10.A.3 (7/ a) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$F_{0,\mu,\sigma^2}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

De sorte que :

$$\boxed{F_{0,\overline{X}_n,V_n}(x) = \Phi\left(\frac{x-\overline{X}_n}{\sqrt{V_n}}\right)}$$

$$\left(\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2\right)$$

b) • Rappel : Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $\Phi^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(0,1)$

Preuve : On écrit la fonction de répartition de $\Phi^{-1}(U)$.

$$F_{\Phi^{-1}(U)}(u) = \mathbb{P}(\Phi^{-1}(U) \leq u) = \mathbb{P}(U \leq \Phi(u)) = \Phi(u)$$

Bilan : Cô la fonction de répartition caractérise la loi on a $\Phi^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Ainsi : Sous H_0, $\boxed{(X_1, \dots, X_n) \sim (\mu + \sigma\Phi^{-1}(U_1), \dots, \mu + \sigma\Phi^{-1}(U_n))}$

où les U_i sont iid.

• Ainsi : Sous H_0,

$$\xi_n' = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F_{0,\overline{X}_n,V_n}(x) \right|$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\{X_k \leq x\} - \Phi\left(\frac{x-\overline{X}_n}{\sqrt{V_n}}\right) \right|$$

$$\overset{loi}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\mu+\sigma\Phi^{-1}(U_k)\le x\}} - \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mu+\sigma\Phi^{-1}(U_k))}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma\Phi^{-1}(U_k) - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sigma\Phi^{-1}(U_\ell)\right)^2}}\right)\right|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_k \le \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\}} - \Phi\left(\frac{x-\bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-\bar{Y}_n)^2}}\right)\right|$$

où : $Y_k = \mu + \sigma\Phi^{-1}(U_k)$

Puis via cdv $u = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, on a

$$\zeta'_n \overset{loi}{=} \sup_{u\in]0,1[} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_k\le u\}} - \Phi\left(\frac{\mu+\sigma\Phi^{-1}(u) - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-\bar{Y}_n)^2}}\right)\right|$$

$$\zeta'_n = \sup_{u\in]0,1[} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_k\le u\}} - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^{-1}(U_k)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\Phi^{-1}(U_k) - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\Phi^{-1}(U_\ell)\right)^2}}\right)\right|$$

$$= \Psi_n(u, U_1, \dots, U_n)$$

Ainsi $\boxed{\zeta'_n \overset{loi}{=} \sup_{u\in]0,1[} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_k\le u\}} - \Psi_n(u, U_1, \dots, U_n)\right|}$

c) Le test de région de rejet $W_n = \left\{\zeta'_n \ge q^{Z'_n}_{1-\alpha}\right\}$ e[st] de niveau α pour les hypothèses H_0 et H_1, d'ap[rès] la question précédente.

d) On a :

$$\text{p-valeur} = \mathbb{P}\left(\zeta'_n \ge \zeta'^{\,obs}_n\right) = \mathbb{P}\left(Z'_n \ge \zeta'^{\,obs}_n\right)$$

Cette quantité se calcule par Monte-Carlo.