Exercice 4.A.3. 1/ a) Loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$

b) Si X suit la loi de Weibull de paramètre m, avec $k>0$, on a : $\forall x>0$

$$\mathbb{P}(X^k > x) = \mathbb{P}(X \geq x^{\frac{1}{k}})$$ par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$

$$= e^{-(x^{\frac{1}{k}})^m}$$ car X suit loi de Weibull de paramètre m

$$\boxed{\mathbb{P}(X^k > x) = e^{-x^{\frac{m}{k}}}}$$

(et pour $x \leq 0$, $\mathbb{P}(X^k > x) = 1$ car $X > 0$)

Ainsi, X^k a la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi de Weibull de paramètre $\frac{m}{k}$

Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X^k suit une loi de Weibull de $\boxed{\text{paramètre } \frac{m}{k}}$.

2/ a) Avec X suivant la loi de Weibull de paramètre m, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-x^m}$ $\forall x \geq 0$

F_X est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc X a une densité laquelle est

$$\boxed{\forall x > 0, \quad p(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} m x^{m-1} e^{-x^m}}$$

Ainsi : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^*$

$$L_n((x_1, \dots, x_n), m) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k, m)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} m x_k^{m-1} e^{-x_k^m}$$

$$\boxed{L_n((x_1, \dots, x_n), m) = m^n \left[\prod_{k=1}^{n} x_k\right]^{m-1} e^{-\sum_{k=1}^{n} x_k^m}}$$

Puis : $\ell_n((x_1, \dots, x_n), m) = n \ln(m) + (m-1) \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \sum_{k=1}^{n} x_k^m$.

b) • Pour $m>0$, $x_1, \dots, x_n > 0$,

$$\frac{\partial \ell}{\partial m}((x_1, \dots, x_n), m) = \frac{-1}{m^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} - \ln(x_i) e^{m \ln(x_i)} \ln(x_i)$$

$$= \frac{-1}{m^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)^2 x_i^m$$

$$\boxed{< 0}$$

Donc $m \mapsto \ell((x_1, \dots, x_n), m)$ est strictement décroissante

• Il est clair que $\ell((x_1, \dots, x_m), m) \xrightarrow[m \to 0^+]{} +\infty$.

De plus, si $(x_1, \dots, x_n) \neq (1, \dots, 1)$,

①

Avec $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i < 1\}$ et $J = [\![1,n]\!] \setminus I$, on écrit :

$$\varphi((x_1,\dots,x_n),m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\sum_{i\in I}\left(1-e^{m\ln(x_i)}\right)\ln(x_i) + \frac{1}{n}\sum_{i\in J}\left(1-e^{m\ln(x_i)}\right)\ln(x_i)$$

Or :
- $\sum_{i\in I}\left(1-e^{m\ln(x_i)}\right)\ln(x_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} -\infty$ si $I \neq \emptyset$
- $\sum_{i\in J}\left(1-e^{m\ln(x_i)}\right)\ln(x_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_{i\in J}\ln(x_i)$

Ainsi : Si $J \neq \emptyset$, on voit que $\boxed{\varphi((x_1,\dots,x_n),m) \xrightarrow[m\to\infty]{} -\infty}$

Si $J = \emptyset$, on a

$$\varphi((x_1,\dots,x_n),m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\sum_{i\in I}\left(1-e^{m\ln(x_i)}\right)\ln(x_i)$$

$$\xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{n}\sum_{i\in I}\ln(x_i) < 0$$

car $I \neq \emptyset$ puisque $(x_1,\dots,x_n) \neq (1,\dots,1)$.

Bilan : $\boxed{\text{On a montré que } \lim_{m\to\infty}\varphi((x_1,\dots,x_n),m) < 0.}$

$m \mapsto \varphi((x_1,\dots,x_n),m)$ étant continue et $\searrow\searrow$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, au vu de ses limites en 0 et $+\infty$, on conclut par théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique réel $m = m_n(x_n) > 0$ tq $\varphi((x_1,\dots,x_n), m_n(x_n)) = 0$.

$\longrightarrow$ Cas où $(x_1,\dots,x_n) = (1,\dots,1)$

Dans ce cas $\varphi((x_1,\dots,x_n),m) = \frac{1}{m}$ et il n'existe pas $m > 0$ satisfaisant $\varphi((x_1,\dots,x_n),m) = 0$.

c) Rappel : On a :

$$\underbrace{\ell_n((x_1,\dots,x_n),m)}_{\overset{\text{déf}}{=} f(m)} = n\ln(m) + (m-1)\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) - \sum_{k=1}^{n}x_k^m$$

Alors, f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall m > 0$

$$f'(m) = \frac{n}{m} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-x_k^m\right)\ln(x_k)$$

$$\boxed{f'(m) = n\,\varphi((x_1,\dots,x_n),m)}$$

Par 2/b), il existe un unique réel noté $m_n(x_n) > 0$ tel que $f'(m_n(x_n)) = 0$ lorsque $(x_1,\dots,x_n) \neq (1,\dots,1)$.

Et f atteint en $m_n(x_n)$ son max (global) car $\boxed{f(m) \xrightarrow[m \to +\infty, 0]{} -\infty}$

Ainsi, le MLE de m est $\boxed{\hat{m}_n = m_n(X_n)}$ (*)

Rq : Pas de Pb avec le fait que si $(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$ on ne peut pas maximiser la vraisemblance car $\mathbb{P}_m$-ps, $(X_1, \dots, X_n) \neq (1, \dots, 1)$ et donc (*) caractérise bien $\mathbb{P}_m$-ps le MLE et donc caractérise sa loi.

4/ a) On a :

$$\ell((X_1, \dots, X_n), m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 - X_i^m) \ln(X_i) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Avec : $Y_i = (1 - X_i^m) \ln(X_i)$ iid (car les X_i le sont)

Il est clair que $Y_i \leq 0$. C'est pourquoi $\mathbb{E}(Y_1)$ a un sens. De plus :

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}((1 - X_1^m) \ln(X_1))$$

$$= \int_0^{+\infty} (1 - x^m) \ln(x) p_{X_1}(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (1 - x^m) \ln(x) m x^{m-1} e^{-x^m} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (1 - y) \ln(y^{\frac{1}{m}}) \cancel{m y^{\frac{m-1}{m}}} e^{-y} \frac{dy}{\cancel{m y^{1 - \frac{1}{m}}}}$$

cdv $y = x^m$
$dy = m y^{1 - \frac{1}{m}} dx$

$$= \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} (1 - y) \ln(y) e^{-y} dy.$$

$$\boxed{= \frac{-1}{m} \text{ par formule admise}}.$$

Ainsi : par la LGN, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n \infty]{ps} \frac{-1}{m}$

Et donc $\boxed{\ell((X_1, \dots, X_n), m) \xrightarrow[n \infty]{ps} \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0}$

b) (i) On a :

$$\ell'((x_1, \dots, x_n), m) = \frac{-1}{m^2} - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)^2 x_i^m}_{\leq 0} \leq \frac{-1}{m^2}$$

• Or : on vérifie facilement, en distinguant selon que $x_i < 1$ ou $x_i \geq 1$, que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad -x_i^{m+\varepsilon} \ln(x_i) \leq -x_i^{m} \ln(x_i)$$

Ensuite : En combinant les 2 points précédents il vient :

$$0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^{m})\ln(x_i)$$

(ii) Avec $\varepsilon > 0$, par 4/c)(i), on sait que

$$\{[\hat{m}_n - m]_+ \geq \varepsilon\} \subseteq \{\hat{m}_n - m \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-X_k^{m})\ln(X_k)\right\}$$

Et donc en $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}([\hat{m}_n - m]_+ \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-X_k^{m})\ln(X_k)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{m} + \varphi((X_1,\dots,X_n),m)\right)$$

Or : $\frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{m} + \varphi((X_1,\dots,X_n),m) \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{m} < 0$

et donc $\mathbb{1}\left\{0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{m} + \varphi((X_1,\dots,X_n),m)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} 0$

On a de plus la domination $\mathbb{1}\left\{0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{m} + \varphi((X_1,\dots,X_n),m)\right\} \leq 1$

Si bien que via cvg dominée,

$$\mathbb{P}\left(0 \leq \frac{1}{m+\varepsilon} - \frac{1}{m} + \varphi((X_1,\dots,X_n),m)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi : par encadrement $\mathbb{P}([\hat{m}_n - m]_+ \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon$

ie $\boxed{[\hat{m}_n - m]_+ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.}$

d) Comme $|\hat{m}_n - m| = [\hat{m}_n - m]_- + [\hat{m}_n - m]_+$

et que $[\hat{m}_n - m]_- \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, $[\hat{m}_n - m]_+ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$

par les questions précédentes, on conclut que

$$\boxed{\hat{m}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m.}$$

Donc $\hat{m}_n$ est consistant.

Rq : Preuve de la formule admise

Une IPP permet de calculer une primitive de $y \mapsto (1-y)e^{-y}$, c'est $y \mapsto ye^{-y}$

Une IPP donne alors :

2

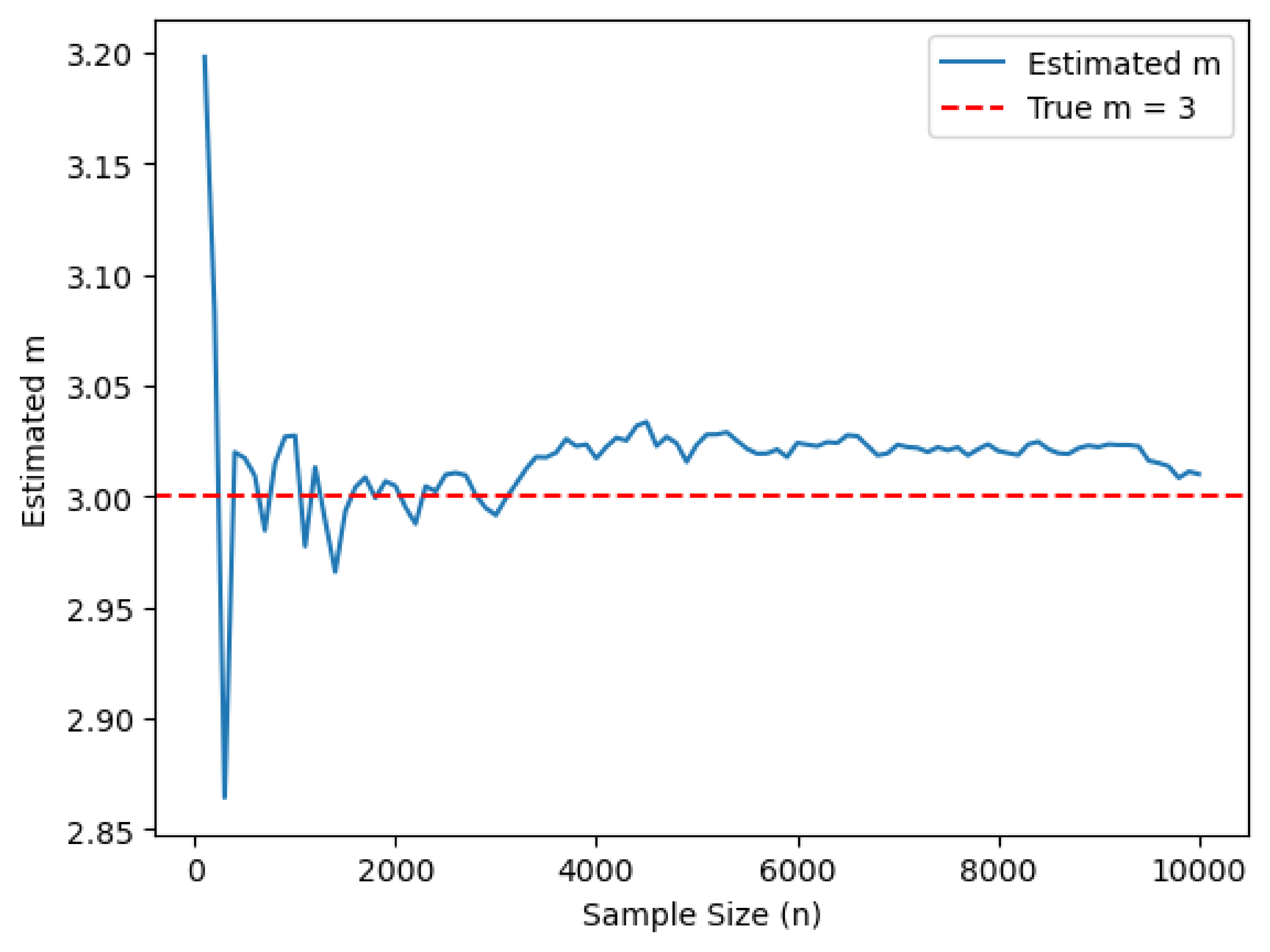
$$\int_0^{+\infty} (1-y)\ln(y)\, e^{-y}\, dy$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\Big[y e^{-y} \ln(y) \Big]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \cancel{y} e^{-y} \times \frac{1}{\cancel{y}}\, dy$$

$$= - \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy$$

$$= - \Big[-e^{-y} \Big]_0^{+\infty}$$

$$= -1$$



Estimated m
True m = 3
3.20
3.15
3.10
3.05
3.00
2.95
2.90
2.85
Estimated m
0
2000
4000
6000
8000
10000
Sample Size (n)