

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 21. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 0 | Mathematische Grundlagen | 1 |
| 1 | Moduln über \mathcal{D}_k | 6 |
| 1.1 | Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k | 6 |
| 1.1.1 | Alternative Definition / Sichtweise | 8 |
| 1.2 | (Links) \mathcal{D} -Moduln | 9 |
| 1.2.1 | Holonome \mathcal{D} -Moduln | 10 |
| 1.3 | Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln | 10 |
| 1.4 | Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls | 11 |
| 2 | Der Meromorphe Zusammenhang | 12 |
| 2.1 | Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge | 12 |
| 2.2 | Alternativer Zugang | 14 |
| 2.3 | Eigenschaften | 14 |
| 2.4 | Newton Polygon | 17 |
| 2.5 | Formale Meromorphe Zusammenhänge | 19 |
| 2.6 | Formale Struktur regulärer Zusammenhänge | 20 |
| 2.7 | pull-back und push-forward | 21 |
| 2.8 | Fouriertransformation | 30 |
| 3 | Elementare Meromorphe Zusammenhänge | 31 |
| 4 | Levelt-Turrittin-Theorem | 36 |
| 4.1 | Klassische Definition | 37 |
| 4.2 | Sabbah's Refined version | 37 |

| | |
|------------------------------------------|-----------|
| 5 Beispiel | 39 |
| 5.1 Rezept | 39 |
| Anhang | 44 |
| A Aufteilung von ... | 45 |
| B Wie ich Newton Polygone zeichne | 47 |

0 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [\[Sab90\]](#) und [\[Cou95\]](#) beziehen.

Wir betrachten \mathbb{C} hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\} = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_0$ die formalen Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius ([\[HTT07\]](#), Chap 5.1.1)
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [\[HTT07\]](#) mit \tilde{K} bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$ und $K \subsetneq \hat{K}$ gelten.

Es bezeichnet der Hut ($\hat{}$) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 0.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese Graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die Form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem Term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der Ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach Grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Filtration, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] \mid v(f) \geq k\}$

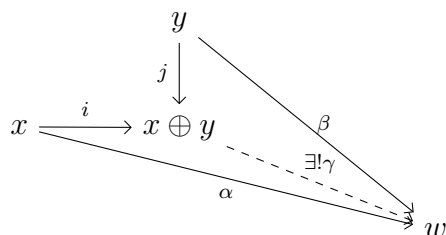
und es gilt $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m Dimensionalen Matrizen mit Einträgen in k .

Definition 0.2 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 0.3 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\
 & & T
 \end{array}$$

Für eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned}
 \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\
 n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m)
 \end{aligned}$$

Bemerkung 0.4. Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M/\text{im}(f)) \cong N \otimes_R M/\text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

Definition 0.5 (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.6 (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 0.7 (Kokern). Ist $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\text{coker}(f) = M / \text{im}(f)$.

Proposition 0.8. Ist $f : M' \rightarrow M$ eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz und $M/f(M') = \text{coker}(f)$ ist der Kokern von f .

Beweis.

□

Definition 0.9 (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$ und damit das zu A mit Filtrierung F assoziierte *graduierete Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

gr_i^F als was??

Definition 0.10. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

Definition 0.11 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 0.12. Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \hat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \rightarrow k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. für $f \in k$ ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□

1 Moduln über \mathcal{D}_k

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ab hier sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \hat{K}\}$.

1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 1.1. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$

- $\mathcal{D}_{\hat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \hat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

Bemerkung 1.2. • Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$.

- Offensichtlich erhält \mathcal{D}_k in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapittel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- \mathcal{D}_k ist offensichtlich nichtkommutativ.

Proposition 1.3. [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in \mathcal{D}_k kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Besser?:
erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 1.4. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, wie in Proposition 1.3, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von P .

Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.5. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringe

also $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO

Treffen?

□

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-Dimensionale Komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Ein (holomorpher) *differential Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat Ordnung m , falls

$\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$. Mit \mathcal{D}_X bezeichnen wir die Garbe von Differentialoperatoren auf X . Die Garbe \mathcal{D}_X hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und \mathcal{O}_X ist ein Unterring von \mathcal{D}_X . Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über X . Es gilt, dass Θ_X in \mathcal{D}_X enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links \mathcal{O}_X -Untermodul, aber kein rechts \mathcal{O}_X -Untermodul ist.

Proposition 1.6. [Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[t]\partial$. Wobei ∂ als $\partial(t^n) = nt^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[t, \partial], \quad \text{mit} \quad \partial t - t\partial = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

Definition 1.7. [Ark12, Defn 2.1] Sei $X = \mathbb{A}^1$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\mathcal{D}_X = [t, \partial]$ mit der Relation $[\partial, t] = 1$. Dann definieren wir die links \mathcal{D} -Moduln über \mathbb{A}^1 als die $\mathbb{C}[t, \partial]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Sei $\mathcal{D} := \mathcal{D}_k$ für eines der oben genannten k . Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von \mathcal{D} -Moduln rede, werde ich mich immer auf links \mathcal{D} -Moduln beziehen.

Beispiel 1.8 (links \mathcal{D} -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ jeweils durch $t \cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol $\exp(\lambda t)$ ein, mit $\partial(f(t) \exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t} \exp(\lambda t) + f \lambda \exp(\lambda t)$. So ist $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda t)$ ein \mathcal{D} -Modul.

4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(t)$ mit den Eigenschaften $\partial \cdot \log(t) = \frac{1}{t}$ ein. Erhalte nun das \mathcal{D} -Modul $\mathbb{C}[t] \log(t) + \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Dieses Modul ist über \mathcal{D} erzeugt durch $\log(t)$ und man hat

$$\mathbb{C}[t] \log(t) + \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(t) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial t \partial).$$

Lemma 1.9. [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist. Dann ist \mathcal{M} bereits ein freies $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 2.3.3]. □

Korollar 1.10. [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon $\mathcal{M} = \{0\}$.

1.2.1 Holonome \mathcal{D} -Moduln

TODO: defn of Car als Charakteristische Varietät

Definition 1.11. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei \mathcal{M} lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt, \mathcal{M} ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.12. [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein \mathcal{D} -Modul ist holonom genau dann, wenn $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

1.3 Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln

[Sab90, Chap 4.1.] Sei M ein $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul. Wir schreiben $M[x^{-1}]$ für den K -Vektorraum $M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$. Im allgemeinen gilt, falls M von andlichen Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist, so ist $C[x^{-1}]$ von endlichem Typ über K . Bemerke aber, dass $M[x^{-1}]$ generell nicht von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist.

1.4 Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul. Betrachte \mathcal{M} als $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von \mathcal{M} .

Proposition 1.13. [Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ erhält in natürlicher Weise eine \mathcal{D} -Modul Struktur.

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

beweis der \mathcal{D} -linearität ist als übung gelassen

□

2 Der Meromorphe Zusammenhang

Alle MeromZsh sind \mathcal{D} -Moduln aber nicht andersherum?

2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

TODO: zeige, dass der Lösungsraum die Eigenschaften von \mathcal{D} -Moduln erfüllt
siehe alternativer Zugang"

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tupel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

Definition 2.2. Seien $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine K -lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$.

Bemerkung 2.3. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.4 (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) \overset{\boxed{??}}{\downarrow} \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammenhang (\mathcal{M}, ∂) ausgestattet mit einer K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten Meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

2.2 Alternativer Zugang

Hier wird nun ein alternativer Zugang, wie in [Sab90, 3.1.1], präsentiert. Sei \mathcal{F} ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren \mathcal{D} wirken.

Sei P ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in $a_i(t) \in \mathbb{C}\{x\}$ geschrieben als $P = \sum_{i=0}^d a_i(t) \partial_t^i$. Man sagt eine Funktion $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von P , falls u die Gleichung $Pu = 0$ erfüllt. Man sagt 0 ist ein singulärer Punkt falls $a_d(0) = 0$. Falls 0 kein singulärer Punkt ist, hat P genau d über \mathbb{C} Unabhängige Lösungen in $\mathbb{C}\{t\}$.

Falls u ein Lösung von P ist, so ist u auch Lösung von $Q \cdot P$ mit $Q \in \mathcal{D}$. Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal I von \mathcal{D} , welches von P erzeugt wird.

2.3 Eigenschaften

[Sab90, 4.2] Let \mathcal{M} be a left \mathcal{D} -module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 2.5 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 2.6. [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein \mathcal{D}_K -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 2.7. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Bemerkung 2.8. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

Lemma 2.9. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.10. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Isomorphismus so ist $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ein zu $(\mathcal{M}_K, \partial)$ isomorpher Zusammenhang.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen)

□

Lemma 2.11. Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1u - f'u - f\partial_2u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1u - \partial_2u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

□

Korollar 2.12. Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.13 (Transformationsformel). [HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 & \searrow \cong & & & \nearrow \cong \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong & & & \searrow \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.14 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

$$\begin{aligned}
 1 &= TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0 \\
 1 &= T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0
 \end{aligned}$$

Proposition 2.15. [[Sch](#), Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzen von

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem Meromorphen Zusammenhang.

2.4 Newton Polygon

Quelle: sabba?

sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \left((k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Bei Sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe Hülle davon in \mathbb{R}^2

Definition 2.16. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\text{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Definition 2.17. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär* (oder *regulär singular*) $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$, sonst *irregulär singular*.
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu \mathcal{M}_K gehörigen slopes.
- Ein meromorpher Zusammenhang \mathcal{M}_K heißt regulär singular, falls es ein regulär singuläres P gibt, mit $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

Beispiel 2.18. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = t^{\textcolor{red}{1}} \partial_t^{\textcolor{blue}{2}}$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{k} = 2$$

$$\textcolor{red}{l} = 1$$

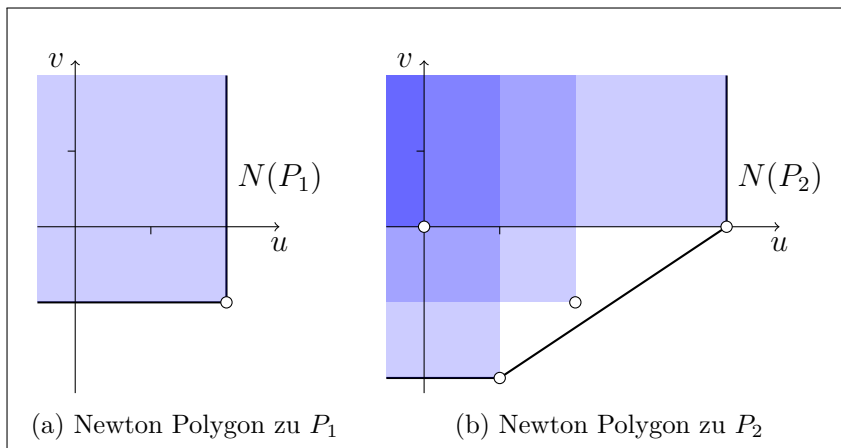
so dass

$$H(P_1) = \left((\textcolor{blue}{2}, \textcolor{red}{1} - \textcolor{blue}{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.2a ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singular.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2b visualisiert.

Abbildung 2.1: Zu Beispiel 2.18



Lemma 2.19. [*Sab90*, 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exacte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

2.5 Formale Meromorphe Zusammenhänge

bei ZulaBarbara ist $\hat{\mathcal{D}}_{\hat{K}} = \mathbb{C}((u)) < \partial_u >$ hier $= \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Definition 2.20 (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *formaler Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler \hat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\hat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

Bemerkung 2.21. Alle bisher getroffene Aussagen stimmen auch für formale Meromorphe Zusammenhänge. Im besonderen existiert für jedes $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein ein $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ mit $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$.

Definition 2.22. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}((u))$. Wir schreiben \mathcal{E}^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((u))$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Also

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^\varphi &= \mathbb{C}((u)) \xrightarrow{\partial_u} \mathbb{C}((u)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(u) \\ f(u) &\mapsto f'(u) + f(u)\varphi'(u)\end{aligned}$$

Bemerkung 2.23. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$.

Satz 2.24. [Sab90, Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] □

Aussagen, die aus dem Beweis entstehen:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

Korollar 2.25. [Sab90, Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

2.6 Formale Struktur regulärer Zusammenhänge

[Sab90, Chap 5.2] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein regulärer Formaler Meromorpher Zusammenhang, also $\text{slopes}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = 1$. Das nun folgende Kapitel wird sich mit der Struktur solcher Zusammenhänge genauer auseinandersetzen.

Lemma 2.26. [Sab90, Def 5.1.1 Remarks 3.] Ein $P = \sum_{i=0}^d a_i(x)(x\partial_x)^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}[[x]]$ ist regulär, genau dann wenn der Koeffizient a_d vor dem dominanten Term eine Einheit ist.

Beweis. □

Dank diesem Satz ist es berechtigt, reguläre Zusammenhänge genauer zu betrachten.

Lemma 2.27. [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ über \hat{K} mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.5). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \hat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$.

bis hier schon klar

Tatsächlich werden wir $b_i(x) = x^i b'_i(x)$ mit $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$. □

Lemma 2.28. [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ über \hat{K} so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.

Beweis. □

2.7 pull-back und push-forward

[HTT07, 1.3]

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $(\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto t := \rho(u)) \in u\mathbb{C}[[u]]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei \mathcal{M} ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.29 (pull-back). [Sab07, 1.a] Der *pull-back (Inverses Bild)* $\rho^+ \mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m. \quad (2.3)$$

Lemma 2.30. Es gilt $\rho^* \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$ mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \\ f(u) \otimes m(t, \partial_t) &\longmapsto f(u)m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

Beweis. □

Bemerkung 2.31. Das soeben, in Lemma 2.30, definierte Φ erfüllt für $1 \otimes m \in \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(u) \otimes \partial_t m \\ &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(u) \rho'(u)^{-1}}_{=1} \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \\ &= \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

und somit (2.3) wie gewollt.

Lemma 2.32. In der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(t, \partial_t)} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 2.30 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. □

Lemma 2.33. *In der Situation von Lemma 2.29, mit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P(t, \partial_t)$ für ein $P(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u).$$

also wird der Übergang beschrieben durch

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \rho(t) \\ \partial_t &\rightarrow \rho'(t)^{-1} \partial_u \end{aligned}$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$ und $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{- \cdot P} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\ & & & & u & \longmapsto & u \bmod \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P \end{array}$$

ist **exact**, weil $\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil $\mathbb{C}((u))$ **flach** ist, da Körper, ist auch, nach anwenden von $\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} _$, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

\parallel
 $\rho^* \mathcal{M}$

exact. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^* \mathcal{M} &\cong \text{coker}(\text{id} \otimes _ \cdot P) && (\text{weil exact}) \\ &\cong \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / (\text{id} \otimes _ \cdot P) \left(\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \right) && (\text{nach def. von coker}) \end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 2.30 und $Q(u, \partial_u) := P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ nach Lemma 2.32 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 & & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & &
 \end{array}$$

wobei das Diagramm kommutiert. Nun lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen (weil $_ \cdot Q$ injektiv)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Nun ist aber bekannt, dass Kokerne isomorpher Abbildungen ebenfalls isomorph sind. Damit folgt die Behauptung

Nun wollen wir einen Isomorphismus

$$\varphi : \rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \left(\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P \right) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q$$

finden, so dass $\varphi \circ (\text{id} \otimes \pi) = \Pi \circ \Phi$.

Ingo sagt:

Nun zu deiner Situation: Da geht es jeweils um die rechten Endstücke. Anders als die Mittelstücke sind diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; C ist der Kokern von $(A \rightarrow B)$ und c der Kokern von $(a \rightarrow b)$. Aufgrund der Kommutativität des Quadrats links müssen daher diese Kokerne zueinander isomorph sein.

Konkret kannst du einen Isomorphismus über eine Diagrammjagd konstruieren: Sei $x \in C$ beliebig. Wir wollen ein zugehöriges Element in c angeben. Da $(B \rightarrow C)$ surjektiv ist, gibt es ein $y \in B$, das unter $(B \rightarrow C)$ auf x geschickt wird. Unser gesuchtes Element in c ist dann das Bild von y unter $(B \rightarrow b)$ und $(b \rightarrow c)$. Dann ist noch Wohldefiniertheit

nachzuweisen. Die Umkehrfunktion konstruiert man auf analoge Weise. Dann muss man natürlich noch nachrechnen, dass die beiden Morphismen zueinander invers sind.

(Geheimtipp: Linearität muss man, obwohl es eigentlich so scheint, tatsächlich nicht nachweisen – wenn man weiß, wie man intern in Topoi Mathematik betreiben kann. :-))

- warum sind die schon zusammenhänge isomorph?
eventuell noch ein Lemma bei kurzen exacten Sequenzen hinzufügen

□

Bemerkung 2.34 (versuch 1). Wieso sieht die Wirkung auf dem pull-back Zusammenhang so aus?

Betrachte ein Element der Form $f(t)m = f(\rho(u))m$.

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m) \\ &= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u)) \underbrace{\partial_{\rho(u)} m}_{=\partial_t} = (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{p u^{p-1}} \partial_u(f(u^p)m) \\ &= f'(u^p)m + f(u^p) \frac{1}{p u^{p-1}} \partial_u m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m)$ und somit ist die Wirkung von ∂_t gleich der Wirkung von $\rho'(u)^{-1} \partial_u$.

Lemma 2.35. *Ein pull-back mit $u \mapsto u^p$ multipliziert alle slopes mit p .*

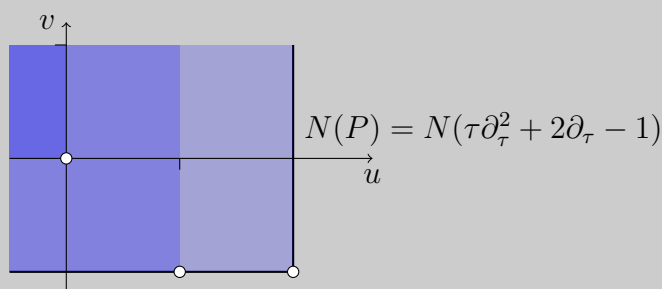
Beweis.

□

Beispiel 2.36 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$



und gehe von τ über zu t via $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2 \partial_t)$?

$$\begin{aligned} \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t \end{aligned}$$

- was passiert mit $\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

$$\begin{aligned}
 \tilde{P} &= \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\
 &\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t}(-t^2\partial_t)^2 + 2(-t^2\partial_t) - 1 \\
 &= \frac{1}{t}t^2(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\
 &= t(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\
 &= t(t^2\partial_t^2 - 2t\partial_t) - 2t^2\partial_t - 1 \\
 &= t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1 =: P
 \end{aligned}$$

Wir wollen $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ bzgl. $P := t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back $\rho : t \rightarrow u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 2.33 einfacher anwenden können.

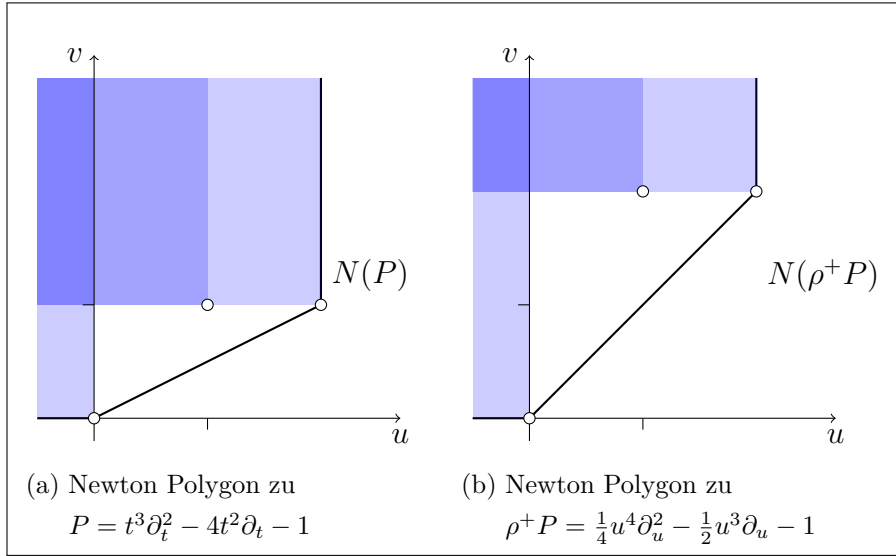
$$\begin{aligned}
 \partial_t &\rightarrow \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\
 \partial_t^2 &\rightarrow \left(\frac{1}{2u}\partial_u\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2u}\partial_u\left(\frac{1}{2u}\partial_u\right) \\
 &= \frac{1}{2u}\left(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2\right) \\
 &= \frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u
 \end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^+P &= u^6\left(\frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u\right) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\
 &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\
 &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1
 \end{aligned}$$

Also ist $\rho^+P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.3b) und somit $\rho^*\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (\frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1)$.

Abbildung 2.2: Zu Beispiel 2.36

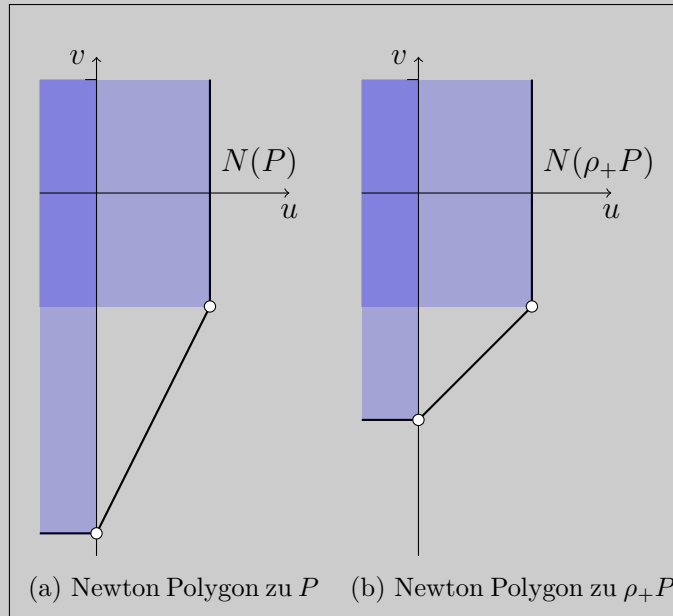


Sei \mathcal{N} ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.37 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* (*Direktes Bild*) $\rho_+\mathcal{N}$ ist

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist der \mathbb{C} -Vektor Raum \mathcal{N} mit der $\mathbb{C}((t))$ -Vektor Raum Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_t beschrieben durch $\rho'(u)^{-1}\partial_u$.

Abbildung 2.3: Zu Beispiel 2.38



Beispiel 2.38 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \underbrace{\frac{2}{u^3}}_{=:P}) \end{aligned}$$

mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 2.4a). Bilde nun das Direkte Bild über ρ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist $\rho_+\mathcal{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.4b)

Satz 2.39. [[Sab07](#), 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) \cong \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}. \quad (2.4)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} && (?) \end{aligned}$$

□

Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

2.8 Fouriertransformation

Definition 2.40 (Fouriertransformation). [[AV09](#), Def 6.1] Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$. Dann ist die *Fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i$$

3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.1 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1]

Alternative. ausführlichere / komplexe definition [Sab90, Def 5.4.5.]

Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \bmod \mathbb{C}[[u]]$ ab.

Lemma 3.2. [Sab07, Lem 2.2]

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 3.3. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ ^[1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+\rho_+\mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ ^[2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \end{aligned}$$

^[1] $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

^[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, \dots, u\partial_u e_{p-1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right] \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$, mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

^[3]Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\begin{aligned}
 T\left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j\right]T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j\right] \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j\right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j (\xi^{p-1})^j & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1}\psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j \xi^{p-1} & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\begin{aligned}
 \partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}
 \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Lemma 3.4. [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([u \mapsto u^p], \varphi, R) \cong El([u \mapsto u^p], \psi, S)$ genau dann, wenn

- es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$
- und $S \cong R$ als $\mathbb{C}((u))$ -Vektorräume mit Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Lem 2.6.]

□

Proposition 3.5. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale $\mathbb{C}((x))$ -Vektorraum \mathcal{M} mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \rightarrow u^p$ vom grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((x))$ -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Quellen:

sabbah_cimpa90 seite 28 / 30

Satz 4.1 (Levelt-Turittin). *Es ex. endliche Körper $\hat{L}|\hat{K}$ mit $\hat{L} = \mathbb{C}((u))$ mit $\hat{K} \hookrightarrow \hat{L}, x \mapsto u^p$ so dass:*

$$\hat{M} \otimes_{\hat{K}} \hat{L} = \bigoplus_{i=1}^r \hat{M}_i$$

mit $\text{slopes}(\hat{M}_i) = 1 \forall i$ bzw. genauer $\hat{M}_i = \xi^{\varphi_i} \otimes R$

Satz 4.2 (Levelt-Turrittin-Malgrange). *$\exists \hat{L}|\hat{K}$ mit $\hat{M}_i \otimes_{\hat{K}} \hat{L} = \bigoplus_{j=1}^s \hat{N}_j$ mit*

$$\hat{N}_i = \xi^{\varphi_j} \otimes R$$

und

- $\dim_L \xi^{\varphi_j} = 1, \varphi_j \in \mathbb{C}[u^{-1}] \cdot u^{-1}$
- R regulär singular, also mit $\text{slopes} = \{0\}$

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 4.3. *Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$ und $N(P_2) \subset N_2$

- A ist eine kante von ...

4.1 Klassische Definition

[Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$ als den Vektor Raum über $\hat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

Satz 4.4. [Sab90, Thm 5.4.7] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.

Beispiel 4.5. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel ???. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turritin-Theorems Zerlegen.

4.2 Sabbah's Refined version

Proposition 4.6. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((u))$ -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.7 (Refined Turritin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind.

Beweis. [Sab07, Cor 3.3]

□

5 Beispiel

5.1 Rezept

siehe: [Sab07, 5.b]

sei $\varphi \in \{\frac{1}{t^k}, \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}, \dots\}$

1. Starte mit: $P(t, \partial_t) := (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$
2. Furiertrafo: $F_P(z, \partial_z) = P(\partial_z, -z) \in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle$
3. $x = z^{-1}$ und $\partial_x = -z^2 \partial_z$

$$Q(x, \partial_x) := F_P(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$$

Hauptnenner unnötig?!?

4. Berechne für Q das NP usw...

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\frac{1}{t^k}, \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}, \dots\} = \{\varphi = \sum_{i \in I} \frac{1}{t^{k_i}} | I \text{ endlich, } k_i \in \mathbb{N}\}$ aus
2. und definiere dann $\tilde{Q}(t, \partial_t) := \partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t) \in \mathbb{C}[t][t^{-1}] \langle \partial_t \rangle$
3. Wir wollen aber, weil es schöner ist, ein Element in $\mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$, deshalb multipliziere mit Hauptnenner und erhalte

$$Q(t, \partial_t) := (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$$

Dies ändert den Assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht.

Lemma?

4. Fouriertransformiere Q und erhalte $\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) = Q(\partial_z, -z)$ in $\mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle$
5. Wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an.

Was passiert mit der Ableitung ∂_x ? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$.

$$P(x, \partial_x) := F_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$$

warum sind diese wichtig??

Wende das Rezept allgemein für $\varphi = \sum_{i \in I} \frac{1}{t^{k_i}}$ an. So ist

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t, \partial_t) &= \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \\ &= \partial_t + \sum_{i \in I} k_i \frac{1}{t^{k_i+1}} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[t][t^{-1}] \langle \partial_t \rangle$$

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &= \partial_t t^{\max_j(k_j)+1} + \sum_{i \in I} k_i \frac{1}{t^{k_i - \max_j(k_j)}} \\ &= \partial_t t^{\max_j(k_j)+1} + \sum_{i \in I} k_i t^{\max_j(k_j) - k_i} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -z \partial_z^{\max_j(k_j)+1} + \sum_{i \in I} k_i \partial_z^{\max_j(k_j) - k_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\varphi(x, \partial_x) &= F_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= x \partial_x (-x^2 \partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i \in I} k_i (-x^2 \partial_x)^{\max_j(k_j) - k_i} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$$

Nun müssen wir noch $(x^2 \partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = x^2 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{\text{...}} (x^2 \partial_x)^{k-1}$$

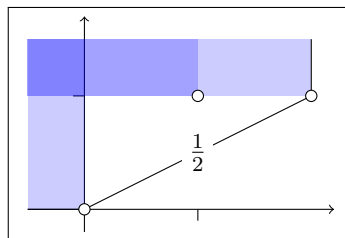
$$\begin{aligned}
 &= x^2 \overbrace{(2x + x^2 \partial_x)} \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{\partial_x x^2 \partial_x} + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2 \partial_x}_{\partial_x^2 x^2 \partial_x}) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \overbrace{(2x + x^2 \partial_x)} \partial_x + x^4 \overbrace{(2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2)} \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (4x^4 \partial_x + 2x^5 \partial_x^2 + 2x^5 \partial_x^2 + x^4 \partial_x + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= \dots \text{geschlossene Formel??}
 \end{aligned}$$

also gilt für spezielle k

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \dots & \end{cases}$$

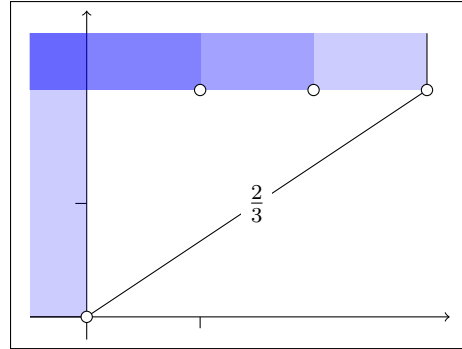
also für $\varphi_1 := \frac{1}{x}$ ist $P_{\varphi_1} = 1 - \frac{1}{x}(x^2 \partial_x)^2 = 1 - 2x^2 \partial_x - x^3 \partial_x^2$

Abbildung 5.1: Newton Polygon zu P_{φ_1}



also für $\varphi_2 := \frac{1}{x^2}$ ist $P_{\varphi_2} = 2 + \frac{1}{x}(x^2 \partial_x)^3 = 2 + 5x^3 \partial_x + 4x^4 \partial_x^2 + x^5 \partial_x^3$

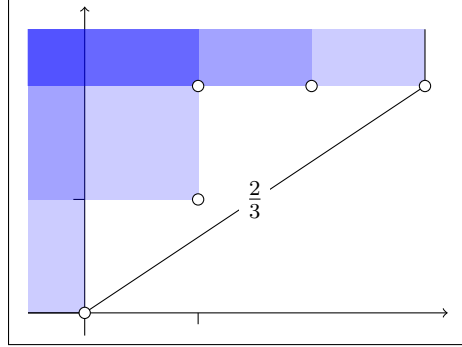
Abbildung 5.2: Newton Polygon zu P_{φ_2}



also für $\varphi_3 := \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ist

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi_3} &= x\partial_x(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i \in I} k_i(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)-k_i} \\
 &= x\partial_x \underbrace{(x^2\partial_x)^2}_{(2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)} + 1(-x^2\partial_x)^1 + 2(-x^2\partial_x)^0 \\
 &= x\partial_x (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2) - x^2\partial_x + 2 \\
 &= 2x \underbrace{\partial_x x^3}_{\partial_x x^3} \partial_x + x \underbrace{\partial_x x^4}_{\partial_x x^4} \partial_x^2 - x^2\partial_x + 2 \\
 &= 2x (3x^2 + x^3\partial_x) \partial_x + x (4x^3 + x^4\partial_x) \partial_x^2 - x^2\partial_x + 2 \\
 &= \underbrace{6x^3\partial_x + 2x^4\partial_x^2}_{6x^3\partial_x + 2x^4\partial_x^2} + \underbrace{4x^4\partial_x^2 + x^5\partial_x^3}_{4x^4\partial_x^2 + x^5\partial_x^3} - x^2\partial_x + 2 \\
 &= x^5\partial_x^3 + 6x^4\partial_x^2 + (6x^3 - x^2)\partial_x + 2
 \end{aligned}$$

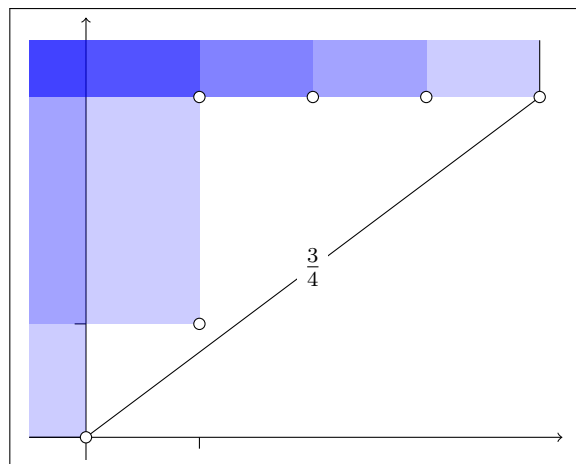
Abbildung 5.3: Newton Polygon zu P_{φ_3}



also für $\varphi_4 := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ist

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi_4} &= x\partial_x(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i \in I} k_i(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)-k_i} \\
 &= -x\partial_x \underbrace{(x^2\partial_x)^3}_{-2x^2\partial_x + 3} \\
 &= -x\partial_x (5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3) - 2x^2\partial_x + 3 \\
 &= -5x \underbrace{\partial_x x^4}_{\partial_x} \partial_x - 4x \underbrace{\partial_x x^5}_{\partial_x^2} \partial_x^2 - x \underbrace{\partial_x x^6}_{\partial_x^3} \partial_x^3 - 2x^2\partial_x + 3 \\
 &= -5x (4x^3 + x^4\partial_x) \partial_x - 4x (5x^4 + x^5\partial_x) \partial_x^2 - x (6x^5 + x^6\partial_x) \partial_x^3 - 2x^2\partial_x + 3 \\
 &= -20x^4\partial_x - 5x^5\partial_x^2 - 20x^5\partial_x^2 - 4x^6\partial_x^3 - 6x^6\partial_x^3 - x^7\partial_x^4 - 2x^2\partial_x + 3 \\
 &= -x^7\partial_x^4 - 10x^6\partial_x^3 - 25x^5\partial_x^2 - (20x^4 + 2x^2)\partial_x + 3
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.4: Newton Polygon zu P_{φ_4}



A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots$$

also:

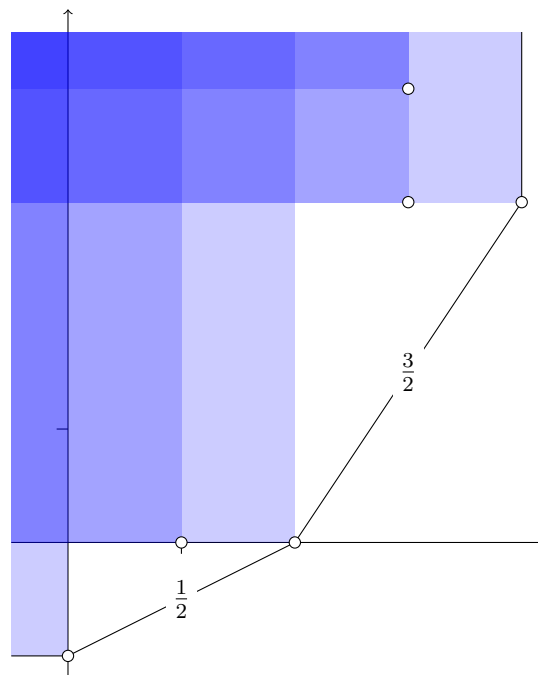
$$\begin{aligned}\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots \\ \psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots\end{aligned}$$

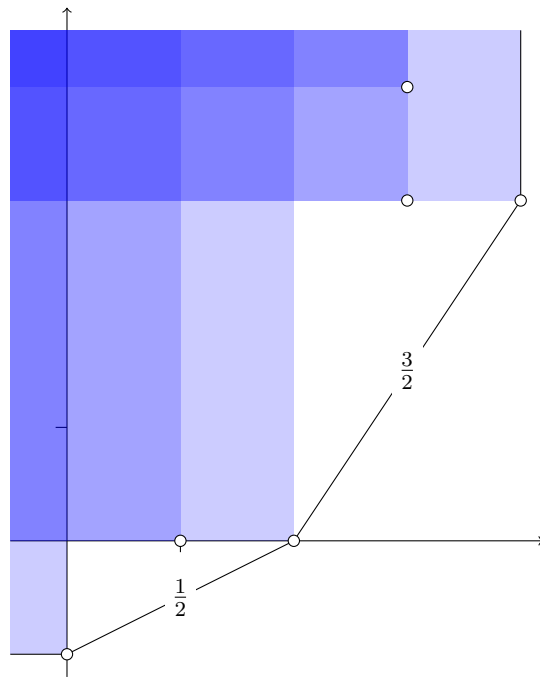
$$\vdots$$

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$

B Wie ich Newton Polygone zeichne

`\myinput{myNewtonPoly.sty}`





Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov, *D -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara, *D -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d -modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.