

– Übungsblatt 9 –
Folgen - Stetigkeit - Grenzwerte

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen (wenn diese Grenzwerte existieren!):

$$(1) a_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} ; \quad (2) a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} ; \quad (3) a_n = n - 5 - \frac{n^3}{n^2+5}$$
$$(4) a_n = \cos n\pi ; \quad (5) a_n = \cos n(n+1)\pi$$

Aufgabe 2

Wir definieren die Folge $a_{n+1} = \frac{n^2 a_n^2 + c}{n+1}$ für $c \in \mathbb{R}$ und $a_0 = 0$.

1. Bestimmen Sie die Werte der ersten Terme der Folge für $c = -2$ und stellen Sie eine Vermutung über eine mögliche explizite (oder geschlossene) Form der Folge für $c = -2$ (zumindest für $n \geq 2$); beweisen Sie diese Vermutung durch Induktion.
2. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge für $c = -2$ und bestimmen Sie den Grenzwert.
3. Zeigen Sie durch Induktion, dass für $c = 1$ gilt:

$$\forall n \geq 2 : a_n \geq 1 \text{ und } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die möglichen Grenzwerte folgender Funktionen existieren und bestimmen Sie diese ggf.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right) \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\tan x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 4

Besprechen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen in ihrem Definitionsbereich:

$$1. f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$$
$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 & x > -1 \\ x+2 & x \leq -1 \end{cases}$$
$$3. f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$$

Untersuchen Sie den Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

und bestimmen Sie, ob sie evt. stetig fortsetzbar ist.