8.A.2) 1/ $\bullet$ $H_0 = \{\theta \leq 0\}$, $H_1 = \{\theta > 0\}$.

On effectue un Z-test. On prend une région de rejet de la forme $\omega_n = \{\overline{X}_n \geq a_n\}$.

Sous $\mathbb{P}_{(0,1)}$: $\sqrt{n}\,\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ et donc :

$\mathbb{P}_{(0,1)}(\sqrt{n}\,\overline{X}_n \geq \Phi_{1-\alpha}) = 1-(1-\alpha) = \alpha$

Ainsi avec $a_n = \frac{\Phi_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$, on a $\mathbb{P}_{(0,1)}(\omega_n) = \alpha$.

Par ailleurs : Sous H_0 ie $\theta \leq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(\theta,1)}(\overline{X}_n \geq a_n) &= \mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(\overline{X}_n \geq \frac{\Phi_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq \mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(\overline{X}_n \geq \frac{\Phi_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} + \theta\right) \quad \text{car } \theta \leq 0 \\
&= \mathbb{P}_{(\theta,1)}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \geq \Phi_{1-\alpha}) \\
&= \mathbb{P}(G \geq \Phi_{1-\alpha}) \quad \text{où } G \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= 1-(1-\alpha) \\
&= \alpha \\
&= \mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \geq a_n).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Bilan : } \sup_{\theta \in H_0} \mathbb{P}_{(\theta,1)}(\overline{X}_n \geq a_n) = \alpha.}$

$\bullet$ De même, $\forall \theta \in H_0$, $\mathbb{P}_{(\theta,1)}(\overline{X}_n \geq \overline{x}_n) \leq \mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \geq \overline{x}_n)$

Donc

$$\begin{aligned}
p\text{-valeur} &= \mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \geq \overline{x}_n) \\
&= \mathbb{P}_{(0,1)}(\sqrt{n}\,\overline{X}_n \geq \sqrt{n}\,\overline{x}_n) \\
&= \mathbb{P}(G \geq \sqrt{n}\,\overline{x}_n) \quad \text{où } G \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

$\boxed{p\text{-valeur} = 1 - F_G(\sqrt{n}\,\overline{x}_n)}$

2/ Avec $\theta = \log(1{,}5)$, la probabilité que le test ne détecte pas la présence d'OGM lorsque le pourcentage d'OGM est de 1,5 % c'est :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{(\theta,1)}(p\text{-valeur}(x_1,\dots,x_n) \leq \alpha) \\
&= \mathbb{P}_{(\theta,1)}(1 - F_G(\sqrt{n}\,\overline{X}_n) > \alpha) \\
&= \mathbb{P}_{(\theta,1)}(F_G(\sqrt{n}\,\overline{X}_n) < 1-\alpha) \\
&= \mathbb{P}_{(\theta,1)}(\sqrt{n}\,\overline{X}_n \leq F_G^{-1}(1-\alpha))
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) < F_G^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n}\,\theta\right)$$ où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$= \mathbb{P}\left(G < F_G^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n}\,\theta\right)$$ car $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{P}_{(\theta,1)}$

$$\boxed{= F_G\left(F_G^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n}\,\theta\right)}$$

AN : La proba recherchée vaut 0,35

3/. On change les hypothèses :

$H_0 = \{\theta \geq 0\}$, $H_1 = \{\theta < 0\}$ et on prend une région de rejet de la forme $W_n = \{\overline{X}_n \leq a_n\}$.

On a $\sqrt{n}\,\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{P}_{(0,1)}$ et donc

$\mathbb{P}_{(0,1)}(\sqrt{n}\,\overline{X}_n \leq \Phi_\alpha) = \alpha$

puis $\mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \leq a_n) = \alpha$ avec $a_n = \frac{\Phi_\alpha}{\sqrt{n}}$

et on vérifie facilement (cf. Q1) que sous H_0

ie $\forall \theta \geq 0$, $\mathbb{P}_{(\theta,1)}(\overline{X}_n \leq a_n) \leq \mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \leq a_n)$

et donc $\alpha = \sup_{\theta \in H_0} \mathbb{P}_{(\theta,1)}(\overline{X}_n \leq a_n)$

• Calcul de la p-valeur

De nouveau, $\mathbb{P}_{(\theta,1)}(\overline{X}_n \leq \overline{x}_n) \leq \mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \leq \overline{x}_n)$ $\forall \theta \geq 0$

et donc on a :

$$\text{p-valeur} = \mathbb{P}_{(0,1)}(\overline{X}_n \leq \overline{x}_n)$$
$$= \mathbb{P}_{(0,1)}(\sqrt{n}\,\overline{X}_n \leq \sqrt{n}\,\overline{x}_n)$$
$$= F_G(\sqrt{n}\,\overline{x}_n)$$ car sous $\mathbb{P}_{(0,1)}$, $\sqrt{n}\,\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0,1)$

• Ainsi la proba pour qu'avec $\theta = \log(1,5)$, le test conclut qu'il n'y a pas d'OGM est :

$$\mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(\text{p-valeur}(X_1,\dots,X_n) \leq \alpha\right)$$
$$= \mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(F_G(\sqrt{n}\,\overline{X}_n) \leq \alpha\right)$$
$$= \mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(\sqrt{n}\,\overline{X}_n \leq F_G^{-1}(\alpha)\right)$$
$$= \mathbb{P}_{(\theta,1)}\left(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \leq F_G^{-1}(\alpha) - \sqrt{n}\,\theta\right)$$
$$\boxed{= F_G\left(F_G^{-1}(\alpha) - \sqrt{n}\,\theta\right)}$$ car sous $\mathbb{P}_{(\theta,1)}$, $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$

A.N. La proba recherchée vaut $1,2.10^{-4}$