9.A-3.

1/ $H_0 = \{P = \mathcal{B}(N,p)\}$, $H_1 = \{P \neq \mathcal{B}(N,p)\}$

Statistique de Pearson : $d_n = n \sum_{x \in E} \frac{(\hat{p}_{n,x} - p_{0,x})^2}{p_{0,x}}$

où $E = [\![0,12]\!]$ et $\forall x \in E$

- $\hat{p}_{n,x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\{X_k = x\}$
- $p_{0,x} = \mathbb{P}(X = x) = \binom{12}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{N-x}$ (binomiale)
  (où $X \sim \mathcal{B}(12, \frac{1}{3})$)

p-valeur $= \mathbb{P}_{H_0}(d_n \geq d_n^{obs})$

$\simeq \mathbb{P}(Y \geq d_n^{obs})$ où $Y \sim \chi^2(m-1)$

$\boxed{\text{p-valeur} = 1 - F_Y(d_n^{obs})}$

AN : $\boxed{\text{p-valeur} \simeq 4,3.10^{-5}}$ donc au niveau 1% on rejette l'hypothèse selon laquelle les dés sont iid

2/ AN : $\overline{X}_n^{obs}/12 \simeq 0,3377$, $\mathbb{E}(X)/12 \simeq 0,3333$

3/ Les dés ont des trous gravés sur leurs faces pour indiquer leur numéro. Cela conduit à un pipage des dés. De toute façon un dé physique n'est jamais parfait.

4/ Cette fois-ci :

$\boxed{H_0 = \{P \sim \mathcal{B}(N,p) \mid p \in]0,1[\},\ H_1 = \{P \text{ ne suit pas une } \mathcal{B}(N,p)\}}$.

Estimateur de p : $\hat{p}_n = \frac{1}{12} \overline{X}_n$

Statistique de Pearson :

$$d'_n = n \sum_{x \in E} \frac{(\hat{p}_{n,x} - p_{0,\overline{X}_n,x})^2}{p_{0,\overline{X}_n,x}}$$

où $E = [\![0,12]\!]$ et $\forall x \in [\![0,12]\!]$,

- $\hat{p}_{n,x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\{X_k = x\}$
- $p_{0,\overline{X}_n,x} = \binom{12}{x} \overline{X}_n^{\,x} (1 - \overline{X}_n)^{N-x}$

p-valeur $= \mathbb{P}_{H_0}(d'_n \geq d'^{obs}_n)$

$\boxed{\text{p-valeur} \simeq 1 - \mathbb{P}(X \leq d'^{obs}_n)}$ où $X \sim \chi^2(m-2)$

$\boxed{\text{AN : p-valeur} = 0,28}$ On ne rejette plus H_0 aux niveaux usuels