

$$\begin{aligned}
|(F-G,\varphi')| &= \left|\int_K \left(\int_0^x (f(t)-g(t))dt\right)\varphi'(x)dx\right| \\
&\leq \int_K \left|\int_0^x |f(t)-g(t)|dt\right| |\varphi'(x)|dx \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq \|\varphi'\|_\infty \lambda(K)\|f-g\|_1 \\
&\boxed{\leq \|\varphi'\|_\infty \lambda(K)\varepsilon}
\end{aligned}$$

De même, par inégalité triangulaire :

$$\boxed{|(g-f,\varphi)| = \left|\int_K (f(t)-g(t))\varphi(t)dt\right| \leq \|\varphi\|_\infty \|f-g\|_1 \leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon}$$

Si bien que :

$$\boxed{\left|\left(\frac{dF}{dx}-f,\varphi\right)\right| \leq (\|\varphi\|_\infty + \lambda(K)\|\varphi'\|_\infty)\varepsilon}$$

Cela étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on obtient finalement $(\frac{dF}{dx}-f,\varphi) = 0$. Cela étant vrai pour tout φ, on a finalement le résultat voulu :

$$\boxed{\frac{dF}{dx} = f}$$

Exercice ajouté 1
On a vu que pour $f \in H^1$:

$$\boxed{\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2}$$

Pour $f \in H^2$, on a :

$$\boxed{\|f\|_{H^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^2}^2}$$

Ce que l'on peut écrire à l'aide de la matrice Hessienne H_f de f :

$$\boxed{\|f\|_{H^2}^2 = \|f\|_{H^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|H_f\|_{L^2}^2}$$

Exercice 1.70
Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
|(T,\varphi)| &= |\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0))| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}|\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)|
\end{aligned}$$

Par inégalité des accroissements finis, $|\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)| \leq \frac{1}{n}\|\varphi'\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite :

$$|(T,\varphi)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\|\varphi'\|_\infty}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\|\varphi'\|_\infty$$

T est donc une donc une distribution d'ordre ≤ 1.

Exercice 1.73
1/ Il est clair que $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{CVS}} 0$ car f est à support compact.

Cependant, on n'a pas la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ car :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-n)|dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)|du \quad \text{cdv } u = x-n \\ &= \|f\|_1 \xrightarrow[n\infty]{\text{CVS}} \|f\|_1 > 0\end{aligned}$$

excepté si $f = 0$ presque partout, mais on choisit f non nulle dans L^1 pour éviter ce cas.
Ainsi on n'a pas la convergence de (f_n) vers 0 dans L^1.

2/
Lemme 1
$G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ **ssi** $a/b \in \mathbb{Q}$.

Sens direct : On suppose que $a/b \notin \mathbb{Q}$. Si par l'absurde on avait $G = m\mathbb{Z}$ avec $m > 0$. Alors comme $a, b \in G$, on peut écrire $a = mp$, $b = mq$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Ainsi $a/b = p/q \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde. Donc G n'est pas de la forme $m\mathbb{Z}$. Un résultat bien connu sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$ nous assure alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Sens indirect : C'est essentiellement Bézout. En effet, si $a/b = p/q$ avec p, q deux entiers premiers entre eux. Alors :

$$\begin{aligned}a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} &= \frac{p}{q}b\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ &= \frac{b}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}) \\ &\boxed{= \frac{b}{q}\mathbb{Z}} \quad \text{Bézout}\end{aligned}$$

Ce qui conclut : G est de la forme voulue.

Lemme 2
La suite $u = (e^{in\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{U}$ **ssi** $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Sens direct : Immédiat car la suite prend un nombre fini de valeurs.

Sens indirect : Notons $g : x \mapsto e^{ix}$ l'exponentielle complexe. On pose $G = \alpha\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. On note que G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. On pose $V = \{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. On a alors :

$$\boxed{g(G) = V}$$

Par **lemme 1**, comme $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, G est dense dans $\mathbb{R}$. Par continuité de g, on a donc également la densité de V dans $\mathbb{U}$.

Cela prouve que $(e^{in\alpha})_{n\geq 0}$ diverge. En effet, si par l'absurde elle convergeait, $(e^{-in\alpha})_{n\geq 0}$ convergerait aussi (raisonner sur la partie réelle et imaginaire) et donc on n'aurait pas la densité prédite par ce qui précède.

Ainsi, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ diverge pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ donc presque partout.

Cependant que : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $K = \text{Supp}(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
(f_n, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi(x)dx \\
&\boxed{= \int_K e^{inx}\varphi(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{Riemann-Lebesgue}}
\end{aligned}$$

Donc on a la convergence de (f_n) vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3/ La question est fausse.

4/ $(f_n(x))$ converge vers 0 pour tout $x \neq 0$ par croissances comparées puisque $\sigma_n \longrightarrow 0$.

Un changement de variable suivi d'un TCD (non rédigé car j'ai la MMC à rattraper) montre la convergence souhaitée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.