



École nationale des ponts et chaussées

Mémoire de Stage de M1 CERMICS

Maxence CAUCHETEUX
Stage réalisé au CERMICS
6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne la Vallée Cedex 2

Maître de Stage : Aurélien ALFONSI

16 Juin – 22 Août 2025

Table des matières

1	INTRODUCTION	7
2	RÉSULTAT PRINCIPAL	8
2.1	MATRICES ADMISSIBLES	8
2.2	DOMAINE STABLE	10
2.3	AJOUT D'UNE CONSTANTE	12
2.4	COMPATIBILITÉ DES DOMAINES AVEC LA DIMENSION	14
2.5	PROCESSUS DE VOLTERRA MULTIDIMENSIONNEL	18
3	APPLICATIONS	22
3.1	SCHÉMA DE SIMULATION	22
3.2	SIMULATIONS	22
3.3	CONSTRUCTION D'UN SCHÉMA DE SIMULATION POUR LE MODÈLE À RACINE CARRÉE VIA SPLITTING	26
3.4	OBLIGATION ZÉRO-COUPON DANS LE MODÈLE CIR	30
3.5	SCHÉMA POUR LE MODÈLE DE HESTON	34
3.6	VERSION JACOBI	36
4	CONCLUSION	42
A	RÉSULTATS ANNEXES	43
A.1	PREUVE DU THEOREME 2.1	43
A.2	M-MATRICES	44

Fiche synthèse du stage

- Type de stage : Stage de recherche en laboratoire
- Année : 2025
- Auteur : Maxence
- Formation 2ème année : IMI
- Titre du rapport : Espaces d'états pour le processus markovien multifactoriel associé à un processus de Volterra
- Organisme d'accueil : CERMICS
- Pays d'accueil : France
- Responsable de stage : Aurélien Alfonsi
- Mots-clés caractérisant votre rapport : Calcul Stochastique, Équation Différentielle Stochastique, Processus de Volterra, Processus Markovien Multifactoriel, Espace d'États

Remerciements

Je tiens à remercier Aurélien Alfonsi qui a accepté d'être mon tuteur de stage et qui m'a suivi durant tout ce projet en me donnant des ressources, des conseils et en prenant le temps de m'expliquer des points techniques précis. Aurélien Alfonsi m'a permis de travailler sur les sujets qui m'intéressaient et m'a laissé la possibilité de choisir les directions dans lesquelles je souhaitais travailler. Cela a rendu le stage très agréable.

Je remercie également toute l'équipe du CERMICS pour leur accueil et leur disponibilité, qui ont rendu cette expérience encore plus agréable. Grâce à ce stage, j'ai eu l'occasion de discuter avec des personnes en stage de M2, des doctorants et post-doctorants. Cela a été très enrichissant sur le plan mathématique et humain. J'ai pu également découvrir la vie dans un laboratoire de recherche en mathématiques.

Résumé

Mon stage s'est déroulé au CERMICS, le laboratoire de mathématiques appliquées de l'École nationale des ponts et chaussées. Le sujet de mon stage portait sur les espaces d'états des processus multifactoriels markoviens associés à des processus de Volterra. Aurélien Alfonsi m'a donné un article à lire à ce sujet. Il s'agit de l'article [7]. L'objectif était de comprendre cet article dans un premier temps. J'ai donc passé un temps à comprendre les preuves et à faire des simulations.

Cet article donnait essentiellement un résultat de stabilité du domaine des processus multifactoriels markoviens associés à des processus de Volterra pour un certain type de noyau. On a cherché dans un premier temps à étendre ce résultat à un autre type de noyau via un passage à la limite. De façon plus générale, Aurélien Alfonsi m'a demandé de regarder si on pouvait étendre certains résultats de l'article dans des cas légèrement plus généraux. Cela a occupé la majorité du temps de mon stage. J'ai eu l'occasion de lire plusieurs articles et cours afin d'essayer de répondre à ces questions.

Introduction

Ce rapport présente les travaux d'initiation à la recherche que j'ai réalisés au cours de mon stage au CERMICS, sous la direction d'Aurélien Alfonsi. Il s'agit d'un rapport mathématique. L'essentiel de ce que j'ai fait durant ce stage figure dans ce rapport.

J'ai choisi de faire un stage en laboratoire de mathématiques pour plusieurs raisons. Tout d'abord, je poursuis l'année prochaine au M2 de mathématiques appliquées Probabilités et Finance. C'est donc dans cette perspective que j'ai trouvé pertinente l'idée de faire un stage de Calcul Stochastique. Je souhaite faire de la Finance Quantitative à l'issue de mes études et il me semble intéressant d'avoir le plus de connaissances possible en mathématiques afin de travailler dans ce domaine. Ensuite, je ne suis pas fermé à l'idée de faire une thèse à l'issue du M2. Il était donc intéressant pour moi d'avoir un aperçu de ce qu'est la recherche en mathématiques afin de voir si faire une thèse peut me plaire ou non. Enfin, comme je n'ai pas fait de césure, je devais faire un stage court d'été et le stage de mathématiques s'y prêtait très bien.

En conclusion, je partagerai une réflexion sur cette expérience afin d'expliquer ce que le stage m'a apporté dans le cadre de mes études.

Présentation du CERMICS

Le **CERMICS** (Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques et Calcul Scientifique) est le laboratoire de mathématiques appliquées de l'École des Ponts ParisTech. Il se distingue par sa capacité à relier les approches déterministes et stochastiques, en produisant à la fois des avancées théoriques et des outils numériques concrets.

Le laboratoire collabore étroitement avec de nombreux partenaires industriels issus de secteurs variés (transport, énergie, finance, ingénierie, industrie pharmaceutique), tout en entretenant des liens solides avec le monde académique dans des disciplines connexes telles que la biologie, la chimie, la physique ou les sciences des matériaux.

Les thèmes de recherche du CERMICS s'organisent autour de trois pôles majeurs :

- **Probabilités appliquées** : centré sur la modélisation du risque et les méthodes stochastiques numériques.
- **Modélisation, Analyse et Simulation** : ce pôle développe des outils d'analyse mathématique, de modélisation et de simulation, appliqués notamment à la science des matériaux, à la chimie quantique et à la mécanique.
- **Optimisation** : dédié à l'optimisation discrète et stochastique, ainsi qu'à la recherche opérationnelle.

En pratique, le CERMICS est réparti sur deux étages : les pôles **Probabilités appliquées** et **Optimisation** sont situés au deuxième étage, tandis que le pôle **Modélisation, Analyse et Simulation** occupe le troisième étage. C'est donc au sein de l'équipe **Probabilités appliquées** que j'ai effectué mon stage.

L'ambiance au CERMICS est particulièrement conviviale. Les doctorants, stagiaires et post-doctorants entretiennent de très bonnes relations.

Sujet de mon stage

Ce document résume ce que j'ai compris de l'article [7], qui est l'article duquel je suis parti pour travailler dans le cadre de mon stage. J'explique avec mes mots son contenu et je détaille certains points qui figurent dedans. Je mets en avant les réflexions que j'ai eues et j'essaie de regarder comment peuvent être améliorés ou étendus certains résultats. J'ai fait beaucoup de calculs dans des cas simples à cet effet.

Lorsqu'un résultat n'a pas été démontré par moi, cela est mentionné et une référence est donnée. Les preuves produites par moi-même sont souvent des extensions basées sur le même schéma que la preuve initiale. Cela est également mentionné lorsque c'est le cas. Tous les graphes dans ce travail sont issus de mes propres simulations numériques. Je me suis efforcé d'écrire ce rapport en évitant de recopier des choses déjà existantes car cela n'a pas d'intérêt. J'ai essayé de mettre en avant ce que j'ai fait de façon personnelle, en donnant mes propres explications.

Cependant, j'ai bien sûr dû parler de résultats qui existent déjà. Lorsque cela a été le cas, j'ai essayé de mettre en avant les points durs de la preuve et d'ajouter des détails qui n'étaient pas présents dans l'article qui donne la preuve. Certaines sections (telles que 2.3, 2.4, 2.5, 3.6.6) présentent mes "propres" résultats. Les simulations dans la section 3 sont les miennes et certaines applications sont issues de moi. Bien sûr, toutes les choses que j'ai écrites et

explorées dans ce stage m'ont été suggérées par Aurélien Alfonsi.

L'article [7] part d'une solution de l'équation de Volterra et s'intéresse au processus multifactoriel markovien associé. Le résultat principal de cet article est de donner un domaine stable pour ce processus multifactoriel markovien. La classe de domaines qui est donnée est une classe de cônes. Savoir quels sont les domaines stables de ce processus multifactoriel markovien a plusieurs applications.

1 Introduction

On se place sur un espace de probabilités filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ sur lequel est défini un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$. Le point de départ de l'article [7] est l'équation différentielle stochastique de Volterra

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K(t-s)b(Y_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(Y_s)dW_s \quad (1)$$

où le noyau K est appelé série de Prony et est donné par

$$K(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\rho_i t} \text{ avec } 0 < \rho_1 \dots < \rho_N \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \gamma_i > 0.$$

Une solution Y de l'équation de Volterra s'écrit $Y_t = \sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)}$ où $Y_t^{(i)}$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dY_t^{(i)} = -\rho_i(Y_t^{(i)} - y_0^{(i)})dt + b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t, \quad Y_0^{(i)} = y_0^{(i)} \quad (2)$$

avec $\sum_{i=1}^N \gamma_i y_0^{(i)} = Y_0$ ¹. En effet, par une intégration par parties (IPP), on a

$$\begin{aligned} d\left(e^{\rho_i t}(Y_t^{(i)} - y_0^{(i)})\right) &= \rho_i e^{\rho_i t} (Y_t^{(i)} - y_0^{(i)}) dt + e^{\rho_i t} dY_t^{(i)} \\ &= \rho_i e^{\rho_i t} (Y_t^{(i)} - y_0^{(i)}) dt \\ &\quad + e^{\rho_i t} \left(-\rho_i(Y_t^{(i)} - y_0^{(i)})dt + b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t\right) \\ &= e^{\rho_i t} (b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$Y_t^{(i)} = y_0^{(i)} + e^{-\rho_i t}(Y_0^{(i)} - y_0^{(i)}) + \int_0^t e^{-\rho_i(t-s)}(b(Y_s)ds + \sigma(Y_s)dW_s).$$

Et donc, en sommant

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)} = \sum_{i=1}^N \gamma_i y_0^{(i)} + \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\rho_i t}(Y_0^{(i)} - y_0^{(i)}) + \int_0^t K(t-s)(b(Y_s)ds + \sigma(Y_s)dW_s).$$

Puis, en se rappelant que $\sum_{i=1}^N \gamma_i y_0^{(i)} = Y_0$ et $Y_0^{(i)} = y_0^{(i)}$, on a

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)} = Y_0 + \int_0^t K(t-s)(b(Y_s)ds + \sigma(Y_s)dW_s) = Y_t.$$

On note $\mathbf{Y}_t = (Y_t^{(i)})_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ de sorte que $Y_t = \gamma^\top \mathbf{Y}_t$. On note aussi $\mathbf{y}_0 = (y_0^{(i)})_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$. Plus généralement, on écrit tous les vecteurs en gras. On réécrit les N équations (2) sous la forme de l'équation N -dimensionnelle

$$d\mathbf{Y}_t = -\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(\mathbf{Y}_t - \mathbf{y}_0)dt + b(\gamma^\top \mathbf{Y}_t)\mathbf{1}dt + \sigma(\gamma^\top \mathbf{Y}_t)\mathbf{1}dW_t. \quad (3)$$

¹Dans [7], il est dit qu'on peut prendre $Y_0^i \neq y_0^i$, mais si on veut que $\sum_{i=1}^N \gamma_i Y^{(i)}$ soit la solution de l'équation de Volterra, il faut bien les conditions que j'ai données, comme le montre le calcul qui suit cette note de bas de page.

Dans [7], on cherche des domaines $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$, tels que si $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, alors il existe une solution faible \mathbf{Y} à (3) issue de \mathbf{Y}_0 qui reste dans \mathcal{D} au sens où $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$ pour tout $t \geq 0$ p.s.

En admettant que si $Y_0 \geq 0$, alors toute solution Y de (1) issue de Y_0 vérifie $Y_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, on obtient donc qu'un tel domaine \mathcal{D} doit être inclus dans le demi-plan $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y} \geq 0\}$.

2 Résultat principal

L'article [7] donne une classe de domaines \mathcal{D} qui conviennent. Pour les décrire, on introduit un ensemble de matrices.

2.1 Matrices admissibles

Définition 2.1 (Ensemble des matrices admissibles). *Une matrice $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est dite admissible si*

1. Q est inversible
2. $\mathbf{e}_N^\top Q = \boldsymbol{\gamma}^\top$
3. $Q\mathbf{1} = \bar{\gamma}\mathbf{e}_N$ où $\bar{\gamma} := \sum_{i=1}^N \gamma_i$
4. $(Q\text{diag}(\boldsymbol{\rho})Q^{-1})_{i,j} \leq 0 \quad \forall i \neq j \in \llbracket 1, N \rrbracket$

On note \mathcal{Q} l'ensemble des matrices admissibles.

Remarque 2.1. La Propriété 2. signifie que la dernière ligne de Q est $\boldsymbol{\gamma}^\top$ et la Propriété 3. signifie que la somme des éléments de chaque ligne de Q est nulle, sauf pour la dernière ligne où cette somme vaut $\bar{\gamma}$.

L'article [7] montre que $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. En effet, en dimension N , la matrice $Q = (q_{ij})$ définie par

$$q_{ij} = \begin{cases} \gamma_j & \text{si } j \leq i, \\ -\sum_{j=1}^i \gamma_j & \text{si } j = i+1 \text{ et } i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

est admissible.

On peut se demander s'il existe une infinité de telles matrices. L'article [7] répond à la question dans le cas $N = 2$. Dans le cas $N = 2$, les matrices admissibles sont les matrices de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} q & -q \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

avec $q > 0$. En effet, les Propriétés 2. et 3. sont évidentes. La Propriété 1. est vérifiée puisque $\det(Q) = \bar{\gamma}q$. Enfin, un calcul montre que

$$Q\text{diag}(\boldsymbol{\rho})Q^{-1} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \begin{pmatrix} \gamma_1\rho_2 + \gamma_2\rho_2 & (\rho_1 - \rho_2)q \\ \gamma_1\gamma_2(\rho_1 - \rho_2)q^{-1} & \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ce qui montre que la Propriété 4. est vérifiée.

Dans le cas $N = 3$, l'article [7] recherche des matrices admissibles parmi les matrices de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1+a \\ 1 & b & -1-b \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

L'article [7] montre que Q est admissible si $a = 1$, $b = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \neq 1$. Dans la suite, on montre qu'il existe en fait une infinité de matrices admissibles de la forme précédente.

Pour a et b vérifiant $a + b \neq 0$, la matrice Q est inversible puisque

$$\det(Q) = (a + b)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

Sous cette hypothèse, en notant $R = -\bar{\gamma}Q\text{diag}(\boldsymbol{\rho})Q^{-1}$ et $y_1 := \rho_2 - \rho_1$, $y_2 = \rho_3 - \rho_2$, on peut calculer les coefficients r_{ij} de R et il reste à imposer la condition

$$r_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket.$$

D'après [7], $r_{23} \leq 0$ est toujours vérifiée et les autres conditions $r_{ij} \leq 0$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a \leq \frac{y_1 + y_2}{y_2} \\ \text{(ii)} \quad & a \geq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\gamma_1 y_1 - \gamma_3 y_2}{\gamma_2 y_1 + \gamma_3 (y_1 + y_2)} \\ \text{(iii)} \quad & b \geq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{-\gamma_1 y_1 + \gamma_3 y_2}{\gamma_2 y_1 + \gamma_3 (y_1 + y_2)} \\ \text{(iv)} \quad & 0 \leq \gamma_1 y_2 a^2 + ca - \gamma_2 (y_1 + y_2) \\ \text{(v)} \quad & 0 \geq \gamma_1 y_2 b^2 - cb - \gamma_2 (y_1 + y_2) \end{aligned}$$

avec $c = \gamma_3 y_1 + \gamma_2 (y_1 + y_2) - \gamma_1 y_2$.

Si on prend $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_1 + a^2, \rho_1 + a^2 + \varepsilon)$ avec $1 > \varepsilon > 0$ et $a \geq 1$, on a $y_1 = a^2$ et $y_2 = \varepsilon$. Ainsi on a

$$\frac{y_1 + y_2}{y_2} = \frac{a^2 + \varepsilon}{\varepsilon} \geq a^2$$

et donc la Condition (i) est vérifiée si $a \geq 1$. Ensuite, la fonction φ définie par

$$\varphi(a) := \frac{\gamma_1 y_1 - \gamma_3 y_2}{\gamma_2 y_1 + \gamma_3 (y_1 + y_2)} = \frac{\gamma_1 a^2 - \gamma_3 \varepsilon}{\gamma_2 a^2 + \gamma_3 (a^2 + \varepsilon)}$$

est bornée, si bien que les quantités

$$K = \inf_{x \geq 0} \varphi(x) \quad \text{et} \quad K' = \sup_{x \geq 0} \varphi(x).$$

sont finies.

On a de plus

$$\varphi'(a) = \frac{2\varepsilon a \Delta}{((\gamma_2 + \gamma_3)a^2 + \gamma_3 \varepsilon)^2} \tag{7}$$

avec $\Delta = \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3 (\gamma_2 + \gamma_3) > 0$. Ainsi la fonction φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et

$$K = \varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad K' = \lim_{a \rightarrow \infty} \varphi(a) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_3}$$

Ainsi, pour $a \geq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} K'$, la Condition (ii) est vérifiée et pour $b \geq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} K$ la Condition (iii) est vérifiée. De plus, on a

$$\gamma_1 y_2 a^2 + ca - \gamma_2 (y_1 + y_2) = (\gamma_2 + \gamma_3) a^3 + (\gamma_1 \varepsilon - \gamma_2) a^2 + (\gamma_2 \varepsilon - \gamma_1 \varepsilon) a - \gamma_2 \varepsilon$$

donc la Condition (iv) est vérifiée pour a assez grand.

On a également

$$\gamma_1 y_2 b^2 - cb - \gamma_2(y_1 + y_2) = -((\gamma_2 + \gamma_3)b + \gamma_2)a^2 + \gamma_1 \varepsilon b - \gamma_2 \varepsilon b + \gamma_1 \varepsilon b - \gamma_2 \varepsilon.$$

Ainsi, si b vérifie la condition $(\gamma_2 + \gamma_3)b + \gamma_2 > 0$, c'est-à-dire

$$b > \frac{-\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_3} \quad (8)$$

alors pour a suffisamment grand la Condition (v) est vérifiée. Toutes ces conditions sur a et b cumulées, la matrice Q est admissible.

On résume ceci dans la proposition suivante.

Proposition 2.1 (Condition suffisante d'admissibilité ($N = 3$)). *On note Q la matrice définie par (6). Si b un réel vérifiant*

$$b \geq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} K \quad \text{et} \quad b > \frac{-\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_3}, \quad (9)$$

alors il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \geq a_0$ la matrice Q est admissible.

Il existe donc bien une infinité de matrices admissibles en dimension $N = 3$.

2.2 Domaine stable

Le théorème suivant donne une classe de domaines satisfaisant une propriété de stabilité pour le processus multifactoriel (3). C'est le résultat principal de [7]. On redonne sa preuve pour insister sur les points durs et car on l'adapte dans les sections suivantes pour montrer des extensions. Plus généralement, dans toute la Section 2.2, les résultats évoqués ont été démontrés dans [7] mais on redonne à chaque fois la preuve car on va réutiliser les schémas de preuve dans les extensions présentées dans les sections suivantes.

Théorème 2.1 (Domaine stable). *On suppose que $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues à croissance au plus affine et que $\sigma(0) = 0$ et $b(0) \geq 0$. Soit $Q \in \mathcal{Q}$. On pose $\mathbf{y}_0 = \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ avec $\mu \geq 0$. Alors avec $\mathcal{D} = Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$, pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution faible \mathbf{Y} à (3) partant de \mathbf{Y}_0 et restant dans \mathcal{D} au sens où pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$ p.s.*

Preuve. On pose $b_\mu(z) = b(z) + \mu$. L'idée de la preuve consiste à effectuer le changement de variable $\mathbf{Z} = Q\mathbf{Y}$, de sorte que montrer le théorème revient à montrer que pour toute condition initiale $\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{R}_+^N$, il existe une solution faible \mathbf{Z} à l'équation

$$d\mathbf{Z}_t = -Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1} \mathbf{Z}_t dt + b_\mu(\boldsymbol{\gamma}^\top Q^{-1} \mathbf{Z}_t) Q \mathbf{1} dt + \sigma(\boldsymbol{\gamma}^\top Q^{-1} \mathbf{Z}_t) Q \mathbf{1} dW_t \quad (10)$$

qui reste dans \mathbb{R}_+^N au cours du temps.

En utilisant les Propriétés 2. et 3. de l'admissibilité de Q , on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$d\mathbf{Z}_t = -Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1} \mathbf{Z}_t dt + \bar{\gamma} b_\mu(Z_t^{(N)}) \mathbf{e}_N dt + \bar{\gamma} \sigma(Z_t^{(N)}) \mathbf{e}_N dW_t. \quad (11)$$

On va appliquer le Lemme A.1 et le Corollaire A.1 issus de [5] afin de montrer que l'équation (11) admet une solution faible qui reste dans \mathbb{R}_+^N . On pose donc

$$\tilde{b}(z) = -Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1} z + \bar{\gamma} b_\mu(z_N) \mathbf{e}_N \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}(z) = \bar{\gamma} \sigma(z_N) \mathbf{e}_N$$

afin de réécrire l'équation (11) sous la forme

$$d\mathbf{Z}_t = \tilde{b}(\mathbf{Z}_t) dt + \tilde{\sigma}(\mathbf{Z}_t) dW_t$$

Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^N$ tel que $z_i = 0$.
Alors on a

$$\bar{\gamma}b_\mu(z_N)\mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_N = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq N \\ \bar{\gamma}(b(0) + \mu) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, puisque $b(0)$ et μ sont positifs, on obtient que $\bar{\gamma}b_\mu(z_N)\mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_N \geq 0$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^\top \tilde{b}(\mathbf{z}) &\geq \mathbf{e}_i^\top Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1} \mathbf{z} \\ &= - \sum_{j \neq i} [Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1}]_{ij} z_j \quad \text{car } z_i = 0 \\ &\geq 0 \quad \text{par Propriété 4. de l'admissibilité.} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathbf{e}_i^\top \tilde{\sigma}(\mathbf{z}) = \bar{\gamma}\sigma(z_N)\mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_N$ donc si $i < N$, $\mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_N = 0$ et si $i = N$, on a $\sigma(z_N) = \sigma(0) = 0$. Dans tous les cas on a $\mathbf{e}_i^\top \tilde{\sigma}(\mathbf{z}) = 0$.

Ainsi, pour tout $\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{R}_+^N$, le Lemme A.1 nous assure de l'existence d'une solution faible \mathbf{Z} à (11) issue de \mathbf{Z}_0 telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Z}_t \in \mathbb{R}_+^N$, ce qui conclut la preuve du Théorème 2.1. \blacksquare

Remarque 2.2. Dans le cas $N = 2$, on peut montrer que le domaine \mathcal{D} est indépendant du choix de $q \neq 0$ et que \mathcal{D} est donné par

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}_+^2 \mid \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y} \geq 0, y_1 \geq y_2\}. \quad (12)$$

Dans le cas où on prend \mathbf{y}_0 tel que $y_0^{(i)} = Y_0^{(i)}$ et $\sum_{i=0}^N \gamma_i y_0^{(i)} = Y_0$, on a vu qu'une solution Y de l'équation de Volterra (1) pouvait s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)}$ où les $Y^{(i)}$ vérifient (3). On peut montrer à partir du Théorème 2.1 que l'équation de Volterra (1) vérifie une propriété de stabilité. Elle stabilise le domaine \mathbb{R}_+ au sens où si $Y_0 \geq 0$, alors $Y_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

Pour arriver à ce résultat, on introduit deux lemmes. Le premier lemme énonce que les éléments \mathbf{y}_0 de la forme imposée dans le Théorème 2.1 sont en fait dans $Q^{-1}\mathbb{R}_+^N$.

Lemme 2.1. Si $Q \in \mathcal{Q}$ et si $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{y}_0 = \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1},$$

alors $\mathbf{y}_0 \in Q^{-1}\mathbb{R}_+^N$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} Q\mathbf{y}_0 &= \mu Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1} \\ &= \mu Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} Q^{-1} Q \mathbf{1} \\ &= \mu \bar{\gamma} Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} Q^{-1} \mathbf{e}_N \quad \text{par Propriété 3. de l'admissibilité.} \end{aligned}$$

Or, la matrice $Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} Q^{-1}$ est l'inverse de la matrice $Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1}$, qui est une M-matrice (voir Définition A.3) par Propriété 4. de l'admissibilité et car son spectre est $\{\rho_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$. Les coefficients de la matrice $Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} Q^{-1}$ sont donc positifs par la Proposition A.2 et donc $Q\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}_+^N$. \blacksquare

Le second lemme permet d'effectuer une translation du domaine stable \mathcal{D} qui conserve la stabilité.

Lemme 2.2 (Translation du domaine). Si $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues à croissance au plus affine telles que $\sigma(0) = 0$ et $b(0) \geq 0$. Soit $Q \in \mathcal{Q}$. Soit $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}_0 \geq 0$.

Alors avec $\tilde{\mathbf{y}}_0 := \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ où $\mu \geq 0$ est choisi de sorte que $\boldsymbol{\gamma}^\top \tilde{\mathbf{y}}_0 = \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}_0$, et $\mathcal{D} := Q^{-1}\mathbb{R}_+^N + (\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0)$, alors pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution faible \mathbf{Y} à (3) issue de \mathbf{Y}_0 et qui reste dans \mathcal{D} .

Preuve. Soit $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$. Par le Théorème 2.1, il existe une solution faible $\tilde{\mathbf{Y}}$ à l'équation

$$d\tilde{\mathbf{Y}}_t = -\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(\tilde{\mathbf{Y}}_t - \tilde{\mathbf{y}}_0)dt + b(\boldsymbol{\gamma}^\top \tilde{\mathbf{Y}}_t)\mathbf{1}dt + \sigma(\boldsymbol{\gamma}^\top \tilde{\mathbf{Y}}_t)\mathbf{1}dW_t \quad (13)$$

issue de $\tilde{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{Y}_0 + \tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0 \in Q^{-1}\mathbb{R}_+^N$ et qui reste dans $Q^{-1}\mathbb{R}_+^N$. On pose alors $\mathbf{R} = \mathbf{Y} + \mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0$. On a alors $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{R} = \boldsymbol{\gamma}^\top \tilde{\mathbf{Y}}_t$ et donc on a

$$d\mathbf{R}_t = -\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(\mathbf{R}_t - \mathbf{y}_0)dt + b(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{R}_t)\mathbf{1}dt + \sigma(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{R}_t)\mathbf{1}dW_t \quad (14)$$

avec $\mathbf{R}_0 = \mathbf{Y}_0$. De plus, le processus \mathbf{R} est à valeurs dans \mathcal{D} . ■

Grâce à ces deux lemmes, on peut montrer le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 (Positivité de la Volterra). *Soient $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues à croissance au plus affine et telles que $\sigma(0) = 0$ et $b(0) \geq 0$. Alors pour tout $Y_0 \geq 0$, il existe une solution faible Y à l'équation de Volterra (1) issue de Y_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $Y_t \geq 0$ p.s.*

Preuve. Soit $Y_0 \geq 0$. On a envie d'appliquer le Théorème 2.1 avec \mathbf{y}_0 , mais \mathbf{y}_0 n'est a priori pas de la forme $\mathbf{y}_0 = \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ donc on ne peut pas le faire.

On prend donc $\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ avec $\mu \geq 0$ donné par

$$\mu = \frac{Y_0}{\boldsymbol{\gamma}^\top \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}}, \quad (15)$$

de sorte que $\boldsymbol{\gamma}^\top \tilde{\mathbf{y}}_0 = Y_0$.

Ainsi, avec $Q \in \mathcal{Q}$, par le Lemme 2.1, on sait que $\tilde{\mathbf{y}}_0 \in Q^{-1}\mathbb{R}_+^N$, si bien que $\mathbf{y}_0 = \tilde{\mathbf{y}}_0 + (\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0) \in Q^{-1}\mathbb{R}_+^N + \mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0$ et donc par le Lemme 2.2, on peut trouver une solution faible \mathbf{Y} à (3) issue de \mathbf{y}_0 et qui reste dans $Q^{-1}\mathbb{R}_+^N + (\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0)$.

Par technique de la variation de la constante, on peut écrire

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \exp(-\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(t-s)) \mathbf{1} [b(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_s)ds + \sigma(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_s)dW_s].$$

Ainsi, en multipliant à gauche par $\boldsymbol{\gamma}^\top$ et en remarquant que $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}_0 = Y_0$ et que $\boldsymbol{\gamma}^\top \exp(-\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(t-s)) \mathbf{1} = K(t-s)$, on obtient

$$Y_t := \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t = Y_0 + \int_0^t K(t-s)b(Y_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(Y_s)dW_s.$$

et donc Y est solution faible de l'équation de Volterra (1). Il reste à vérifier que Y est à valeurs positives, mais c'est bien le cas puisque

$$Y_t \in \boldsymbol{\gamma}^\top [\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0 + Q^{-1}\mathbb{R}_+^N] = \mathbf{e}_N^\top Q Q^{-1}\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}_+$$

car $\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\gamma}^\top \tilde{\mathbf{y}}_0$ et par Propriété 2. de l'admissibilité. Ainsi $Y_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. ■

2.3 Ajout d'une constante

Dans cette section, on s'intéresse à l'effet d'ajouter une constante à la solution de l'équation de Volterra (1) sur le domaine. Formellement, on s'intéresse à présent non pas à $Y_t =$

$\sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)}$ mais à

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et où les $Y^{(i)}$ vérifient

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad dY_t^{(i)} = -\rho_i \left[Y_t^{(i)} - y_0^{(i)} \right] dt + b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t.$$

En posant $\mathbf{Y} = (Y^{(i)})_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$, on peut écrire les N équations précédentes sous forme d'une unique équation N -dimensionnelle

$$d\mathbf{Y}_t = -\text{diag}(\boldsymbol{\rho}) [\mathbf{Y}_t - \mathbf{y}_0] dt + b(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t + \alpha) \mathbf{1} dt + \sigma(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t + \alpha) \mathbf{1} dW_t. \quad (16)$$

Une question naturelle à se poser est la question suivante :

Pouvons-nous donner une classe de domaines $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ tels que si $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, alors il existe une solution faible \mathbf{Y} à (16) issue de \mathbf{Y}_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$?

La réponse est oui sous hypothèse, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Soit $\boldsymbol{\beta}$ tel que $\boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{\beta} = \alpha$. On suppose que \mathbf{y}_0 est de la forme $\mathbf{y}_0 = -\boldsymbol{\beta} + \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ où $\mu \geq 0$. On pose*

$$\mathcal{D} = -\boldsymbol{\beta} + Q^{-1} \mathbb{R}_+^N.$$

Alors pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution faible \mathbf{Y} à (16) issue de \mathbf{Y}_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$.

Ainsi, \mathbf{Y} vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad \alpha + \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t \geq 0.$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{\beta}$ tel que $\boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{\beta} = \alpha$. En posant $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}$ l'équation (16) se réécrit alors

$$d\mathbf{Z}_t = -\text{diag}(\boldsymbol{\rho}) [\mathbf{Z}_t - \mathbf{z}_0] dt + b(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Z}_t) dt + \sigma(\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Z}_t) dW_t \quad (17)$$

avec $\mathbf{z}_0 = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}_0$.

Par le Théorème 2.1, si on prend $\mathbf{z}_0 = \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ et $\mu \geq 0$, alors pour tout $\mathbf{Z}_0 \in Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$, il existe une solution faible à (17) partant de \mathbf{Z}_0 et restant dans $Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$ au cours du temps.

On en déduit donc qu'avec $\mathbf{y}_0 = -\boldsymbol{\beta} + \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$, si $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D} := -\boldsymbol{\beta} + Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$, alors il existe une solution faible \mathbf{Y} à (16) qui part de \mathbf{Y}_0 et telle que $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$ pour tout $t \geq 0$ p.s. ■

On déduit de la Proposition 2.2 le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *On suppose que $\mathbf{y}_0 = 0$ et $\alpha \geq 0$. Il existe une solution faible \mathbf{Y} à (16) issue de 0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\alpha + \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t \geq 0$.*

Preuve. On prend $\boldsymbol{\beta} = \mu \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ avec $\mu \geq 0$ donné par

$$\mu = \frac{\alpha}{\boldsymbol{\gamma}^\top \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}}, \quad (18)$$

de sorte que $\boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{\beta} = \alpha$.

On pose $\mathcal{D} = -\boldsymbol{\beta} + Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$. Par la Proposition 2.2, pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution faible \mathbf{Y} à (16) issue de \mathbf{Y}_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$ et $\alpha + \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t \geq 0$.

Or, $0 \in \mathcal{D}$ puisque par le Lemme 2.1, $\boldsymbol{\beta} \in Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$. Ainsi, on en déduit l'existence d'une solution faible \mathbf{Y} à (16) issue de 0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\alpha + \boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{Y}_t \geq 0$. ■

2.4 Compatibilité des domaines avec la dimension

2.4.1 Motivations

Le Corollaire 2.1 nous assure que, sous hypothèses sur b et σ , si on choisit une condition initiale $Y_0 \geq 0$, alors la Volterra

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K(t-s)b(Y_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(Y_s)dW_s$$

reste positive, lorsque le noyau K est une série de Prony, c'est à dire de la forme

$$K(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\rho_i t} \text{ avec } 0 < \rho_1 < \dots < \rho_N \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \gamma_i > 0.$$

Si on choisit

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \gamma_i = \frac{1}{N} \text{ et } \rho_i = \frac{i}{N},$$

alors le noyau K se réécrit $K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\frac{i}{N}t}$. D'après le Théorème des sommes de Riemann, puisque la fonction $x \mapsto e^{-xt}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, on a

$$K_N(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_\infty(t) := \int_0^1 e^{-xt} dx.$$

Le noyau K_∞ s'écrit

$$K_\infty(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}(e^{-t} - 1) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est donc naturel de vouloir montrer le résultat analogue au Corollaire 2.1 lorsque le noyau est de cette forme. On cherche donc à faire un passage à la limite $N \rightarrow \infty$ dans le Théorème 2.1. Dans ce but, on regarde dans les sections suivantes si lorsqu'on ajoute un poids γ_0 , on peut rendre le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ en dimension $N+1$ compatible avec le domaine \mathcal{D} en dimension N , c'est à dire exprimer le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ à partir du domaine \mathcal{D} . Pour cela, on regarde si on peut construire une matrice \tilde{Q} admissible en dimension $N+1$ à partir d'une matrice Q en dimension N .

2.4.2 Compatibilité de l'admissibilité

Le Théorème 2.1 donne sous hypothèses une classe de domaines \mathcal{D} tels que pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$ l'équation N -dimensionnelle (3) admet une solution faible issue de \mathbf{Y}_0 et qui reste dans \mathcal{D} . On se demande à présent si, à partir d'un tel domaine \mathcal{D} , on peut construire un domaine $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ tel que pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \tilde{\mathcal{D}}$, l'équation $(N+1)$ -dimensionnelle (3) admette une solution faible \mathbf{Y} issue de \mathbf{Y}_0 et qui reste dans $\tilde{\mathcal{D}}$.

Soit Q une matrice admissible en dimension N pour le jeu de paramètres $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ et (ρ_1, \dots, ρ_N) . On se donne $\gamma_0 > 0$ et $0 < \rho_0 < \rho_1$. On cherche à construire une matrice admissible \tilde{Q} en dimension $N+1$ pour le jeu de paramètres $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N)$ et $(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)$, à partir de la matrice Q .

Pour espérer être admissible, \tilde{Q} doit vérifier plusieurs propriétés. D'abord, il paraît raisonnable de placer Q en bas à droite de \tilde{Q} et d'imposer $\tilde{Q}_{N+1,1} = \gamma_0$ dans la mesure où la Propriété 2. de l'admissibilité impose que la dernière ligne de \tilde{Q} soit $(\gamma_0 \ \gamma_1 \ \dots \ \gamma_N)$. Ensuite, la première ligne de \tilde{Q} doit être de somme nulle d'après la Propriété 3. de l'admissibilité. On choisit donc sa première ligne sous la forme $(-\sum_{k=1}^N q_k \ q_1 \ \dots \ q_N)$. On met les autres coefficients à 0 car les lignes de \tilde{Q} doivent être de somme nulle, sauf la dernière par la Propriété 3. de l'admissibilité. On synthétise cela en prenant \tilde{Q} de la forme

$$\tilde{Q} = \left(\begin{array}{c|ccc} -\sum_{k=1}^N q_k & q_1 & \dots & q_N \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ \gamma_0 & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} Q \\ \\ \\ \\ \end{array} \right). \quad (19)$$

À présent, on cherche à savoir à quelles conditions \tilde{Q} est admissible sous cette forme. D'office, les Propriétés 2. et 3. de l'admissibilité sont vérifiées pour \tilde{Q} car on a choisi la forme de \tilde{Q} à cet effet. Intéressons-nous aux Propriétés 1. et 4.

Propriété 1. On choisit les q_i afin de rendre la matrice \tilde{Q} inversible et d'exprimer son inverse de façon explicite. On regarde à quelles conditions la matrice

$$\tilde{R} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v} & M \end{array} \right)$$

est l'inverse de la matrice \tilde{Q} . Un calcul par bloc montre que :

$$\tilde{R}\tilde{Q} = \left(\begin{array}{c|ccc} \beta & & & L \\ \hline C & & & A \end{array} \right)$$

où

$$\begin{cases} \beta = -\alpha \sum_{k=1}^N q_k + u_N \gamma_0 \\ L = \alpha(q_1 \dots q_N) + \mathbf{u}^\top Q \\ C = -\mathbf{v} \sum_{k=1}^N q_k + M \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \\ A = \mathbf{v}(q_1 \dots q_N) + M Q. \end{cases}$$

Les conditions à respecter sont donc $\beta = 1$, $L = 0$, $C = 0$ et $A = I_N$. Ces conditions sont équivalentes à

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-1}{\sum_{k=1}^N q_k + \gamma_0 \sum_{k=1}^N q_k [Q^{-1}]_{kN}} \\ \mathbf{u}^\top = -\alpha(q_1 \dots q_N) Q^{-1} \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad v_i = \frac{\gamma_0 [Q^{-1}]_{iN}}{\sum_{k=1}^N q_k + \gamma_0 \sum_{k=1}^N q_k [Q^{-1}]_{kN}} \\ M = -\mathbf{v}(q_1 \dots q_N) Q^{-1} + Q^{-1}. \end{cases} \quad (20)$$

Sous ces conditions, la matrice \tilde{Q} est inversible, d'inverse \tilde{R} . À ce stade, sous ces conditions, les Propriétés 1., 2. et 3. sont vérifiées. Il reste à traiter la Propriété 4.

Propriété 4. Un calcul par bloc montre que

$$\tilde{Q} \text{diag}(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N) \tilde{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & L' \\ \hline C' & A' \end{array} \right)$$

où γ , L' , C' et A' sont donnés par

$$\begin{cases} \gamma = -\rho_0 \alpha \sum_{k=1}^N q_k + (q_1 \dots q_N) \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{v} \\ L' = -\rho_0 \left(\sum_{k=1}^N q_k \right) \mathbf{u}^\top + (q_1 \dots q_N) \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) M \\ C' = \rho_0 \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{v} \\ A' = \rho_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \mathbf{u}^\top + Q \text{diag}(\boldsymbol{\rho}) M. \end{cases}$$

Il faut donc imposer

$$\begin{cases} [L']_i \leq 0, [C']_i \leq 0 & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ [A']_{ij} \leq 0 & \text{pour tous } i \neq j \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{cases} \quad (21)$$

On résume tout ce que l'on vient d'écrire dans la Proposition suivante.

Proposition 2.3 (Compatibilité de l'admissibilité). *Soit $Q \in \mathcal{Q}$. Soit $\gamma_0 > 0$ et $\rho_0 \in]0, \rho_1[$. Soit par ailleurs $(q_k)_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ vérifiant les conditions (20) et (21). Alors la matrice \tilde{Q} définie en (19) est admissible.*

2.4.3 Compatibilité des domaines

Sous les conditions de la Proposition 2.3, la matrice \tilde{Q} est admissible. Ainsi, par le Théorème 2.1, avec $\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mu \text{diag}(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)^{-1} \mathbf{1}_{N+1}$ et b, σ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1 et avec $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{Q}^{-1} \mathbb{R}_+^{N+1}$, pour tout $\tilde{\mathbf{Y}}_0 \in \tilde{\mathcal{D}}$, l'équation (3) en dimension $N+1$ admet une solution faible $\tilde{\mathbf{Y}}$ issue de $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ et restant dans $\tilde{\mathcal{D}}$. Le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \mathbb{R}_+ + \mathcal{E} \quad (22)$$

avec

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha(q_1 \dots q_N) \mathbf{y} \\ -\mathbf{v}(q_1 \dots q_N) \mathbf{y} \end{pmatrix} \mid \mathbf{y} \in \mathcal{D} \right\}.$$

La proposition suivante résume ce qu'on vient d'obtenir.

Proposition 2.4 (Compatibilité des domaines par augmentation de la dimension). *Soit $Q \in \mathcal{Q}$ en dimension N et $s \neq 0$. Soient $0 < \rho_1 < \dots < \rho_N$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_N > 0$. Soit $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues à croissance au plus affine et telles que $\sigma(0) = 0$ et $b(0) \geq 0$. Soient $\rho_0 \in]0, \rho_1[$, $\gamma_0 > 0$ et $(q_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ vérifiant les propriétés (20) et (21). On pose*

$$\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mu \text{diag}(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)^{-1} \mathbf{1}_{N+1} \quad \text{avec } \mu \geq 0.$$

Alors, en posant $\tilde{\mathcal{D}}$ comme en (22), pour tout $\tilde{\mathbf{Y}}_0 \in \tilde{\mathcal{D}}$, il existe une solution faible à l'équation $(N+1)$ -dimensionnelle (3) issue de $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ qui reste dans $\tilde{\mathcal{D}}$.

2.4.4 Cas $N \in \{1, 2, 3\}$

Les conditions pour que \tilde{Q} soit admissible dans la Proposition 2.3 sont abstraites. On ne sait pas s'il est possible de trouver (q_1, \dots, q_N) qui les satisfassent en général. Dans cette section, on traite les cas $N \in \{1, 2\}$.

Cas $N = 1$. Dans ce cas $Q = (\gamma_1)$ et \tilde{Q} est de la forme

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & -q_1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

qui est admissible si et seulement si $q_1 > 0$ d'après [7]. Le domaine \tilde{D} associé ne dépend pas de q_1 et est donné par (12).

Cas $N = 2$. Cette fois-ci, on part de

$$Q = \begin{pmatrix} q & -q \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

avec $q > 0$.

La matrice \tilde{Q} s'écrit sous la forme

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -q_1 - q_2 & q_1 & q_2 \\ 0 & q & -q \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(\tilde{Q}) = -q(q_1 + q_2)(\gamma_1 + \gamma_2)$$

donc en prenant $q \neq 0$, \tilde{Q} est inversible. Il faut donc imposer que $q_1 + q_2 \neq 0$.

On pose

$$T = \tilde{Q} \text{diag}(\rho_0, \rho_1, \rho_2) \tilde{Q}^{-1}.$$

Un calcul montre que

$$T_{2,1} = \frac{q\gamma_0}{q_1 + q_2}(\rho_1 - \rho_2), \quad T_{3,1} = \frac{\gamma_0\gamma_2(\rho_2 - \rho_0) + \gamma_0\gamma_1(\rho_1 - \rho_0)}{(q_1 + q_2)(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)}.$$

Et donc, pour que \tilde{Q} soit admissible, il faut que $q_1 + q_2 \geq 0$ et $q_1 + q_2 \leq 0$. C'est absurde puisque $q_1 + q_2 \neq 0$. Ainsi, les conditions de la Proposition 2.3 ne sont jamais vérifiées.

Remarque 2.3. *Mis à part dans le cas $N = 1$, il semble que les conditions de la Proposition 2.3 ne sont jamais vérifiées. On n'a pas réussi montrer qu'elles n'étaient jamais vérifiées de façon générale. On a réussi à le montrer uniquement dans le cas $N = 2$. Dans le cas $N = 3$, on a réussi à montrer des relations qui suggéraient qu'on avait peu de chances de satisfaire les conditions de la Proposition 2.3. Cela ne figure pas dans ce document pour ne pas alourdir le texte inutilement.*

2.4.5 Avec la matrice donnée par [7]

Une autre idée afin d'obtenir un résultat de compatibilité des domaines est de partir de la matrice admissible (4) donnée par [7]. Cette matrice admissible Q_N en dimension N vérifie la relation de récurrence

$$Q_{N+1} = \left(\begin{array}{c|c} Q_N & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sum_{k=1}^N \gamma_k \end{matrix} \\ \hline \gamma_1 & \cdots & \gamma_N & \gamma_{N+1} \end{array} \right).$$

Cela nous permet d'espérer la compatibilité des domaines associés. Mais d'après [7], l'inverse de Q_N est la matrice $R_N = (r_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ définie par

$$\begin{cases} r_{i,N} = \frac{1}{\gamma} & \text{pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ r_{i,j} = \frac{\gamma_{j+1}}{(\sum_{l=1}^j \gamma_l)(\sum_{l=1}^{j+1} \gamma_l)} & \text{pour } i \leq j < N \\ r_{i+1,i} = \frac{-1}{\sum_{l=1}^{i+1} \gamma_l} & \text{pour } i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \\ r_{i,j} = 0 & \text{pour } i \geq j+2. \end{cases}$$

On voit bien qu'il est difficile d'exprimer R_{N+1} à partir de R_N . On ne peut donc pas écrire le domaine $R_{N+1}\mathbb{R}_+^{N+1}$ à partir du domaine $R_N\mathbb{R}_+^N$.

Notre tentative d'étendre le Théorème 2.1 à d'autres noyaux que les séries de Prony via un passage à la limite a donc échoué, mais cela nous a permis d'en apprendre plus sur la structure des matrices admissibles.

2.5 Processus de Volterra multidimensionnel

Dans [7], on travaille avec un processus de Volterra en dimension 1 et le Théorème 2.1 donne un résultat de stabilité pour le processus multifactoriel associé dans ce cadre.

Dans cette section, on montre une extension des résultats de [7] en dimension d . On part de la solution Y_t d'une équation de Volterra en dimension d

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K(t-s)b(Y_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(Y_s)dW_s \quad (23)$$

où $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel. On écrit $b = (b_1, \dots, b_d)^\top$ où $b_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)^\top$ où $\sigma_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est la i -ième ligne de la matrice σ .

On peut toujours écrire Y_t sous la forme $Y_t = \sum_{i=1}^N \gamma_i Y_t^{(i)}$ où les $Y_t^{(i)} = (Y_{1t}^{(i)}, \dots, Y_{dt}^{(i)})$ sont des processus à valeurs dans \mathbb{R}^d vérifiant

$$dY_t^{(i)} = -\rho_i \left(Y_t^{(i)} - y_0^{(i)} \right) dt + b(Y_t) + \sigma(Y_t)dW_t \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad (24)$$

avec $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 2.4. La volterra Y_t est à valeurs dans \mathbb{R}^d . Bien que Y_t soit un vecteur, on ne le notera pas en gras dans cette section. Par analogie avec les notations des sections précédentes où $d = 1$, on notera uniquement en gras les vecteurs de \mathbb{R}^{Nd} . On écrira les vecteurs $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{Nd}$ sous la forme $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)$ où pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, z_i est un vecteur de \mathbb{R}^N dont les coefficients seront notés z_i^1, \dots, z_i^N .

On note $Y_{it} = (Y_{it}^{(1)}, \dots, Y_{it}^{(N)})$ pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ le vecteur des facteurs associés à la dimension i . On pose $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{dt})$. Il s'agit donc d'un vecteur de \mathbb{R}^{Nd} dont les coefficients sont, à

la suite, les N facteurs associés à la dimension 1, puis les N facteurs associés à la dimension 2, jusqu'aux N facteurs associés à la dimension d (voir Remarque 2.4). On écrit les N équations (24) en dimension d sous la forme de l'équation Nd -dimensionnelle

$$d\mathbf{Y}_t = \tilde{b}(\mathbf{Y}_t)dt + \tilde{\sigma}(\mathbf{Y}_t)dW_t \quad (25)$$

avec $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d)^\top : \mathbb{R}^{Nd} \longrightarrow \mathbb{R}^{Nd}$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}^{Nd} \quad \tilde{b}_i(x) = \begin{pmatrix} -\rho_1(x_i^1 - y_{i0}^{(1)}) + b_i(\Gamma x) \\ \vdots \\ -\rho_N(x_i^N - y_{i0}^{(N)}) + b_i(\Gamma x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

et $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_d)^\top : \mathbb{R}^{Nd} \longrightarrow \mathbb{R}^{Nd \times d}$ est telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{Nd}, \quad \tilde{\sigma}_i(x) = \begin{pmatrix} \sigma_i(\Gamma x) \\ \vdots \\ \sigma_i(\Gamma x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d}$$

avec $\Gamma = \text{diag}(\gamma^\top, \dots, \gamma^\top) \in \mathbb{R}^{d \times Nd}$.

Le théorème suivant généralise le Théorème 2.1 en dimension d .

Théorème 2.2 (Domaine stable).

$$\begin{cases} b_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) \geq 0 & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \\ \sigma_{ij}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) = 0 & \text{pour tous } i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket. \end{cases} \quad (26)$$

Soit $Q \in \mathcal{Q}$. Soit $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0d}) \in \mathbb{R}^{Nd}$ où pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, y_i est de la forme $y_i = \mu_i \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ avec $\mu_i \geq 0$. Alors avec $\mathcal{D} = (Q^{-1} \mathbb{R}_+^N)^d$, pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution faible \mathbf{Y} à (25) issue de \mathbf{Y}_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in \mathcal{D}$ p.s.

Preuve. On adapte la preuve de 2.1. Soit $\tilde{Q} = \text{diag}(Q, \dots, Q) \in \mathbb{R}^{Nd \times Nd}$. La matrice \tilde{Q} est diagonale par blocs, contenant d blocs diagonaux tous égaux à Q . On pose $\mathbf{Z}_t = \tilde{Q} \mathbf{Y}_t$. D'après (25), on a

$$d\mathbf{Z}_t = B(\mathbf{Z}_t)dt + V(\mathbf{Z}_t)dW_t \quad (27)$$

avec $B(z) = \tilde{Q} \tilde{b}(\tilde{Q}^{-1}z)$ et $V(z) = \tilde{Q} \tilde{\sigma}(\tilde{Q}^{-1}z)$. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que pour tout $\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{R}_+^{Nd}$, il existe une solution faible à (27) telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Z}_t \in \mathbb{R}_+^{Nd}$ p.s. Pour cela, on applique le Lemme A.1.

Tout d'abord, en vertu des hypothèses faites sur σ , on a clairement $V(0) = 0$. De plus, d'après la Propriété 3. de l'admissibilité,

$$B(0) = \begin{pmatrix} b_1(0)Q\mathbf{1} \\ \vdots \\ b_d(0)Q\mathbf{1} \end{pmatrix} = \bar{\gamma} \begin{pmatrix} b_1(0)e_N \\ \vdots \\ b_d(0)e_N \end{pmatrix},$$

qui est bien à coefficients positifs d'après l'hypothèse faite sur b .

Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^{Nd}$ telle que $z_i = 0$. On note $d_i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ l'indice dimensionnel tel que $i \in$

$\llbracket Nd_i - N + 1, Nd_i \rrbracket$. Un calcul matriciel montre que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^\top B(z) &= -\mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} Q \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1} z_1 \\ \vdots \\ Q \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1} z_d \end{pmatrix} + \mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} Q \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) y_{01} \\ \vdots \\ Q \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) y_{0d} \end{pmatrix} + \mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} b_1(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) Q \mathbf{1} \\ \vdots \\ b_d(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) Q \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &= v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on a par Propriété 4. de l'admissibilité

$$v_1 = - \sum_{j \neq i} (Q \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) Q^{-1})_{ij} z_{d_i j} \geq 0.$$

Pour le deuxième terme, comme $y_{0d_i} = \mu_{d_i} \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$, d'après la Propriété 3. de l'admissibilité, on a

$$Q \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) y_{0d_i} = \mu_{d_i} \bar{\gamma} \mathbf{e}_N.$$

Donc les coefficients dans le vecteur à droite de \mathbf{e}_i^\top dans v_2 sont positifs. Enfin, pour le dernier terme, on a

$$v_3 = \bar{\gamma} \mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} b_1(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) \mathbf{e}_N \\ \vdots \\ b_d(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) \mathbf{e}_N \end{pmatrix}$$

par Propriété 3. de l'admissibilité. On remarque que

$$\Gamma \tilde{Q}^{-1} z = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}^\top Q^{-1} z_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}^\top Q^{-1} z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_N^\top z_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N^\top z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^N \\ \vdots \\ z_d^N \end{pmatrix}$$

par Propriété 2. de l'admissibilité. Ainsi, on a

$$v_3 = \bar{\gamma} \mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} b_1(z_1^N, \dots, z_d^N) \\ \vdots \\ b_d(z_1^N, \dots, z_d^N) \end{pmatrix}$$

Et donc, si $i \neq Nd_i$, $v_3 = 0$ et si $i = Nd_i$, on a $v_3 = \bar{\gamma} b_{d_i}(z_1^N, \dots, z_{d_i-1}^N, 0, z_{d_i+1}^N, \dots, z_d^N)$ qui est bien positif d'après l'hypothèse faite sur b .

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^\top V(z) &= \mathbf{e}_i^\top \tilde{Q} \tilde{\sigma}(\tilde{Q}^{-1} z) \\ &= \mathbf{e}_i^\top \tilde{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \sigma_1(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) \\ \vdots \\ \mathbf{1} \sigma_d(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} Q \mathbf{1} \sigma_1(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) \\ \vdots \\ Q \mathbf{1} \sigma_d(\Gamma \tilde{Q}^{-1} z) \end{pmatrix} \\ &= \bar{\gamma} \mathbf{e}_i^\top \begin{pmatrix} \sigma_1(z_1^N, \dots, z_d^N) \mathbf{e}_N \\ \vdots \\ \sigma_d(z_1^N, \dots, z_d^N) \mathbf{e}_N \end{pmatrix} \quad \text{par la Propriété 3. de l'admissibilité.} \end{aligned}$$

Si $i \neq Nd_i$, il donc est clair que $\mathbf{e}_i^\top V(z) = 0$ et si $i = Nd_i$, alors on a

$$\mathbf{e}_i^\top V(z) = \bar{\gamma} \sigma_{d_i}(z_1^N, \dots, z_{d_i-1}^N, 0, z_{d_i+1}^N, \dots, z_d^N) = 0$$

d'après l'hypothèse faite sur σ .

Ainsi, d'après le Lemme A.1, pour tout $\mathbf{Z}_0 \in \mathbb{R}_+^{Nd}$, il existe une solution faible \mathbf{Z} à (27) issue de \mathbf{Z}_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Z}_t \in \mathbb{R}_+^{Nd}$. Cela achève la preuve. ■

Le lemme suivant est l'analogue du Lemme 2.2.

Lemme 2.3 (Translation du domaine en dimension d). *Soient $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ continues, vérifiant les conditions (26). Soit $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{Nd}$ tel que $\Gamma \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}_+^d$. Soit $\tilde{\mathbf{y}}_0 = (\tilde{y}_{01}, \dots, \tilde{y}_{0d})$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$,*

$$\tilde{y}_{0i} = \mu_i \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1},$$

avec $\mu_i \geq 0$ choisis de sorte que $\Gamma \mathbf{y}_0 = \Gamma \tilde{\mathbf{y}}_0$, et posons $\mathcal{D} = \tilde{Q} \mathbb{R}_+^{Nd} + (\mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0)$. Alors, pour tout $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution faible \mathbf{Y} à (25) issue de \mathbf{Y}_0 telle que, pour tout $t \geq 0$, on a $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}_+^{Nd}$.

Preuve. Soit $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{D}$. On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \mu_i = \frac{\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{y}_{0i}}{\boldsymbol{\gamma}^\top \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}}.$$

On définit $\tilde{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{Y}_0 + \tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0$. On a donc $\tilde{\mathbf{Y}}_0 \in (Q^{-1} \mathbb{R}_+^N)^d$. Ainsi, d'après le Théorème 2.2, il existe une solution faible $\tilde{\mathbf{Y}}$ à (25) avec $\tilde{\mathbf{y}}_0$ issue de $\tilde{\mathbf{Y}}_0$ qui reste dans $(Q^{-1} \mathbb{R}_+^N)^d$. On pose alors $\mathbf{R} := \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{y}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0$. On remarque que \mathbf{R} vérifie (25) avec \mathbf{y}_0 . De plus, pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{R}_t \in \mathcal{D}$ p.s. Cela achève la preuve. ■

On peut montrer à partir du Lemme 2.3 l'analogue du Corollaire 2.1 en dimension d .

Corollaire 2.3. *Soient $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ continues, vérifiant les conditions (26). Soit $Y_0 \in \mathbb{R}_+^d$. Alors il existe une solution faible Y à (23) issue de Y_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}_+^d$.*

Preuve. Soit $Y_0 \in \mathbb{R}_+^d$. Soit $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{Nd}$ tel que $\Gamma \mathbf{y}_0 = Y_0$. Soit également $\tilde{\mathbf{y}}_0 = (\tilde{y}_{01}, \dots, \tilde{y}_{0d})$ avec $\tilde{y}_{0i} = \mu_i \text{diag}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{1}$ et $\mu_i \geq 0$ choisis pour que $\Gamma \tilde{\mathbf{y}}_0 = \Gamma \mathbf{y}_0$. D'après le Lemme 2.1, on sait que $\tilde{y}_{0i} \in Q^{-1} \mathbb{R}_+^N$ et donc $\tilde{\mathbf{y}}_0 \in (Q^{-1} \mathbb{R}_+^N)^d$. Ainsi, on a

$$\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{y}_0 + (\tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0) \in (Q^{-1} \mathbb{R}_+^N)^d + \tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0.$$

Ainsi, d'après le Lemme 2.3, il existe une solution faible \mathbf{Y} à l'équation (25) issue de \mathbf{y}_0 et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{Y}_t \in (Q^{-1} \mathbb{R}_+^N)^d + \tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0$ p.s.

On pose $Y_t = \Gamma \mathbf{Y}_t$. Par technique de la variation de la constante, on écrit

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \text{diag}(\exp(-\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(t-s)), \dots, \exp(-\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(t-s))) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (b(Y_s)ds + \sigma(Y_s)dW_s).$$

En multipliant à gauche par Γ , il vient

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K(t-s) (b(Y_s)ds + \sigma(Y_s)dW_s)$$

Enfin, comme $\mathbf{Y}_t \in (Q^{-1}\mathbb{R}_+^N)^d + \tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0$ et que $\Gamma\tilde{\mathbf{y}}_0 = \Gamma\mathbf{y}_0$, on montre facilement que le vecteur Y_t est à coefficients positifs pour tout $t \geq 0$ en utilisant la Propriété 2. de l'admissibilité, ce qui achève la preuve. ■

3 Applications

3.1 Schéma de simulation

Un schéma de simulation est une fonction ψ permettant de générer une trajectoire discrétisée \mathbf{X} à valeurs dans \mathbb{R}^N de la solution d'une équation différentielle stochastique.

Plus précisément, on se donne une suite de variables aléatoires $(Z_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d de loi Z à valeurs dans d_Z , $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Un schéma de simulation est une fonction

$$\varphi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d_Z} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

qui permet de générer la trajectoire discrétisée renvoyée par l'Algorithme 1.

Algorithme 1: Schéma de simulation

Data: \mathbf{x}_0, T, N, ψ

Result: Trajectoire simulée \mathbf{X}_{t_k} pour $k = 0, \dots, N$

```

1  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0$ 
2  $\Delta T \leftarrow T/N$ 
3 for  $k = 1$  to  $N$  do
4   Tirer  $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 
5    $\mathbf{X}_{k\Delta T} \leftarrow \psi(\mathbf{X}_{(k-1)\Delta T}, \Delta T, Z_k);$ 
```

Par exemple, dans le cas d'une équation différentielle stochastique de la forme

$$d\mathbf{X}_t = b(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t)dW_t, \quad (28)$$

le schéma d'Euler correspond au choix de

$$\psi(\mathbf{x}, t, z) = \mathbf{x} + b(\mathbf{x})t + \sigma(\mathbf{x})\sqrt{t}z. \quad (29)$$

Dans cette section, on fait des choix de $b, \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues à croissance au plus affine, telles que $\sigma(0) = 0$ et $b(0) \geq 0$, et on simule une trajectoire solution de l'équation N -dimensionnelle (3). On prend un grand horizon de temps, par exemple $T = 100$ puisqu'on a envie de vérifier numériquement que la solution reste dans le domaine \mathcal{D} à tout instant. Dans la section suivante, le schéma choisi pour les simulations est le schéma d'Euler associé à (3). On note n le nombre de pas de temps et m le nombre de simulations choisis.

Remarque 3.1. On sait que si $Y_0 \geq 0$, la Volterra $Y_t = \gamma^\top \mathbf{Y}_t$ reste positive au cours du temps. C'est pourquoi, dans le cas où b et/ou σ ne sont définies que sur \mathbb{R}_+ , on considèrera la partie positive de la Volterra dans le schéma d'Euler.

3.2 Simulations

On effectue les simulations dans le cas $N = 2$ ou $N = 3$ et on choisit respectivement $\gamma^\top = (1, 2)$, $\rho^\top = (1, 5)$ et $\gamma^\top = (1, 2, 3)$, $\rho^\top = (1, 5, 25)$.

3.2.1 Modèle à racine carrée

On prend $b(x) = \theta - \lambda x$ et $\sigma(x) = \nu\sqrt{x}$. On obtient le modèle multifactoriel à racine carrée

$$d\mathbf{V}_t^N = -\text{diag}(\boldsymbol{\rho})(\mathbf{V}_t^N - \mathbf{v}_0)dt + (\theta - \lambda\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{V}_t^N)\mathbf{1}dt + \nu\sqrt{\boldsymbol{\gamma}^\top \mathbf{V}_t^N}\mathbf{1}dW_t.$$

Les fonctions b et σ vérifient les conditions d'application du Théorème 2.1. En effet, pour montrer que σ est à croissance au plus affine, il suffit d'écrire

$$\forall z \geq 0, \quad \sigma(z) = \nu\sqrt{z} \leq \nu(1+z)$$

La Figure 1 représente des trajectoires dans ce modèle.

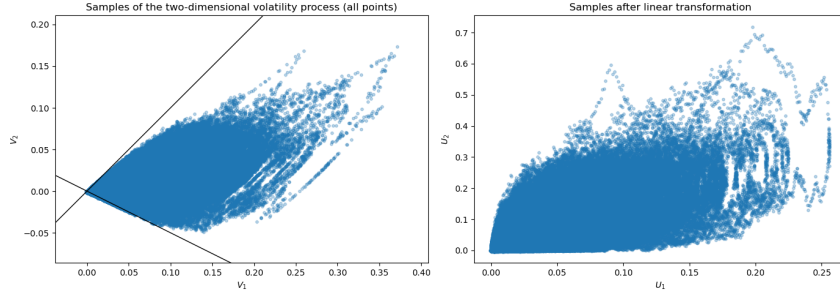


Figure 1: Trajectoires du modèle à racine carrée (à gauche, le processus de base et à droite, le même processus mais multiplié à gauche par Q). Les paramètres choisis sont $\lambda = 0.3$ et $\nu = 0.3$, $\theta = 0.02$, $\mathbf{V}_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$, $m = 30$, $n = 10^5$ et $T = 100$.

La Figure 2 donne le même graphe mais où on a mis seulement les points terminaux.

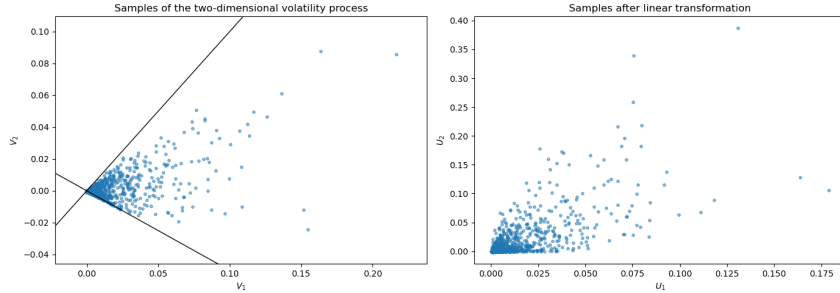
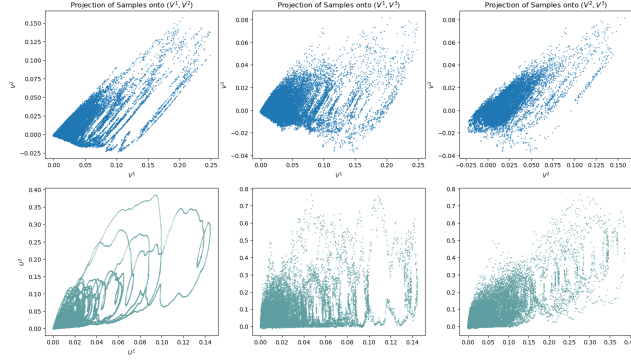
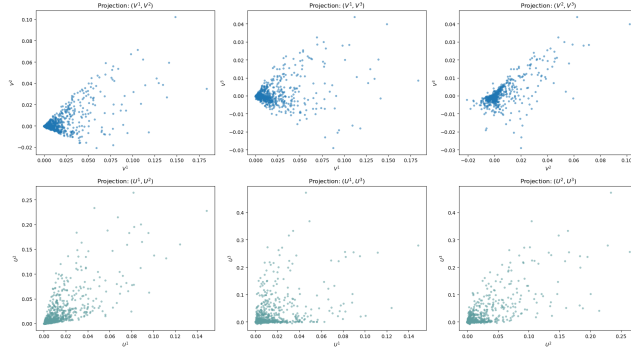


Figure 2: Points terminaux de trajectoires du modèle à racine carrée. On a choisi $m = 10^3$ et les autres paramètres sont les mêmes que dans la Figure 1.

Les Figures 3a et 3b représentent la même chose mais dans le cas $N = 3$. Pour faciliter la visualisation, on représente plutôt les trois projections sur deux coordonnées (en haut, le processus de base, et en bas, le processus multiplié à gauche par Q).



(a) Trajectoires



(b) Points terminaux

Figure 3: Trajectoires et points terminaux du modèle à racine carrée. Les paramètres utilisés sont ceux de la Figure 1.

3.2.2 Modèle σ fonction puissance

Une version plus générale du modèle à racine carrée précédent est le modèle où σ est de la forme

$$\sigma(z) = \nu z^\eta$$

pour $\eta \in [\frac{1}{2}, 1]$. On fait des simulations pour diverses valeurs de η . Les valeurs sélectionnées sont $\eta \in \{0.6, 0.75, 0.9, 0.95\}$. La colonne de gauche de la Figure 4 montre 30 simulations de trajectoires pour chaque valeur de η (à gauche) et la même chose mais multiplié par Q à gauche (à droite). La colonne de droite de la Figure 4 montre 1000 simulations de trajectoires pour chaque valeur de η (à gauche) et la même chose mais multiplié par Q à gauche (à droite).

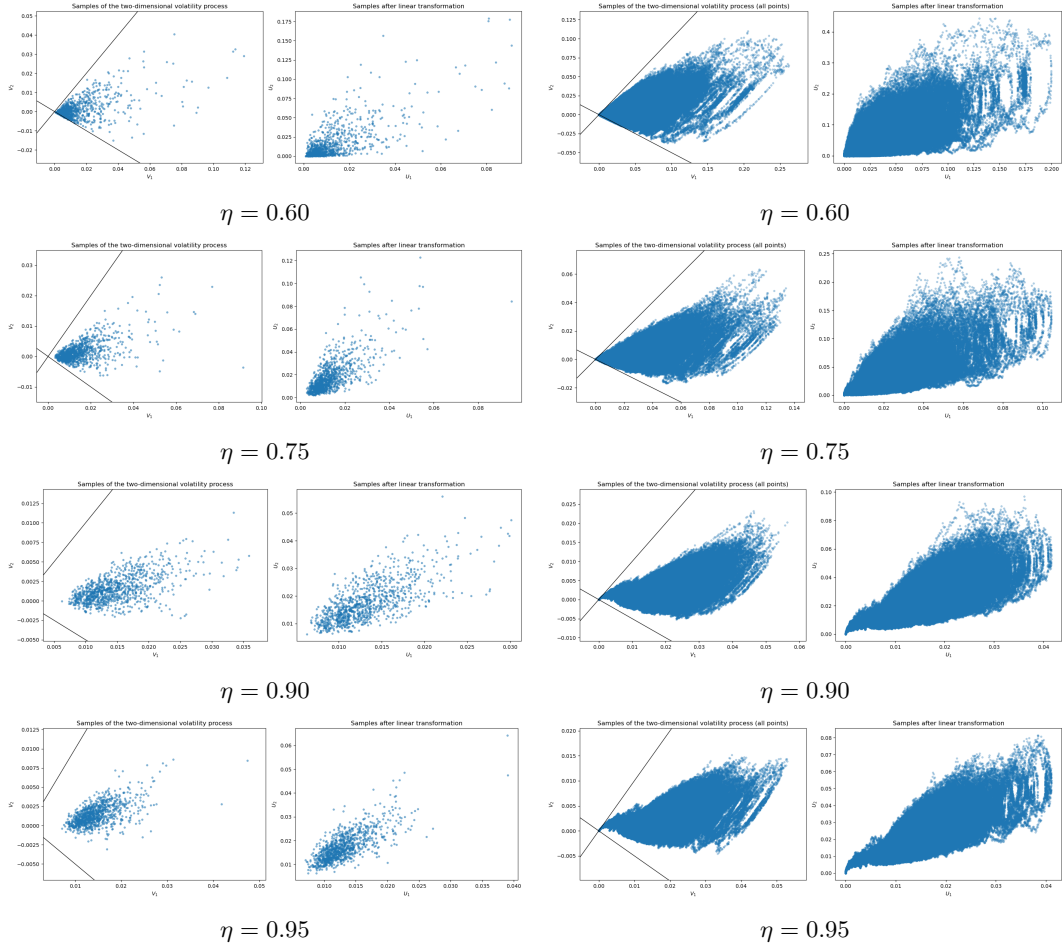


Figure 4: Trajectoires (à gauche) et points terminaux (à droite) du modèle pour différentes valeurs de η . Les paramètres choisis sont $\lambda = 0.3$, $\nu = 0.3$, $\theta = 0.02$ et $n = 10^5$. On a pris $m = 30$ pour les trajectoires et $m = 10^3$ pour les points terminaux.

On remarque que plus η est proche de 1, moins les trajectoires collent aux bords du domaine \mathcal{D} . De plus, les trajectoires ont tendance à s'éloigner des bords du domaine \mathcal{D} avec le temps et ce d'autant plus que η est proche de 1.

3.2.3 Modèle μ tangente hyperbolique et σ sigmoïde

Le modèle choisi est donné par

$$b(z) = \theta(\nu - z) \tanh(\beta z), \quad \sigma(z) = \frac{\alpha z}{1 + \gamma|z|}.$$

La Figure 5 montre des trajectoires dans ce modèle.

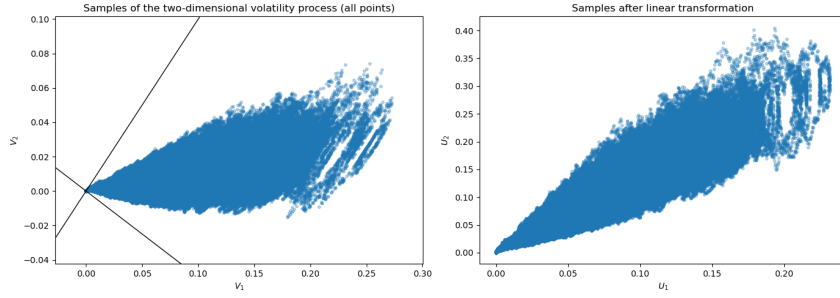


Figure 5: Trajectoires du modèle (à gauche, processus de base et à droite, processus multiplié à gauche par Q). Les paramètres choisis sont $\theta = 0.5, \beta = 1.5, \alpha = 0.3, \gamma = 1, n = 10^5, T = 100$ et $m = 30$.

3.2.4 Modèle de Black-Scholes

Un autre modèle à essayer est le modèle de Black-Scholes, défini par

$$b(z) = \mu z, \quad \sigma(z) = \sigma z.$$

La Figure 6 montre des trajectoires dans ce modèle.

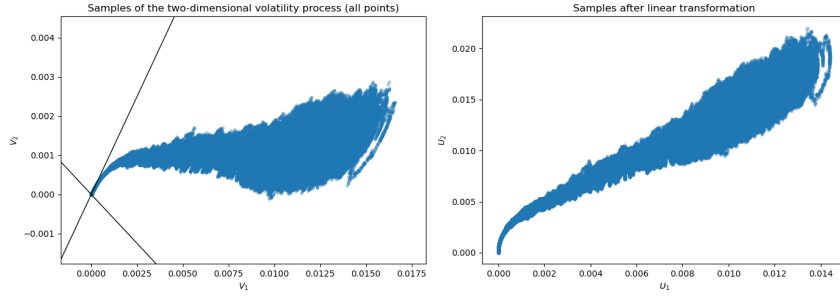


Figure 6: Trajectoires du modèle (à gauche, processus de base et à droite, processus multiplié à gauche par Q). Les paramètres choisis sont $\mu = 0.08, \nu = 0.1, n = 10^5, T = 100$ et $m = 30$.

3.3 Construction d'un schéma de simulation pour le modèle à racine carrée via splitting

3.3.1 Splitting

Jusqu'à présent, on a choisi le schéma d'Euler pour effectuer les simulations. On étudie dans cette partie un autre schéma que l'on va comparer au schéma d'Euler dans le cas du modèle à racine carrée.

On part toujours d'une solution X de l'équation de Volterra

$$X_t = x_0 + \int_0^t K(t-s)b(X_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(X_s)dW_s \quad (30)$$

où $K(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\rho_i t}$. On peut écrire X sous la forme $X_t = x_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i X_t^i$, où les X^i vérifient

$$dX_t^i = -\rho_i X_t^i dt + (\theta - \lambda X_t)dt + \nu \sqrt{X_t} dW_t, \quad \rho_0^i = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (31)$$

On utilise une technique dite de splitting afin de construire un schéma de simulation pour l'équation N -dimensionnelle (31). En effet, le générateur infinitésimal de l'équation (31) s'écrit

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{i=1}^N (\theta - \lambda x - \rho_i) \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \llbracket 1, N \rrbracket} \nu^2 X_t \partial_{ij} f(x).$$

On l'écrit sous la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

où $\mathcal{L}_1 f = -\sum_{i=1}^N \rho_i \partial_i f$ est associé à l'équation

$$dX_t^i = -\rho_i X_t^i dt \quad (32)$$

et où \mathcal{L}_2 est le générateur infinitésimal associé à

$$dX_t^i = (\theta - \lambda X_t) dt + \nu \sqrt{X_t} dW_t \quad \text{avec } X_t = x_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i X_t^i. \quad (33)$$

On construit un schéma de simulation pour chacune des deux équations afin d'en déduire par la suite un schéma pour l'équation (31). Pour l'équation (32) c'est très facile, puisque l'on sait résoudre cette équation déterministe de façon exacte. On prend comme schéma la solution exacte

$$\forall \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N, \quad \psi_1(\mathbf{x}, t) = (x^1 e^{-\rho_1 t}, \dots, x^N e^{-\rho_N t}).$$

Pour l'équation (33), on introduit ξ_t^x une solution de la Volterra à noyau constant suivante

$$\xi_t^x = x + \int_0^t K(0)(\theta - \lambda \xi_s^x) ds + \int_0^t K(0) \nu \sqrt{\xi_s^x} dW_s. \quad (34)$$

On la réécrit sous la forme

$$\xi_t^x = x + \int_0^t (\bar{\theta} - \bar{\lambda} \xi_s^x) ds + \int_0^t \bar{\nu} \sqrt{\xi_s^x} dW_s \quad (35)$$

où $\bar{\theta} = K(0)\theta$, $\bar{\lambda} = K(0)\lambda$ et $\bar{\nu} = K(0)\nu$.

Il s'agit en fait d'un processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). On peut montrer que la solution de (33) est donnée par $A_{\mathbf{x}}(\xi_t^x)$. avec

$$A_{\mathbf{x}}(y) = \left(x_1 + \frac{y - x}{K(0)}, \dots, x_N + \frac{y - x}{K(0)} \right)$$

où $x = x_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i x^i$.

Ainsi, l'équation (33) est faussement en dimension N , puisque pour la résoudre il suffit de résoudre l'équation (34), qui est en dimension 1. Les processus X^i solutions de l'équation (33) sont égaux à constante près. On vérifie cela numériquement sur la Figure 7.

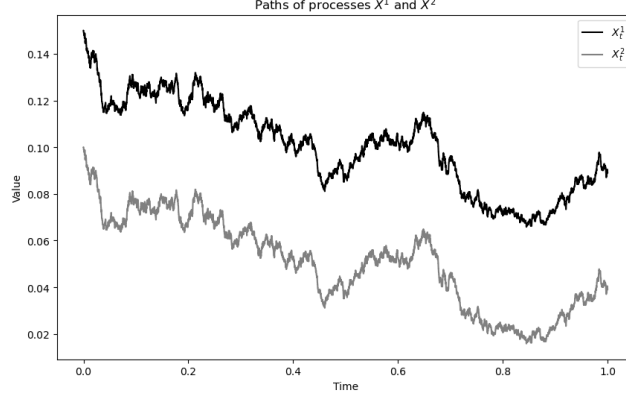


Figure 7: Processus multifactoriel en fonction du temps en dimension $N = 2$. Les paramètres utilisés sont $a = 0.02$, $\kappa = 0.3$, $\nu = 0.3$, $\rho = (1, 10)$, $\gamma = (1, 2)$, $\mathbf{X}_0 = (0.05, 0.1)$, $T = 1$ et $n = 10^4$

3.3.2 Schéma de simulation pour le processus CIR

On construit un schéma de simulation pour le processus CIR afin d'en déduire un schéma de simulation pour l'équation (33). On présente plusieurs schémas dans cette sous-section.

Le processus CIR est bien connu. La loi de ses incréments est une loi du chi-deux décentrée. En effet, on peut montrer que

$$\xi_{t+\Delta t}^x \mid \xi_t^x \sim c\chi_d^2(\lambda)$$

avec $d = \frac{4\bar{\theta}}{\bar{\lambda}\bar{\nu}^2}$, $\lambda = \frac{4\bar{\lambda}\xi_t^x e^{-\bar{\lambda}\Delta t}}{\bar{\nu}^2(1 - e^{-\bar{\lambda}\Delta t})}$ et $c = \frac{\bar{\nu}^2(1 - e^{-\bar{\lambda}\Delta t})}{4\bar{\lambda}}$.

Cela fait une première méthode pour simuler ξ_t^x .

Une autre façon de faire est d'utiliser le schéma $\varphi(x, t, U)$ donné dans [2] défini par

$$\varphi(x, t, U) = \begin{cases} e^{-\frac{\bar{\lambda}t}{2}} \left(\sqrt{\bar{\theta} - \frac{\bar{\nu}^2}{4}} \zeta_{\bar{\lambda}} \left(\frac{t}{2} \right) + e^{-\frac{\bar{\lambda}t}{2}} x + \frac{\bar{\nu}}{2} \sqrt{t} w(U) \right)^2 & \text{si } x \geq \bar{K}_2(t) \\ + \left(\bar{\theta} - \frac{\bar{\nu}^2}{4} \right) \zeta_{\bar{\lambda}} \left(\frac{t}{2} \right) & \\ \mathbf{1}_{\{U \leq \pi(t, x)\}} \cdot \frac{\bar{u}_1(t, x)}{2\pi(t, x)} + \mathbf{1}_{\{U > \pi(t, x)\}} \cdot \frac{\bar{u}_1(t, x)}{2(1 - \pi(t, x))} & \text{si } x < \bar{K}_2(t) \end{cases}$$

et

$$\zeta_k(t) = \frac{1 - e^{-kt}}{k} \quad \text{pour } k \neq 0 \quad \text{et} \quad \zeta_0(t) = t,$$

$$w(u) = \sqrt{3} \left(\mathbf{1}_{\{u > 5/6\}} - \mathbf{1}_{\{u \leq 1/6\}} \right), \quad \pi(t, x) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{u}_1(t, x)^2}{\bar{u}_2(t, x)}}}{2},$$

avec

$$\bar{u}_1(t, x) = xe^{-\bar{\lambda}t} + \bar{\theta}\zeta_{\bar{\lambda}}(t), \quad \bar{u}_2(t, x) = \bar{u}_1(t, x)^2 + \bar{\nu}^2\zeta_{\bar{\lambda}}(t) \left[\bar{\theta}\zeta_{\bar{\lambda}}(t)/2 + xe^{-\bar{\lambda}t} \right],$$

et

$$\begin{aligned} \bar{K}_2(t) = \mathbf{1}_{\{\bar{\nu}^2 > 4\bar{\theta}\}} e^{\frac{\bar{\lambda}t}{2}} & \left(\left(\frac{\bar{\nu}^2}{4} - \bar{\theta} \right) \zeta_{\bar{\lambda}} \left(\frac{t}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left[\sqrt{e^{\frac{\bar{\lambda}t}{2}} \left(\frac{\bar{\nu}^2}{4} - \bar{\theta} \right) \zeta_{\bar{\lambda}} \left(\frac{t}{2} \right)} + \frac{\bar{\nu}}{2} \sqrt{3t} \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Ce schéma φ est un schéma d'ordre deux d'après [2].

À ce stade, on a trois schémas pour le processus ξ_t^x , à savoir le schéma d'Euler, le schéma donné par la loi des incréments du processus CIR et enfin le schéma φ issu de [2]. La Figure 8 montre trois simulations d'un processus CIR avec le schéma φ . La Figure 9 donne la distribution empirique de ξ_T^x donné par (34) ainsi que les temps de calcul pour chacune des trois méthodes de simulations.

Remarque 3.2. Dans la figure 9, deux approches ont été utilisées pour estimer empiriquement la distribution de ξ_T^x , en exploitant la loi des incréments du processus ξ_t^x . La première consiste à simuler directement ξ_T^x en une seule étape à partir de sa loi exacte. La seconde approche utilise la discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$. On simule dans ce cas N incréments successifs du processus.

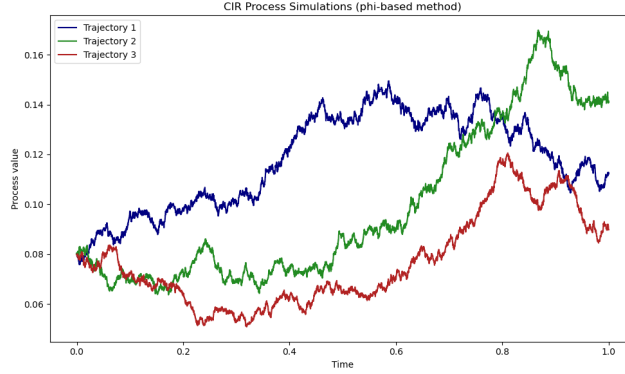


Figure 8: Trois simulations d'un processus CIR. Les paramètres choisis sont $\theta = 0.05$, $\lambda = 0.15$, $\nu = 0.1$, $x = 0.08$, $\gamma = (0.96, 0.07, 0.04, 0.03, 0.02)$, $T = 1$ et $n = 10^4$.

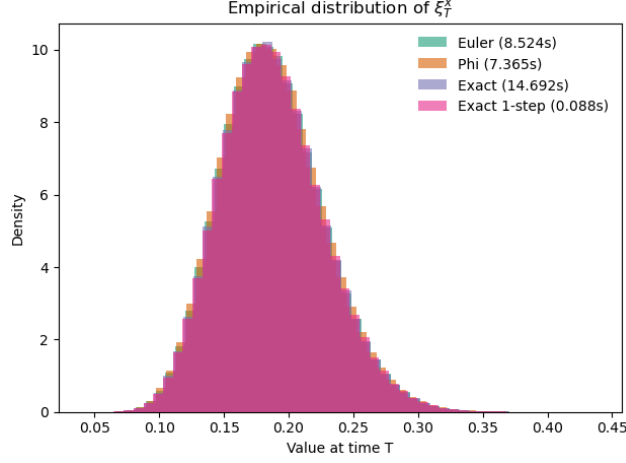


Figure 9: Distribution empirique de ξ_T^x . Les paramètres choisis sont $\theta = 0.1$, $\lambda = 0.15$, $\nu = 0.1$, $x = 0.1$, $T = 1$, $n = 10^2$, $m = 10^6$. Le vecteur γ est laissé comme dans la Figure 8.

La Figure 10 donne pour chacune des trois méthodes l'évolution du temps nécessaire pour générer $m = 10^3$ trajectoires en fonction du pas de temps $\Delta t = T/N$. On constate que la méthode d'Euler est la plus rapide, puis celle donnée par le schéma φ et en dernier la méthode exacte exploitant la loi des incréments du processus CIR.

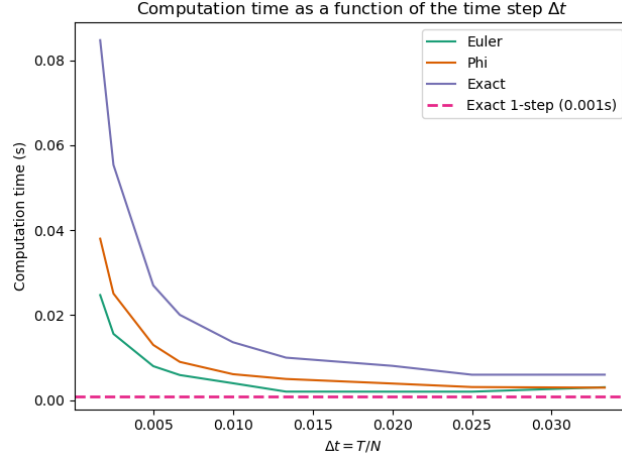


Figure 10: Comparaison des temps de simulation. Les paramètres choisis sont ceux de la Figure 9.

3.4 Obligation zéro-coupon dans le modèle CIR

Dans cette section, on présente une application de la simulation du processus CIR au pricing des obligations zéro-coupon. On commence par rappeler ce qu'est une obligation zéro-coupon.

Définition 3.1 (Obligation zéro-coupon). *On appelle obligation zéro-coupon un titre donnant droit à un euro à une date d'échéance T et on note $P(t, T)$ la valeur de ce titre à l'instant $t \in [0, T]$.*

Remarque 3.3. *On a en particulier $P(T, T) = 1$, ce qui signifie qu'à la date d'échéance, la valeur de l'obligation est exactement égale au montant qu'elle rembourse.*

On se donne une probabilité \mathbb{P}^* sous laquelle $\tilde{P}(t, T) = \left(e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t, T) \right)_{t \in [0, T]}$ est une martingale. Le processus $(r(t))_{t \in [0, T]}$ est appelé taux d'intérêt instantané. Il est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mesurable et sa dynamique est donnée par

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t \quad (36)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{P}^* . Le processus $(r(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Vasicek.

On rappelle que d'après [8], le prix de l'obligation zéro-coupon est dans ce cas donné par

$$P(t, T) = \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_t^T r(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right). \quad (37)$$

On utilise les trois schémas de simulation de $r(t)$ définis dans les sections précédentes afin de calculer par Monte-Carlo le prix $P(0, T)$ des obligations zéro-coupon à l'instant initial. En effet, on simule un grand nombre m de trajectoires du processus CIR, notées r^1, \dots, r^m . On utilise la méthode des trapèzes afin d'approximer l'intégrale

$$\int_0^T r^i(s)ds \simeq \frac{T}{N} \left(\frac{r^i(0) + r^i(T)}{2} + \sum_{l=1}^{n-1} r^i(t_l) \right) \quad (38)$$

où $t_k = kT/N$. La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre deux, ce qui nous permet de conserver l'ordre deux du schéma φ . On approxime donc le prix de l'obligation zéro-coupon par

$$P(0, T) \simeq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \exp \left(-\frac{T}{N} \left(\frac{r^i(0) + r^i(T)}{2} + \sum_{l=1}^{n-1} r^i(t_l) \right) \right). \quad (39)$$

D'après [8], le prix d'une obligation zéro-coupon admet en fait une formule fermée, donnée par

$$P(t, T) = \exp(-a\phi(T-t) - r(t)\psi(T-t)) \quad (40)$$

avec

$$\phi(t) = \frac{2}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma e^{\frac{t(\gamma+b)}{2}}}{\gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \right) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{2(e^{\gamma t} - 1)}{\gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)}. \quad (41)$$

Et donc en particulier

$$P(0, T) = \exp(-a\phi(T) - r_0\psi(T)).$$

Le Tableau 1 donne l'évolution du prix de l'obligation zéro coupon obtenue par Monte-Carlo pour les trois schémas ainsi que la valeur exacte du prix obtenue par formule fermée.

Méthode	$P(0, T)$	IC à 95%	Largeur IC	Erreur absolue	Erreur relative (%)	Temps (s)
Méthode Exacte	0.621587	[0.621533, 0.621641]	0.000108	0.001019	0.164216	4.12
Schéma φ	0.621476	[0.621423, 0.621529]	0.000106	0.000908	0.146377	2.51
Schéma d'Euler	0.613459	[0.613400, 0.613519]	0.000120	0.007108	1.145449	3.76
Formule fermée	0.620568	—	—	—	—	Instantané

Table 1: Comparaison des méthodes de pricing d'une obligation zéro-coupon. Les paramètres utilisés sont $a = 0.5$, $k = 0.7$, $\sigma = 0.5$, $r_0 = 0.4$, $T = 1$, $N = 2$ et $m = 10^7$

La Figure 11 montre l'évolution du prix de l'obligation zéro-coupon obtenu par Monte-Carlo avec les simulations effectuées en utilisant le schéma φ et le schéma par la loi exacte des incréments du processus CIR. On observe sur le graphe la convergence quadratique de ce prix vers le prix calculé par la formule fermée.

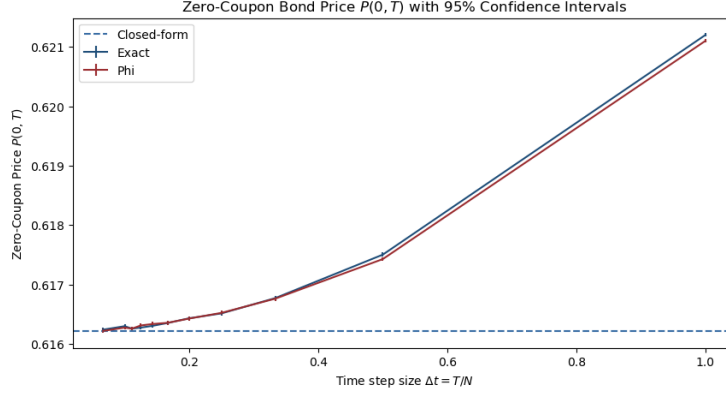


Figure 11: Convergence du prix obtenu calculé par Monte-Carlo en simulant via le schéma φ et le schéma par la loi exacte des incréments du processus CIR. On choisit $a = 0.5$, $k = 0.7$, $\sigma = 0.5$, $\xi_0^x = 0.4$, $T = 1$ et $m = 10^7$.

3.4.1 Schéma de simulation pour le modèle à racine carrée

Pour $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)$, on pose $\psi_2(\mathbf{x}, t, U) = A_{\mathbf{x}}(\varphi(x, t, U))$ avec $x = x_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i x^i$. On note également

$$C_{\text{pol}}^\infty = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0, e_\alpha \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |\partial_\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^{e_\alpha})\}$$

l'ensemble des fonctions de classe C^∞ dont les dérivées sont à croissance au plus polynomiale.

Le théorème suivant, issu de [3], donne un schéma de simulation pour le modèle à racine carrée.

Théorème 3.1. *On définit*

$$\psi(\mathbf{x}, t, U) = \psi_1(\psi_2(\psi_1(\mathbf{x}, t/2), t, U), t/2).$$

On considère le schéma défini par $\hat{\mathbf{X}}_0 = 0$ et $\hat{\mathbf{X}}_{l\frac{T}{N}} = \psi\left(\hat{\mathbf{X}}_{(l-1)\frac{T}{N}}, \frac{T}{N}, U_l\right)$ pour $l \geq 1$ avec $(U_l)_{l \geq 1}$ i.i.d suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $\hat{X}_{l\frac{T}{N}} = x_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \hat{\mathbf{X}}_{l\frac{T}{N}}^i$. Alors on a

$$\forall f \in C_{\text{pol}}^\infty(\mathbb{R}), \exists K > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*, \forall N \geq N_0, |\mathbb{E}(f(\hat{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T))| \leq \frac{K}{N^2}.$$

La Figure 12 représente une trajectoire donnée par le schéma précédent et par la méthode d'Euler. On constate que pour la trajectoire simulée avec le schéma ψ , la trajectoire colle mieux aux bords du domaine \mathcal{D} . C'est le signe que le schéma ψ respecte mieux le domaine que le schéma d'Euler.

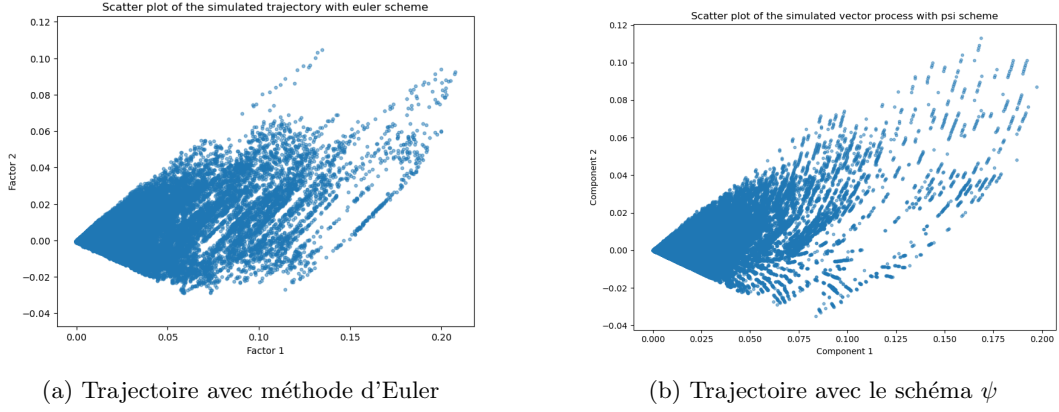


Figure 12: Simulation du processus multifactoriel avec les deux schémas. Les paramètres choisis sont $a = 0.02$, $k = 0.3$, $\sigma = 0.3$, $\rho_0 = 0$, $T = 10^2$, $n = 10^5$, $\rho = (1, 10)$, $\gamma = (1, 2)$.

La Figure 13 représente des points terminaux d'un grand nombre de trajectoires pour les deux schémas de simulation.

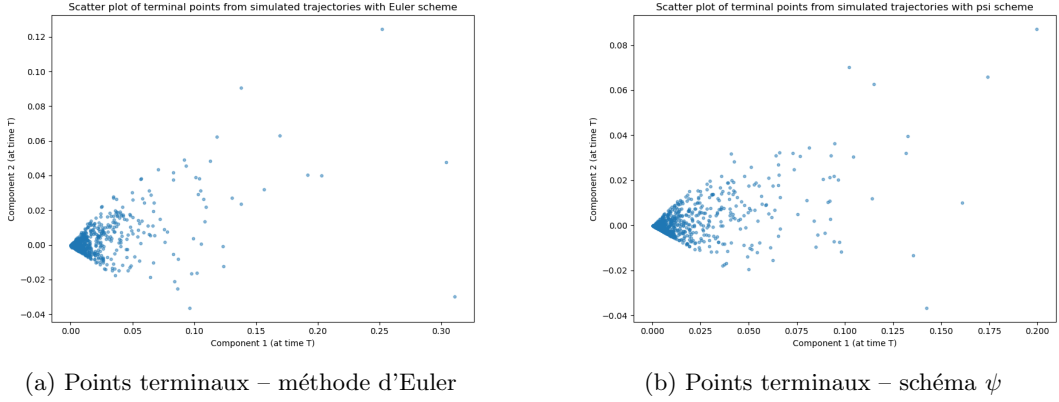


Figure 13: Points terminaux de trajectoires. Les paramètres choisis sont $n = 10^4$, $m = 10^4$. Les autres paramètres sont les mêmes que dans la Figure 12.

La Figure 14 représente l'évolution du temps pour simuler une trajectoire multifactorielle en fonction du pas de temps. Le schéma d'Euler est plus rapide.

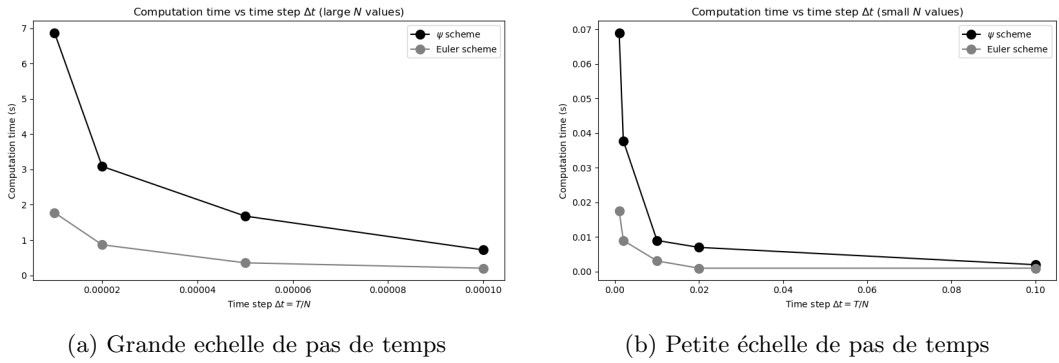


Figure 14: Temps de simulation des processus multifactoriels. L'horizon de temps choisi est $T = 1$. Les autres paramètres sont ceux de la Figure 13.

3.5 Schéma pour le modèle de Heston

On répète le travail que l'on vient de faire, mais cette fois pour le modèle de Heston. Le modèle de Heston est défini par

$$\begin{cases} dY_t = (r - \frac{1}{2}X_t) dt + \sqrt{X_t} (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\perp) \\ \text{avec } X_t = x_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i X_t^i, \\ dX_t^i = -\rho_i X_t^i dt + (a - kX_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{cases} \quad (42)$$

On utilise une méthode de splitting pour simuler X_t^i . On note \mathcal{L} le générateur infinitésimal de l'équation en dimension $N + 1$ ci-dessus. On utilise une méthode de splitting et on écrit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ où \mathcal{L}_1 est le générateur infinitésimal associé à l'EDO

$$\begin{cases} dX_t^i = -\rho_i X_t^i dt, \\ dY_t = 0. \end{cases} \quad (43)$$

et \mathcal{L}_2 est associé à

$$\begin{cases} dX_t^i = (a - kX_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad \forall i \in [1, n] \\ \text{avec } X_t = x_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i X_t^i, \\ dY_t = (r - \frac{1}{2}X_t) dt + \sqrt{X_t} (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\top). \end{cases} \quad (44)$$

L'EDO associée à \mathcal{L}_1 peut être résolue de façon exacte et la solution est donnée par le schéma

$$\bar{\psi}_1((\mathbf{x}, y), t) = (\psi_1(\mathbf{x}, t), y)$$

Pour l'équation associée à \mathcal{L}_2 , on utilise le schéma $\bar{\psi}_2$ donné par [2].

Le schéma qu'on utilise pour le modèle de Heston multifactoriel est alors

$$\bar{\Psi}((\mathbf{x}, y), t, Z) = \bar{\psi}_1(\bar{\psi}_2(\bar{\psi}_1((\mathbf{x}, y), t/2), t, Z), t/2).$$

La Figure 15 montre une trajectoire du processus multifactoriel de Heston en dimension 2. La Figure 16 montre des points terminaux.

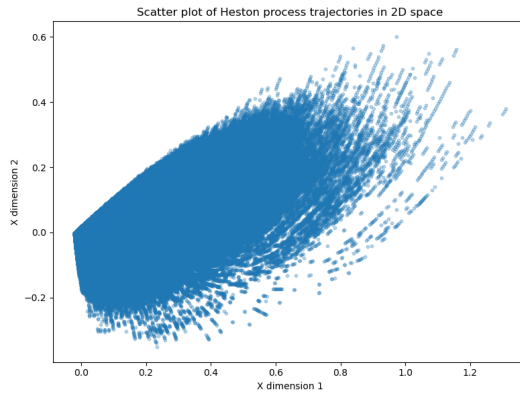


Figure 15: Une trajectoire du processus multifactoriel de Heston. Les paramètres choisis sont $S_0 = 1$, $r = 0$, $\rho = -0.7$, $\rho_0 = 0.02$, $a = 0.02$, $k = 0.3$, $\sigma = 0.3$, $\boldsymbol{\rho} = (0.06, 1.1)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0.9, 0.08)$, $T = 100$, $n = 10^4$.

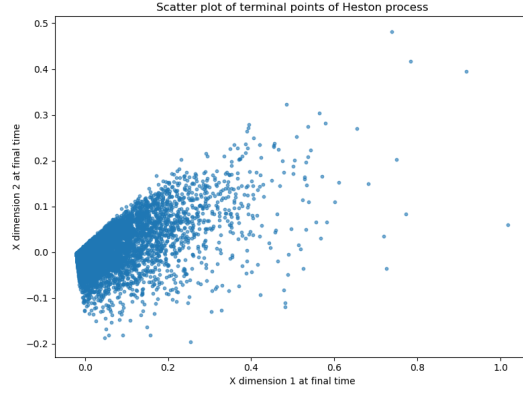


Figure 16: Points terminaux de trajectoires du processus multifactoriel de Heston. On choisit $m = 10^4$ et les autres paramètres sont choisis comme dans la Figure 15.

Dans ce modèle, le cours de l'actif risqué est $S_t = e^{Y_t}$. La Figure 17 représente l'évolution de plusieurs simulations du cours de l'actif risqué. Les simulations sont réalisées via le schéma cité ci-dessus.

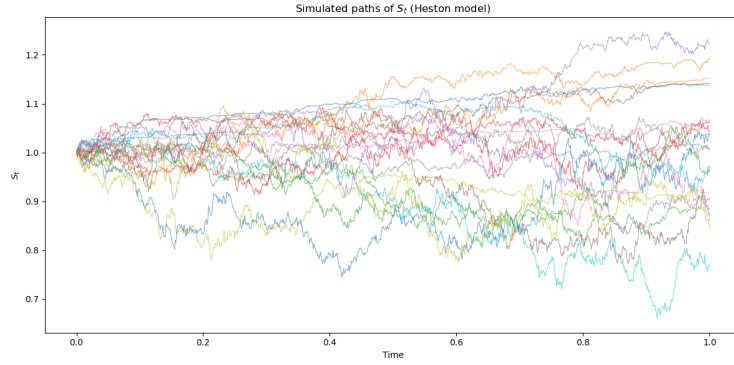


Figure 17: Plusieurs simulations du cours de l'actif risqué. Les paramètres choisis sont $\boldsymbol{\rho} = (0.06, 1.04, 1.78, 2.52, 3.24)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0.95, 0.06, 0.04, 0.03, 0.02)$, $S_0 = 1$, $\rho = -0.7$, $x_0 = 0.02$, $a = 0.02$, $k = 0.3$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $n = 10^3$.

La Figure 18 représente les valeurs empiriques de $\mathbb{E}(e^{-X_T/\rho_0})$, $\mathbb{E}((e^{Y_T} - S_0)_+)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{X_T}{\rho_0} (e^{-Y_T} - S_0)_+\right)$ en fonction de T/N avec les intervalles de confiance à 95% pour chaque point.

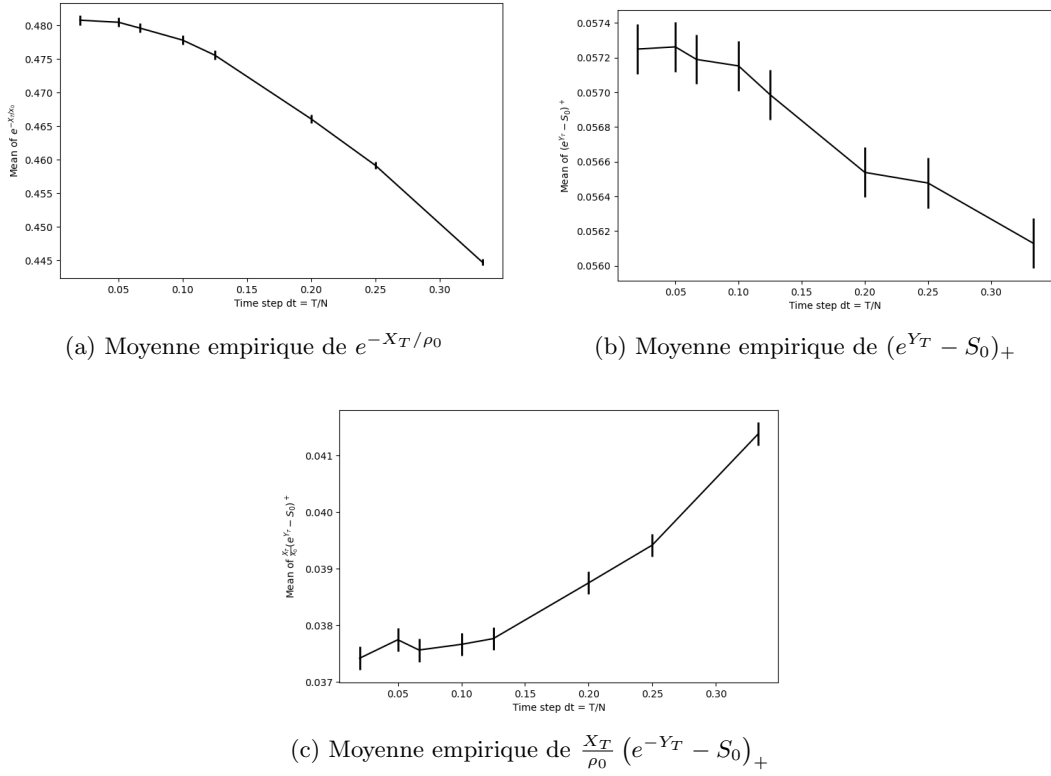


Figure 18: Convergence des trois moyennes empiriques en fonction du pas de temps T/N . Les paramètres choisis sont ceux de la Figure 18b.

3.6 Version Jacobi

On s'intéresse dans cette section à un autre modèle à volatilité locale. Il s'agit du modèle de Jacobi. C'est un modèle similaire au modèle de Heston, à ceci près qu'au lieu de prendre $\sqrt{V_t}$, on prend $\sqrt{Q(V_t)}$ dans ce modèle, où Q est une fonction quadratique.

3.6.1 Présentation du modèle de Jacobi

On présente dans cette section le modèle de Jacobi. On se donne $0 \leq v_{\min} < v_{\max}$ et on définit

$$\forall v \in [v_{\min}, v_{\max}], \quad Q(v) = \frac{(v - v_{\min})(v_{\max} - v)}{(\sqrt{v_{\max}} - \sqrt{v_{\min}})^2}. \quad (45)$$

Remarque 3.4. La fonction Q est telle que $Q(v) \in [0, v]$ pour tout $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$ puisque

$$v - Q(v) = \frac{(v - \sqrt{v_{\min}v_{\max}})^2}{(\sqrt{v_{\max}} - \sqrt{v_{\min}})^2} \geq 0$$

On considère le processus (V_t, X_t) vérifiant

$$\begin{cases} dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{Q(V_t)}dW_{1t} \\ dX_t = (r - \delta - \frac{V_t}{2})dt + \rho\sqrt{Q(V_t)}dW_{1t} + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)}dW_{2t}. \end{cases} \quad (46)$$

avec $\kappa > 0$, $\theta \in [v_{\min}, v_{\max}]$ le taux d'intérêt, $\sigma > 0$ la volatilité, r le taux d'intérêt, $\rho \in [-1, 1]$ et $(W_{1t})_{t \in [0, T]}$ et $(W_{2t})_{t \in [0, T]}$ deux mouvements browniens indépendants définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Le système (46) définit le modèle de Jacobi.

D'après [1], le processus (V_t, X_t) est bien défini au sens où pour tous $(V_0, X_0) \in [v_{\min}, v_{\max}] \times \mathbb{R}$, il existe un unique processus (V_t, X_t) solution de (46) issu de (V_0, X_0) à valeurs dans $[v_{\min}, v_{\max}] \times \mathbb{R}$. Plus de détails sur ce modèle peuvent être trouvés dans [1].

Remarque 3.5. *Le modèle de Jacobi généralise le modèle de Heston au sens où on peut retrouver le modèle de Heston par un passage à la limite. En effet, si on prend $v_{\min} = 0$, alors $Q(v) \rightarrow v$ lorsque $v_{\max} \rightarrow +\infty$.*

Dans le modèle de Jacobi, l'actif risqué est $S_t = e^{X_t}$. Le processus $e^{-(r-\delta)t}S_t$ est une martingale. La formule d'Itô montre en effet que

$$d\left(e^{-(r-\delta)t}S_t\right) = e^{-(r-\delta)t+X_t} \left(\rho\sqrt{Q(V_t)}dW_{1t} + \sqrt{V_t - \rho^2Q(V_t)}dW_{2t}\right)$$

3.6.2 Pricing des options européennes

On considère une option européenne de payoff $f(X_T)$ à l'échéance T . On définit

$$w(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} e^{-\frac{(x-\mu_w)^2}{2\sigma_w^2}}.$$

On définit les polynômes de Hermite (convention probabiliste) par

$$\mathcal{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}. \quad (47)$$

On définit également l'espace de Hilbert

$$L_w^2 = \left\{ f \mid \|f\|_w^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 w(x) dx < +\infty \right\} \quad (48)$$

muni du produit scalaire $(f, g)_w = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)w(x)dx$. L'espace L_w^2 admet comme base de Hilbert la base $(H_n)_{n \geq 0}$ où

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \mathcal{H}_n\left(\frac{x - \mu_w}{\sigma_w}\right). \quad (49)$$

On pose $\ell = g_T/w$. D'après [1], si

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^T (V_s - \rho^2 Q(V_s)) ds \right)^{-1/2} \right) < +\infty \quad (50)$$

alors $\ell \in L_w^2$. On suppose donc la Condition (50) vérifiée et on suppose que $f \in L_w^2$ afin que le prix π_f de l'option de payoff $f(X_T)$ à l'échéance T soit bien défini et donné par

$$\pi_f = \int_{\mathbb{R}} f(x)g_T(x)dx = (f, \ell)_w = \sum_{n \geq 0} f_n \ell_n \quad (51)$$

où $f_n = (f, H_n)_w$. On approxime donc le prix π_f en tronquant la série π_f au rang N , c'est-à-dire en considérant

$$\pi_f^N = \sum_{n=0}^N f_n \ell_n. \quad (52)$$

Le prix approximé π_f^N converge alors vers le vrai prix π_f lorsque N tend vers l'infini. Pour pouvoir effectuer le pricing, il faut donc qu'on calcule les coefficients f_n et ℓ_n pour tout $n \geq 0$.

Remarque 3.6. Seuls les coefficients de Fourier f_n dépendent de l'option. Les moments de Hermite sont valables pour toutes les options européennes.

3.6.3 Calcul des coefficients de Fourier

Dans le cas du Call européen $f_{\text{Call}}(x) = e^{-rT} (e^x - e^k)_+$ et de l'option binaire $f_{\text{Digit}}(x) = e^{-rT} \mathbf{1}_{[k, +\infty[}(x)$, les coefficients de Fourier ont été calculés dans [1]. On laisse le lecteur s'y référer.

3.6.4 Calcul des moments de Hermite

Dans cette section, on montre comment calculer les moments de Hermite ℓ_n . On note $\text{Pol}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des polynômes sur \mathbb{R}^d . On note $\deg(p)$ le degré d'un polynôme $p \in \text{Pol}(\mathbb{R}^d)$. On note $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des polynômes $p \in \text{Pol}(\mathbb{R}^d)$ tels que $\deg(p) \leq N$. On note $M = \dim \text{Pol}_N(\mathbb{R}^d)$. On rappelle qu'un dénombrement permet de montrer que $M = \binom{N+d}{d}$.

On note \mathcal{G} le générateur infinitésimal de (46). On a

$$\mathcal{G}f(x, v) = b(v)^\top \nabla f(v, x) + \frac{1}{2} \text{Tr} (a(v) \nabla^2 f(v, x)) \quad (53)$$

avec

$$b(v) = \begin{pmatrix} \kappa(\theta - v) \\ r - \delta - v/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a(v) = \begin{pmatrix} \sigma^2 Q(v) & \rho \sigma Q(v) \\ \rho \sigma Q(v) & v \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Remarque 3.7. Le générateur infinitésimal \mathcal{G} est linéaire et stabilise $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$. À ce titre, l'application

$$\mathcal{G} : \text{Pol}_N(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$.

On se donne

$$\pi : \mathcal{E}_N \longrightarrow \llbracket 1, M \rrbracket \quad (55)$$

une énumération de $\mathcal{E}_N = \{(m, n) \mid m, n \geq 0, m + n \leq N\}$.

On considère les polynômes (h_1, \dots, h_M) de $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$ définis par

$$\forall (m, n) \in \mathcal{E}_N, \quad h_{\pi(m, n)}(v, x) = v^m H_n(x). \quad (56)$$

La famille (h_1, \dots, h_M) est une base de $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$. Le théorème suivant donne une formule explicite pour les moments de Hermite.

Théorème 3.2 (Moments de Hermite). Soit $p \in \text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$ et $t \in [0, T]$. On note $\vec{p} \in \mathbb{R}^M$ les coordonnées de p dans la base (h_1, \dots, h_M) . Alors pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a

$$\ell_n = (h_1(V_0, X_0), \dots, h_M(V_0, X_0)) e^{TG} \mathbf{e}_{\pi(0, n)} \quad (57)$$

où G est la matrice du générateur infinitésimal \mathcal{G} en tant qu'endomorphisme de $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^2)$ dans la base (h_1, \dots, h_M) .

Preuve. La preuve est une application directe d'un résultat de [6] (Section 3). ■

Remarque 3.8. La matrice G est une matrice de $\mathbb{R}^{M \times M}$. Elle a été calculée explicitement dans [1]. Elle contient au plus 7 coefficients non nuls sur chaque colonne. La matrice G est donc creuse, au sens où si on note R_N son nombre de coefficients non nuls, alors le taux de coefficients non nuls de la matrice R_N/M^2 tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini, puisque $R_N \leq 7M$.

3.6.5 Résultats numériques

La Figure 19 montre les premiers moments ℓ_n de Hermite et les premiers coefficients de Fourier f_n .

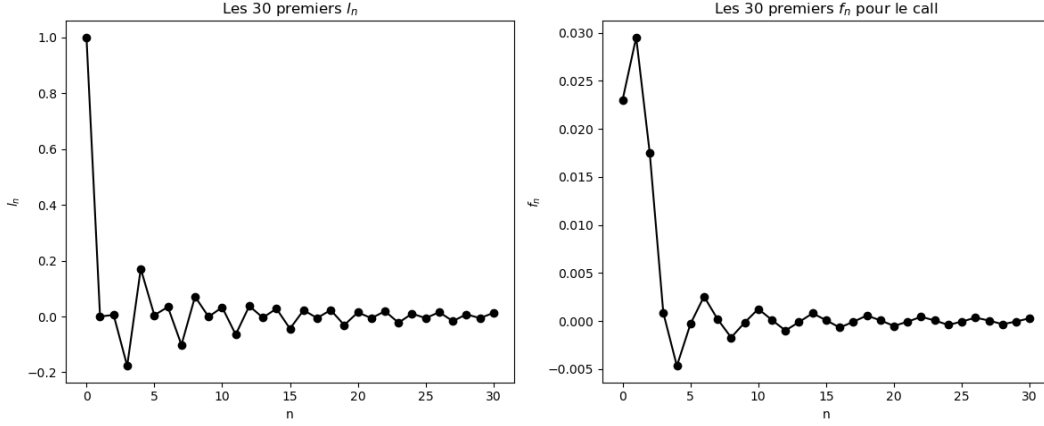


Figure 19: Moments de Hermite (à gauche) et coefficients de Fourier pour le Call (à droite). On choisit $V_0 = 0.04$, $X_0 = 0$, $v_{\min} = 10^{-4}$, $v_{\max} = 0.08$, $\sigma = 1$, $\rho = -0.5$, $\kappa = 0.5$, $\theta = 0.04$, $\delta = 0$, $k = 0$, $T = 1/12$ et $r = 0$.

La Figure 20 représente l'évolution du prix du Call π_f^N en fonction de N . On constate que le prix π_f^N converge vers le prix donné par Monte-Carlo.

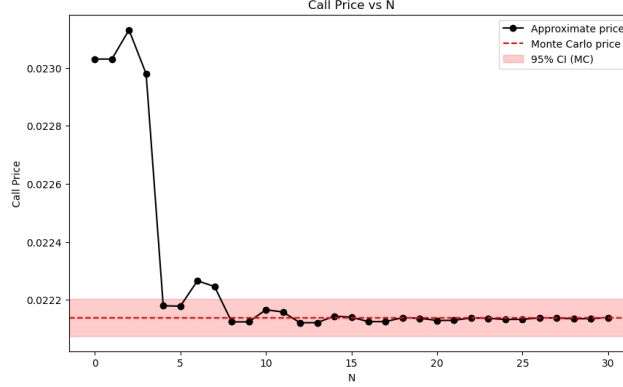


Figure 20: Prix du Call. Les paramètres choisis sont les mêmes que dans la figure 19. Pour Monte-Carlo, on a choisi $m = 10^6$.

Remarque 3.9. Ces graphes figurent déjà dans [1] mais on les a refaits pour valider notre implémentation.

3.6.6 Version Volterra

On construit dans cette section la version Volterra de (46). Cela n'est pas fait dans [1]. On se donne une série de Prony

$$K(t) = \sum_{i=1}^d \gamma_i e^{-\rho_i t}.$$

Pour simplifier l'écriture, on choisit $d = 2$. Cela signifie qu'on considère deux facteurs V^1 et V^2 . Cependant, tout ce qui est écrit dans la suite peut être écrit avec un nombre quelconque de facteurs. On considère cette fois-ci le processus (V_t, X_t) défini par

$$\begin{cases} V_t = V_0 + \int_0^t K(t-s) \left(\kappa(\theta - V_s) ds + \sigma \sqrt{Q(V_s)} dW_{1s} \right) \\ dX_t = (r - \delta - V_t/2) dt + \rho \sqrt{Q(V_t)} dW_{1t} + \sqrt{V_t - \rho^2 Q(V_t)} dW_{2t}. \end{cases} \quad (58)$$

On peut écrire $V_t = V_0 + \gamma^\top \mathbf{V}_t$ avec $\mathbf{V}_t = (V_t^1, V_t^2)$ où les V^i vérifient

$$dV_t^i = -\rho_i V_t^i dt + \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{Q(V_t)} dW_{1t} \quad (59)$$

En vertu de cela, on obtient l'équation 3-dimensionnelle

$$d\mathbf{Y}_t = b(\mathbf{V}_t) dt + \sigma(\mathbf{V}_t) dW_t \quad (60)$$

où $W_t = (W_{1t}, W_{2t})^\top$ est un mouvement brownien 2-dimensionnel, $\mathbf{Y}_t = (V_t^1, V_t^2, X_t)$ et $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont définies par

$$b(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -\text{diag}(\rho)\mathbf{v} + \kappa(\theta - V_0 - \gamma^\top \mathbf{v})\mathbf{1} \\ r - \delta - (V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \sigma \sqrt{Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v})} & 0 \\ \sigma \sqrt{Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v})} & 0 \\ \rho \sqrt{Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v})} & \sqrt{V_0 + \gamma^\top \mathbf{v} - \rho^2 Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v})} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le générateur infinitésimal de (60) s'écrit

$$\mathcal{G}f(\mathbf{v}, x) = b(\mathbf{v})^\top \nabla f(\mathbf{v}, x) + \frac{1}{2} \text{Tr} (a(\mathbf{v}) \nabla^2 f(\mathbf{v}, x)) \quad (61)$$

où

$$a(\mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{v}) \sigma^\top(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) & \sigma^2 Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) & \rho \sigma Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) \\ \sigma^2 Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) & \sigma^2 Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) & \rho \sigma Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) \\ \rho \sigma Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) & \rho \sigma Q(V_0 + \gamma^\top \mathbf{v}) & V_0 + \gamma^\top \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Le générateur infinitésimal \mathcal{G} stabilise $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^3)$ et on peut donc le voir comme un endomorphisme de cet espace lorsqu'on le restreint à celui-ci. On se donne de nouveau une énumération $\pi : \mathcal{E}_N \rightarrow \llbracket 1, M \rrbracket$ avec cette fois-ci

$$\mathcal{E}_N = \{(m_1, m_2, n) \mid m_1, m_2, n \geq 0, m_1 + m_2 + n \leq N\}$$

et $M = \binom{N+3}{3}$. On considère la famille (h_1, \dots, h_M) donnée par

$$\forall (m_1, m_2, n) \in \mathcal{E}_N, \quad h_{\pi(m_1, m_2, n)}(v_1, v_2, x) = v_1^{m_1} v_2^{m_2} H_n(x). \quad (63)$$

Le théorème suivant est l'analogue du Théorème 3.2 dans la version Volterra du modèle de Jacobi.

Théorème 3.3 (Moments de Hermite). *Soit $p \in \text{Pol}_N(\mathbb{R}^3)$ et $t \in [0, T]$. On note $\vec{p} \in \mathbb{R}^M$ les coordonnées de p dans la base (h_1, \dots, h_M) . Alors pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a*

$$\ell_n = (h_1(V_0^1, V_0^2, X_0), \dots, h_M(V_0^1, V_0^2, X_0)) e^{TG} \mathbf{e}_{\pi(0,0,n)} \quad (64)$$

où G est la matrice du générateur infinitésimal \mathcal{G} en tant qu'endomorphisme de $\text{Pol}_N(\mathbb{R}^3)$ dans la base (h_1, \dots, h_M) .

Preuve. La preuve est également une application directe du résultat de [6] (Section 3). ■

On a toutes les clés en mains pour calculer le prix approché π_f^N de l'option dans ce nouveau modèle. Cela nous permet donc de réaliser le pricing numériquement. Les résultats sont

donnés dans la section suivante.

La Figure 21 représente l'évolution du prix du Call π_f^N en fonction de N dans ce nouveau modèle.

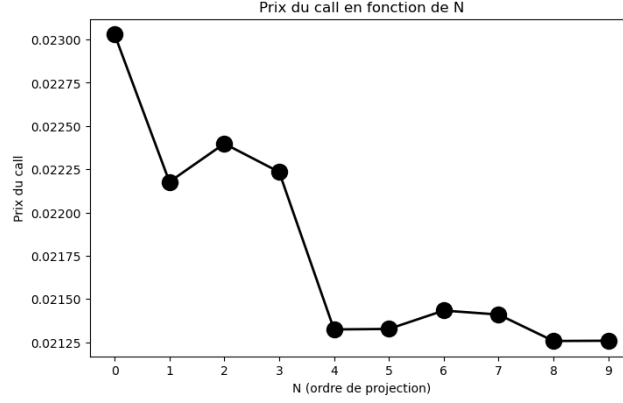


Figure 21: Prix du Call. Les paramètres choisis sont $V_0 = 0.04$, $V_0^1 = V_0^2 = 0$, $X_0 = 0$, $v_{\min} = 10^{-4}$, $v_{\max} = 0.08$, $\sigma = 1$, $\rho = -0.5$, $\theta = 0.04$, $\delta = 0$, $r = 0$, $k = 0$, $T = 1/12$.

Les coefficients dans la Figure 21 ont été choisis pour ne pas trop s'éloigner du modèle défini dans la Figure 20. Il est donc normal que les prix soient similaires.

4 Conclusion

Ce travail m'a permis d'explorer de nombreux aspects du Calcul Stochastique. Dans un premier temps, on a essayé d'étendre les résultats de [7]. On a notamment cherché à effectuer un passage à la limite dans le Théorème 2.1. Cette tentative n'a malheureusement pas abouti. On a cependant réussi à généraliser des résultats moins ambitieux, tels que l'ajout de la constante à la Volterra et l'extension des résultats à une Volterra en dimension d . Dans une seconde partie, on a effectué beaucoup de simulations. L'objectif initial était d'observer numériquement le domaine \mathcal{D} du Théorème 2.1. Cela nous a amené à étudier plusieurs schémas de simulations. J'ai pu découvrir dans ce contexte la méthode de splitting du générateur infinitésimal. On a ensuite appliqué cela au modèle de Heston afin d'avoir une application financière. Cela nous a poussé à regarder un autre modèle, celui de Jacobi.

Mon stage n'a duré que deux mois. Cela est un peu court pour effectuer un travail vraiment complet. Ce travail pourrait être prolongé de plusieurs manières. Par exemple, certaines simulations pourraient être affinées ou étendues à d'autres modèles. De même, les aspects théoriques pourraient faire l'objet d'un approfondissement.

En conclusion, ce stage de recherche m'aura permis d'apprendre beaucoup de choses, tant sur l'aspect mathématique que sur la méthodologie de travail en recherche. La recherche en mathématiques est un domaine qui m'intéresse et j'envisage (un peu, c'est-à-dire environ 30% de chances) de faire une thèse à l'issue de mon M2. Ce stage m'a permis de voir que la thèse est quelque chose d'envisageable car j'apprécie ce domaine. Je remercie enfin Aurélien Alfonsi pour son encadrement, sa pédagogie et sa bienveillance tout au long de ce stage. Je suis très reconnaissant d'avoir pu travailler sous son encadrement.

A Résultats annexes

A.1 Preuve du Theorème 2.1

On se donne $b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times d}$ continues à croissance au plus affine. On s'intéresse à l'EDS

$$d\mathbf{X}_t = b(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t)dW_t, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}. \quad (65)$$

Définition A.1 (Stabilité). *On dit qu'un convexe fermé K est stable si pour tout $x \in K$, il existe une solution faible \mathbf{X} à (65) qui reste dans K au cours du temps.*

On note $d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y} \in K} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. La fonction d est continûment différentiable presque partout et on a

$$d'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \pi_K(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \pi_K(\mathbf{x})|}. \quad (66)$$

Lemme A.1 (Lemme de stabilité). *Soit K un convexe fermé. On pose $K^c = \mathbb{R}^N \setminus K$. Alors K est stable si et seulement si on a*

$$\sigma(\pi_K(\mathbf{x}))^\top d'(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad L_K d(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in K^c \quad (67)$$

$$\text{où } L_K f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma(\pi_K(\mathbf{x}))\sigma(\pi_K(\mathbf{x}))^\top f''(\mathbf{x})) + \langle f'(\mathbf{x}), b(\pi_K(\mathbf{x})) \rangle.$$

Preuve. La preuve est longue et elle est le résultat principal de [5]. On laisse le lecteur s'y référer. ■

Le corollaire suivant est une application du Lemme A.1 à $K = \mathbb{R}_+^N$.

Corollaire A.1. *Les conditions de stabilité (67) sont équivalentes à*

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^N, \quad z_i = 0 \implies \sigma(\mathbf{z})^\top \mathbf{e}_i = 0 \quad \text{et} \quad b_i(\mathbf{z}) \geq 0$$

et

$$\sigma(0) = 0, \quad b_i(0) \geq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Preuve. Cette application du Lemme A.1 est mentionnée dans [5], mais elle n'est pas démontrée. On en propose donc une preuve. On suppose que $K = \mathbb{R}_+^N$. Si $\sigma(\pi_K(\mathbf{x}))^\top d'(\mathbf{x}) = 0$ et $L_K d(\mathbf{x}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in K^c$. Soit $\mathbf{z} \in \partial K \setminus \{0\}$ tel que $z_i = 0$. On pose $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z} - t\mathbf{e}_i$ pour $t > 0$. Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{z}(t) \in K^c$ et donc $\sigma(\pi_K(\mathbf{z}(t)))^\top d'(\mathbf{z}(t)) = 0$ et

$$L_K d(\mathbf{z}(t)) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma(\pi_K(\mathbf{z}(t)))\sigma(\pi_K(\mathbf{z}(t)))^\top d''(\mathbf{z}(t))) + \langle d'(\mathbf{z}(t)), b(\pi_K(\mathbf{z}(t))) \rangle \leq 0.$$

Or, $\pi_K(\mathbf{z}(t)) = \mathbf{z}$ et $d(\mathbf{z}(t)) = t$ pour tout $t > 0$. D'où, en dérivant selon t

$$z'(t)^\top d'(\mathbf{z}(t)) = -\mathbf{e}_i^\top d'(\mathbf{z}(t)) = 1, \quad d''(\mathbf{z}(t)) = 0$$

Puis $L_K d(\mathbf{z}(t)) = \langle -\mathbf{e}_i, b(\mathbf{z}) \rangle = -b_i(\mathbf{z}) \leq 0$ et donc $b_i(\mathbf{z}) \geq 0$, ainsi que $\sigma(\mathbf{z})^\top (-\mathbf{e}_i) = 0$.

Par continuité de b et σ , avec $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\partial K \setminus \{0\}$ telle que $[z_n]_i = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tendant vers 0, on a par passage à la limite $\sigma(0) = 0$ et $b_i(0) \geq 0$.

Réciproquement, si on suppose que pour tout $\mathbf{z} \in \partial K \setminus \{0\}$ tel que $z_i = 0$, on a $\sigma(\mathbf{z})^\top \mathbf{e}_i = 0$ et $b_i(\mathbf{z}) \geq 0$, ainsi que $\sigma(0) = 0$ et $b_i(0) \geq 0$. Soit $\mathbf{x} \in K^c$.

Si $\pi_K(\mathbf{x}) \neq 0$ i.e. \mathbf{x} a au moins un coefficient strictement positif, disons $z_i > 0$. Alors il existe $t_0 > 0$ tel que $\mathbf{x} = \pi_K(\mathbf{x}) - t_0 \mathbf{e}_i$, on a par des calculs déjà menés $-\mathbf{e}_i d'(\mathbf{x}) = 1$ et

$d''(\mathbf{x}) = 0$. En combinant cela à l'hypothèse appliquée à $\pi_K(\mathbf{x})$ il vient immédiatement que $\sigma(\pi_K(\mathbf{x}))^\top d'(\mathbf{x}) = 0$ et $L_K d(\mathbf{x}) \leq 0$.

Si $\pi_K(\mathbf{x}) = 0$, il suffit d'utiliser que $\sigma(0) = 0$ et $b_i(0) \geq 0$ pour obtenir $\sigma(\pi_K(\mathbf{x}))^\top d'(\mathbf{x}) = 0$ et $L_K d(\mathbf{x}) \leq 0$. ■

A.2 M-matrices

Définition A.2 (Rayon spectral). Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. On appelle rayon spectral de A et on note $\rho(A)$ la quantité

$$\rho(A) := \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(A) \}$$

D'après le Théorème de Gelfand (voir [9]), le rayon spectral d'une matrice A est également donné par la formule

$$\rho(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \in \mathbb{N}^*} \|A^n\|^{1/n}. \quad (68)$$

On introduit un autre résultat qui donne un critère de convergence pour les séries de la forme $\sum_{n \geq 0} z^n A^n$.

Proposition A.1. Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors $\sum_{n \geq 0} z^n A^n$ converge si et seulement si $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$.

Preuve. Supposons $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$ par le Théorème de Gelfand, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|A^n\|^{1/n} \leq \rho(A) + \varepsilon$ et ainsi $\|A^n\| \leq (\rho(A) + \varepsilon)^n$, puis

$$|z|^n \|A^n\| \leq [|z|(\rho(A) + \varepsilon)]^n \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi comme $|z|\rho(A) < 1$, on peut choisir ε assez petit pour que $|z|(\rho(A) + \varepsilon) < 1$ et ainsi $\sum_{n \geq 0} z^n A^n$ converge normalement donc converge.

Réciproquement, si $\sum_{n \geq 0} z^n A^n$ converge. Son terme général tend donc vers 0. Comme $\rho(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|A^n\|^{1/n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|z|^n \|A\|^n \geq |z|^n \rho(A)^n.$$

Le terme de gauche tendant vers 0, le terme de droite aussi et par critère de convergence d'une suite géométrique, on en déduit que $|z|\rho(A) < 1$ i.e. $|z| < \frac{1}{\rho(A)}$. ■

Définition A.3 (M-matrice). On note $\mathcal{R}(z)$ la partie réelle d'un complexe $z \in \mathbb{C}$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$. La matrice A est une M-matrice si elle vérifie

1. $\forall i \neq j, a_{ij} \leq 0$
2. $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \mathcal{R}(\lambda) > 0$.

La proposition suivante est issue de [4].

Proposition A.2 (Positivité des coefficients de l'inverse d'une M-matrice). Soit A une M-matrice. Alors A est inversible et pour tout $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $[A^{-1}]_{ij} \geq 0$.

Preuve. On procède en deux étapes.

Étape 1. On montre qu'une M-matrice A s'écrit sous la forme $A = sI_N - B$ avec $b_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $s > \rho(A)$. En effet, soit s un réel tel que $s > \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} a_{ii}$ et $s > \rho(A)$. Alors avec $B = sI_N - A$, on a $b_{ij} = s\delta_{ij} - a_{ij}$. Si bien que $b_{ii} = s - a_{ii} \geq 0$ puisque s a été choisi pour, et pour $i \neq j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $b_{ij} = -a_{ij} \geq 0$ car comme A est

une M-matrice ses coefficients non diagonaux sont négatifs.

Étape 2. La matrice A est inversible car toutes ses valeurs propres sont non nulles. De plus, on a

$$A = sI_N - B = s[I_N - B/s].$$

Comme $s > \rho(B)$, on a $\rho(B/s) < 1$ et par conséquent par la Proposition A.1 appliqué avec $z = 1$ et B/s , la série $\sum \left(\frac{B}{s}\right)^n$ converge et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{s} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{B}{s}\right)^n.$$

Comme B a ses coefficients positifs, on obtient facilement que les coefficients de A^{-1} le sont aussi. ■

References

- [1] Damien Ackerer, Damir Filipović, and Sergio Pulido. The Jacobi stochastic volatility model. Finance Stoch., 22(3):667–700, 2018.
- [2] Aurélien Alfonsi. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and heston models. Math. Comput., 79(269):209–237, 2010.
- [3] Aurélien Alfonsi. Nonnegativity preserving convolution kernels. Application to stochastic Volterra equations in closed convex domains and their approximation. Stochastic Processes Appl., 181:23, 2025. Id/No 104535.
- [4] Abraham Berman and Robert J. Plemmons. Nonnegative matrices in the mathematical sciences, volume 9 of Class. Appl. Math. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [5] Giuseppe Da Prato and Hélène Frankowska. Stochastic viability of convex sets. J. Math. Anal. Appl., 333(1):151–163, 2007.
- [6] Damir Filipović and Martin Larsson. Polynomial diffusions and applications in finance. Finance Stoch., 20(4):931–972, 2016.
- [7] Eduardo Abi Jaber, Christian Bayer, and Simon Breneis. State spaces of multifactor approximations of nonnegative Volterra processes. Preprint, arXiv:2412.17526 [math.PR] (2024), 2024.
- [8] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Paris: Ellipses, 2ème éd. édition, 1997.
- [9] Walter Rudin. Functional analysis. New York, NY: McGraw-Hill, 2nd ed. édition, 1991.