Caucheteux
Maxence

Modèles paramétriques et estimateurs

Ex 2.A.1 1/ Avec $\underline{X_n} = (X_1, \dots, X_n)$, $\forall \underline{x_n} \in \{0,1\}^n$, on a

$$\mathbb{P}(\underline{X_n} = \underline{x_n}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) \quad \text{par indépendance}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\underline{X_n} = \underline{x_n}) = p^{\sum_{k=1}^n x_k} (1-p)^{n - \sum_{k=1}^n x_k}.}$$

2/ Z_n est un estimateur de $g(p)$ donc il s'écrit sous la forme $Z_n = t_n(\underline{X_n})$ avec t_n mesurable. On a alors :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(t_n(\underline{X_n}))$$
$$= \sum_{\underline{x_n} \in \{0,1\}^n} t_n(\underline{x_n}) \, \mathbb{P}(\underline{X_n} = \underline{x_n})$$
$$= \sum_{\underline{x_n} \in \{0,1\}^n} t_n(\underline{x_n}) \, p^{\sum_{k=1}^n x_k} (1-p)^{n - \sum_{k=1}^n x_k} \quad \text{par 1/a)}$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \underbrace{\left[\sum_{\substack{\underline{x_n} \in \{0,1\}^n \\ \text{tq } \sum_{k=1}^n x_k = s}} t_n(\underline{x_n}) \right]}_{= a_s} p^s (1-p)^{n-s}$$

sommation par paquets : $\{0,1\}^n = \coprod_{s=0}^{n} E_k$ où $E_s = \{\underline{x_n} \in \{0,1\}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = s\}$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{s=0}^{n} a_s p^s (1-p)^{n-s}.}$$

Comme Z_n est non biaisé, $\mathbb{E}(Z_n) = g(p) = \frac{1}{p}$. $\forall p \in]0,1[$

Bilan : $\boxed{\sum_{s=0}^{n} a_s p^s (1-p)^{n-s} = \frac{1}{p}. \quad \forall p \in]0,1[.}$

3/ On constate que $\sum_{s=0}^{n} a_s p^s (1-p)^{n-s} \xrightarrow[p \to 0]{} a_0 < +\infty$

Cependant que $\frac{1}{p} \xrightarrow[p \to 0]{} +\infty$.

C'est absurde : il n'existe donc pas de tel estimateur.

Ex 2.A.2 1/ On a :

$$\mathrm{Cov}(Y_1) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_1^2) \\ \mathrm{Cov}(X_1^2, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1^2, X_1^2) \end{bmatrix}.$$

Un calcul direct montre que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(Y_1) = \begin{bmatrix} e_2 & e_3 \\ e_3 & e_4 - e_2^2 \end{bmatrix}}$$

2/ φ est polynomiale donc C^∞ et pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\nabla\varphi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

3/ On remarque que $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2 = \varphi(\overline{Y}_n)$

- Comme les (X_i, X_i^2) sont iid et L^2, par loi forte on a

$$\boxed{\overline{Y}_n \xrightarrow[n\infty]{ps} (\mathbb{E}(X_1), e_2) = (0, e_2)}$$

- Comme les (X_i, X_i^2) sont iid et L^2 (X_i est L^4), par théorème central limite on a :

$$\boxed{\sqrt{n}\left[\overline{Y}_n - \underbrace{\mathbb{E}(Y_1)}_{=a}\right] \xrightarrow[n\infty]{loi} \mathcal{N}_d(0, \mathrm{Cov}(Y_1))}$$

- $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_2 - x_1^2$ est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, qui contient bien tout $a = (\mathbb{E}(X_1), e_2)$.

Par méthode delta, on obtient :

$$\boxed{\sqrt{n}\left(\varphi(\overline{Y}_n) - \varphi(a)\right) \xrightarrow[n\infty]{loi} \nabla\varphi(a) Y}$$

où $Y \sim \mathcal{N}_d(0, \mathrm{Cov}(Y_1))$

Or : $\varphi(\overline{Y}_n) = V_n$, $\varphi(a) = e_2$ et $\nabla\varphi(a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ainsi $\nabla\varphi(a) Y = Y_2$ et on sait que $Y_2 \sim \mathcal{N}_1(0, e_4 - e_2^2)$ car Y suit une loi normale multidimensionnelle.

Finalement : $\boxed{\sqrt{n}(V_n - e_2) \xrightarrow[n\infty]{loi} \mathcal{N}(0, e_4 - e_2^2)}$

$\boxed{\text{Ex 2.A.3.}}$ 1/ a) On a :

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}_\lambda(X_1 = k)$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{+\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \quad \text{(cgt d'indice)}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \quad \text{(série exp)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda.}$$

Par loi forte, comme les X_i sont iid et L^1, $\boxed{\tilde{\lambda}_n^{(1)} \overset{def}{:=} \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \lambda}$

Ainsi $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$ est un estimateur de λ fortement consistent.

b) Il est non biaisé : $\mathbb{E}_\lambda(\tilde{\lambda}_n^{(1)}) = \mathbb{E}_\lambda(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1) = \lambda$ par 1/a)

c) On calcule :

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1(X_1-1)) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{(par transfert)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{(cgt d'indice)}$$

$$= \lambda^2.$$

Si bien que :

$$\boxed{\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = \lambda^2 + \mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda^2 + \lambda}.$$

d) Comme les X_i sont iid et L^2, par tcl on a :

$\sqrt{n}(\tilde{\lambda}_n^{(1)} - \lambda) = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1)) = \mathcal{N}(0,\lambda)$

$(\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}_\lambda(X_1^2) - \mathbb{E}_\lambda(X_1)^2 = (\lambda^2+\lambda) - \lambda^2 = \lambda)$

Bilan : $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$ est asymptotiquement normal, de variance asymptotique λ.

2/ a) • On a $\forall \lambda > 0$, $m(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$, qui est bijective de $]0,+\infty[$ dans lui-même car strictement croissante et car $m(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$, $m(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} +\infty$.

• Sa réciproque est la fonction qui à $y>0$ associe l'unique racine >0 de la fonction polynomiale $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - y$.

Autrement dit : $\boxed{\begin{aligned} m^{-1} :]0,+\infty[&\longrightarrow]0,+\infty[\\ y &\longmapsto \tfrac{1}{2}\left[-1+\sqrt{1+4y}\right]\end{aligned}}$

b) On applique la méthode des moments.

On a $m(\lambda) = \lambda + \lambda^2 = \mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = \mathbb{E}_\lambda(\varphi(X_1))$ avec $\varphi : x \mapsto x^2$.

On pose alors $\tilde{\lambda}_n^{(2)} = m^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{2}\left[-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}\right]$

C'est bien un estimateur de λ et on a par loi forte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = \lambda + \lambda^2 = m(\lambda)$.

Par continuité de m^{-1}, on a :

$$\boxed{\tilde{\lambda}_n^{(2)} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} m^{-1}(m(\lambda)) = \lambda}$$

Donc $\tilde{\lambda}_n^{(2)}$ est fortement consistent.

c) m^{-1} étant strictement concave et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ n'étant pas constante ps, par Jensen strict, on a

$$m^{-1}\left(\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right) > \underbrace{\mathbb{E}_\lambda\left(m^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right)}_{= \mathbb{E}_\lambda\left(\tilde{\lambda}_n^{(2)}\right)}$$

Or : $m^{-1}\left(\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right) = m^{-1}(\lambda+\lambda^2)$

$= m^{-1}(m(\lambda))$

$= \lambda.$

Bilan : $\boxed{\mathbb{E}_\lambda\left(\tilde{\lambda}_n^{(2)}\right) < \lambda \text{ donc } \tilde{\lambda}_n^{(2)} \text{ biaisé}}$.

d) Même méthode : on calcule d'abord $\mathbb{E}_\lambda(X_1(X_1-1)(X_1-2)) = \lambda^3$ et $\mathbb{E}_\lambda(X_1(X_1-1)(X_1-2)(X_1-3)) = \lambda^4$ afin d'obtenir :

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1^3) = 3\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) - 2\mathbb{E}_\lambda(X_1) + \lambda^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$
- $\mathbb{E}_\lambda(X_1^4) = 6\mathbb{E}_\lambda(X_1^3) - 11\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) + 6\mathbb{E}_\lambda(X_1) + \lambda^4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$

e) • $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\infty]{ps} a = \lambda + \lambda^2$ par loi forte.

• $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - a\right) \xrightarrow[n\infty]{loi} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1^2))$ par tcl

• m^{-1} est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Par méthode delta, on a

$$\sqrt{n}\left(m^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - m^{-1}(a)\right) \xrightarrow[n\infty]{loi} (m^{-1})'(a)\, Y$$

où $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1^2))$

Or : $\forall \lambda > 0$,

$$(m^{-1})'(\lambda) = \frac{1}{m'(m^{-1}(\lambda))}$$

$$= \frac{1}{m'\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4\lambda}\right)\right)}$$

$m(x) = x + x^2$, $m'(x) = 1 + 2x$

$$= \frac{1}{1 + \left(-1+\sqrt{1+4\lambda}\right)}$$

$$(m^{-1})'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+4\lambda}}$$

Ainsi,

$$(m^{-1})'(a) = \frac{1}{\sqrt{1+4(\lambda+\lambda^2)}}$$

$$(m^{-1})'(a) = \frac{1}{2\lambda+1}$$

Et $m^{-1}(a) = \lambda$. Finalement :

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\lambda}_n^{(2)} - \lambda\right) \xrightarrow[n\infty]{loi} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{V}(X_1^2)}{(2\lambda+1)^2}\right)$$

Ainsi : $\tilde{\lambda}_n^{(2)}$ est asymptotiquement normal, de variance asymptotique égale à :

$$\frac{\mathbb{V}(X_1^2)}{(2\lambda+1)^2} = \frac{\mathbb{E}(X_1^4) - \mathbb{E}(X_1^2)^2}{(2\lambda+1)^2}$$

$$= \frac{\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - (\lambda+\lambda^2)^2}{(2\lambda+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^4} + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - \lambda^2 - \cancel{\lambda^4} - 2\lambda^3}{(2\lambda+1)^2}$$

$$= \frac{4\lambda^3 - 6\lambda^2 + \lambda}{(2\lambda+1)^2}$$

$$\boxed{= \lambda \frac{4\lambda^2 - 6\lambda + 1}{(2\lambda+1)^2}.}$$

On montre que $\frac{\mathbb{V}(X_1^2)}{(2\lambda+1)^2} \leq \lambda$ (*)

On est ramené à l'étude du signe de :

$$P(\lambda) = (2\lambda+1)^2 - (4\lambda^2 - 6\lambda + 1)$$

$$= \cancel{4\lambda^2} + 4\lambda + \cancel{1} - \cancel{4\lambda^2} + 6\lambda - \cancel{1}$$

$$= 10\lambda \geq 0.$$

D'où l'on déduit (*).

Bilan : La variance asymptotique de $\tilde{\lambda}_n^{(2)}$ est plus petite que celle de $\tilde{\lambda}_n^{(1)}$.

②

Ex 2.A.4. 1/ On a $Z_n \overset{loi}{=} \sum_{i=1}^{n} G_i^2$ où les G_i sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes. Et donc :

$$\frac{Z_n}{n} \overset{loi}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i^2 \xrightarrow[n\infty]{ps} \mathbb{E}(G_1^2) \text{ par loi forte}$$

et $\mathbb{V}(G_1^2) = \mathbb{E}(G_1^2)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{u}{x} . \underset{v'}{x e^{\frac{-x^2}{2}}} dx$$

$$\underset{IPP}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left[x e^{\frac{-x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

$$= 1.$$

Bilan : $\left(\frac{Z_n}{n}\right)$ cvg ps vers 1 donc a fortiori en probabilités.

2/ $T_n \overset{loi}{=} \frac{Y}{\sqrt{Z_n/n}} = f\left(\frac{Z_n}{n}, Y\right)$ avec $f : (x,y) \mapsto \frac{y}{\sqrt{x}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} 1$ par la question précédente
- $Y \xrightarrow[n\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$

Par Slutsky, $\left(\frac{Z_n}{n}, Y\right) \xrightarrow[n\infty]{loi} (1, Y)$ et par cté de f, on a

$$T_n = f\left(\frac{Z_n}{n}, Y\right) \xrightarrow[n\infty]{loi} f(1, Y) = Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ex 2.A.5. 1/ On note $bc = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $b = (e'_1, \dots, e'_k)$ une bon de E. Pour $\ell \in [\![1,k]\!]$, e'_ℓ s'écrit $e'_\ell = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^{(\ell)} e_p$.

Si bien que : $\forall j \in [\![1,k]\!]$,

$$p(e_j) = \sum_{\ell=1}^{k} (e_j, e'_\ell) e'_\ell \quad (p = \text{proj orth sur } E)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \left(e_j, \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^{(\ell)} e_p\right) \sum_{q=1}^{n} \lambda_q^{(\ell)} e_q$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^{(\ell)} \delta_{jp} \sum_{q=1}^{n} \lambda_q^{(\ell)} e_q$$

$= \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_j^{(\ell)} \sum_{q=1}^{n} \lambda_q^{(\ell)} e_q$

$= \sum_{q=1}^{n} \left[\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_j^{(\ell)} \lambda_q^{(\ell)} \right] e_q$

Ce qui prouve que $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $\boxed{\Pi_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_j^{(\ell)} \lambda_i^{(\ell)}}$

et montre ainsi que Π est symétrique.

Soit $\lambda \in Sp(p)$, avec $x \neq 0$ tq $p(x) = \lambda x$.

- Soit $\lambda = 0$
- Soit $\lambda \neq 0$ et $x = \frac{1}{\lambda} p(x) \in E$ donc en fait $p(x) = x$ et $\lambda = 1 > 0$.

Bilan : $Sp(p) = Sp(\Pi) \subseteq \{0, 1\}$

Donc $\boxed{\Pi \in S_n^+(\mathbb{R})}$.

2/ Si $X \sim \mathcal{N}_n(0, \Pi)$. Soit $G \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$.

Alors $\Pi G \sim \mathcal{N}_n(0, \Pi I_n \Pi^T) = \mathcal{N}_n(0, \Pi \Pi^T)$.

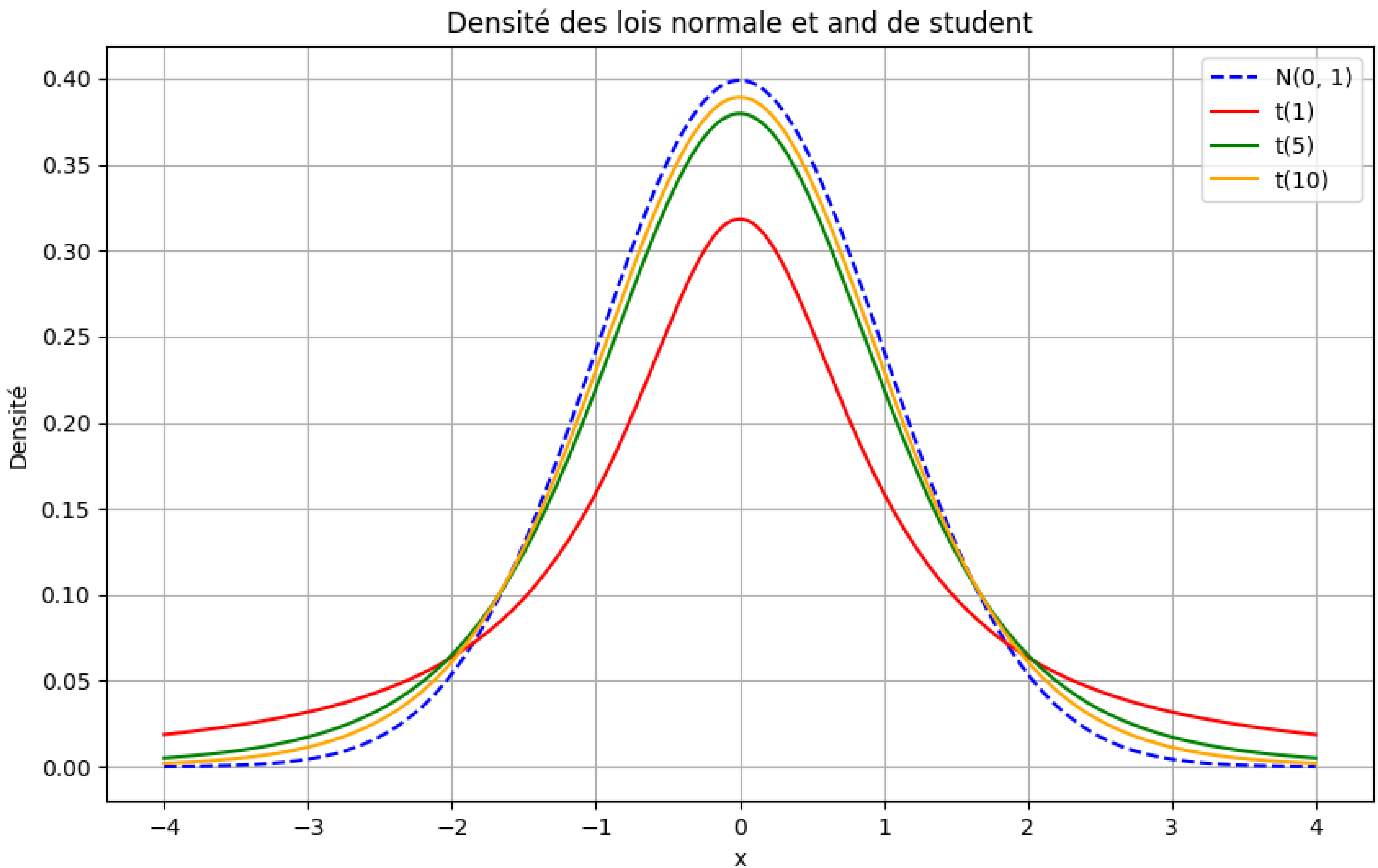
et $\Pi \Pi^T \underset{\text{symétrie}}{=} \Pi^2 \underset{\text{proj}}{=} \Pi$

Ainsi : $\Pi G \sim \mathcal{N}_n(0, \Pi)$.

Ainsi $\Pi G \sim X$.

Or : $\|\Pi G\|^2 \sim \chi(k)$ par Cochran.

Ainsi $\boxed{\|X\|^2 \sim \chi(k)}$.


Densité des lois normale et and de student
N(0, 1)
t(1)
t(5)
t(10)
Densité
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x