

## Processi Deboli e Mixing dei Quark

MASSIMILIANO GALLI

*Dipartimento di Fisica Università di Bologna, Via Irnerio 46 - 40126 Bologna, Italy*

**Summary.** — Uno degli aspetti caratteristici dell'interazione debole è il cosiddetto *quark mixing*: questa teoria giustifica i risultati sperimentali postulando che i quark che compaiono nei processi deboli non siano gli autostati di *flavour* che caratterizzano l'interazione forte, ma una loro combinazione lineare.

Questo lavoro è diviso in tre parti: nella prima (1), dopo una breve introduzione (1'1 e 1'2), si ripercorrono i principali modelli teorici ideati per l'interazione debole (1'3, 1'4, 1'5 e 1'6), indispensabili per i calcoli sviluppati nelle parti successive; nella seconda (2) si analizzano le evidenze sperimentali che richiesero un'estensione della teoria (2'1 e 2'2) e si espone l'idea di Nicola Cabibbo di implementare un angolo di *mixing* (2'3); nell'ultima (3) si descrive invece come la teoria del *mixing*, opportunamente estesa anche alle correnti neutre (3'1 e 3'3), portò alla predizione dei quark *charm* (3'2), *bottom* e *top* (3'4), con la definitiva condensazione della teoria nella matrice CKM.

### 1. – Introduzione: modelli teorici per l'interazione debole

1'1. *Caratteristiche generali dell'interazione debole.* – L'interazione debole presenta una serie di proprietà che la rendono peculiare rispetto alle altre interazioni fondamentali:

- è l'unica interazione capace di cambiare il *flavour* dei quark;
- non conserva alcune quantità che sono invece conservate nelle altre interazioni, quali ad esempio parità, coniugazione di carica e stranezza;
- è la sola interazione che coinvolge i neutrini;
- è responsabile del decadimento beta dei nuclei.

Essa presenta inoltre dei bosoni mediatori ( $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ ) molto massivi [1]:

$$(1) \quad M_W = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV}/c^2, \quad M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}/c^2$$

i quali fanno sì che l'interazione debole abbia un cortissimo raggio d'azione. I bosoni  $W^+$  e  $W^-$  sono responsabili dell'interazione debole a corrente carica (CC) mentre  $Z^0$

dell'interazione debole a corrente neutra (NC). I vertici dell'interazione debole sono rappresentati in Fig. 1.

La comprensione della struttura dell'interazione debole si è sviluppata ed evoluta nel corso di vari anni, complicata dalle numerose violazioni di leggi di conservazione che la caratterizzano. Il punto di partenza fu quello di interpretare in un modello fenomenologico il decadimento beta.

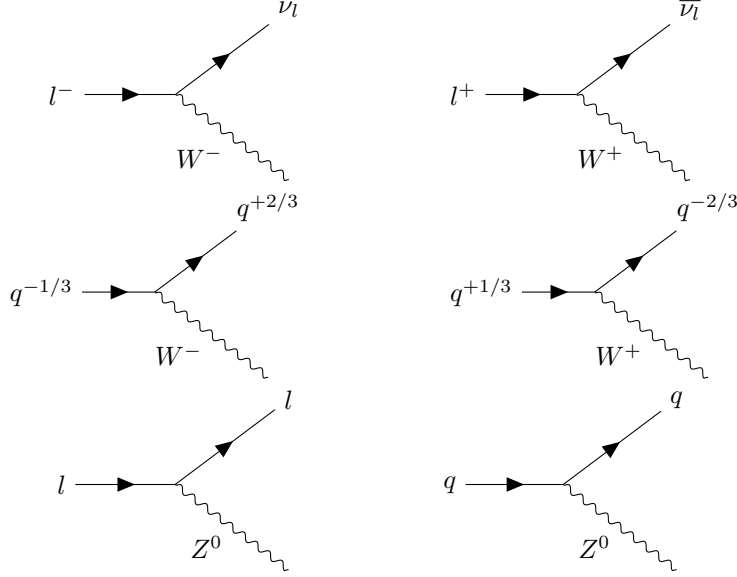


Figura 1. – Vertici dell'interazione debole. Le lettere  $l$  e  $q$  rappresentano rispettivamente leptoni e quark. Nei processi in cui compare una  $Z^0$  non c'è differenza di carica tra le altre due particelle che costituiscono il vertice; al contrario, si può vedere che c'è variazione di carica quando compaiono  $W^+$  e  $W^-$ .

**1'2. Regola d'oro di Fermi.** – In questa parte si introduce un'importante nozione alla quale si farà riferimento in seguito.

Attraverso la teoria perturbativa è possibile ricavare la probabilità di transizione da uno stato iniziale  $i$  ad uno stato finale  $f$ :

$$(2) \quad \Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \frac{dN}{dE_f}$$

dove  $dN/dE_f$  è la densità degli stati per unità di intervallo di energia (spazio delle fasi), mentre  $\mathcal{M}$  è l'elemento di matrice per la probabilità di transizione e si calcola valutando i diagrammi di Feynman più rilevanti e applicando le regole opportune. Nel caso in cui il processo descritto sia il decadimento di una particella, la grandezza (2) coincide con il tasso di decadimento. Il fattore spazio delle fasi contiene solo informazioni di natura cinematica; dipende da masse, energie e momenti dei partecipanti e riflette il fatto che un dato processo è tanto più probabile che avvenga quanto più "margine di manovra" possiede nello stato finale. La (2) è anche detta regola d'oro di Fermi.

Si può inoltre dimostrare [2] che per processi di decadimento è possibile scrivere la vita

media della particella  $\tau$  come:

$$(3) \quad \tau = \frac{1}{\Gamma}$$

dove  $\Gamma$  corrisponde in realtà alla sommatoria su tutti gli  $n$  modi di decadimento della particella:

$$(4) \quad \Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i$$

**1'3. Teoria di Fermi del decadimento  $\beta$ .** – Il decadimento beta è la forma più comune di processo debole osservato nella materia ordinaria, ed ha costituito per molto tempo l'unico banco di prova utilizzabile per confrontare teoria ed esperimenti. Le transizioni beta che coinvolgono i nucleoni sono essenzialmente tre:

$$(5a) \quad n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$$

$$(5b) \quad p \rightarrow ne^+ \nu_e$$

$$(5c) \quad e^- p \rightarrow n \nu_e$$

che, in termini di transizioni nucleari, possono risciversi:

$$(6a) \quad (A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) e^- \bar{\nu}_e$$

$$(6b) \quad (A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) e^+ \nu_e$$

$$(6c) \quad e^- (A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) \nu_e$$

Il primo processo, detto decadimento beta negativo, determina l'instabilità del neutrone mentre il secondo è detto decadimento beta positivo e non avviene in maniera spontanea perché energeticamente proibito; il terzo consiste nella cattura di un elettrone atomico da parte del nucleo.

Il primo modello che abbia descritto con successo diverse caratteristiche del decadimento beta fu sviluppato da Fermi nel 1934. Questa teoria è considerata il prototipo dell'interazione debole: è puntiforme (in quanto coinvolge l'interazione di quattro fermioni in un punto) e presenta una costante di accoppiamento  $G_F$ , detta costante di Fermi. La forza della teoria di Fermi sta nel fatto che la costante  $G_F$  è universale, valida cioè per tutti i decadimenti di questo tipo. Un possibile vertice d'interazione postulato dalla teoria di Fermi è mostrato in Fig. 2.

Prendendo come esempio il decadimento del neutrone, l'hamiltoniana predetta dalla

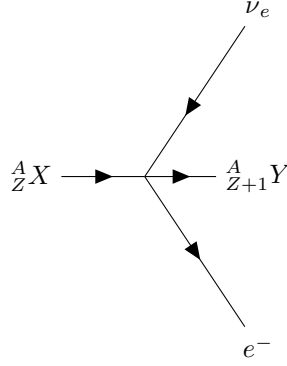


Figura 2. – Vertice a quattro fermioni della teoria di Fermi raffigurante un decadimento di tipo beta negativo.

teoria di Fermi si può scrivere nella seguente maniera:

$$(7) \quad H_F = H_n^0 + H_p^0 + H_e^0 + H_\nu^0 + \underbrace{\sum_i C_i \int d^3x \left( \bar{\psi}_p \hat{O}_i \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \hat{O}_i \psi_\nu \right)}_{\text{interazione}}$$

dove  $\psi_p$ ,  $\psi_n$ ,  $\psi_e$  e  $\psi_\nu$  sono le funzioni d'onda spinoriali delle quattro particelle, tali da soddisfare l'equazione di Dirac (Appendice A), mentre i termini tra parentesi tonde sono quadrivettori densità di corrente che si possono scrivere in maniera generale nella seguente forma:

$$(8) \quad J^\mu = \bar{\psi} \hat{O}_i \psi$$

Le quantità  $\hat{O}_i$  sono operatori appropriati che caratterizzano il tipo di interazione, combinazione lineare delle matrici di Dirac  $\gamma^\mu$ . Le (8) sono forme bilineari che si trasformano sotto trasformazioni di Lorentz in modo analogo ad una quantità scalare (S), pseudo-scalare (P), vettoriale (V), assiale (A) e tensoriale (T); a seconda dell'operatore scelto, l'indice in  $\hat{O}_i$  può assumere i valori  $i = S, P, V, T, A$ . Le possibili correnti sono riportate in Tab I. Fermi, che sviluppò la teoria in analogia a quella elettromagnetica, ipotizzò inizialmente che queste quantità fossero solo vettoriali, ma alcune osservazioni sperimentali degli anni successivi mostrarono che non era così.

	Corrente	Numero di Componenti
Scalare	$\bar{\psi}\psi$	1
Vettore	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	4
Tensor	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6
Vettore assiale	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	4
Pseudo-scalare	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	1

TABELLA I. – *Forme bilineari.*

**1'4. Teoria  $V-A$  delle interazioni deboli.** – La teoria  $V - A$  dell'interazione debole venne sviluppata a partire dal 1957 da Feynman e Gell-Mann come estensione della teoria di Fermi: ciò che rese necessario un aggiornamento della teoria fu la scoperta, avvenuta alcuni anni prima, della violazione della parità da parte dell'interazione debole. Così come la teoria di Fermi, essa si basa sui seguenti fatti:

- per particelle con spin  $1/2$ , le funzioni d'onda appropriate sono spinori a quattro componenti che soddisfano l'equazione di Dirac;
- l'ampiezza del processo è proporzionale al quadri-vettore densità di corrente.

Come si può intuire dal nome, la teoria  $V - A$  asserisce che le correnti che compaiono nelle interazioni deboli sono combinazioni di soli termini vettoriali e assiali. Questa scelta è dovuta ai seguenti motivi:

- correnti vettoriali e assiali, prese singolarmente, conservano la parità, mentre una loro combinazione la viola;
- l'integrazione nella teoria di fenomeni osservati sperimentalmente, quali l'elicità di neutrini ed elettroni, consente di escludere quantità scalari, pseudo-scalari e tensoriali.

Si approfondiscono nel seguito i fatti appena citati.

**1'4.1. Violazione della parità da parte di corrente  $V - A$ .** Tenendo presente che l'elemento di matrice per l'interazione debole si può scrivere in generale nella seguente maniera:

$$(9) \quad \mathcal{M} \propto \eta_{\mu\nu} J^\mu J^\nu$$

e ricordando (Appendice A) che gli spinori  $\psi$  e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  si trasformano sotto l'operazione di parità come

$$(10) \quad \psi \xrightarrow{P} \gamma^0 \psi \quad , \quad \bar{\psi} \xrightarrow{P} (\gamma^0 \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = \bar{\psi} \gamma^0$$

è possibile dimostrare che correnti puramente vettoriali o assiali conservano la parità, mentre una loro combinazione la viola.

*Corrente vettoriale.* La corrente vettoriale  $V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  si trasforma sotto parità come:

$$(11) \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \xrightarrow{P} (\bar{\psi} \gamma^0) \gamma^\mu (\gamma^0 \psi)$$

Per le coordinate tempo e spazio si ha separatamente:

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^0 \psi &\xrightarrow{P} (\bar{\psi} \gamma^0) \gamma^0 (\gamma^0 \psi) = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\ \bar{\psi} \gamma^k \psi &\xrightarrow{P} (\bar{\psi} \gamma^0) \gamma^k (\gamma^0 \psi) = -\bar{\psi} \gamma^k \psi \end{aligned}$$

con  $k = 1, 2, 3$ , dalle quali si vede che le componenti spaziali cambiano segno mentre quella temporale no. L'elemento di matrice (9) si trasforma quindi sotto parità come:

$$(13) \quad \mathcal{M} \propto V_1^0 V_2^0 - \vec{V}_1 \vec{V}_2 \xrightarrow{P} V_1^0 V_2^0 - (-\vec{V}_1) (-\vec{V}_2) = V_1^0 V_2^0 - \vec{V}_1 \vec{V}_2$$

conservando la parità.

*Corrente assiale.* La corrente assiale  $A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$  si trasforma sotto parità come:

$$(14) \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \xrightarrow{P} (\bar{\psi}\gamma^0) \gamma^\mu\gamma^5 (\gamma^0\psi)$$

Per le coordinate tempo e spazio si ha separatamente:

$$(15) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi &\xrightarrow{P} (\bar{\psi}\gamma^0) \gamma^0\gamma^5 (\gamma^0\psi) = -\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi \\ \bar{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi &\xrightarrow{P} (\bar{\psi}\gamma^0) \gamma^k\gamma^5 (\gamma^0\psi) = \bar{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi \end{aligned}$$

con  $k = 1, 2, 3$ , dalle quali si vede che la componente temporale cambia segno mentre quelle spaziali no. L'elemento di matrice (9) si trasforma quindi sotto parità come:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathcal{M} &= A_1^0 A_2^0 - \vec{A}_1 \vec{A}_2 \\ \xrightarrow{P} \mathcal{M} &= (-A_1^0) (-A_2^0) - \vec{A}_1 \vec{A}_2 = A_1^0 A_2^0 - \vec{A}_1 \vec{A}_2 \end{aligned}$$

conservando anche in questo caso la parità.

*Corrente vettoriale - assiale.* L'elemento di matrice di una teoria  $V - A$  è:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathcal{M} &\propto \eta_{\mu\nu} (V_1^\mu - A_1^\mu) (V_2^\mu - A_2^\mu) \\ &= (V_1^0 - A_1^0) (V_2^0 - A_2^0) - (\vec{V}_1 - \vec{A}_1) (\vec{V}_2 - \vec{A}_2) \end{aligned}$$

che sotto parità si trasforma come:

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathcal{M} &= (V_1^0 - A_1^0) (V_2^0 - A_2^0) - (\vec{V}_1 - \vec{A}_1) (\vec{V}_2 - \vec{A}_2) \\ \xrightarrow{P} \mathcal{M} &= (V_1^0 + A_1^0) (V_2^0 + A_2^0) - (-\vec{V}_1 - \vec{A}_1) (-\vec{V}_2 - \vec{A}_2) \\ &= (V_1^0 + A_1^0) (V_2^0 + A_2^0) - (\vec{V}_1 + \vec{A}_1) (\vec{V}_2 + \vec{A}_2) \end{aligned}$$

**1'4.2. Esclusione di S, T, P.** Si vuole ora mostrare come l'inclusione di osservazioni sperimentali quali le elicità dei leptoni porti ad escludere l'utilizzo di quantità scalari, tensoriali e pseudoscalari. Si utilizza come esempio una corrente che trasforma elettrone in neutrino, come quella che compare nel decadimento  $\beta$  del neutrone:

$$(19) \quad \bar{\psi}_e \hat{O}_i \psi_\nu$$

Facendo riferimento ai risultati esposti in Appendice A si ha:

$$(20) \quad \bar{\psi}_e \hat{O}_i \psi_\nu \rightarrow \overline{(\hat{P}_L \psi_e)} \hat{O}_i (\hat{P}_L \psi_\nu)$$

Dato che  $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$  e  $\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$ , si trova:

$$\begin{aligned}
 \overline{(\hat{P}_L\psi)} &= (\hat{P}_L\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \hat{P}_L^\dagger \gamma^0 \\
 (21) \qquad &= \psi^\dagger \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^0 \\
 &= \psi^\dagger \gamma^0 \frac{1+\gamma^5}{2} = \bar{\psi} \hat{P}_R
 \end{aligned}$$

La forma modificata della corrente sarà dunque:

$$(22) \qquad \bar{\psi}_e \hat{O}'_i \psi_\nu$$

con

$$(23) \qquad \hat{O}'_i = \hat{P}_R \hat{O}_i \hat{P}_L$$

Calcolando  $\hat{O}'_i$  per i cinque operatori di Tab. I si trova:

$$(24a) \qquad \hat{P}_R 1 \hat{P}_L = 0$$

$$(24b) \qquad \hat{P}_R \gamma^\mu \hat{P}_L = \gamma^\mu (\hat{P}_L)^2 = \gamma^\mu \hat{P}_L$$

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_R \sigma^{\mu\nu} \hat{P}_L &= \frac{i}{2} \hat{P}_R (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \hat{P}_L \\
 (24c) \qquad &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \hat{P}_L \hat{P}_R \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{P}_L \hat{P}_R \gamma^\mu) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_R \gamma^\mu \gamma^5 \hat{P}_L &= \gamma^\mu \hat{P}_L \gamma^5 \hat{P}_L = -\gamma^\mu (\hat{P}_L)^2 \\
 (24d) \qquad &= -\gamma^\mu \hat{P}_L
 \end{aligned}$$

$$(24e) \qquad \hat{P}_R \gamma^5 \hat{P}_L = -\hat{P}_R \hat{P}_L = 0$$

con l'evidente risultato che solo quantità vettoriali e assiali sono rilevanti nella descrizione dell'interazione debole. Proseguendo i calcoli per (24b) e (24d) si vede che esse forniscono lo stesso risultato a meno di un segno:

$$(25a) \qquad \gamma^\mu \hat{P}_L = \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

$$(25b) \qquad -\gamma^\mu \hat{P}_L = -\frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

Trascurando il fattore  $1/2$  si può quindi scrivere l'operatore  $V - A$  come:

$$(26) \quad \hat{O}'_i = \gamma^\mu (1 - \gamma^5) = \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5$$

**1'5. Tipi di transizione nel decadimento  $\beta$  e forma della corrente adronica.** – L'operatore (26) introdotto precedentemente, è in realtà in certi casi un'approssimazione; la sua forma più generale è infatti:

$$(27) \quad (1 - \gamma^5) \rightarrow (c_V - c_A \gamma^5)$$

dove  $c_V$  e  $c_A$  sono costanti introdotte per tenere in considerazione l'effetto che l'attività interna degli adroni può avere sulla conservazione delle correnti vettoriale e assiale. Esse vanno determinate sperimentalmente: mentre nel caso di una corrente leptonica si ha  $c_V = -c_A = 1$  ed entrambe le componenti si conservano, per le correnti in cui sono coinvolti adroni la situazione richiede uno studio più approfondito. Per il decadimento beta, in particolare, i contributi vettoriale e assiale sono dati da tipi diversi di transizione.

*Transizioni di Fermi e Gamow-Teller.* Dato che nel decadimento beta nucleare si hanno neutrone e protone che si muovono non relativisticamente è facile convincersi (si veda [6]) che in questo limite le quantità introdotte in Tab. I si comportano nella seguente maniera:

$$(28) \quad S, V \rightarrow u_A^p \dagger u_A^n \quad , \quad T, A \rightarrow u_A^p \dagger \sigma^{\mu\nu} u_A^n \quad , \quad P \rightarrow 0$$

dove  $u_A^p$  e  $u_A^n$  sono gli spinori a due componenti che dominano in limite non-relativistico. I casi rilevanti prendono il nome di transizioni di Fermi:

$$(29) \quad S, V \rightarrow u_A^p \dagger u_A^n$$

e di Gamow-Teller:

$$(30) \quad T, A \rightarrow u_A^p \dagger \sigma^{\mu\nu} u_A^n$$

La differenza principale tra le due sta nella variazione di momento angolare totale tra nucleo iniziale e nucleo finale. Tale variazione è connessa con lo spin dei due leptoni  $e^-$ ,  $\bar{\nu}_e$  (oppure  $e^+$ ,  $\nu_e$ ): entrambi hanno spin  $1/2$ , quindi la variazione dello spin nucleare può essere nulla (spin di neutrino ed elettrone antiparalleli), oppure  $\pm 1$  (spin paralleli). Assumendo che l'elettrone e il neutrino siano emessi in uno stato di momento angolare  $l = 0$ , la variazione dello spin del nucleo è pari alla somma degli spin dei due leptoni. Per l'orientazione degli spin di elettrone e neutrino si ha quindi che nelle transizioni di Fermi ( $0 \rightarrow 0$ ) gli spin sono antiparalleli (stato di singoletto), mentre in quelle di Gamow-Teller ( $0 \rightarrow 1$ ) gli spin sono paralleli (stato di tripletto); esiste inoltre il caso delle transizioni cosiddette miste, in cui si ha  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  e gli spin possono essere antiparalleli (lo spin del nucleo non cambia) o paralleli (lo spin del nucleo cambia direzione).

Si tiene conto di quanto sopra esposto nella costruzione delle correnti e, conseguentemente, nel calcolo di  $|\mathcal{M}|^2$ : come si vede in (29) e (30), le transizioni di Fermi sono di tipo vettoriale, mentre quelle di Gamow-Teller sono di tipo assiale; per le prime si scrive  $|\mathcal{M}|^2 \equiv |\mathcal{M}_F|^2 \propto c_V^2$  mentre per le altre si ha  $|\mathcal{M}|^2 \equiv |\mathcal{M}_{GT}|^2 \propto c_A^2$ . Analizzando



decadimento	transizione $J^P$	$G_F^2  \mathcal{M} ^2 \text{ (MeV}^2 \text{fm}^6 \text{)}$
$^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^* + e^+ + \nu_e$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$1.52 \times 10^{-8}$
$^6\text{He} \rightarrow ^6\text{Li} + e^- + \bar{\nu}$	$0^+ \rightarrow 1^+$	$7.45 \times 10^{-8}$
$n \rightarrow pe^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	$4.25 \times 10^{-8}$

TABELLA II. – *Decadimenti  $\beta$  suddivisi nelle diverse transizioni.*

Tab. II si può vedere la dipendenza del prodotto  $G_F^2 |\mathcal{M}|^2$  dalla variazione dello spin nella transizione del nucleo. Sfruttando i primi due processi riportati in Tab. II è possibile stimare [5] il rapporto tra le costanti  $c_V$  e  $c_A$ :

$$(31) \quad \lambda = c_A/c_V = -1.2695 \pm 0.0029$$

**1'6. Divergenze nelle interazioni deboli e unitarietà.** – La teoria dell'interazione debole descritta finora funziona bene a basse energie e al prim'ordine, ma agli ordini successivi presenta divergenze che possono essere cancellate solo introducendo un numero indefinitamente grande di costanti arbitrarie. Si dice quindi che la teoria  $V - A$  è divergente. Si consideri come esempio il processo  $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$ . L'elemento di matrice per la sola interazione debole, considerata come puntiforme, si scrive:

$$(32) \quad \mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_\nu \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_e] [\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu]$$

Una raffigurazione è riportata a sinistra in Fig. 3. La sezione d'urto per questa reazione è data da:

$$(33) \quad \sigma(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) \simeq \frac{4G_F^2 p^{*2}}{\pi}$$

dove  $p^*$  è la quantità di moto del neutrino o dell'elettrone nel centro di massa. Dal formalismo delle onde parziali si ottiene tuttavia un limite superiore per le sezioni d'urto di scattering elastico, oltre il quale la teoria viola la conservazione della probabilità. Per particelle con spin semintero, il limite è:

$$(34) \quad \sigma_{\ell=0} = \frac{\pi \lambda^2}{2} = \frac{\pi}{2p^{*2}}$$

Si vede quindi che la (33) supera la (34) se si verifica:

$$(35) \quad p^* > \left( \frac{\pi^2}{8G_F^2} \right)^{1/4} = \left( \frac{\pi}{\sqrt{8}G_F} \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi}{\sqrt{8} \cdot 1.17 \cdot 10^{-5}} \right)^{1/2} \simeq 300 \text{ GeV/c}$$

Questo problema si può curare introducendo i bosoni mediatori massivi, che portano alla presenza di un propagatore del tipo  $\frac{1}{q^2 + M_W^2}$ . Con l'introduzione del propagatore, l'elemento di matrice si scrive:

$$(36) \quad \mathcal{M} = \left[ \frac{g_w}{\sqrt{2}} \left( \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \psi_e \right) \right] \frac{1}{q^2 + M_W^2} \left[ \frac{g_w}{\sqrt{2}} \left( \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \psi_\nu \right) \right]$$

e la (33) diventa:

$$(37) \quad \sigma(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) = \frac{4G_F^2 M_W^4 p^{*2}}{\pi(q^2 + M_W^2)^2}$$

con il diagramma di Feynman rappresentato a destra in Fig. 3. Nel limite di bassi  $q^2$  l'interazione con scambio di un bosone si può identificare con l'interazione locale di Fermi. Paragonando gli elementi di matrice (32) e (36) si trova:

$$(38) \quad \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{g_w^2}{8} \frac{1}{(q^2 + M_W^2)} \simeq \frac{g_w^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

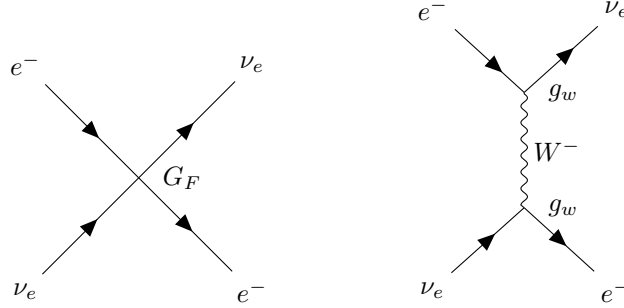


Figura 3. – Diagrammi di Feynman per la reazione  $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$  rispettivamente senza (a sinistra) e con (a destra) scambio di bosone mediatore.

## 2. – Verso l'universalità dell'interazione debole: la necessità del *mixing* e l'intuizione di Cabibbo

**2.1. Esempi di decadimento: muone, neutrone e pione.** – Si applica ora la teoria presentata nella parte precedente a tre importanti esempi di decadimento: muone, neutrone e pione carico.

*Decadimento del muone.* Il muone decade secondo:

$$(39) \quad \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

Il diagramma di Feynman del processo è mostrato in Fig. 4. Per l'interazione debole, le regole di Feynman (Appendice B) prevedono il fattore V-A

$$(40) \quad \mathcal{K}^\mu \rightarrow -\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

dove  $g_w$  è la costante di accoppiamento debole, ad entrambi i vertici. A causa della grande massa del bosone  $W^-$ , il propagatore può essere approssimato da

$$(41) \quad \mathcal{D}_{\mu\nu} \rightarrow i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}$$

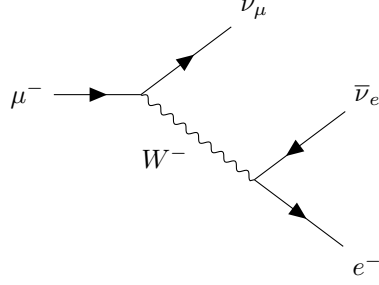


Figura 4. – Diagramma di Feynman per il decadimento del muone.

Proseguendo nell'applicazione delle regole di Feynman si ottiene l'uguaglianza:

$$(42) \quad -i\mathcal{M} = [\bar{u}(\nu_\mu) \mathcal{K}^\mu u(\mu)] \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu} \cdot [\bar{u}(e^-) \mathcal{K}^\nu v(\nu_e)]$$

dove  $u$  e  $v$  sono spinori di Dirac nello spazio dei momenti con  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$  e  $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$ . Inserendo la forma esplicita di fattori di vertice e propagatore si ha:

$$(43) \quad \mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8M_W^2} [\bar{u}(\nu_\mu) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(\mu^-)] \cdot [\bar{u}(e^-) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(\nu_e)]$$

Il calcolo di  $|\mathcal{M}|^2$  è illustrato dettagliatamente in [4]. Qui si riporta il risultato finale:

$$(44) \quad |\mathcal{M}|^2 = 2 \left[ \frac{g_w}{M_W} \right]^4 (p_\mu \cdot p_{\nu_\mu}) (p_{\nu_e} \cdot p_e)$$

Sostituendo questo valore nella regola d'oro di Fermi (2) si trova:

$$(45) \quad \Gamma = \frac{m_\mu^5 c^4}{192\pi^3 \hbar^7} G_F^2$$

dove la costante di Fermi  $G_F$  è definita, similmente a quanto fatto in (38), da:

$$(46) \quad G_F \equiv \frac{\sqrt{2}}{8} \left[ \frac{g_w}{M_W} \right]^2 \cdot (\hbar c)^3$$

Ridefinendo poi

$$(47) \quad G_F \leftrightarrow \frac{G_F}{\hbar^3 c^3}$$

e sostituendo i valori sperimentali per la vita media del muone si ottiene:

$$(48) \quad G_F^\mu = 1.16637 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$$

Questo valore è lo stesso riportato in [1].

*Decadimento del neutrone.* Il decadimento beta del neutrone è riportato in Eq. (5a) mentre il diagramma di Feynman, realizzato considerando protone e neutrone in termini di quark costituenti, è rappresentato in Fig. 5. Il fattore al vertice quark-quark si può

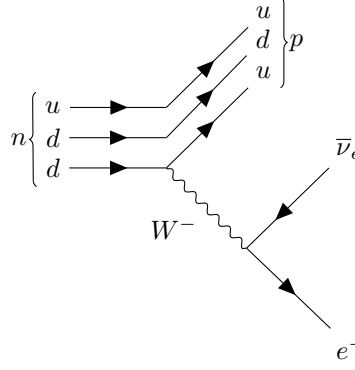


Figura 5. – Diagramma di Feynman per il decadimento del neutrone, assumendo protone e neutrone costituiti da quark.

scrivere:

$$(49) \quad \mathcal{K}^\mu \rightarrow -\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5)$$

dove le costanti  $c_V$  e  $c_A$  sono le stesse introdotte in 1.5. Se la parte vettoriale è conservata, allora  $c_V = 1$ ; altrimenti il rapporto tra le due costanti assume il valore (31). Si può quindi scrivere:

$$(50) \quad \mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8M_W^2} \cdot [\bar{u}(p) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) u(n)] \cdot [\bar{u}(e^-) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(\nu_e)]$$

Si noti che in questa espressione si possono chiaramente distinguere la corrente leptonica

$$(51) \quad \bar{u}(e) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(\nu_e)$$

e quella barionica

$$(52) \quad \bar{u}(p) \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) u(n)$$

Questo risultato è perfettamente in linea col fatto che l'elemento di matrice è proporzionale ad un prodotto di correnti, come riportato in Eq. (9). Il calcolo di (50), i cui dettagli sono riportati in [4], consente di ottenere un tasso di decadimento pari a:

$$(53) \quad \Gamma = \frac{\rho_f m_e^5 c^4}{64\pi^3 \hbar} \left[ \frac{g_w}{M_W} \right]^4 c_V^2 (1 + 3\lambda^2)$$

che mostra come l'effetto dell'aggiunta dei fattori  $c_V$  e  $c_A$  sia quello di introdurre un fattore

$$(54) \quad \frac{1}{4} c_V^2 (1 + 3\lambda^2)$$

nel valore del tasso di decadimento. Di nuovo, è possibile riscrivere questo valore in termini di  $G_F$ :

$$(55) \quad \Gamma = \frac{\rho_f m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} G_F^2 c_V^2 (1 + 3\lambda^2)$$

Calcolando il valore dello spazio delle fasi  $\rho_f$  e sostituendo a  $\Gamma$  l'inverso della vita media del neutrone  $\tau_n = 885.7$  s, si trova un valore di  $G_F$  pari a:

$$(56) \quad G_F^n = 1.140 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$$

Questo valore discorda da quello ottenuto in Eq. (48) da un decadimento che coinvolge solo leptoni (in particolare, è leggermente più piccolo). Sembrò quindi inizialmente che interazioni coinvolgenti leptoni e quark fossero diverse, facendo così cadere l'ipotesi di universalità dell'interazione debole.

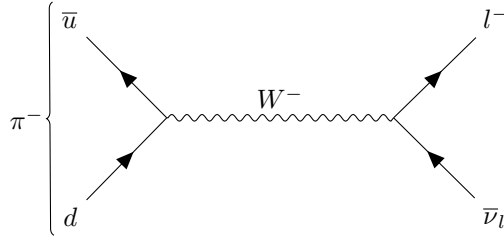


Figura 6. – Diagramma di Feynman per il decadimento del pione negativo, costituito dai quark  $\bar{u}$  e  $d$ .

*Decadimento del pione carico.* Un altro decadimento cruciale per provare la bontà della teoria è quello del pione carico, il cui confronto con le osservazioni sperimentali costituisce una conferma della teoria  $V - A$ . In Fig. 6 è riportato il decadimento del mesone  $\pi^-$ , dove i leptoni indicati con  $l$  possono essere  $\mu^-$  o  $e^-$ , e  $\bar{\nu}_l$  i rispettivi antineutrini. Le possibilità saranno dunque:

$$(57a) \quad \pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$$

$$(57b) \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$$

L'elemento di matrice si può scrivere in maniera generale come:

$$(58) \quad \mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8(M_W c)^2} [\bar{u}(\nu_l) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(l)] F^\mu$$

dove  $F^\mu$  è dato da una una quantità scalare che moltiplica il momento del pione  $p^\mu$ :

$$(59) \quad F^\mu = f_\pi p^\mu$$

Il calcolo di  $|\mathcal{M}|^2$ , per il quale si rimanda a [2], porta:

$$(60) \quad |\mathcal{M}|^2 = \left( \frac{g_w}{2M_W} \right)^4 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$$

che, sostituito in (2), fa sì che il tasso di decadimento sia:

$$(61) \quad \Gamma = \frac{f_\pi^2}{\pi \hbar m_\pi^3} \left( \frac{g_w}{4M_w} \right)^4 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)^2$$

Calcolando questa grandezza per entrambi i leptoni, si ha il seguente *branching ratio*:

$$(62) \quad R = \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu}} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \simeq 1.27 \cdot 10^{-4}$$

in ottimo accordo con i dati sperimentali.

**2'2. Decadimenti deboli di particelle strane.** – Un altro fatto che richiese un ampliamento della teoria formulata da Fermi fu l'osservazione di anomalie nei decadimenti che coinvolgono particelle strane, in particolare nella differenza di comportamento tra processi con e senza variazione di stranezza ( $\Delta S = 1$  e  $\Delta S = 0$  rispettivamente). Si consideri il caso dei decadimenti riportati in Tab. III, i cui diagrammi di Feynman sono riportati rispettivamente in Fig. 6 e 7. Utilizzando la regola d'oro di Fermi e la costante  $G_F$  per il

Decadimento	$\Delta S$	$\tau$ (s)	$BR = \Gamma_i/\Gamma$
$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$	0	$2.6 \times 10^{-8}$	100%
$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$	1	$1.27 \times 10^{-8}$	63.5%

TABELLA III. – *Decadimenti leptonici di pione e kaone.*

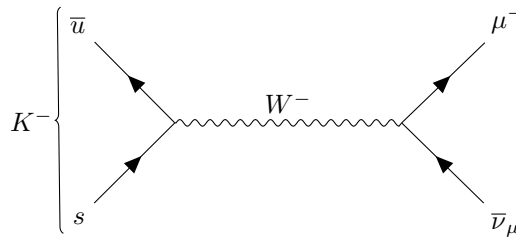


Figura 7. – Diagramma di Feynman per il decadimento del kaone negativo.

calcolo della vita media del kaone, si ottiene una vita media circa venti volte più piccola di quella misurata sperimentalmente. Per spiegare questa anomalia si può immaginare che, nel caso dei quark, la costante di accoppiamento dipenda dal sapore: nel caso del  $\pi$  il decadimento coinvolge il quark  $d$ , e si può immaginare di utilizzare una costante di accoppiamento  $G_d \simeq G_F$ , in quanto la vita media calcolata con  $G_F$  fornisce risultati

adeguati; nel caso del  $K$  il decadimento coinvolge il quark  $s$ , e si può immaginare di utilizzare una costante di accoppiamento  $G_s < G_d$  in maniera da ottenere il risultato della vita media corretto. Così facendo, si ottiene:

$$(63) \quad \frac{G_s^2}{G_d^2} \simeq 0.05$$

La stessa anomalia si può notare considerando i decadimenti in Tab. IV, i cui diagrammi di Feynman sono riportati in Fig. 8. Utilizzando la regola di Sargent

$$(64) \quad \frac{(\Gamma_i/\Gamma)}{\tau} \simeq G_F^2 E_0^5 \simeq G_F^2 \Delta m^5$$

per il calcolo della vita media, si può vedere come anche in questo caso i risultati numerici siano corretti per i decadimenti con  $\Delta S = 0$ , ed errati di un fattore  $\sim 20$  per i decadimenti con  $\Delta S = 1$ . Di nuovo, si può immaginare che nel caso di decadimenti senza variazione di stranezza intervenga la costante  $G_d$ , mentre in quelli con  $\Delta S = 1$  intervenga la costante  $G_s$ . Si può stimare il rapporto tra le due costanti usando i decadimenti della  $\Sigma^-$ :

$$(65) \quad \frac{G_s^2}{G_d^2} = \frac{\Gamma(\Sigma^- \rightarrow n e^- \bar{\nu}_e)/\Delta m_{\Delta S=1}^5}{\Gamma(\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 e^- \bar{\nu}_e)/\Delta m_{\Delta S=0}^5} = 0.057$$

Si conferma quindi che il rapporto tra  $G_s^2$  e  $G_d^2$  vale come indicato in (63), indipenden-

Decadimento	$\Delta m$ (MeV)	$\Delta S$	$\tau$ (s)	$BR = \Gamma_i/\Gamma$
$\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 e^- \bar{\nu}_e$	81.7	0	$1.48 \times 10^{-10}$	$0.57 \times 10^{-4}$
$\Sigma^- \rightarrow n e^- \bar{\nu}_e$	257.8	1	$1.48 \times 10^{-10}$	$1.02 \times 10^{-3}$

TABELLA IV. – Decadimenti semi-leptonici della  $\Sigma^-$ .

temente dal tipo di transizioni tra adroni: ciò deve quindi riflettere una proprietà dei quark costituenti.

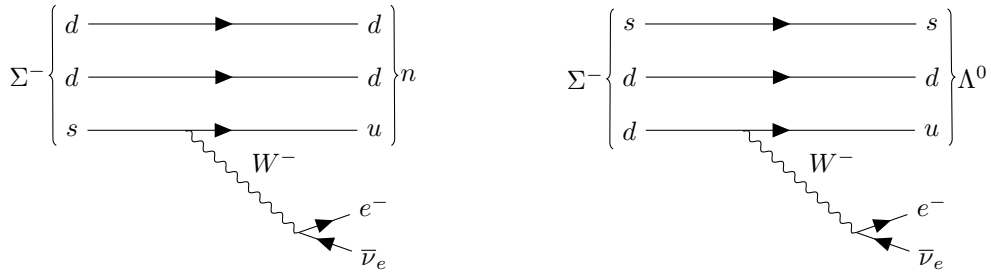


Figura 8. – Decadimenti di  $\Sigma^-$  con  $\Delta S = 1$  (sinistra) e  $\Delta S = 0$  (destra).

**2'3. L'angolo di Cabibbo.** – I fatti sperimentali sopracitati vennero interpretati da Nicola Cabibbo nel 1964. Egli mostrò che sia i leptoni che i quark sono autostati dell'interazione debole, con le seguenti assunzioni:

- l'accoppiamento dei leptoni al campo debole è proporzionale alla costante di accoppiamento debole  $g_w$ ;
- l'accoppiamento dei quark  $(u, d)$  genera le transizioni con  $\Delta S = 0$  ed è proporzionale a  $g_w \cos \theta_c$ ;
- l'accoppiamento dei quark  $(u, s)$  genera le transizioni con  $\Delta S = 1$  ed è proporzionale a  $g_w \sin \theta_c$ ;

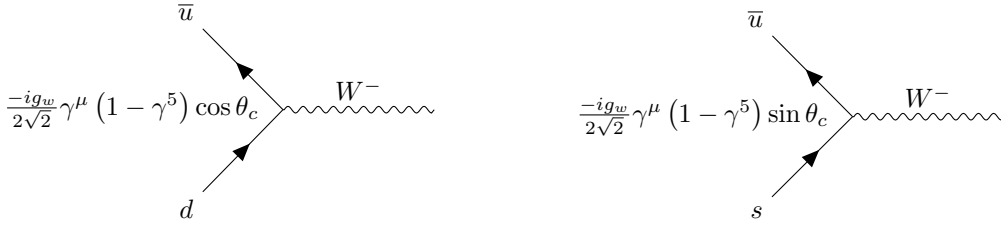


Figura 9. – Vertici deboli  $(u, d)$  e  $(u, s)$  e relative costanti di accoppiamento.

In ogni vertice di un diagramma di Feynman occorre inserire la costante corrispondente, come riportato in Fig. 9, con il calcolo degli elementi di matrice che viene di conseguenza:

- per i processi puramente leptonici si ha

$$(66) \quad \langle f | H_W | i \rangle \propto G_F^2$$

- per i processi semi-leptonici con  $\Delta S = 0$  si ha

$$(67) \quad \langle f | H_W | i \rangle_{\Delta S=0} \propto G_F^2 \cos^2 \theta_c$$

- per i processi semi-leptonici con  $\Delta S = 1$  si ha

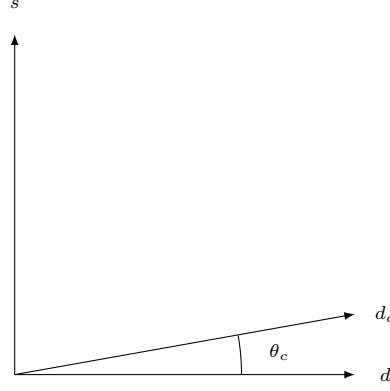
$$(68) \quad \langle f | H_W | i \rangle_{\Delta S=1} \propto G_s^2 \sin^2 \theta_c$$

In questo modello, quanto sopra esposto corrisponde al fatto che i quark che partecipano all'interazione debole non sono gli autostati di sapore che caratterizzano l'interazione forte, ma una loro combinazione lineare, che può considerarsi ruotata di un angolo  $\theta_c$  rispetto ai quark ordinari. Detti i nuovi autostati dell'interazione debole  $(u_c, d_c, s_c)$  si hanno così i seguenti doppietti deboli:

$$(69) \quad \begin{pmatrix} v_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}$$

dove  $\theta_c$  è l'angolo di Cabibbo e si trova sperimentalmente essere  $\theta_c = 0.235 \text{ rad}$ . La scelta di  $u$  come autostato non mescolato è semplicemente una convenzione. Per ogni doppietto



Figura 10. – Autostato dell'interazione debole  $d_c$ .

di leptoni l'accoppiamento debole è specificato da  $G_F$ . L'apparente differenza tra i valori della costante di accoppiamento è dovuta al processo di miscelamento dei quark. Una rappresentazione grafica dell'autostato debole  $d_c$  che costituisce un doppietto con  $u$  è visibile in Fig. 10. Si possono in questo modo interpretare i fatti sperimentali esposti in precedenza: dato che  $\sin \theta_c = 0.235$  e  $\cos \theta_c = 0.972$ , transizioni con  $\Delta S = 0$  hanno una costante di accoppiamento effettiva maggiore di transizioni con  $\Delta S = 1$ . Si spiega inoltre perché  $G_F^n$  (Eq. (56)) è più piccola di  $G_F^\mu$  (Eq. (48)): in realtà, quello che si misura nel decadimento del neutrone è  $G_F \cos \theta_c$ .

Il valore dell'angolo di Cabibbo può essere ricavato confrontando decadimenti semi-leptonici analoghi con  $\Delta S = 1$  e  $\Delta S = 0$ . Utilizzando, ad esempio, i decadimenti visti in Tab. III si ottiene il seguente rapporto tra le frazioni di decadimento:

$$(70) \quad \frac{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \frac{m_K^2 [1 - (m_\mu^2/m_K^2)]^2}{m_\pi^2 [1 - (m_\mu^2/m_\pi^2)]^2} \tan^2 \theta_c$$

Inserendo il valore misurato delle masse delle particelle coinvolte si determina  $\theta_c = (0.235 \pm 0.006)$ .

### 3. – L'estensione della teoria: correnti neutre, meccanismo GIM e matrice CKM

**3.1. Interazione debole a corrente neutra.** – Come anticipato nell'introduzione, i processi deboli a corrente carica (CC) non sono gli unici esistenti. Ci sono infatti reazioni, come ad esempio

$$(71) \quad \begin{aligned} \nu_\mu e^- &\rightarrow \nu_\mu e^- \\ \bar{\nu}_\mu e^- &\rightarrow \bar{\nu}_\mu e^- \end{aligned}$$

che possono avvenire solo attraverso lo scambio di un bosone  $Z^0$ . Questi processi vengono chiamati interazioni deboli a corrente neutra (NC).

Come il fotone, anche lo  $Z^0$  può essere scambiato sia nel canale  $t$  che nel canale  $s$  (Fig. 11): nel primo caso si ha lo scambio del bosone tra un neutrino e un fermione, con questi due

che rimangono gli stessi durante tutto il processo, mentre nel secondo caso si ha un processo di annichilazione  $f\bar{f} \rightarrow Z^0$  seguito dalla creazione di una coppia  $f'f'$ .

L'interazione a corrente neutra fu scoperta nel 1977 utilizzando una camera a bolle a liquido pesante (Gargamelle, CERN) esposta ad un fascio di neutrini muonici ad alta energia; furono osservate le reazioni sugli elettroni atomici  $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$  e su nucleoni  $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu + \text{adroni}$ , in cui sono visibili nello stato finale le sole tracce delle particelle cariche. In entrambi i casi, visto che mancava la segnatura caratteristica della presenza di un muone, si concluse che le reazioni possono procedere solo via NC.

Storicamente, le NC sono state introdotte per rimuovere divergenze: nel caso, per esempio, della reazione  $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$ , il diagramma all'ordine più basso contiene lo scambio di un elettrone e dà luogo ad una divergenza, cancellata dal diagramma contenente lo scambio di una  $Z^0$ .

Si noti che le interazioni a corrente neutra non erano previste dalla teoria di Fermi e rappresentano uno dei motivi che ne richiesero l'estensione.

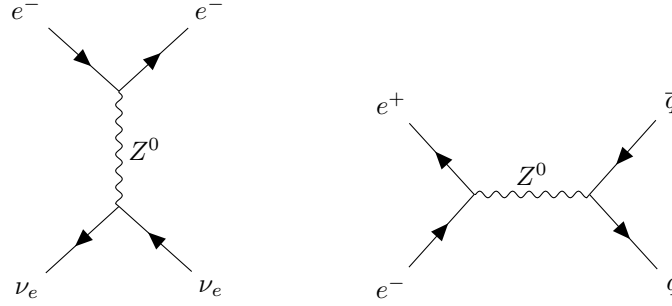


Figura 11. – Esempi di processi a corrente neutra (NC): a sinistra il bosone è scambiato nel canale  $t$ , mentre a destra nel canale  $s$ .

**3'2. Quark charm e meccanismo GIM.** – Nel 1955 Gell-Mann e Pais osservarono che è possibile formare due combinazioni lineari dei mesoni  $K$  neutri che sono autostati della simmetria  $CP$ , e quindi dell'interazione debole, e che questi corrispondono alle particelle che decadono nei due diversi stati di  $CP$ . Scegliendo le seguenti combinazioni lineari:

$$(72) \quad |K_1^0\rangle = 1/\sqrt{2}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad ; \quad |K_2^0\rangle = 1/\sqrt{2}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

si può vedere come questi siano due stati distinti, combinazioni degli autostati delle interazioni forti, che hanno masse diverse e decadono in modi diversi:

$$(73) \quad \begin{aligned} |K_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{s}\rangle + |s\bar{d}\rangle) & CP = +1 &\longrightarrow \pi\pi \\ |K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{s}\rangle - |s\bar{d}\rangle) & CP = -1 &\longrightarrow \pi\pi\pi \end{aligned}$$

Il valore della differenza di massa tra  $K_1^0$  e  $K_2^0$  si può calcolare nel modello a quark ed è in particolare proporzionale all'elemento di matrice che descrive la probabilità di transizione  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ , che ha  $\Delta S = 2$ . Il calcolo di questa quantità, considerando il contributo dei soli quark  $u, d, s$  fornisce tuttavia un valore molto più grande del risultato sperimentale. Per questo motivo si ipotizzò l'esistenza di qualche fenomeno che impedisce le transizioni

in cui cambia il sapore dei quark ma non la carica elettrica.

Questo fatto fu messo in luce nel 1970 da Glashow, Iliopoulos e Maiani, i quali proposero l'esistenza di un quarto quark (denominato  $c$ , *charm*) con le seguenti proprietà:

1. carica elettrica  $+2/3$ , isospin  $I = 0$ , stranezza  $S = 0$  e numero barionico  $B = 1/3$ ;
2. un nuovo numero quantico  $C$  che, analogamente alla stranezza, si conserva nell'interazione forte ma non in quella debole;
3. è autostato dell'interazione debole e forma un secondo doppietto di quark con il secondo stato ruotato della teoria di Cabibbo  $s_c = s \cos \theta_c - d \sin \theta_c$ .

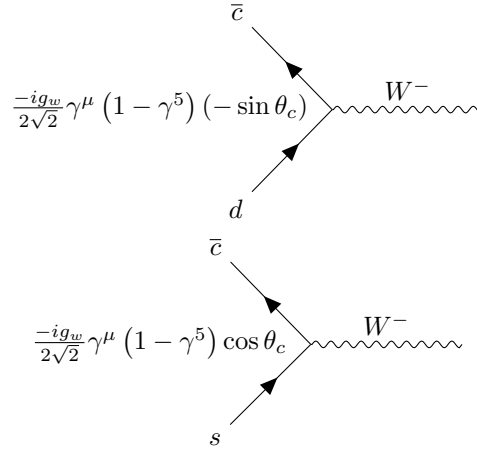


Figura 12. – Vertici deboli  $(c, d)$  e  $(c, s)$  e relative costanti di accoppiamento.

Con questa nuova ipotesi, si ha un nuovo doppietto per l'interazione debole:

$$(74) \quad \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \cos \theta_c - d \sin \theta_c \end{pmatrix}$$

Nei diagrammi di Feynman in cui compare il quark  $c$  risulta quindi necessario introdurre dei nuovi fattori al vertice, come indicato in Fig. 12. Utilizzando le stesse notazioni usate in (66), (67) e (68) è possibile descrivere i processi semi-leptonici in cui interviene il quark  $c$  usando l'ipotesi del meccanismo GIM:

$$(75) \quad \langle s | H_W | c \rangle \propto G_F^2 \cos^2 \theta_c$$

$$(76) \quad \langle d | H_W | c \rangle \propto G_F^2 \sin^2 \theta_c$$

da cui segue che nei decadimenti di mesoni charmati con  $\Delta C = 1$  in mesoni non charmati, le transizioni  $c \rightarrow s$  (che hanno accoppiamento  $\cos^2 \theta_c$ ) dominano sulle transizioni  $c \rightarrow d$  (accoppiamento  $\sin^2 \theta_c$ ).

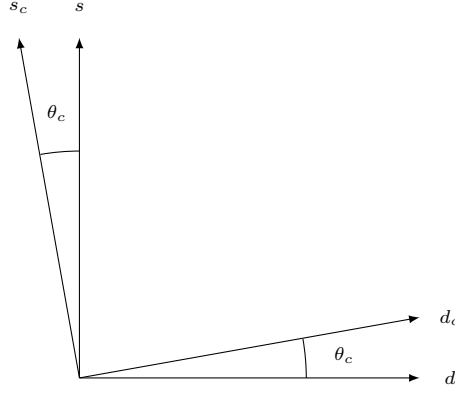


Figura 13. – Autostati dell'interazione debole  $d_c$  e  $s_c$ .

Riassumendo, gli autostati ruotati dell'interazione debole che compaiono nelle due famiglie di quark

$$(77) \quad \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}$$

si possono scrivere in forma matriciale

$$(78) \quad \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Una rappresentazione grafica dei due autostati dell'interazione debole  $d_c$  ed  $s_c$  è riportata in Fig. 13. Grazie a questa scrittura, il termine dell'hamiltoniana  $H_W$  che dipende dal tipo di quark coinvolto può essere formalmente scritto nel modo seguente (considerando come esempio transizioni da un quark iniziale  $d_c$  o  $s_c$  ad uno stato finale  $\bar{u}$  o  $\bar{c}$ ):

$$(79) \quad (\bar{u}, \bar{c}) \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = (\bar{u}, \bar{c}) \begin{pmatrix} \cos \theta_c \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = (\bar{u}, \bar{c}) V_c \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

**3.3. Indizi sul quarto quark dalle correnti neutre.** – Un quarto quark era necessario anche per spiegare alcune anomalie connesse con le correnti neutre: i processi a corrente neutra sperimentalmente osservati sono caratterizzati dalla regola di selezione  $\Delta S = 0$ , mentre quelli con  $\Delta S = 1$  non sono osservati. Più in generale, si dice che sono sfavorite le correnti neutre con violazione di *flavour* (FCNC). Tuttavia, il meccanismo che ruota lo stato dei quark ( $d, s$ ), postulando l'esistenza dei soli tre quark  $u, d, s$ , produce un termine con  $\Delta S = 1$  quando considera NC:

$$(80) \quad J_\mu \approx (\bar{u}, \bar{d}_c) \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} = (\bar{u}, \bar{d} \cos \theta_c + \bar{s} \sin \theta_c) \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{u\bar{u} + (d\bar{d} \cos^2 \theta_c + s\bar{s} \sin^2 \theta_c)}_{\Delta S=0} + \underbrace{(s\bar{d} + \bar{s}d) \sin \theta_c \cos \theta_c}_{\Delta S=1}$$

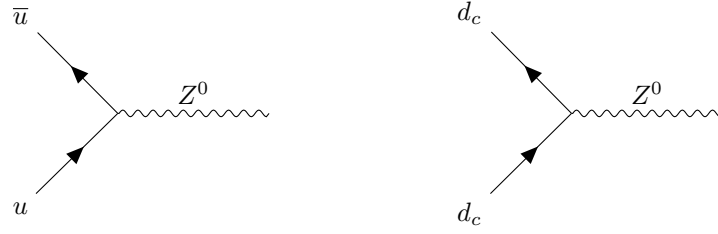


Figura 14. – Diagrammi di Feynman degli elementi che costituiscono la corrente calcolata in Eq. (80).

Ciascun termine  $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$  rappresenta la densità di probabilità per la transizione di uno stesso sapore di quark da uno stato iniziale a quello finale, con emissione di una  $Z^0$ . Sono inoltre previste le transizioni mai osservate  $s\bar{d}$  e  $d\bar{s}$ . I diagrammi di Feynman delle correnti che compaiono in (80) sono rappresentati in Fig. 14. Con il nuovo doppietto (74), la corrente neutra può risciversi nella forma:

(81)

$$J_\mu \approx (\bar{u}, \bar{d}_c) \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} + (\bar{c}, \bar{s}_c) \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{u\bar{u} + c\bar{c} + (d\bar{d} + s\bar{s}) \cos^2 \theta_c + (s\bar{s} + d\bar{d}) \sin^2 \theta_c}_{\Delta S=0} + \underbrace{(s\bar{d} + \bar{s}d - \bar{s}d - s\bar{d}) \sin \theta_c \cos \theta_c}_{\Delta S=1}$$

e i termini che prevedono transizioni con  $\Delta S = 1$  sono automaticamente cancellati. I diagrammi di Feynman delle correnti che compaiono in (81) sono rappresentati in Fig. 15.

Una conferma di quanto appena scritto si può trovare nel basso valore misurato per il

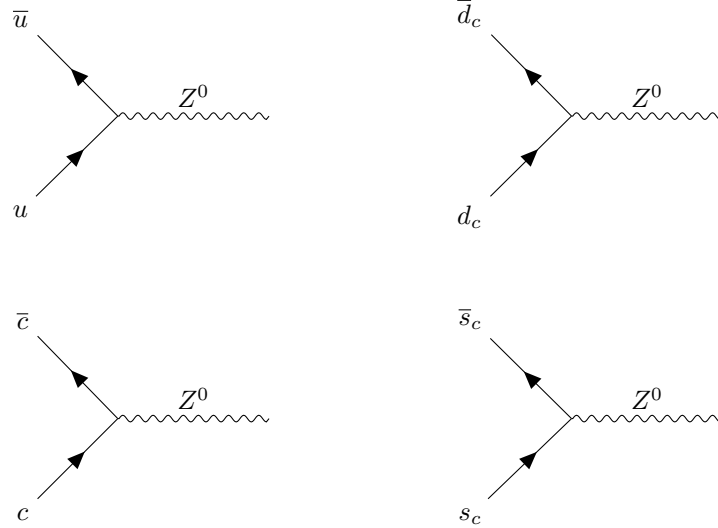


Figura 15. – Diagrammi di Feynman degli elementi che costituiscono la corrente calcolata in Eq. (81).

*branching ratio* del decadimento  $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ , che risulta essere [1]:

$$(82) \quad B_{\mu^+ \mu^-} = \Gamma(K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) / \Gamma(K^0 \rightarrow \text{all}) = (6.84 \pm 0.11) \times 10^{-9}$$

Il diagramma di Feynman del processo è visibile in Fig. 16. Il decadimento potrebbe

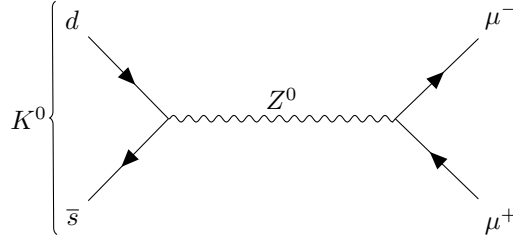


Figura 16. – Diagramma di Feynman per il decadimento del kaone neutro mediato da uno  $Z^0$ .

tuttavia procedere, al secondo ordine, anche secondo il diagramma mostrato a sinistra in Fig. 17, il quale porterebbe ad una stima di (82) molto maggiore del risultato osservato; adottando il meccanismo GIM si ha che anche il secondo diagramma di Fig. 17 contribuisce al calcolo, fornendo un contributo che si cancella quasi esattamente con l'altro e giustificando così il valore molto piccolo di (82).

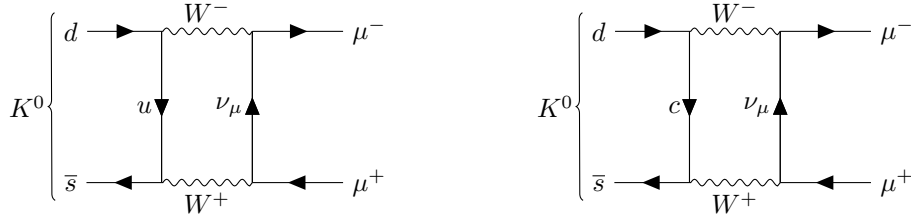


Figura 17. – Diagrammi di Feynman al secondo ordine del decadimento  $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ; i due contributi si annullano in maniera quasi esatta, essendo il primo proporzionale a  $\sin \theta_c \cos \theta_c$  e il secondo a  $-\sin \theta_c \cos \theta_c$ .

**3'4. I sei quark e la matrice CKM.** – Nel 1973 Kobayashi e Maskawa estesero l'idea di Cabibbo a tre generazioni di quark. Il motivo fu l'esigenza di spiegare la violazione di  $CP$  che emergeva dal meccanismo GIM. Per questo proposito era infatti necessario aggiungere un termine complesso alla matrice di rotazione, ma tale termine può sempre essere eliminato, attraverso un'adeguata trasformazione di fase, a meno che la matrice non sia  $3 \times 3$ ; da qui, l'esigenza di avere tre generazioni di quark. Così facendo, si hanno i seguenti autostati dell'interazione debole:

$$(83) \quad \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b_c \end{pmatrix}$$

dove quelli ruotati sono legati agli stati fisici dalla matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa:

$$(84) \quad \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \\ b_c \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

dove

$$(85) \quad V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud}V_{us}V_{ub} \\ V_{cd}V_{cs}V_{cb} \\ V_{td}V_{ts}V_{tb} \end{pmatrix}$$

$V_{CKM}$  è una matrice unitaria, tale cioè che  $V^\dagger V = 1 = VV^\dagger$ , in cui ogni elemento specifica l'accoppiamento tra i due quark scritti a pedice. La parametrizzazione proposta originariamente è la seguente ( $c_i = \cos \theta_i, s_i = \sin \theta_i$ ):

$$(86) \quad V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 s_1 & s_1 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + c_3 s_2 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 c_3 s_2 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

dove  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  sono tre angoli di mixing e  $\delta$  è un angolo di fase che, se diverso da zero, porta alla violazione di  $CP$  nell'interazione debole. Un'altra parametrizzazione molto usata si trova rinominando gli assi cartesiani con il nome dei quark *down-type*, come mostrato in Fig. 18, e compiendo una serie di rotazioni attorno ad essi. Operando delle rotazioni nel seguente ordine: la prima di un angolo  $\theta_{12}$  attorno all'asse  $b$ , la seconda di un angolo  $\theta_{13}$  attorno all'asse  $s$  e la terza di un angolo  $\theta_{23}$  attorno all'asse delle  $d$ , si ottiene:

$$(87) \quad V_{reale} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'attuale miglior stima del valore degli angoli è:

$$(88) \quad \theta_{12} = (13.04 \pm 0.08)^\circ \quad \theta_{23} = (2.38 \pm 0.06)^\circ \quad \theta_{13} = (0.201 \pm 0.011)^\circ$$

I valori degli angoli di rotazione sono molto piccoli, ma in Fig. 18 sono stati esagerati per renderli visibili. Ora risulta necessario introdurre la fase:

$$(89) \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & s_0 \\ -s_{13}e^{+i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{+i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

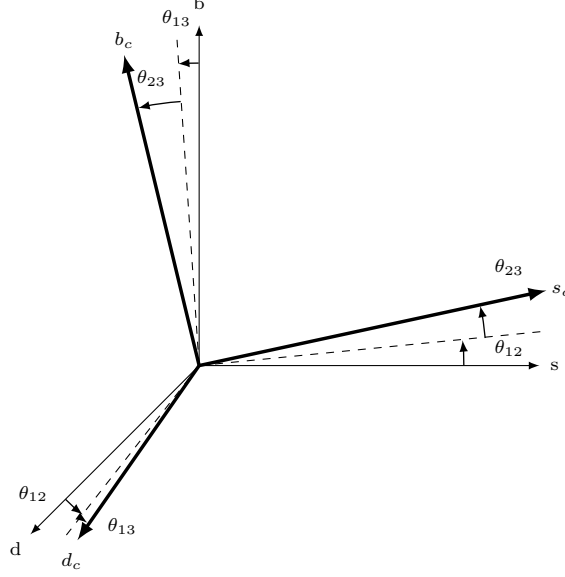


Figura 18. – Rotazione dei quark.

L'introduzione della fase in questo modo è possibile solamente se la matrice CKM è unitaria. Il suo valore è stimato essere

$$(90) \quad \delta_{13} = (1.20 \pm 0.08)^\circ$$

Un'altra utile parametrizzazione è quella di Wolfenstein. Partendo dalla (87) e procedendo con le seguenti sostituzioni:

$$(91) \quad s_{12} = \lambda \quad s_{23} = A\lambda^2 \quad s_{13}e^{-i\delta_{13}} = A\lambda^3(\rho - i\eta)$$

si ottiene, al terzo ordine di approssimazione:

$$(92) \quad V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4)$$

Essa risulta particolarmente comoda per costruire i triangoli di unitarietà. Gli elementi della matrice CKM, determinati sperimentalmente, sono i seguenti:

$$(93) \quad V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97428 \pm 0.00015 & 0.2253 \pm 0.0007 & 0.00347 \pm 0.00016 \\ 0.2252 \pm 0.0007 & 0.97333 \pm 0.00015 & 0.041 \pm 0.001 \\ 0.0086 \pm 0.0003 & 0.040 \pm 0.001 & 0.99915 \pm 0.00005 \end{pmatrix}$$



In base a questi, si evidenziano due fatti importanti: innanzitutto è verificata con buona precisione la condizione di unitarietà della matrice:

$$(94) \quad \sum_k |V_{ik}|^2 = \sum_i |V_{ik}|^2 = 1$$

la quale implica che la somma di tutti i possibili accoppiamenti dei quark *up-type* con tutti quelli *down-type* è la stessa per tutte le generazioni, costituendo un'ulteriore verifica dell'universalità debole. In secondo luogo, osservando i valori sulla diagonale si può vedere come i quark decadano principalmente nei componenti dei rispettivi doppietti; analizzando i termini non diagonali si vede invece quanto i quark di una generazione fanno mixing con un'altra: più specificamente, il mixing tra prima e seconda generazione è maggiore rispetto a quello tra seconda e terza, il quale a sua volta è maggiore rispetto a quello tra prima e terza.

## APPENDIX A.

### Equazione e formalismo di Dirac

A.1. *Equazione e matrici  $\gamma$ .* – L'equazione di Dirac (1928) descrive il comportamento quanto-meccanico e relativistico di particelle puntiformi massive con spin semintero:

$$(A.1) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

dove  $\psi$  è un vettore colonna a quattro componenti (spinore)

$$(A.2) \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

e  $\gamma^\mu = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$  è un set di quattro matrici  $4 \times 4$  che, seguendo la rappresentazione di Dirac, si scrivono:

$$(A.3) \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

con le  $\sigma_i$  matrici di Pauli:

$$(A.4) \quad \sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scritte per esteso, le matrici  $\gamma$  saranno:

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con

$$(A.6) \quad \begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= 1, & (\gamma^1)^2 &= (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 0, & \text{per } \mu \neq \nu \end{aligned}$$

Si evidenziano inoltre i seguenti fatti e proprietà:

- in molti casi è utile definire la matrice:

$$(A.7) \quad \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$(A.8) \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0$$

- definendo lo spinore aggiunto:

$$(A.9) \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^{T*} \gamma^0$$

è possibile costruire le grandezze relativisticamente invarianti elencate in Tab. I;

- esiste una funzione  $\psi'$  rappresentabile nella forma:

$$(A.10) \quad \psi' = S\psi \quad ; \quad \text{con } S^{-1}\gamma^\mu S = \sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

per la quale si ha Lorentz-invarianza dell'equazione di Dirac; questa funzione viene utilizzata per dimostrare [5] la Lorentz-invarianza delle grandezze elencate in Tab. I;

- $\gamma^0$  rappresenta l'operatore Parità, per il quale si ha:

$$(A.11) \quad \gamma^0 \psi(-\mathbf{r}, t) \equiv \psi(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \gamma^0 \psi(\mathbf{r}, t) \equiv \psi(-\mathbf{r}, t)$$

- dato  $\mathcal{K}$  operatore di coniugazione complessa, si ha che  $\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}$  rappresenta l'operatore di inversione temporale, per il quale si ha:

$$(A.12) \quad \gamma^1\gamma^3\mathcal{K}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, -t)$$

- $i\gamma^2\mathcal{K}$  rappresenta l'operatore di coniugazione di carica e parità CP, per il quale si ha:

$$(A.13) \quad (i\gamma^2\mathcal{K})\psi_+(\mathbf{p}) = \psi_-(-\mathbf{p})$$

A'2. *Proprietà delle soluzioni.* – L'equazione di Dirac è un insieme di quattro equazioni ognuna delle quali deve avere una soluzione. Tali soluzioni si scrivono nella seguente maniera (utilizzando le unità naturali):

$$(A.14) \quad \psi = ue^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} = ue^{-ip_\mu x^\mu}$$

dove  $u$  è uno spinore a quattro componenti che dipende dal momento. Sostituendo queste soluzioni nella A.1 si ottiene:

$$(A.15) \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$$

detta anche equazione di Dirac nello spazio dei momenti. Sviluppando i conti e utilizzando la rappresentazione

$$(A.16) \quad \psi = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$$

dove  $u_A$  e  $u_B$  sono spinori a due componenti, si ottiene:

$$(A.17) \quad u_A = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}u_B \quad u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A$$

Sostituendo la prima nella seconda (o viceversa), si può vedere come questo sia un sistema omogeneo che ammette soluzione solo se

$$(A.18) \quad E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

Scegliendo per  $u_A$  e  $u_B$  gli autostati dell'operatore  $\sigma_z$ ,  $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , si ottengono:

$$(A.19) \quad \begin{aligned} u^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/(E+m) \\ (p_x + ip_y)/(E+m) \end{pmatrix} & u^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (p_x - ip_y)/(E+m) \\ -p_z/(E+m) \end{pmatrix} \\ u^3 &= \begin{pmatrix} -p_z/(-E+m) \\ (-p_x - ip_y)/(-E+m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & u^4 &= \begin{pmatrix} (-p_x + ip_y)/(-E+m) \\ p_z/(-E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le soluzioni  $u^1$  e  $u^2$  descrivono particelle di energia (A.18) positiva e momento  $\mathbf{p}$ . Per le due rimanenti, che descrivono particelle ad energia negativa, si applica:

$$(A.20) \quad \begin{aligned} v^2(p^\mu) &\equiv u^3(-p^\mu) = \begin{pmatrix} p_z/(E+m) \\ (p_x + ip_y)/(E+m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^1(p^\mu) &\equiv u^4(-p^\mu) = \begin{pmatrix} (p_x - ip_y)/(E+m) \\ -p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

così da introdurre l'interpretazione di antiparticelle ad energia positiva. Utilizzando quanto appena riportato, le soluzioni della (A.1) si scrivono:

$$(A.21) \quad \begin{aligned} \psi &= u^1(p^\mu) e^{-ip_\mu x^\mu} & \psi &= u^2(p^\mu) e^{-ip_\mu x^\mu} \\ \psi &= v^1(p^\mu) e^{ip_\mu x^\mu} & \psi &= v^2(p^\mu) e^{ip_\mu x^\mu} \end{aligned}$$

A.3. *Elicità e chiralità.* – Ricordando che

$$(A.22) \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

si può facilmente verificare che  $u^1, u^2, v^1, v^2$  sono autostati di  $\hat{S}_z$  solo se il momento è lungo l'asse  $z$ .

In maniera più generale, è conveniente definire l'operatore elicità, che estrae la componente dello spin lungo la direzione del moto di una particella:

$$(A.23) \quad \hat{\Lambda} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Per fermioni di spin semintero, gli autovalori di  $\hat{\Lambda}$  possono essere  $\lambda = 1$  (particella destrorsa o ad elicità positiva) e  $\lambda = -1$  (particella sinistrorsa o ad elicità negativa). Per poter inserire nelle espressioni delle hamiltoniane funzioni d'onda che abbiano uno specifico stato di elicità, si introducono gli operatori di proiezione:

$$(A.24) \quad \hat{P}_+ = \frac{1 + \hat{\Lambda}}{2} \quad , \quad \hat{P}_- = \frac{1 - \hat{\Lambda}}{2}$$

che estraggono le componenti di elicità rispettivamente positiva e negativa da uno spinore arbitrario. Scrivendo:

$$(A.25) \quad 1 = \frac{1 - \hat{\Lambda}}{2} + \frac{1 + \hat{\Lambda}}{2} = \hat{P}_- + \hat{P}_+$$

si conclude infatti che uno stato qualsiasi  $u$  si può sempre scomporre:

$$(A.26) \quad 1u = (\hat{P}_+ + \hat{P}_-)u = u_+ + u_-$$

con

$$(A.27) \quad \hat{P}_+ u = u_+ \quad , \quad \hat{P}_- u = u_-$$

Se invece si considera lo spinore di un antifermione si avranno:

$$(A.28) \quad \hat{P}_+ v = v_- \quad , \quad \hat{P}_- v = v_+$$

Le componenti  $u_+$ ,  $u_-$ ,  $v_+$  e  $v_-$  sono dette a elicità definita. L'elicità non è tuttavia una quantità Lorentz-invariante: eseguendo una trasformazione di Lorentz, è possibile porsi in un sistema di riferimento in cui l'impulso della particella inverte la sua direzione, e quindi in cui l'elicità cambia segno. Di conseguenza, le componenti a elicità definita di un dato stato sono diverse in diversi riferimenti. Risulta quindi conveniente introdurre una quantità che sia Lorentz-invariante: la chiralità. Essa può essere definita attraverso i seguenti operatori di proiezione:

$$(A.29) \quad \hat{P}_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \quad , \quad \hat{P}_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5)$$

Anche in questo caso, uno stato si può scomporre in stati a chiralità definita:

$$(A.30) \quad 1u = (\hat{P}_R + \hat{P}_L) u = u_R + u_L$$

con

$$(A.31) \quad u_L = \hat{P}_L u \quad u_R = \hat{P}_R u$$

e, per gli antifermioni:

$$(A.32) \quad v_R = \hat{P}_L v \quad v_L = \hat{P}_R v$$

Si notino le seguenti importanti caratteristiche che dipendono dal fatto che una particella sia massiva o meno.

*Particelle massive.* In questo caso, uno stato a chiralità definita risulta essere composto da una sovrapposizione di stati di elicità positiva e negativa, con pesi diversi:

$$(A.33) \quad p_+ = |\langle u_+ | u \rangle|^2 \quad , \quad p_- = |\langle u_- | u \rangle|^2$$

grazie all'introduzione di questi pesi è possibile calcolare il valor medio dell'elicità per stati a chiralità definita, che risulta coincidere con la polarizzazione longitudinale:

$$(A.34) \quad \langle \hat{\Lambda} \rangle = \frac{p_+ - p_-}{p_+ + p_-}$$

Questo valore si può calcolare e risulta

$$(A.35) \quad \langle \hat{\Lambda} \rangle = -\frac{p}{|E|} = -\frac{v}{c} = -\beta$$

per stati chirali *left*, con segno opposto per stati chirali *right*. Quindi, dato un fermione massivo in uno stato chirale *left* o *right*, c'è in generale una probabilità non nulla di trovarlo con elicità opposta alla chiralità, probabilità che decresce all'aumentare della velocità.

*Particelle massless.* Nel caso di particelle con massa nulla, gli operatori di elicità e chiralità coincidono. Si ha infatti:

$$(A.36) \quad \hat{P}_{+,-} = \frac{1 \pm \hat{\Lambda}}{2} \rightarrow \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = \hat{P}_{R,L}$$

con l'uguaglianza che diventa esatta nel caso in cui la massa sia nulla. Si può quindi dire che particelle *massless* hanno sempre valore definito di elicità.

## APPENDIX B.

### Regole di Feynman

Le regole di Feynman consistono in un insieme di passaggi che consentono di ricavare l'ampiezza  $\mathcal{M}$  di un dato processo a partire dal diagramma di Feynman. La forma più elementare è quella in cui tutte le particelle hanno spin zero; essa si scrive come segue:

1. si etichettano i quadri-momenti entranti e uscenti  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , definendo una direzione positiva assegnata arbitrariamente, e i quadri-momenti interni  $q_1, q_2, \dots, q_m$ ;
2. per ogni vertice si scrive un fattore

$$(B.1) \quad -ig$$

dove  $g$  è la costante di accoppiamento;

3. per ogni linea interna si scrive un fattore

$$(B.2) \quad \frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2}$$

dove  $q_j$  è il quadri-momento della linea ( $q_j^2 \equiv q_j^\mu q_{j\mu}$ ) e  $m_j$  è la massa della particella che la linea descrive (si noti che  $q_j^2 \neq m_j^2 c^2$ , perché la particella è virtuale);

4. per ogni vertice si scrive un fattore

$$(B.3) \quad (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

dove si hanno segni positivi per le particelle entranti e negativi per quelle uscenti; questo fattore impone la conservazione di energia e momento ad ogni vertice, dal momento che la delta è nulla a meno che la somma dei momenti entranti uguagli quella dei momenti uscenti;

5. per ogni linea interna si scrive un fattore

$$(B.4) \quad \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j$$

e si integra su tutti i  $q_j$ ;

6. si semplificano i fattori e si uguaglia quanto rimasto a  $-i\mathcal{M}$ .

Nel caso dell'interazione debole, in cui compaiono fermioni di spin 1/2 e bosoni di spin unitario, si hanno i seguenti passaggi:

1. si etichettano i quadri-momenti entranti e uscenti  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , con i corrispondenti spin  $s_1, s_2, \dots, s_n$  e i quadri-momenti interni  $q_1, q_2, \dots, q_m$ ; per le linee esterne le direzioni delle frecce vengono assegnate distinguendo fermioni da antifermioni, mentre per quelle interne si assegnano preservando la "direzione del flusso" del diagramma;
2. fermioni e antifermioni esterni contribuiscono con gli spinori introdotti in Eq. (A.19) e (A.20);
3. per ogni vertice si scrive un fattore

$$(B.5) \quad \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

4. per ogni linea interna si scrivono i seguenti fattori:

$$(B.6) \quad \begin{array}{ll} \text{fermioni e antifermioni:} & \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \\ \text{bosoni:} & \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2 c^2)}{q^2 - M^2 c^2} \end{array}$$

5. i punti successivi sono i 4, 5 e 6 del modello precedente.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. TANABASHI ET AL. (PARTICLE DATA GROUP), *Review of Particle Physics*, Phys. Rev. D, 2018
- [2] GRIFFITHS D., *Introduction to elementary particles*, 1987
- [3] BRAIBANT S., GIACOMELLI G., SPURIO M., *Particelle e interazioni fondamentali*, Springer, 2012
- [4] HAYES C.B., *Neutron Beta-Decay*, 2012
- [5] BRAIBANT S., GIACOMELLI G., SPURIO M., *Particles and Fundamental Interactions: Supplements, Problems and Solutions*, Springer, 2012
- [6] GREINER W., MULLER B., *Gauge theory of weak interactions*, Springer, 2000