Семинар № 1: Решение алгебраических уравнений
Цель: найти корни уравнения $f(x) = 0$ с точностью до ε

0. Считаем, что $f(x)$ - непрерывная функция.

1. Первым этапом нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ является их локализация. Надо найти такие интервалы, на которых корень существует и единственный, после чего применять для каждого интервала какой-то метод.

2. Допустим, мы знаем, что на интервале $[a, b]$ есть корень. Предположим, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (случай $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ рассматривается аналогично). Будем искать корень методом дихотомии:

Возьмём $c = (a + b)/2$

Если $|f(c)| < \varepsilon$, то будем считать, что c это корень, останавливаем поиск.

Если $f(c) > \varepsilon$, то заменим отрезок $[a, b]$ на $[a, c]$ и повторим процедуру.

Если $f(c) < -\varepsilon$, то заменим отрезок $[a, b]$ на $[c, b]$ и повторим процедуру.

3. Теперь предположим, что мы знаем, что есть корень на интервале $[a, +\infty)$. Хотим от бесконечного интервала перейти к конечному. Предположим, что $f(a) < 0$ (случай $f(a) > 0$ рассматривается аналогично). Зададим шаг Δ, на который мы будем сдвигаться вправо. Алгоритм поиска выглядит следующим образом:

Если $f(a + \Delta) > 0$, останавливаем поиск. Искомый отрезок $[a, a + \Delta]$.

Если $f(a + 2\Delta) > 0$, останавливаем поиск. Искомый отрезок $[a + \Delta, a + 2\Delta]$.

...

Если $f(a + k\Delta) > 0$, останавливаем поиск. Искомый отрезок $[a + (k - 1)\Delta, a + k\Delta]$

4. Если мы знаем, что на интервале $(-\infty, a]$ существует корень уравнения, то от бесконечного инвервала к конечному мы переходим аналогично пункту 3.

Решение квадратного уравнения. $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Находим $D = b^2 - 4ac$.
2. Если $D < 0$, то не существует вещественных корней.
3. Если $D = 0$, то корень один: $x = -b/(2a)$.
4. Если $D > 0$, то два корня: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Если коэффициент при x кратен двум, т.е. $f(x) = ax^2 + 2bx + c$, то можем немного переписать пункты:

1. Находим $\hat{D} = D/4 = b^2 - ac$.
2. Если $\hat{D} < 0$, то не существует вещественных корней.
3. Если $\hat{D} = 0$, то корень один: $x = -b/a$.
4. Если $\hat{D} > 0$, то два корня: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\hat{D}}}{a}$

Решение кубического уравнения. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Смотрим производную $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Находим дискриминант D.

1. Если $D \leq 0$, то $f(x)$ строго монотонно возрастает и имеет только один корень.
   а) Если $|f(0)| < \varepsilon$, то $x = 0$ – корень.
   б) Если $f(0) < -\varepsilon$, то корень находится на интервале $[0, +\infty)$.

в) Если $f(0) > \varepsilon$, то корень находится на интервале $(-\infty, 0]$.

2. Пусть $D > 0$. Находим α, β – нули производной. Причём $\alpha < \beta$.

а) Если $f(\alpha) > \varepsilon$, $f(\beta) > \varepsilon$, то $f(x)$ имеет один корень на интервале $(-\infty, \alpha)$.

б) Если $f(\alpha) < -\varepsilon$, $f(\beta) < -\varepsilon$, то $f(x)$ имеет один корень на интервале $(\beta, +\infty)$.

в) Если $f(\alpha) > \varepsilon$, $|f(\beta)| < \varepsilon$, то $f(x)$ имеет два корня: первый это β (кратности 2), а второй находится на интервале $(-\infty, \alpha)$.

г) Если $|f(\alpha)| < \varepsilon$, $f(\beta) < -\varepsilon$, то $f(x)$ имеет два корня: первый это α (кратности 2), а второй находится на интервале $(\beta, +\infty)$.

д) Если $f(\alpha) > \varepsilon$, $f(\beta) < -\varepsilon$, то $f(x)$ имеет три корня: первый на интервале $(-\infty, \alpha)$, второй – (α, β), третий – $(\beta, +\infty)$.

е) Случай $|f(\alpha)| < \varepsilon$, $|f(\beta)| < \varepsilon$ особый. Будем в программе выдавать, что корень тут один и он равен $(\alpha + \beta)/2$.

Как должна выглядеть программа

На вход подаётся: ε, Δ, a, b, c.

На выходе: корни кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, условие остановки $|f(x_*)|$ для каждого корня.