Rappel : Famille Γ : $\mathcal{Q}\{\Gamma(a,\theta) \mid a>0, \theta>0\}$

$q(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ $\qquad \mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\lambda) \mid \lambda>0\}$.

$\boxed{\text{Ex 6.7.4}}$ $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$

$Q(\cdot \mid (x_1, \dots, x_n))$ a la densité $q(\cdot \mid (x_1, \dots, x_n))$ donnée par

$$\forall \lambda>0, \quad q(\lambda \mid (x_1, \dots, x_n)) = \frac{L_n((x_1, \dots, x_n), \lambda)\, q(\lambda)}{\int_{\tilde{\lambda}>0} L_n((x_1, \dots, x_n), \tilde{\lambda})\, q(\tilde{\lambda})\, d\tilde{\lambda}}$$

Or $\forall \lambda>0$,

$$L_n((x_1, \dots, x_n), \lambda) = \prod_{k=1}^n p(x_k, \lambda)$$

$$= \prod_{k=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_k}}{x_k!}$$

D'où

$$q(\lambda \mid (x_1, \dots, x_n)) \propto e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{k=1}^n x_k}}{\prod_{k=1}^n x_k!} \times \mathbb{1}_{\{\lambda>0\}} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\theta\lambda}$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^n x_k!} \times \mathbb{1}_{\{\lambda>0\}} \times \frac{\lambda^{\sum_{k=1}^n x_k + a - 1}}{\Gamma(a)} \times e^{-\lambda(\theta+n)}\, \theta^a$$

$$\propto \mathbb{1}_{\{\lambda>0\}}\, \lambda^{\sum_{k=1}^n x_k + a - 1}\, e^{-\lambda(\theta+n)}$$

D'où : $\boxed{Q(\cdot \mid (x_1, \dots, x_n)) = \Gamma\left(\sum_{k=1}^n x_k + a, \theta + n\right)}$

Conclusion : la loi a posteriori est dans $\mathcal{Q}$ donc $\mathcal{Q}$ est conjugué par le modèle $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{Ex 6.A.3}}$ **Rappel** : Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

Q1/ • Moyenne a posteriori

On a $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\theta_n^{PM}(x_1, \dots, x_n) = \int_{\theta>0} \theta\, Q_{a,\lambda}(d\theta \mid (x_1, \dots, x_n))$$

Or : Par l'exo précédent, on sait que :

$$Q_{a,\lambda}(\cdot \mid (x_1, \dots, x_n)) = \Gamma\left(\sum_{k=1}^n x_k + a, \lambda + n\right)$$

D'où $\theta_n^{PM}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{E}(X)$ où $X \sim \Gamma\left(\sum_{k=1}^n x_k + a, \lambda + n\right)$

$$\theta_n^{PM}(x_1, \dots, x_n) = \frac{a + \sum_{k=1}^n x_k}{\lambda + n}$$

D'où : $\boxed{\hat{\theta}_n^{PM} = \dfrac{a + \sum_{k=1}^{n} X_k}{n+\lambda}}$

. Maximum a posteriori : On a : $\forall \theta > 0$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$q(\theta \mid (x_1, \dots, x_n)) \propto \theta^{\sum_{k=1}^{n} x_k + a - 1} e^{-(\lambda+n)\theta}$$
$$= e^{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + a - 1\right)\ln(\theta) - (\lambda+n)\theta}$$

Il s'agit de maximiser $f : \theta \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + a - 1\right)\ln(\theta) - (\lambda+n)\theta$

$\rightarrow$ On impose $a > 1$, de sorte que f atteint son max en un unique point $\theta_n^{MAP}(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k + a - 1}{n+\lambda}$

Ainsi : $\boxed{\hat{\theta}_n^{MAP} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k + a - 1}{n+\lambda}}$

2/ . On écrit :

$$\hat{\theta}_n^{PM} = \frac{n\left(\frac{a}{n} + \overline{X}_n\right)}{n+\lambda}$$

Or : $\overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{ps} \mathbb{E}(X_1) = \theta$ par loi forte.

Donc $\boxed{\hat{\theta}_n^{PM} \xrightarrow[n \to \infty]{ps} \theta}$ et $\hat{\theta}_n^{PM}$ est fortement consistant.

. De la même façon,

$$\hat{\theta}_n^{MAP} = \frac{n\left(\frac{a-1}{n} + \overline{X}_n\right)}{n+\lambda} \xrightarrow[n \to \infty]{ps} \theta \quad \text{car } \overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{ps} \theta \text{ par le forte}$$

Donc $\hat{\theta}_n^{MAP}$ est fortement cons.

3/ . Par Q2, $\hat{\theta}_n^{PM}$ est fortement consistant.

. De plus : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, on a

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \int_{\theta > 0} (\theta - \theta_n^{PM})^2 Q(d\theta \mid (x_1, \dots, x_n))$$
$$= \mathbb{V}(X) \text{ où } X \sim \Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + a, \lambda + n\right)$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k + a}{(\lambda+n)^2}$$

D'où : $\boxed{V_n(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k + a}{(\lambda+n)^2}}$

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{\frac{n}{(\lambda+n)^2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\underbrace{\left(\overline{X}_n + \frac{a}{n}\right)}_{\substack{\xrightarrow[n\to\infty]{ps} \theta \\ \text{par loi forte}}} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} 0$$

Bilan : Par le cours, l'estimation bayésienne de θ avec la loi a priori $\mathcal{G}(a,\lambda)$ est consistante.

Ex G.A.4. 1/ On a : $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) = \frac{L_n((x_1,\dots,x_n), \mu_i)\, Q(\mu_i)}{\sum_{j=1}^{k} L_n((x_1,\dots,x_n), \mu_j)\, Q(\mu_j)}$$

Or : $\forall i \in [\![1,k]\!]$,

$$L_n((x_1,\dots,x_n), \mu_i) = \prod_{\ell=1}^{n} p(x_\ell, \mu_i)$$

et $X_\ell \sim \mathcal{N}(\mu_\ell, \sigma^2)$. Donc :

$$L_n((x_1,\dots,x_n), \mu_i) = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_\ell-\mu_i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\, e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_\ell-\mu_i)^2}.$$

Puis :

$$Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) = \frac{\cancel{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}}\, e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_\ell-\mu_i)^2}\, Q(\mu_i)}{\sum_{j=1}^{k} \cancel{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}}\, e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_\ell-\mu_j)^2}\, Q(\mu_j)}$$

$$\boxed{Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) = \frac{e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_\ell-\mu_i)^2}\, Q(\mu_i)}{\sum_{j=1}^{k} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_\ell-\mu_j)^2}\, Q(\mu_j)}}$$

c) On rappelle que : $\forall i \in [\![1,k]\!]$,

$$Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) = \frac{Q(\mu_i)}{\sum_{j=1}^{k} e^{\frac{-n}{2\sigma^2} U_{ij}^n} Q(\mu_j)}$$

Or : pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $U_{ij}^n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}\text{-ps}} (\mu_i - \mu_j)^2$

et donc : $\forall j \neq i \in [\![1,k]\!]$, on obtient

$$\boxed{e^{\frac{-n}{2\sigma^2} U_{ij}^n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}\text{-ps}} 0}$$

car $(\mu_i - \mu_j)^2 > 0$ et donc $\frac{-n}{2\sigma^2} U_{ij}^n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}} 0$

Alors que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{e^{\frac{-n}{2\sigma^2} U_{ii}^n} = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}\text{-ps}} 1} \quad (U_{ii}^n = 0)$$

Ainsi, il vient :

$$\boxed{Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}\text{-ps}} \frac{Q(\mu_i)}{Q(\mu_i)} = 1}$$

ie : l'estimation bayesienne de μ_i est consistante.

3/ . On visualise la consistance de l'estimation bayesienne en remarquant que lorsque n est grand, la loi a posteriori s'approche d'une indicatrice en le point μ qui correspond au trou noir qui a émis le signal.

. Plus k est grand, moins on a besoin que n soit grand pour retrouver la valeur de μ.

Q2/ a) On écrit : $\forall i \in [\![1,k]\!]$,

$$Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) = \frac{Q(\mu_i)}{\sum_{j=1}^{k} \frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n}\left[(x_\ell-\mu_j)^2-(x_\ell-\mu_i)^2\right] Q(\mu_j)}$$

$$\boxed{Q(\mu_i \mid (x_1,\dots,x_n)) = \frac{Q(\mu_i)}{\sum_{j=1}^{k} e^{\frac{-n}{2\sigma^2}U_{ij}^n} Q(\mu_j)}}$$

b) On écrit :

$U_{ij}^n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} Y_\ell$ avec $Y_\ell = (x_\ell-\mu_j)^2-(x_\ell-\mu_i)^2$.

Les Y_ℓ sont iid et L^1, si bien que par loi faible,

on a $U_{ij}^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}\text{-ps}} \mathbb{E}_{\mu_i}(Y_1)$

On calcule :

$\mathbb{E}_{\mu_i}(Y_1) = \mathbb{E}_{\mu_i}((x_1-\mu_j)^2) - \mathbb{V}_{\mu_i}(x_1)$

On a :

$(x_1-\mu_j)^2 = ((x_1-\mu_i)+(\mu_i-\mu_j))^2$

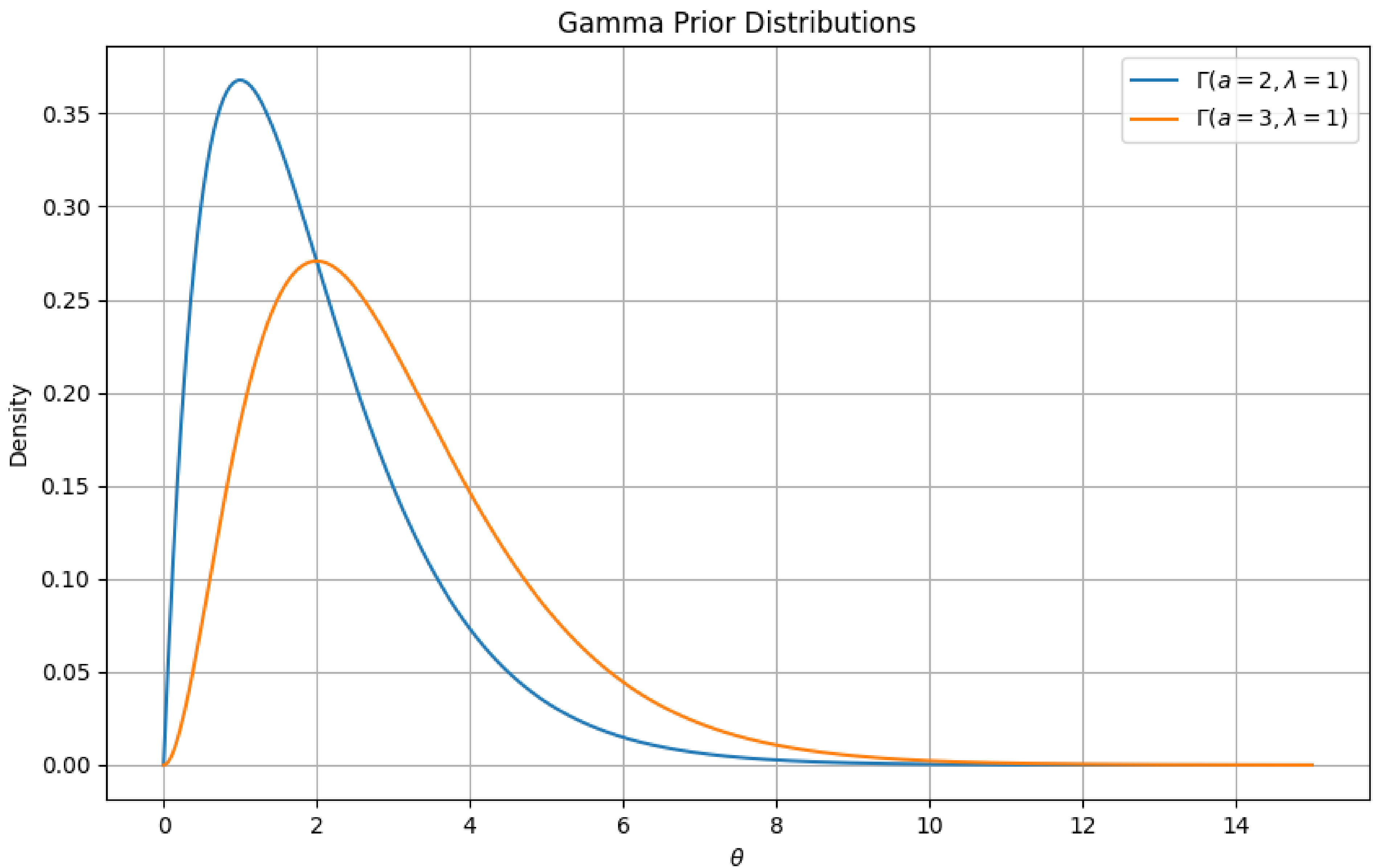
$= (x_1-\mu_i)^2+(\mu_i-\mu_j)^2+2(x_1-\mu_i)(\mu_i-\mu_j)$

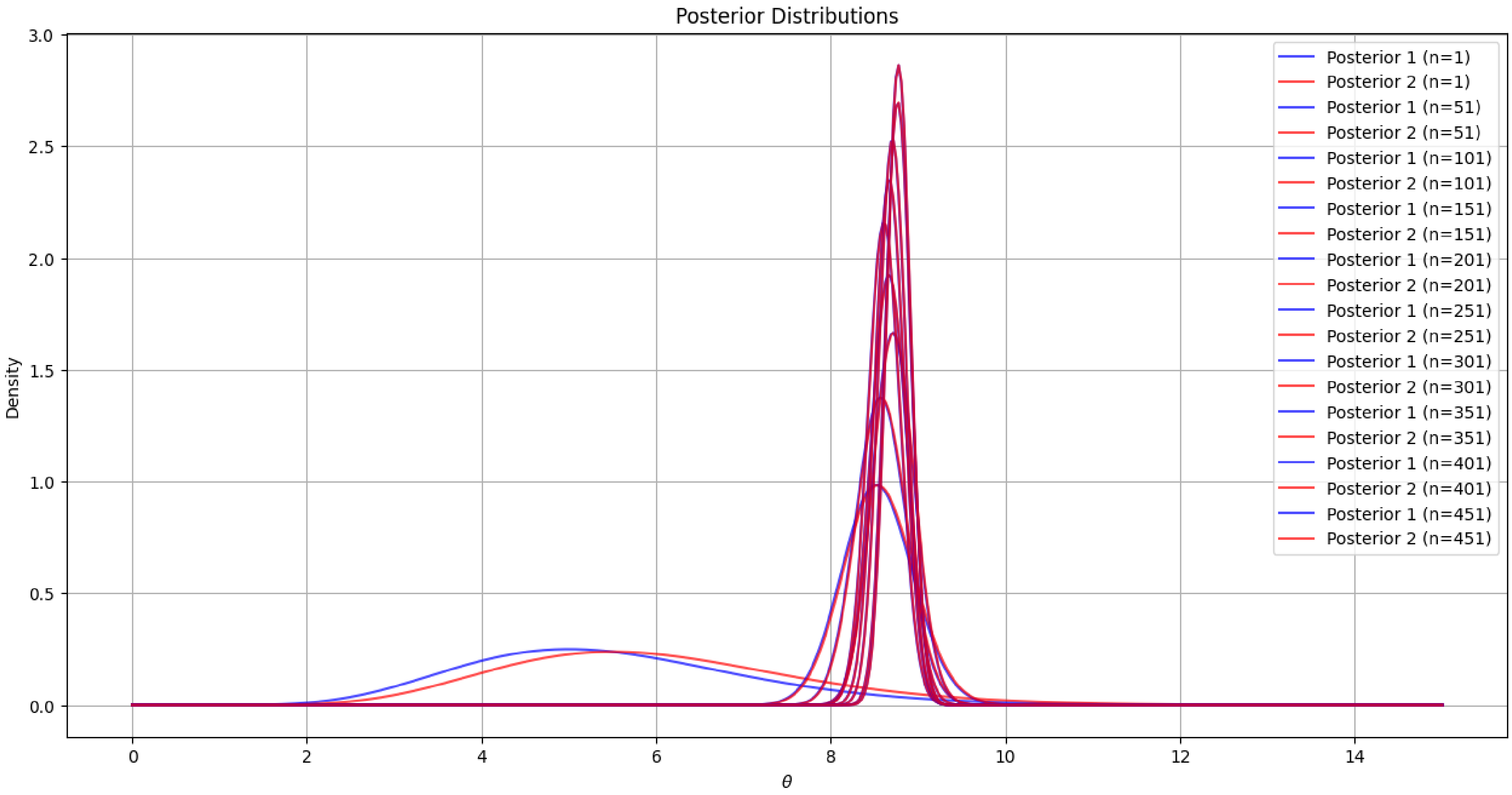
Donc $\mathbb{E}_{\mu_i}((x_1-\mu_j)^2) = \mathbb{V}_{\mu_i}(x_1) + (\mu_i-\mu_j)^2$

et enfin

$\mathbb{E}_{\mu_i}(Y_1) = (\mu_i-\mu_j)^2$

Bilan : $\boxed{U_{ij}^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_{\mu_i}\text{-ps}} (\mu_i-\mu_j)^2}$


Gamma Prior Distributions
Γ(a = 2, λ = 1)
Γ(a = 3, λ = 1)
Density
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0
2
4
6
8
10
12
14
θ


Posterior Distributions
Density
θ
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
2
4
6
8
10
12
14
Posterior 1 (n=1)
Posterior 2 (n=1)
Posterior 1 (n=51)
Posterior 2 (n=51)
Posterior 1 (n=101)
Posterior 2 (n=101)
Posterior 1 (n=151)
Posterior 2 (n=151)
Posterior 1 (n=201)
Posterior 2 (n=201)
Posterior 1 (n=251)
Posterior 2 (n=251)
Posterior 1 (n=301)
Posterior 2 (n=301)
Posterior 1 (n=351)
Posterior 2 (n=351)
Posterior 1 (n=401)
Posterior 2 (n=401)
Posterior 1 (n=451)
Posterior 2 (n=451)