Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 6
по дисциплине "Вычислительные алгоритмы"

Тема Построение и программная реализация алгоритмовчисленного дифференцирования.

Студент Мицевич М. Д.

Группа ИУ7-41Б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель Градов В.М.

Москва — 2021 г.

1. Цель работы

Получение навыков построения алгоритмавычисления производных от сеточных функций
.

2. Исходные данные

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность, представленная этой таблицей, может быть описана формулой

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$$

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571					
2	0.889					
3	1.091					
4	1.231					
5	1.333					
6	1.412					

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы (1)-(4) таблицы:
1 - одностороння разностная производная,
2 -центральнаяразностная производная,
3-2-я формула Рунге с использованием односторонней производной,
4 -введены выравнивающие переменные.
В столбец 5 занестивторую разностную производную.

3. Код программы

Листинг main.py:

```
def right(y, h, i):
    return (y[i + 1] - y[i]) / h if i < len(y) - 1 else ""

def center(y, h, i):
    return (y[i + 1] - y[i - 1]) / (2 * h) if i > 0 and i < len(y) - 1 else ""

def double_diff(y, h, i):
    return (y[i + 1] - 2 * y[i] + y[i - 1]) / (h * h) if i > 0 and i  <len(y) -
        1 else ""

def right_double(y, h, i):
    return (y[i + 2] - y[i]) / h if i < len(y) - 2 else ""

def runge(y, h, i): # p == 1; m == 2
    if i >= len(y) - 2:
        return ""

    f2h = right_double(y, h, i)
    fh = right(y, h, i)

    return 2 * fh - f2h

def align_vars(y, x, i): #eta = 1 / y eps = 1 / x
```

```
    if i >= len(y) - 1:
        return ""

    eta_eps_dif = (1 / y[i + 1] - 1 / y[i]) / (1 / x[i + 1] - 1 / x[i])
    return eta_eps_dif * y[i] * y[i] / (x[i] * x[i])



def main():
    x = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
    y = [0.571, 0.889, 1.091, 1.231, 1.333, 1.412]

    print("|  x  |   y   |    1    |    2    |    3    |    4    |    5    |")

    for i in range(len(x)):
        res_1 = right(y, 1, i)
        res_2 = center(y, 1, i)
        res_3 = runge(y, 1, i)
        res_4 = align_vars(y, x, i)
        res_5 = double_diff(y, 1, i)
        print(f"| {x[i]:3} | {y[i]:5} | {res_1:7.3} | {res_2:7.3} | {res_3:7.3} 
            | {res_4:7.3} | {res_5:7.3} |")

if __name__ == "__main__":
    main()
```

4. Результаты

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571	0.318		0.116	0.408	
2	0.889	0.202	0.26	0.062	0.247	-0.116
3	1.091	0.14	0.171	0.038	0.165	-0.062
4	1.231	0.102	0.121	0.023	0.118	-0.038
5	1.333	0.079	0.0905		0.0895	-0.023
6	1.412					

Рис. 1. Таблица результатов

4.1. Правая разностная производная

Формула:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$$

Точность: первый порядок точности относительно шага h

4.2. Центральная разностная производная

Формула:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$$

Точность: второй порядок точности относительно шага h

4.3. 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной

Формула:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

Точность: точность формулы Рунге повышается за счет расчет на 2 сетках с отличающимися шагами. Точность формулы - p+1. В программе я использовал формулу Рунге для правой разностной производной, поэтому m = 2 - удвоенный шаг, p = 1.

4.4. Введение выравнивающих переменных

Требуется подобрать такие $\eta(y)$ и $\xi(x)$, чтобы функция $\eta(\xi)$ была линейной. Исходя из заданной формы фунцкии в условии задачи, зададим $\eta(y) = \frac{1}{y}$ и $\xi(x) = \frac{1}{x}$, тогда $\eta(\xi) = \frac{a_1}{a_0}\xi + \frac{a_0}{a_2}$, что и требовалось.

Тогда для возврата к исходным переменным используется формула:

$$y'_x = y'_\eta \eta'_\xi \xi'_x = \frac{\eta'_\xi \xi'_x}{\eta'_y}$$

Воспользуемся формулой правой разностной производной и получим:

$$y'_n = \frac{\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n}}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \frac{y_n^2}{x_n^2}$$

Точность: Формула абсолютно точная

4.5. Вторая разностная производная

Формула:

$$y''_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

Точность: второй порядок точности относительно шага h

5. Контрольные вопросы

5.1. Получить формулу порядка точности (h^2) для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

Запишем ряды Тейлора в точках n-1 и n-2:

$$y_{n-1} = y_n + \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + ... \tag{1}$$

$$y_{n-2} = y_n + \frac{2h}{1!}y'_n + \frac{(2h)^2}{2!}y''_n + ... \tag{2}$$

Вычтем из 4 первых второе:

$$4y_{n-1} - y_{n-2} = 3y_n + 2hy'_n + O(h^2)$$

Отсюда:

$$y'_n = \frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3y_n}{2h} + O(h^2)$$

5.2. Получить формулу порядка точности $O(h2)$ для второйразностной производной y_0'' в крайнем левом узле x_0.

Запишем ряды Тейлора в точках 1 и 2:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0'''... \tag{3}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!}y_0' + \frac{(2h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!}y_0'''... \tag{4}$$

Вычтем из 8 третьих четвертое:

$$8y_1 - y_2 = 7y_0 + 6hy_0' + 2h^2y_0'' + O(h^2)$$

Отсюда:

$$y_0'' = \frac{8y_1 - y_2 - 7y_0 - 6h\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}}{2h^2} + O(h^2)$$

5.3. Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения(9) из Лекции №7 для первой производной y_0' в левом крайнем узле

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(2h)}{2^1 - 1} + O(h^{1+1}) \\
\Phi(h) &= \frac{y_1 - y_0}{h} \\
\Phi(2h) &= \frac{y_2 - y_0}{2h} \\
y_0' &= \frac{4(y_1 - y_0) - (y_2 - y_0)}{2h} \\
y_0' &= \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h}
\end{aligned}$$

5.4. Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y_0' в крайнем левом узле x_0.

Поступим аналогично пункту 2. Выпишем ряды Тейлора в точках 1, 2, 3. (1, 2 см. в 5.2)

$$y_3 = y_0 + \frac{3h}{1!}y_0' + \frac{(3h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(3h)^3}{3!}y_0'''... \tag{5}$$

Вычтем из 18 (3) 9 (4) и прибавим 2(5):

$$18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = 11y_0 + 6hy_0' + O(h^3)$$

Отсюда,

$$y_0' = \frac{8y_1 - 9y_2 + 2y_3 - 11y_0}{6h} + O(h^3)$$