



Dynamique des Systèmes Mécaniques

Équilibre pour arbres haute vitesse

Rendu de projet

30 novembre 2025

Groupe 5 – Cas d'étude A

Nom	Prénom	SCIPER
Costa Pereira	Samantha	362665
Latrouite	Maxence	346782
Vacek	Daniel	345533
Valente Jacot-Descombes	Arnaud	339436
Vlazakis	Stylios	340846

Table des matières

1	Calculs préliminaires	2
1.1	Résultats numériques	2
1.2	Discussion	2
1.3	Détail des calculs	3
2	Accélération du groupe d'entraînement	5
2.1	Résultats numériques	5
2.2	Détail des calculs :	5
2.3	Schéma du modèle cinématique réduit :	8
2.4	Courbe d'accélération du groupe :	9
3	Analyse dynamique du groupe d'entraînement	10
3.1	Résultats numériques	10
3.2	Détail des calculs :	10
3.2.1	Solution exacte :	11
3.2.2	Solution approximative :	12
3.3	Justification de la simplification :	14
4	Réponse forcée du rotor	16
4.1	Résultats numériques (Section 4)	16
4.2	Développement des calculs :	18
4.2.1	Plage du balourd :	18
4.2.2	Masse du système rotor-support :	18
4.2.3	Moment inertie système rotor-support :	18
4.2.4	Équation du mouvement :	19
4.2.5	Analyse fréquentielle :	20
4.2.6	Analyse de l'accélération	20
4.2.7	Détermination de m_s pour satisfaire les contraintes d'accélération et de surcriticité	21

1 Calculs préliminaires

1.1 Résultats numériques

Paramètre	Notation	Valeur
Masse du rotor	m_r	42.8798 g
Moment d'inertie rotor (axe y)	J_{ry}	$2.9138 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Moment d'inertie rotor (axe z)	J_{rz}	$4.5283 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Distance début rotor (gauche)–CdG	z_{CdG}	45.867 mm
Distance balourd–CdG	L_u	23.367 mm
Distance support 1–CdG	L_{s1}	36.867 mm
Distance support 2–CdG	L_{s2}	35.133 mm
Rigidité lame selon x	k_{lx}	$3.5438 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$
Rigidité lame selon z	k_{lz}	$3.5437 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 1	k_{c1}	$5.1429 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 2	k_{c2}	$9.6 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 3	k_{c3}	$7.2 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 4	k_{c4}	$7.5789 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 5	k_{c5}	$1.2 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 6	k_{c6}	$1.2 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$
Rigidité courroie section 7	k_{c7}	$4.8 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$

TABLE 1 – Valeurs numériques préliminaires (Section 1).

1.2 Discussion

Que pouvez-vous dire de la rigidité des lames selon z ? Quelle hypothèse peut-on faire ?

Les lames présentent une rigidité très élevée selon l'axe z comparée à celle selon l'axe x . On peut donc considérer que les déplacements selon l'axe z sont négligeables par rapport aux déplacements selon x , et ainsi modéliser uniquement les mouvements selon x dans l'étude dynamique.

1.3 Détail des calculs

Masse du rotor :

$$m_r = \frac{\pi \rho_r}{4} (L_a (D_r^2 - D_i^2) + (L_r - L_a) (D_r^2 - D_i^2)) + \frac{\pi \rho_a L_a}{4} (D_a^2 - D_i^2)$$

$$= 42.8798 \text{ g}$$

Position z du centre de gravité :

$$z_{CdG} = \frac{\pi L_a^2}{8 m_r} (\rho_a (D_a^2 - D_i^2) - \rho_r (D_a^2 - D_r^2))$$

$$+ \frac{\pi \rho_r}{8 m_r} (D_i^2 - D_r^2) (L_a - L_r) (L_a + L_r)$$

$$= 45.8670 \text{ mm}$$

Moment d'inertie selon y :

$$J_{ry} = \frac{\pi L_a}{192} (D_a^2 - D_i^2) (\rho_a - \rho_r) (3 D_a^2 + 3 D_i^2 + 4 L_a^2)$$

$$- \frac{\pi L_r \rho_r}{16} (D_i^2 - D_r^2) (L_r - 2 z_{CdG})^2$$

$$+ \frac{\pi L_a}{16} (D_a^2 - D_i^2) (L_a - 2 z_{CdG})^2 (\rho_a - \rho_r)$$

$$- \frac{\pi L_r \rho_r}{192} (D_i^2 - D_r^2) (3 D_i^2 + 3 D_r^2 + 4 L_r^2)$$

$$= 2.9138 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Moment d'inertie selon z :

$$J_{rz} = \frac{\pi L_a \rho_a}{32} (D_a^4 - D_i^4) - \frac{\pi L_a \rho_r}{32} (D_a^4 - D_r^4)$$

$$+ \frac{\pi \rho_r}{32} (D_i^4 - D_r^4) (L_a - L_r)$$

$$= 4.5283 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Distance du balourd au centre de gravité :

$$L_u = z_{CdG} - \frac{L_a}{2} = 23.367 \text{ mm}$$

Distance du support 1 au centre de gravité :

$$L_{s1} = z_{CdG} - \frac{L_r}{10} = 36.8670 \text{ mm}$$

Distance du support 2 au centre de gravité :

$$L_{s2} = \frac{9}{10}L_r - z_{CdG} = 35.133 \text{ mm}$$

Rigidité lame selon x :

$$k_{lx} = \frac{E_l h_l t_l^3}{4 L_l^3} = 3.5438 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$$

Rigidité lame selon z :

$$k_{lz} = \frac{E_l h_l^3 t_l}{4 L_l^3} = 3.5437 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$$

Rigidité des différentes courroies :

$$k_{cj} = \frac{E_c h_c t_c}{l_{cj}}, \forall j \in [1, 7]$$

2 Accélération du groupe d'entraînement

2.1 Résultats numériques

Paramètres	Notation	Valeur
Rapport de transmission moteur-courroie	i_{mc}	52.6316 m^{-1}
Rapport de transmission moteur-poulies	i_{mp}	0.526
Rapport de transmission moteur-rotor	i_{mr}	0.2368
Vitesse stationnaire moteur	ω_{ms}	297.62 rad/s
Moment d'inertie réduit (moteur)	J_{mz}^*	$28 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Moment d'inertie réduit (poulies)	J_{pz}^*	$0.722 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Moment d'inertie réduit (rotor)	J_{rz}^*	$8.0726 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Coef. a couple rotor	a_r	$3.34 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
Coef. b couple rotor	b_r	$1.4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$
Coef. a couple rotor réduit	a_r^*	$5.958 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
Coef. b couple rotor réduit	b_r^*	$5.91 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$
Coef. a couple global réduit	a^*	$-5.958 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
Coef. b couple global réduit	b^*	$17.73 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$
Moment d'inertie global réduit	J_z^*	$39.68 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$
Temps de démarrage (99%)	$t_{99\%}$	3.0671 s

TABLE 2 – Paramètres liés à l'accélération du groupe d'entraînement (Section 2).

2.2 Détail des calculs :

On considère pour l'instant que la courroie ne se déforme pas et que la transmission de puissance se fait par frottement statique (pas de glissement). On en déduit :

$$\begin{aligned} \theta_m \cdot R_m &= \theta_{pj} \cdot R_p, \forall j \in [1, 5] \\ &= \theta_r \cdot R_r \end{aligned}$$

Ainsi, on peut exprimer chaque angle par rapport à l'angle menant qui est l'angle du moteur :

$$\begin{aligned} \theta_{pj} &= \theta_m \cdot \frac{R_m}{R_p}, \forall j \in [1, 5] \\ \theta_r &= \theta_m \cdot \frac{R_m}{R_r} \end{aligned}$$

Les rapports de transmissions sont donc :

$$\begin{aligned} i_{mc} &= \frac{\omega_m}{v_c} = \frac{\omega_m}{\omega_m R_m} = \frac{1}{R_m} = \frac{1}{0.019\text{m}} = 52.63 \\ i_{mp} &= \frac{\omega_m}{\omega_p} = \frac{D_p}{D_m} = \frac{0.02\text{ m}}{0.038\text{ m}} = 0.526 \\ i_{mr} &= \frac{\omega_m}{\omega_r} = \frac{D_r}{D_m} = \frac{0.009\text{ m}}{0.038\text{ m}} = 0.2368 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique du système est composée uniquement d'énergie cinétique de rotation (la masse de la courroie est négligeable), on obtiens :

$$T = \frac{1}{2} J_{mz} \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_{rz} \dot{\theta}_r^2 + \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2} J_{pz} \dot{\theta}_{pj}^2$$

En exprimant chaque angle par rapport à l'angle menant du moteur on obtiens :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_{mz} \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_{rz} \dot{\theta}_m^2 \cdot \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 + \frac{5}{2} J_{pz} \dot{\theta}_m^2 \cdot \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_m^2 \left(J_{mz} + J_{rz} \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 + 5 J_{pz} \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Deux moments de forces externes sont appliqués au système, le couple moteur T_m et le couple résistant du rotor T_r :

$$T_m = cst$$

$$T_r = a_r \omega_r + b_r = a_r \cdot \frac{\omega_m}{i_{mr}} + b_r$$

Le couple résistant du rotor, réduit au moteur s'exprime comme :

$$\begin{aligned} T_r^* &= \omega_m \cdot a_r^* + b_r^* = \left(a_r \cdot \frac{\omega_m}{i_{mr}} + b_r \right) \frac{1}{i_{mr}} = a_r \cdot \frac{\omega_m}{i_{mr}^2} + b_r \cdot \frac{1}{i_{mr}} \\ \Rightarrow a_r^* &= a_r \cdot \frac{1}{i_{mr}^2}, \quad b_r^* = b_r \cdot \frac{1}{i_{mr}} \end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer l'équation de Lagrange du système à 1 degré de liberté :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_m} &= Q_m \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\dot{\theta}_m \left[J_{mz} + J_{rz} \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 + 5 J_{pz} \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 \right] \right) &= Q_m \\ \Rightarrow \ddot{\theta}_m \left(J_{mz} + J_{rz} \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 + 5 J_{pz} \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 \right) &= Q_m \end{aligned}$$

Le moment généralisé qui s'applique au moteur est :

$$Q_m = T_m - T_r^*$$

Les inerties réduites du système sont donc :

$$J_{mz}^* = J_{mz} = 28 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$J_{pz}^* = J_{pz} \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 = 0.722 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$J_{rz}^* = J_{rz} \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 = 8.0726 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$J_z^* = J_{mz} + J_{rz} \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 + 5J_{pz} \left(\frac{R_m}{R_p} \right)^2 = 39.68 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Grâce aux résultats des tests nous pouvons caractériser le couple résistant du rotor :

$$T_r = a_r \cdot \omega_r + b_r$$

$$\implies T_r(\omega_r = 0) = b_r = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\implies T_r(\omega_r = \omega_{max}^r) = a_r \omega_{max}^r + b_r, \quad \omega_{max}^r = 12 \text{ kRPM}$$

$$\implies a_r = \frac{T_r|_{\omega_{max}^r} - b_r}{\omega_{max}^r} = 3.3423 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$\implies a_r^* = 5.958 \times 10^{-5} \text{ N m s}, \quad b_r^* = 5.91 \times 10^{-3} \text{ N m}$$

Nous sommes maintenant capable de trouver le couple moteur qui garantit le fonctionnement stationnaire T_{ms} ainsi que la vitesse de rotation stationnaire du moteur associée, ω_{ms} :

$$\ddot{\theta}_m = 0, \text{ régime stationnaire}$$

$$\implies T_{ms} - T_r^*|_{\omega_{ms}} = 0, \quad \omega_{ms} = \omega_{max}^r \cdot i_{mr} = 297.62 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\implies T_{ms} = T_r^*|_{\omega_{ms}} = a_r^* \omega_{ms} + b_r^* = 23.64 \times 10^{-3} \text{ N m}$$

Nous pouvons ainsi formuler le temps de démarrage (99%) : En régime transitoire, l'équation du mouvement du système est donnée par :

$$J_z^* \cdot \dot{\omega}_m = T_{ms} - T_r^*(\omega_m) = T_{ms} - a_r^* \omega_m - b_r^*$$

Ainsi, nous avons une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\omega}_m + \frac{1}{\tau} \cdot \omega_m = \omega_{ms} \cdot \frac{1}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J_z^*}{a_r^*}$$

Et qui admet comme solution :

$$\omega_m(t) = \omega_{ms} (1 - e^{-t/\tau})$$

Nous avons défini le temps de démarrage $t_{99\%}$ comme le temps nécessaire pour atteindre 99% de la vitesse finale ω_{ms} :

$$\omega_m(t_{99\%}) = 0.99 \cdot \omega_{ms} \rightarrow 0.99 = 1 - e^{-t_{99\%}/\tau} \rightarrow e^{-t_{99\%}/\tau} = 0.01 \Rightarrow t_{99\%} = -\ln(0.01) \cdot \tau$$

On en déduit

$$t_{99\%} = -\ln(0.01) \cdot \frac{J_z^*}{a_r^*} = 3.0671 \text{ s}$$

Le couple global réduit est donné par :

$$\begin{aligned} T_{global}^* &= T_{ms} - T_r^* = a_r^* \omega_{ms} + b_r^* - \omega_m \cdot a_r^* - b_r^* \\ &= -\omega_m \cdot a_r^* + a_r^* \omega_{ms} = -\omega_m \cdot a_r^* + a_r^* \cdot \omega_{max}^r \cdot i_{mr} \\ \Rightarrow a^* &= -a_r^* = -5.958 \times 10^{-5} \text{ N m s}, \quad b^* = a_r^* \cdot \omega_{max}^r \cdot i_{mr} = 17.73 \text{ N m} \end{aligned}$$

2.3 Schéma du modèle cinématique réduit :

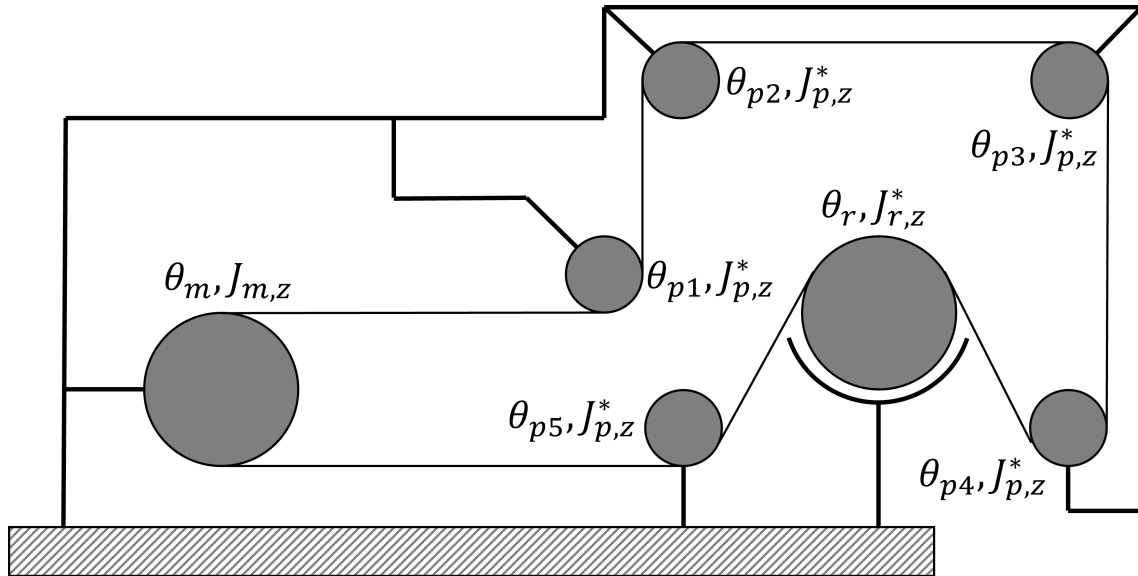


FIGURE 1 – Schéma du modèle cinématique réduit.

2.4 Courbe d'accélération du groupe :

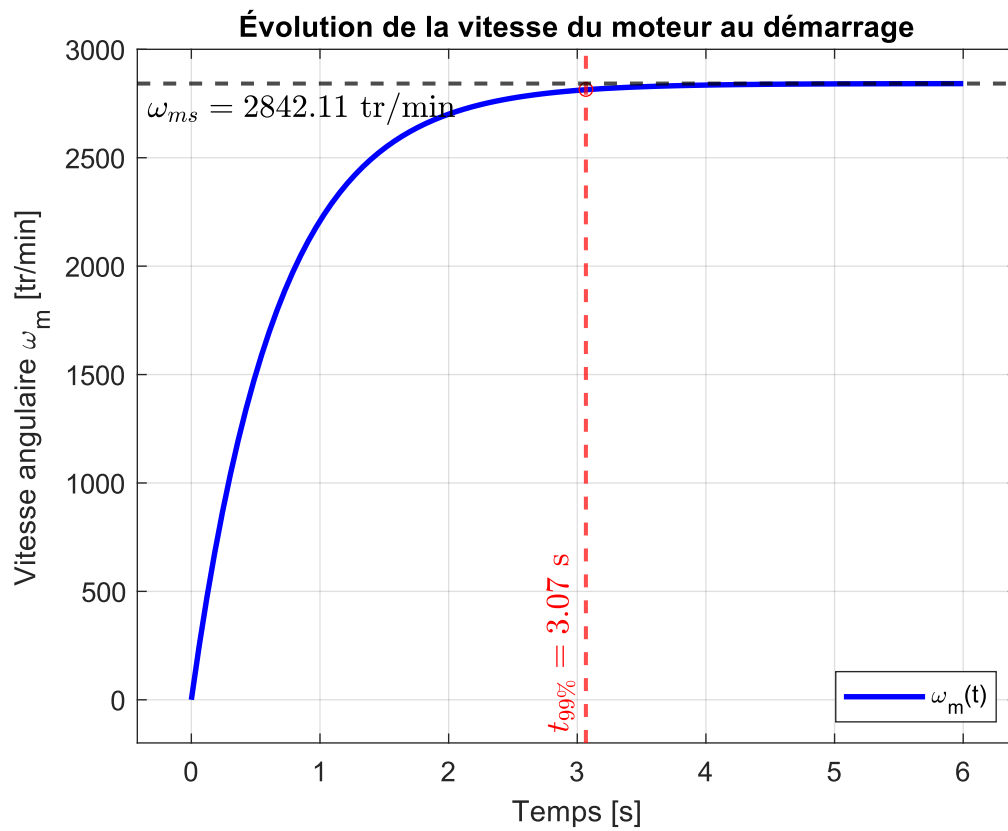


FIGURE 2 – Courbe d'accélération du groupe.

3 Analyse dynamique du groupe d'entraînement

3.1 Résultats numériques

Paramètre	Notation	Valeur
Rigidité réduite courroie, section 1	k_{c1}^*	18.5657 N/m
Rigidité réduite courroie, section 2	k_{c2}^*	34.656 N/m
Rigidité réduite courroie, section 3	k_{c3}^*	25.992 N/m
Rigidité réduite courroie, section 4	k_{c4}^*	27.36 N/m
Rigidité réduite courroie, section 5	k_{c5}^*	43.32 N/m
Rigidité réduite courroie, section 6	k_{c6}^*	43.32 N/m
Rigidité réduite courroie, section 7	k_{c7}^*	17.328 N/m
Vitesse critique minimale	$\omega_{m0,min}$	1606.4 rad/s
Pulsation relative maximale	$\beta_{m,max}$	0.1853
Erreur relative vitesse critique	ε_ω	5.2346 %

TABLE 3 – Paramètres liés à l'analyse dynamique (Section 3).

3.2 Détail des calculs :

Pour établir le modèle dynamique réduit (cf. Figures 3 et 4) nous devons définir les rapports de transmissions suivant :

Rapport	Notation
Moteur–Courroie	i_{mc}
Courroie–Moteur	i_{cm}
Courroie–Poulie	i_{cp}
Poulie–Courroie	i_{pc}
Courroie–Rotor	i_{cr}
Rotor–Courroie	i_{rc}

TABLE 4 – Rapports de transmission(Section 3).

Rapport Moteur–Courroie :

$$i_{mc} = \frac{\omega_m}{v_c} = \frac{\omega_m}{\omega_m R_m} = \frac{1}{R_m}$$

Rapport Courroie–Moteur :

$$i_{cm} = \frac{v_c}{\omega_m} = \frac{\omega_m R_m}{\omega_m} = R_m$$

Rapport Courroie–Poulie :

$$i_{cp} = \frac{v_c}{\omega_p} = \frac{\omega_m R_m}{\omega_m R_m / R_p} = R_p$$

Rapport Poulie–Courroie :

$$i_{pc} = \frac{\omega_p}{v_c} = \frac{\omega_m R_m / R_p}{\omega_m R_m} = \frac{1}{R_p}$$

Rapport Courroie–Rotor :

$$i_{cr} = \frac{v_c}{\omega_r} = \frac{\omega_m R_m}{\omega_m R_m / R_r} = R_r$$

Rapport Rotor–Courroie :

$$i_{rc} = \frac{\omega_r}{v_c} = \frac{\omega_m R_m / R_r}{\omega_m R_m} = \frac{1}{R_r}$$

On constate que la propriété $i_{ab} = \frac{1}{i_{ba}}$ est respectée. Le développement a quand même été fait dans la volonté d'être complet.

Nous pouvons ainsi formuler les rigidités réduites :

$$k_{cj}^* = \frac{k_{cj}}{i_{mc}^2} = k_{cj} R_m^2, \forall j \in [1, 7]$$

Ainsi que vérifier les inerties réduites trouvées précédemment :

$$J_p^* = \frac{J_p}{i_{mc}^2 i_{cp}^2} = J_p \frac{R_m^2}{R_p^2} \quad \checkmark$$

$$J_r^* = \frac{J_p}{i_{mc}^2 i_{cr}^2} = J_r \frac{R_m^2}{R_r^2} \quad \checkmark$$

$$J_m^* = J_m \quad \checkmark$$

Nous pouvons maintenant analyser le système afin de déterminer la plus faible pulsation propre.

3.2.1 Solution exacte :

Pour évaluer la solution exacte, nous devons résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{x}$$

où :

— \mathbf{K} est la matrice de rigidité globale du système,

- \mathbf{M} est la matrice de masse,
- ω sont les pulsations propres du système,
- \mathbf{x} est le vecteur propre associé.

Les fréquences propres sont données par :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 7$$

Les valeurs sont obtenues par résolution numérique du problème aux valeurs propres en utilisant ces matrices déduites du schéma du modèle dynamique réduit, cf. Figure 4 :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{c7}^* + k_{c1}^* & -k_{c1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{c7}^* \\ -k_{c1}^* & k_{c1}^* + k_{c2}^* & -k_{c2}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{c2}^* & k_{c2}^* + k_{c3}^* & -k_{c3}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{c3}^* & k_{c3}^* + k_{c4}^* & -k_{c4}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{c4}^* & k_{c4}^* + k_{c5}^* & -k_{c5}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{c5}^* & k_{c5}^* + k_{c6}^* & -k_{c6}^* \\ -k_{c7}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{c6}^* & k_{c6}^* + k_{c7}^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_m^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_p^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_p^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_p^* \end{bmatrix}$$

Nous trouvons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4 \quad \omega_5 \quad \omega_6 \quad \omega_7]^T \\ &= [0 \quad 1606.42 \quad 4002.34 \quad 7502.14 \quad 9385.44 \quad 10765.02 \quad 12110.51]^T \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

La pulsation propre minimale différente de 0, ω_{\min} , est donc de $1606.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Nous allons ensuite calculer une approximation de cette pulsation propre minimale en utilisant un schéma réduit simplifié (cf. Figure 5) puis quantifier l'erreur de simplification.

3.2.2 Solution approximative :

En faisant le choix de négliger les inerties des poulies, nous sommes capables de réduire le système à un système simplifié à deux degrés de liberté : le moteur (inertie J_m^*) et le rotor (inertie J_r^*), reliés par la raideur équivalente k_{eq}^* correspondant à l'ensemble des courroies. On commence par le calcul de cette raideur équivalente :

$$k_{\text{eq}}^* = \left(\frac{1}{k_{c1}^*} + \frac{1}{k_{c2}^*} + \frac{1}{k_{c3}^*} + \frac{1}{k_{c4}^*} + \frac{1}{k_{c5}^*} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{k_{c6}^*} + \frac{1}{k_{c7}^*} \right)^{-1} = 17.91 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

Le système dynamique linéaire s'écrit alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \theta_r \end{bmatrix}$$

où :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_m^* & 0 \\ 0 & J_r^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{eq}^* & -k_{eq}^* \\ -k_{eq}^* & k_{eq}^* \end{bmatrix}$$

En supposant une solution harmonique de la forme $\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{x}e^{j\tilde{\omega}t}$, le problème se réécrit sous forme du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \tilde{\omega}^2\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Ce système admet deux solutions :

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{k_{eq}^*(J_m^* + J_r^*)}{J_m^*J_r^*}} \end{bmatrix}^T = [0 \quad 1690.51]^T \quad \frac{rad}{s}$$

La première solution correspond à un "mode rigide" (rotation uniforme des deux inerties), et la seconde à un "mode en opposition de phase" entre le moteur et le rotor. Nous trouvons donc une fréquence propre minimale différente de zéro, $\tilde{\omega}_{min}$, qui vaut $1690.51 \frac{rad}{s}$. Cette approximation est très satisfaisante car elle donne lieu à une erreur relative faible :

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{|\omega_{min} - \tilde{\omega}_{min}|}{\omega_{min}} = 5.2346 \quad \%$$

Sachant que la fréquence propre est déduite du système réduit au simple degré de liberté du moteur, la vitesse critique minimale du moteur est simplement :

$$\omega_{m0,min} = \omega_{min} = 1606.42 \quad \frac{rad}{s}$$

Nous pouvons maintenant analyser la pulsation relative maximale du système. Elle est définie telle que :

$$\beta_{m,max} = \max \left(\frac{\omega_m}{\omega_{m0,min}} \right) = \frac{\omega_{ms}}{\omega_{min}} = 0.1853$$

On constate donc que l'analyse cinématique ne devrait produire qu'une erreur de $< 5\%$ ce qui est tout à fait acceptable.

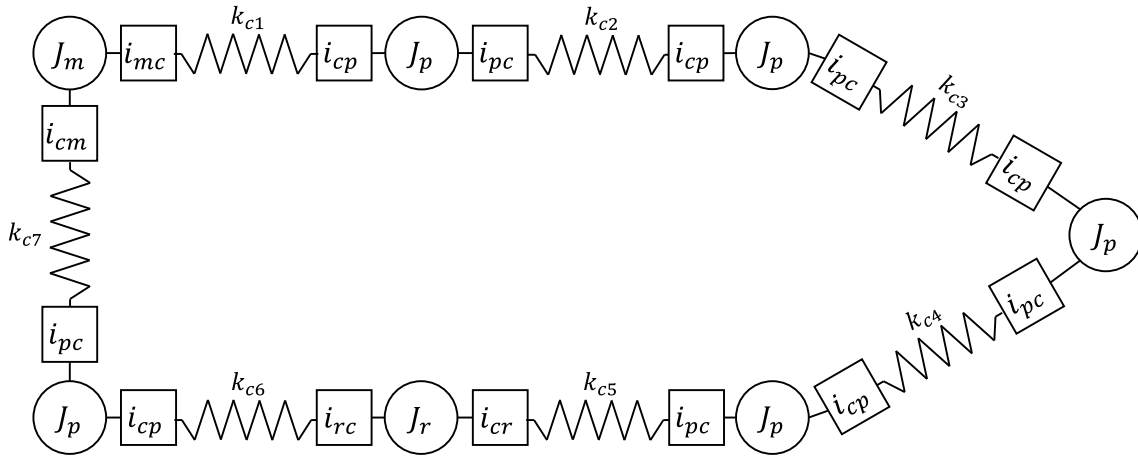


FIGURE 3 – Schéma du modèle dynamique

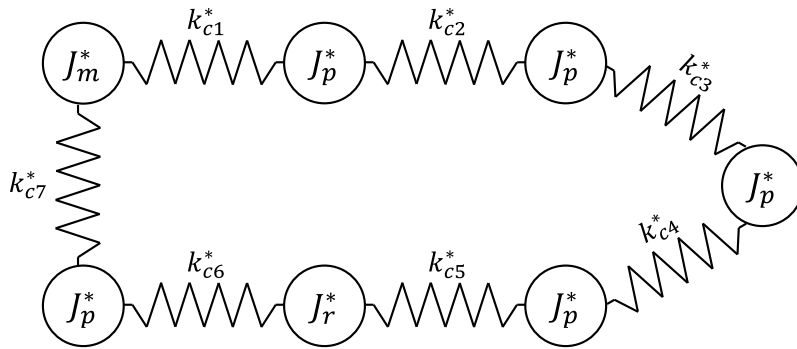


FIGURE 4 – Schéma du modèle dynamique réduit

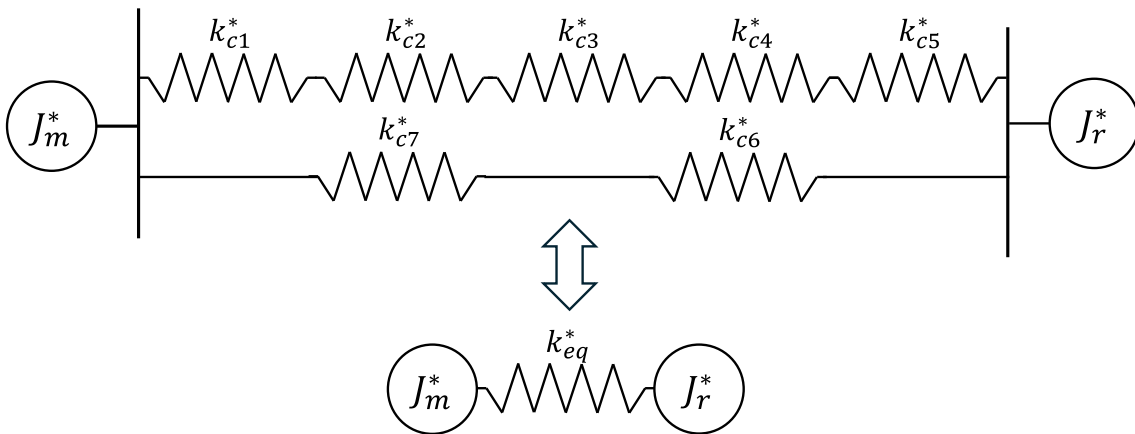


FIGURE 5 – Schéma du modèle dynamique réduit simplifié

3.3 Justification de la simplification :

L'idée principale de la simplification est de réduire au maximum le nombre de degrés de liberté du système pour rendre le calcul de la fréquence propre bien plus

simple. Pour ce faire nous avons décidé de négliger l'inertie des poulies qui sont d'un ordre de grandeur en dessous des inerties du moteur et du rotor. Ainsi nous avons réduit le système à 7 degrés de liberté en un système simplifié à 2 degrés de liberté (cf. Figure 5). Les rigidités ont des valeurs similaires, nous les avons donc toutes incluses dans le calcul des rigidités équivalentes. La faible erreur semble indiquer que les hypothèses de la simplification sont bonnes.

4 Réponse forcée du rotor

4.1 Résultats numériques (Section 4)

Paramètre	Notation	Valeur / Unité
Plage du balourd	U	$\begin{bmatrix} 0.0193 & 1.93 \end{bmatrix}$ g mm
Masse minimale support	m_s	1.5836 kg
Masse du système RS	m_{RS}	3.2101 kg
Inertie RS selon y	$J_{RS,y}$	4136.2 kg · mm ²
Rigidité RS selon x	k_{xx}	14.175 kN m ⁻¹
Rigidité RS selon θ	$k_{\theta\theta}$	18.3815 N rad ⁻¹
Première vitesse critique	ω_{r01}	634.5517 RPM
Seconde vitesse critique	ω_{r02}	636.5848 RPM

TABLE 5 – Paramètres liés à la réponse forcée du rotor (Section 4).

Schéma du modèle dynamique :

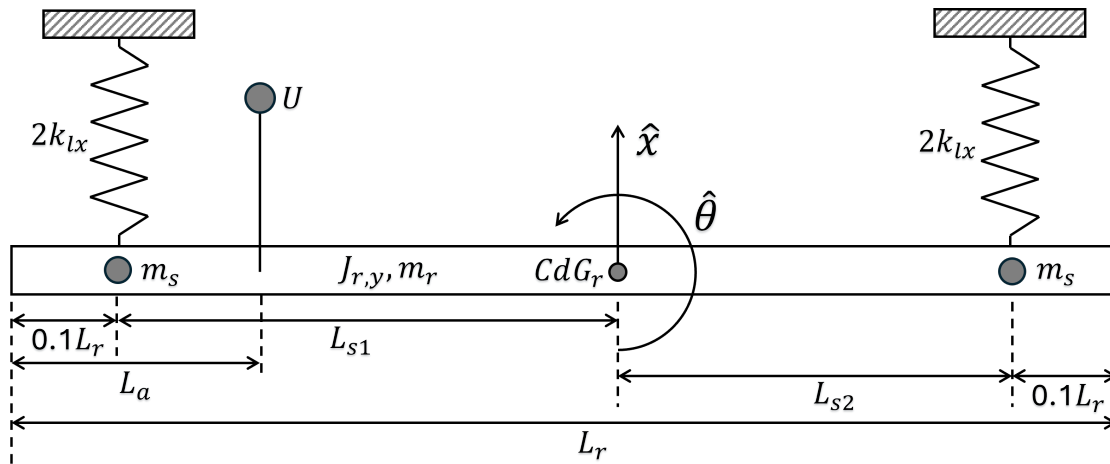


FIGURE 6 – Schéma du modèle dynamique du système rotor-support

Courbes d'accélération des supports :

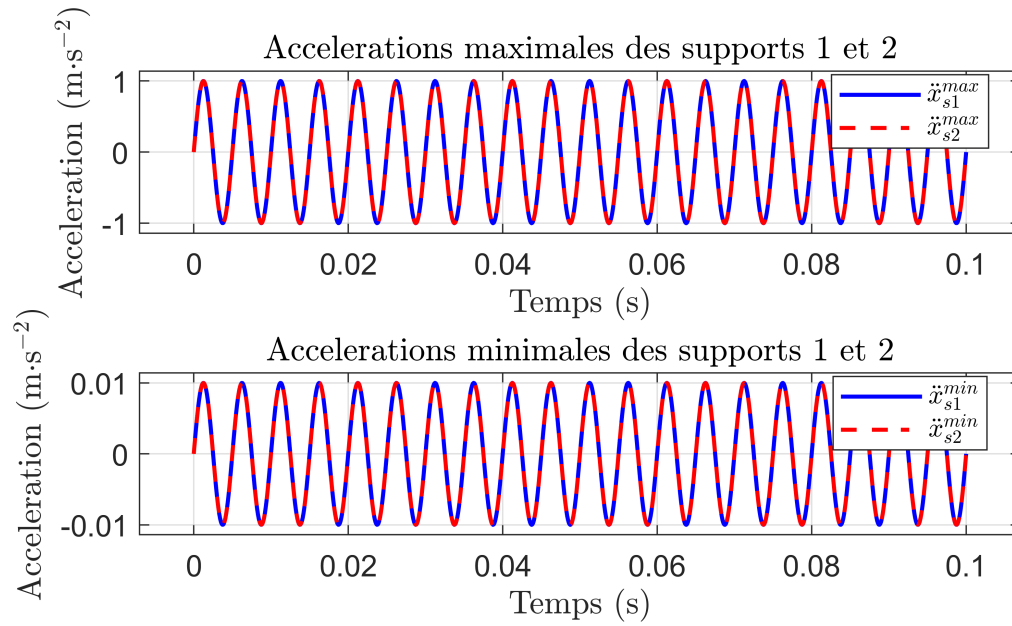


FIGURE 7 – Courbes d'accélération des supports.

Courbe de position des supports :

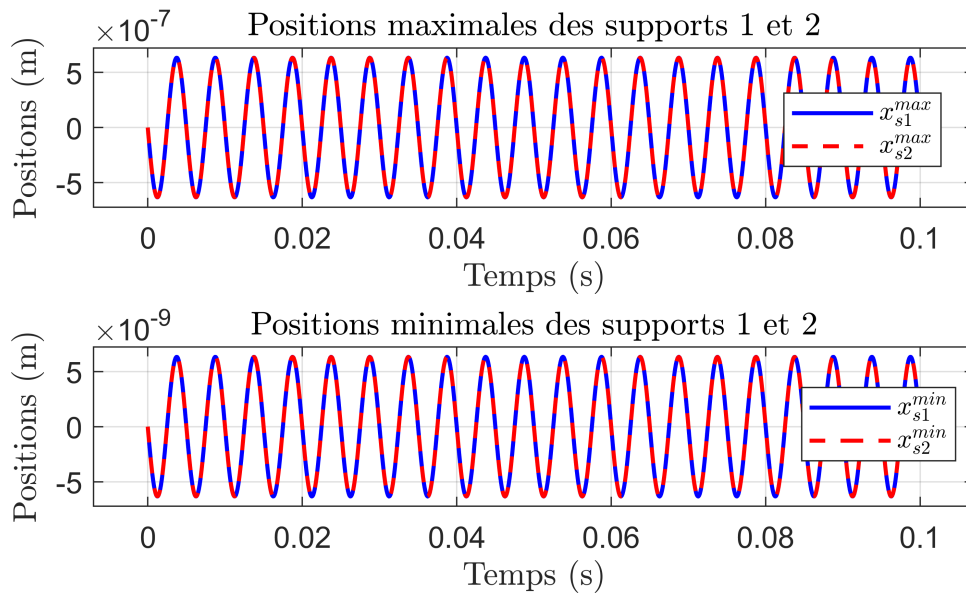


FIGURE 8 – Courbe de position des supports.

Les courbes présentées ci-dessus (accélération et position des supports) correspondent aux valeurs de $\omega = 12000 \text{ RPM}$ et $m_s = 1.5836 \text{ kg}$.

Plage admissible de masses des supports :

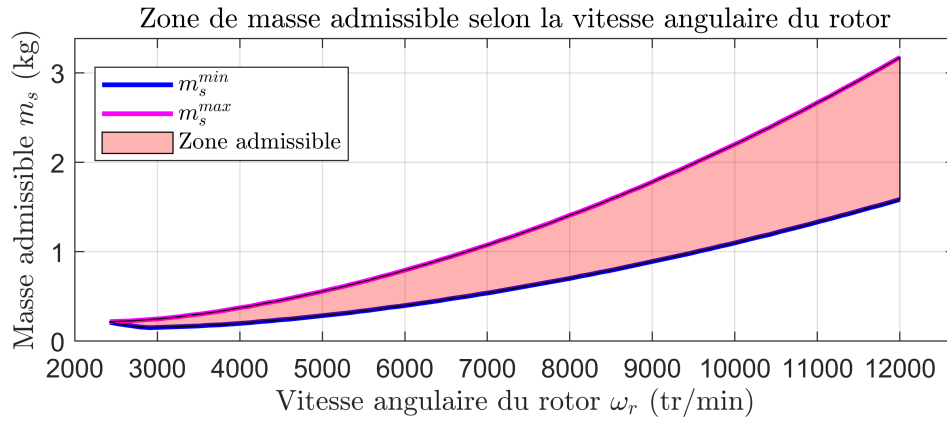


FIGURE 9

4.2 Développement des calculs :

4.2.1 Plage du balourd :

On peut calculer la plage des balourds allant de 0.1% à 0.001% du produit de la masse du rotor avec son rayon en utilisant :

$$U_{\min} = m_r \cdot R_r \cdot 0.001\%$$

$$U_{\max} = m_r \cdot R_r \cdot 0.1\%$$

$$\Rightarrow U = [U_{\min}, U_{\max}]$$

4.2.2 Masse du système rotor-support :

$$m_{RS} = m_r + 2 \cdot m_s$$

4.2.3 Moment inertie système rotor-support :

$$J_{RS,y} = J_{r,y} + m_s (l_{s1}^2 + l_{s2}^2)$$

4.2.4 Équation du mouvement :

Lagrangien :

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2}m_r\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{r,y}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_s(\dot{x} - L_{s1}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_s(\dot{x} + L_{s2}\dot{\theta})^2$$

$$V = k_{lx}(x - L_{s1}\theta)^2 + k_{lx}(x + L_{s2}\theta)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L = & \frac{1}{2}m_r\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{r,y}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_s(\dot{x} - L_{s1}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_s(\dot{x} + L_{s2}\dot{\theta})^2 \\ & - k_{lx}(x - L_{s1}\theta)^2 - k_{lx}(x + L_{s2}\theta)^2 \end{aligned}$$

Équations de Lagrange

Pour chacune des coordonnées généralisées $q_i \in \{x, \theta\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad Q_x = F_b, Q_\theta = M_b.$$

Force du balourd :

$$F_b(t) = U \cdot w_r^2 \cos(\omega_r t), \quad (\text{La phase initiale est négligée})$$

$$= U \cdot (\omega_m / i_{mr})^2 \cos(\omega_m / i_{mr} \cdot t)$$

$$= U \cdot (\omega_{ms} (1 - e^{-t/\tau}) / i_{mr})^2 \cos(\omega_{ms} (1 - e^{-t/\tau}) / i_{mr} \cdot t), \quad (\text{Lors du démarrage})$$

Moment du balourd :

$$M_b(t) = F_b(t) \cdot (L_{s1} + 0.1L_r - L_a)$$

Dérivées cinétiques

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_r\dot{x} + m_s(\dot{x} + L_{s2}\dot{\theta}) + m_s(\dot{x} - L_{s1}\dot{\theta}) = (m_r + 2m_s)\dot{x} + m_s(L_{s2} - L_{s1})\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_{r,y}\dot{\theta} - L_{s1}m_s(\dot{x} - L_{s1}\dot{\theta}) + L_{s2}m_s(\dot{x} + L_{s2}\dot{\theta})$$

$$= (J_{r,y} + L_{s1}^2m_s + L_{s2}^2m_s)\dot{\theta} + m_s(L_{s2} - L_{s1})\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_r + 2m_s)\ddot{x} + m_s(L_{s2} - L_{s1})\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (J_{r,y} + L_{s1}^2m_s + L_{s2}^2m_s)\ddot{\theta} + m_s(L_{s2} - L_{s1})\ddot{x}.$$

Dérivées potentielles

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2k_{lx}(x - L_{s1}\theta) - 2k_{lx}(x + L_{s2}\theta) = -2k_{lx}(2x + (L_{s2} - L_{s1})\theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -2k_{lx}(-L_{s1}(x - L_{s1}\theta) + L_{s2}(x + L_{s2}\theta)) \\ &= -2k_{lx}((L_{s2} - L_{s1})x + (L_{s1}^2 + L_{s2}^2)\theta) \end{aligned}$$

Équations du mouvement (forme scalaire)

$$\begin{cases} (m_r + 2m_s)\ddot{x} + m_s(L_{s2} - L_{s1})\ddot{\theta} + 2k_{lx}(2x + (L_{s2} - L_{s1})\theta) = F_b \\ m_s(L_{s2} - L_{s1})\ddot{x} + (J_{r,y} + m_sL_{s1}^2 + m_sL_{s2}^2)\ddot{\theta} + 2k_{lx}((L_{s2} - L_{s1})x + (L_{s1}^2 + L_{s2}^2)\theta) = M_b \end{cases}$$

Forme matricielle compacte

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_r + 2m_s & m_s(L_{s2} - L_{s1}) \\ m_s(L_{s2} - L_{s1}) & J_{r,y} + m_sL_{s1}^2 + m_sL_{s2}^2 \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}}_{[K]} + 2k_{lx} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & L_{s2} - L_{s1} \\ L_{s2} - L_{s1} & L_{s1}^2 + L_{s2}^2 \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}}_{[K]} = \begin{bmatrix} F_b \\ M_b \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$k_{xx} = 4k_{lx}, \quad k_{\theta\theta} = 2k_{lx}(L_{s1}^2 + L_{s2}^2)$$

4.2.5 Analyse fréquentielle :

On résout le problème aux valeurs propres généralisé :

$$[K]\phi = \omega^2[M]\phi$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_r + 2m_s & m_s(L_{s2} - L_{s1}) \\ m_s(L_{s2} - L_{s1}) & J_{r,y} + m_sL_{s1}^2 + m_sL_{s2}^2 \end{bmatrix} \phi = \omega^2 2k_{lx} \begin{bmatrix} 2 & L_{s2} - L_{s1} \\ L_{s2} - L_{s1} & L_{s1}^2 + L_{s2}^2 \end{bmatrix} \phi$$

Les deux pulsations propres dépendent de m_s , elles sont donc détaillées en section 4.2.7.

4.2.6 Analyse de l'accélération

On considère le système à deux degrés de liberté :

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t), \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} F_b(t) \\ M_b(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

Méthode des phaseurs complexes

Nous avons une excitation sinusoïdale du balourd $\mathbf{Q}(t)$:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} U\omega^2 \cos(\omega t) \\ U\omega^2 \cos(\omega t)(L_{s1} + 0.1L_r - L_a) \end{bmatrix} = \Re \left\{ \tilde{\mathbf{Q}} e^{i\omega t} \right\}$$

$$\text{avec} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} U\omega^2 \\ U\omega^2(L_{s1} + 0.1L_r - L_a) \end{bmatrix}$$

On cherche une solution particulière de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \Re \left\{ \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ A_\theta e^{i\varphi_\theta} \end{bmatrix}$$

D'où la dérivée seconde :

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \Re \left\{ -\omega^2 \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} = -\omega^2 \Re \left\{ \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} = -\omega^2 \mathbf{x}(t)$$

Substitution dans l'équation différentielle

En injectant les expressions complexes dans l'équation, nous arrivons à :

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)$$

Nous obtenons donc :

$$M \Re \left\{ -\omega^2 \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} + K \Re \left\{ \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} = \Re \left\{ \tilde{\mathbf{Q}} e^{i\omega t} \right\}$$

Par linéarité de $\Re\{\cdot\}$, nous pouvons factoriser :

$$\begin{aligned} (K - \omega^2 M) \Re \left\{ \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} &= \Re \left\{ \tilde{\mathbf{Q}} e^{i\omega t} \right\} \\ \implies \Re \left\{ \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} &= (K - \omega^2 M)^{-1} \Re \left\{ e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{Q}} \right\} \end{aligned}$$

Solution réelle

La solution physique réelle est donnée par la partie réelle du produit :

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \Re \left\{ \tilde{\mathbf{X}} e^{i\omega t} \right\} = (K - \omega^2 M)^{-1} \mathbf{Q}(t)}$$

La dérivée seconde s'obtient par multiplication par $-\omega^2$:

$$-\frac{1}{\omega^2} \Re \left\{ -\omega^2 e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{X}} \right\} = (K - \omega^2 M)^{-1} \Re \left\{ \mathbf{Q}(t) \right\}$$

Pour finalement arriver à :

$$\boxed{\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2 (K - \omega^2 M)^{-1} \mathbf{Q}(t)}$$

4.2.7 Détermination de m_s pour satisfaire les contraintes d'accélération et de surcriticité

L'objectif est de déterminer une valeur de m_s telle que deux conditions soient simultanément satisfaites :

- la fréquence de rotation imposée ω_r reste supérieure à la plus grande des pulsations propres du système (*régime surcritique*), tout en restant inférieure à $\omega_{max} = 12 \text{ kRPM}$.

- l'accélération maximale en x des deux supports reste dans la plage $[0.005; 1] \text{ m/s}^2$;
- la fréquence de l'accélération doit être inférieure à la fréquence de coupure $f_c = 200 \text{ Hz}$

1. Saturation de l'accéléromètre L'accélération mesurée doit en tout temps rester dans la plage de données mesurables $[0.005; 1] \text{ m/s}^2$.

2. Fréquence de coupure de l'accéléromètre Selon les indications, la fréquence de coupure des accéléromètres est de 200 Hz . Nous devons donc nous assurer que la fréquence d'oscillation de l'accélération des supports, $f_{a_{s1}}(t)$, $f_{a_{s2}}(t)$ est $\leq 200 \text{ Hz}$. Cela implique que ω_r sera plus petit ou égal à $12\,000 \text{ RPM}$.

3. Condition de surcriticité La condition pour que le régime soit surcritique, avec une marge de sécurité est :

$$\omega_r > \sqrt{2} \cdot \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_r^2 > 2 \cdot \omega_2^2$$

Ainsi, on ajuste m_s de sorte que la plus grande valeur propre ω_2^2 du système soit inférieure à $\omega_r^2/2$.

4. Synthèse des trois contraintes On déduit que m_s doit satisfaire simultanément :

$\left\{ \begin{array}{ll} a_{s1,min} \geq 0.005 & \& a_{s2,min} \geq 0.005 \quad \forall t > 0, \text{ pour } U = U_{min} \end{array} \right.$	(saturation minimum)
$\left\{ \begin{array}{ll} a_{s1,max} \leq 1 & \& a_{s2,max} \leq 1 \quad \forall t > 0, \text{ pour } U = U_{max} \end{array} \right.$	(saturation maximum)
$12\text{kRPM} \geq \omega_r > \sqrt{2} \cdot \omega_2(m_s)$	(surcriticité)

Nous générons un vecteur de vitesses de rotation ω à l'aide d'un `linspace` allant de 0 à 12 000 rad/s par pas de 100 rad/s. En parallèle, nous construisons un `linspace` de 1 000 valeurs de masses m_s des supports.

Pour chaque valeur de ω , nous identifions les valeurs minimale et maximale de m_s qui satisfont simultanément les trois conditions citées plus haut, donc de saturation minimum et maximum, ainsi que de surcriticité.

Cela nous permet, pour chaque vitesse de rotation donnée, de déterminer un intervalle de masse admissible $[m_{s,min}(\omega), m_{s,max}(\omega)]$ garantissant le bon fonctionnement des accéléromètres.

5. Résultats de la simulation : Nous trouvons une masse m_s qui nous permet d'opérer au steady-state la machine dans un range de $\omega_r = [8500, 12000]$ RPM. (cf. Figure 9)

$$m_s = 1.5836 \text{ kg}$$

$$a_{s1,max}(t) \leq 0.9999 \text{ m s}^{-2}, \forall t \in [0, 100] \text{ s}$$

$$a_{s2,max}(t) \leq 0.9999 \text{ m s}^{-2}, \forall t \in [0, 100] \text{ s}$$

$$a_{s1,min}(t) \geq 0.01 \text{ m s}^{-2}, \forall t \in [0, 100] \text{ s}$$

$$a_{s2,min}(t) \geq 0.01 \text{ m s}^{-2}, \forall t \in [0, 100] \text{ s}$$

$$\omega_1 = 66.4501 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 66.6630 \text{ rad/s} < w_r/\sqrt{2} = 888.57 \text{ rad/s}$$