Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik
der
Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 5. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Teil I

Theorie

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [6] und [2] beziehen.

1.1 Einige Ergebnise aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Es bezeichnet der Hut ($\hat{}$) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 1.1 (Seite 2)**.** *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ *ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.*

   alle Ideale haben die form $(x - a)$ *mit* $, a \in \mathbb{C}$

2. wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X]\backslash\mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt $\mathfrak{m}$-adische Fitration, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ ist ein Untering der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.

ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

Definition 1.2 (Direkte Summe)**.** [8, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
 & & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.3 (Tensorprodukt / Faserprodukt)**.** [8, 3(Algebra).11.21] [8, 4(Categories).6.1]

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

1.2 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [6, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[\![x]\!]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.4 (Weyl Algebra)**.** Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra $\mathcal{D}$ von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$) verwenden.

Lemma 1.5. *Sei A einder der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition*

$$+ : A \times A \to A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \to A$$

definieren auf A eine Ringstruktur $(A, +, \cdot)$.

Beweis. [1, Kapittel 2 Section 1] □

Bemerkung 1.6. $A_1(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Definition 1.7 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

der *Kommutator von a und b* genannt.

Proposition 1.8. *1. Es gilt*

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$$

2. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, so gilt:

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial, f}{\partial x}.$$

Denn für $g \in \mathbb{C}[x]$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
[\partial_x, x^k] &= kx^{k-1} \\
[\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1} \\
[\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i}
\end{aligned}$$

Beweis. [1] □

Proposition 1.9. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [6, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exersice"

□

Definition 1.10. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.11. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} \underbrace{:= \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{Z}} gr^F_N\mathcal{D} = \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} gr^F_N\mathcal{D} \cong \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N}_{\substack{\text{isomorph als grad. Ringe} \\ \cong}}$$

Beweis. TODO

Treffen?

□

1.2.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A < \partial_x >$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A < \partial_x)$ bezeichen werden. Sei P ein bzgl. 1.9 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k. So definiere den Grad $degP$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_kA < \partial_x > /F_{k-1} < \partial_x >$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.2.2 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [6]

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vr
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

  $$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$

  erfüllen soll.

Bemerkung 2.2. Später wird man auf die Angabe von ∂ verichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

Definition 2.3. Sei $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$. Wir schreiben $\mathscr{E}^\varphi$ für den Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$, so dass $\nabla_{\partial_u} 1 = \varphi'$. Es gilt $\mathscr{E}^\varphi \cong \mathscr{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \bmod \mathbb{C}(\!(u)\!)$.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

[6, 4.2] Let $\mathcal{M}$ be a left $\mathcal{D}$-module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$-module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Satz 2.4. *[6, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein $\mathcal{D}$-Modul und andersherum.*

Beweis. [6, Thm 4.3.2] □

- Lemma vom zyklischen Vektor
  [6, Thm 4.3.3]
  [1, Satz 4.8]

Lemma 2.5. *[1, Satz 4.12] [6, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$.*

Beweis. [1, Satz 4.12] □

Lemma 2.6. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}_K$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\ K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\partial\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Sind ∂_1 und ∂_2 zwei Meromorphe Zusammenhänge auf $\mathcal{M}_K \cong K^r$. So betrachte $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$:

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

Lemma 2.7. *Da $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear und, wie eben gezeigt, $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ allgemein gilt: Die differenz zweier Meromorpher Zusammenhäge ist K-linear.*

Insbesondere ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.8 (Transformationsformel)**.** In der Situation

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\varphi", "\cong"'] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi"', "\cong"] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.9. $A \sim B$ differenziell Äquivalent $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$ mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$
$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

TODO: Ab hier formal???

2.3 pull-back und push-forward

[4, 1.3]

nach [7, 1.a]. Sei $\rho :\in u\mathbb{C}[\![u]\!]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei $\mathcal{M}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 2.10 (pull-back)**.** Der *pull-back* $\rho^+\mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^*\mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

wie sieht die wirkung vom pull-back zusammenhang aus?
$\partial_t(f(t))m) = ... = \rho'(u)^{-1}\partial_u f(t)m$

Sei $\mathcal{N}$ ein $\mathbb{C}((u))$-VR mit Verknüpfung, so definiere

Definition 2.11 (push-forward)**.** Der *push-forward* $\rho_+\mathcal{N}$ ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$-VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist der $\mathbb{C}$-VR $\mathcal{N}$ mit der $\mathbb{C}((t))$ Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- die wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$

Beispiel 2.12 (push-forward)**.** Betrachte $\rho : t \to u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$
Betrachte:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^{\varphi} &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_t \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \frac{2}{u^3})\end{aligned}$$

TODO

also $P = \partial_u + \frac{2}{u^3}$ mit slopes$(P) = \{2\}$

mache nun einen push-forward mittels ρ:

$$\begin{aligned}(\partial_u + \frac{2}{u^3}) &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})\end{aligned}$$

Also ist

$$\rho_+\mathscr{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

also $\rho_* P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ mit slopes$(P) = \{1\}$

TODO

Satz 2.13. *Es gilt dir Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) \cong \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \tag{2.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &= \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \end{aligned}$$

□

2.4 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.14 (Formaler Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *Formaler Meromorpher zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler $\hat{K}$-Vr
- eine *Derivation* ∂, für die die *Leibnitzregel* (2.1), für alle $f \in \hat{K}$ und $u \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$, erfüllt sein soll.

Oder einfach ein Meromorpher Zshg. über anderes K also $\hat{K}$

Bemerkung 2.15. alle bisher gegebenen Definitionen und Lemmata gelten für formale Meromorphe Zusammenhänge analog wie für konvergente Meromorphe Zusammenhänge.

2.5 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.16 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [7, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$, $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E}^{\varphi} \otimes R)$$

2.6 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$P = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben und betrachte das dazugehörige

$$H := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \{(k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

bei sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe hülle davon in $\mathbb{R}^2$

Definition 2.17. Das Randpolygon von $\operatorname{conv}(H)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 2.18. Die *Steigungen (engl. slopes)* sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* $:\Leftrightarrow$ slopes $P = \{0\}$, sonst *irregulär singulär*.

alternativ: $:\Leftrightarrow$ wenn $\mathrm{conv}(H)$ ein Quadrant ist

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu $\mathcal{M}_K$ gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_K$ heißt regulär singulär, falls $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mit P regulär singulär, sonst irregulär singulär

alternativ $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \{0\}$

Lemma 2.19. *[6, 5.1]*

1. *$\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$*
2. *Wenn mann eine exacte Sequenz $0 \to \mathcal{M}'_K \to \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}''_K \to 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.*

3 Levelt-Turittin-Theorem

sabbah_cimpa90 seite 28 / 30

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindes 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 3.1. *Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:*

- *$N(P_1) \subset N_1$ und $N(P_2) \subset N_2$*
- *A ist eine kante von ...*

Satz 3.2. *[6, Thm 5.3.1]*

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 3.3. *[7, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt*

$$\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p = 1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} .$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$-Basis von $\rho_+ \mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathscr{E}^\varphi})) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p)(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j]$$

denn:

$$u\partial_u \mathbf{e} = (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1})$$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0,..,p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\
u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\
u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\
u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\
u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)
\end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j]
\end{aligned}
$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$
\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j]
$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$ [3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$
\begin{aligned}
T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\
&= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j \left(\xi^1\right)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j \left(\xi^{p-1}\right)^j \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \text{[4]}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

$\square$

Teil II

Beispiele

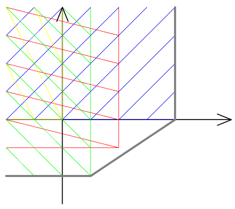
4 Beispiele/Anwendung

4.1 Einfache Beispiele

Hier soll ein einfaches Beispiel hergeleitet werden, an dem die Zerlegung nach dem Levelt-Turittin-Theorem einmal explizit ausformuliert werden soll.

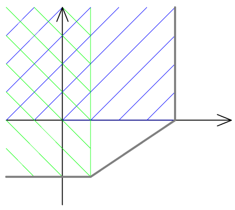
Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



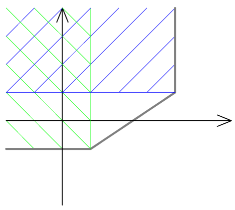
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit t und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [6, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$



und es gilt $\mathrm{slopes}(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$. Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich $\rho : t \mapsto u^3$ für den Pullback an.

Dieser Pullback Multipliziert (indirekt) die Slopes mit 3, **Quelle?**
aber wie wendet man ihn (explizit) an?

$$\rho^+ P = ???$$

welches die Slopes $\mathrm{slopes}(\rho^+ P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$ hat. Schreibe nun dieses $\rho^+ P = Q \cdot R$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[\![u]\!]$ wobei gilt $\mathrm{slopes}(Q) = \{0\}$ und $\mathrm{slopes}(R) = \{2\}$.

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zerfällt

4.2.1 beispiel von sabbah

Sei $P = t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2}$

1. zeige $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ ist ein Meromorpher Zusammenhang.
2. Zeichne das Newton Polygon von P und finde eine formale Aufteilung von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$.
3. Zeige $\mathcal{M}$ kann nicht in eine direkte Summe von zwei $\mathcal{D}$ modulen zerlegt werden, dazu:
   a) Zeige das die Produktzerlegung

   $$P = (t(t\partial_t) + v(t)) \cdot (t\partial_t + u(t)),$$

   mit $u, v \in \mathbb{C}[\![u]\!]$, existiert.

   b) Berechne durch Induktion die Koeffizienten von u.

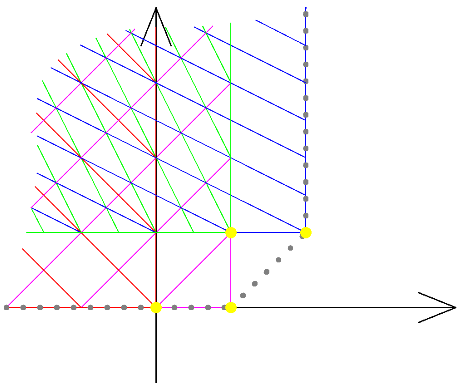
   c) Zeige dass $u \notin \mathbb{C}((u))$.

Schritt 1

Zeige das $\mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$ einen Meromorphen Zusammenhag Definiert.

Schritt 2

$$\begin{aligned} P &= t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= tt(\partial_t t)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= t^2(t\partial_t + 1)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= t^3\partial_t^2 + (t^2+t)\partial_t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Also mit slopes $P = \{0, 1\}$

Schritt 3 a)

Schritt 3 b)

Schritt 3 c)

4.2.2 Beispiel ohne namen

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

und gehe von τ über zu t via $\tau \to \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ? Es gilt:

  $$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f)\cdot(-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f)\cdot t^2 = -t^2\cdot\partial_t(f)$$

  also:

  $$\partial_\tau = -t^2\partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2\partial_t)$?

$$\begin{aligned}\partial_t t^2\partial_t &= (\partial_t t)t\partial_t \\ &= (t\partial_t - 1)t\partial_t \\ &= t(\partial_t t)\partial_t - t\partial_t \\ &= t(t\partial_t - 1)\partial_t - t\partial_t \\ &= t^2\partial_t^2 - 2t\partial_t\end{aligned}$$

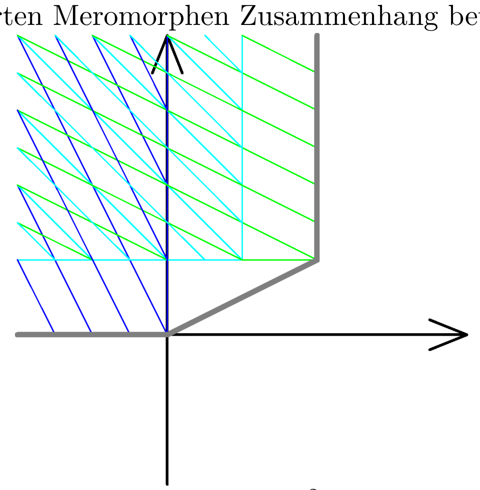
- was passiert mit $\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

$$\begin{aligned}&\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\ &\xrightarrow{\tau\to\frac{1}{t}} \frac{1}{t}(-t^2\partial_t)^2 + 2(-t^2\partial_t) - 1 \\ &= \frac{1}{t}t^2(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\ &= t(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\ &= t(t^2\partial_t^2 - 2t\partial_t) - 2t^2\partial_t - 1 \\ &= t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1 =: P\end{aligned}$$

Wir wollen nun den zum folgendem P assoziierten Meromorphen Zusammenhang betrachten:

$$P = t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$$

mit slopes$(P) = \{\frac{1}{2}\}$



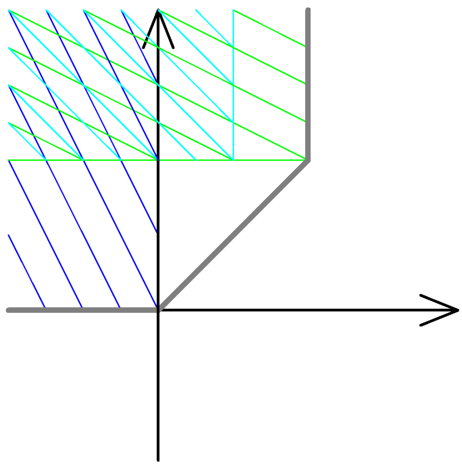
Wir wollen ganzzahlige slopes haben, also wernde den pull-back $\rho : t \to u^2$ an.

Zunächst ein paar nebenrechnungen:

$$\begin{aligned}\partial_t &= \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\ \partial_t^2 &= (\frac{1}{2u}\partial_u)^2 \\ &= \frac{1}{2u}(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2) \\ &= -\frac{1}{4u^3}\partial_u + \frac{1}{4u^2}\partial_u^2\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\rho^+ P &= u^6(-\frac{1}{4u^3}\partial_u + \frac{1}{4u^2}\partial_u^2) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\ &= -u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u + \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\ &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1\end{aligned}$$



$$\rho^+ P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1$$

mit slopes$(\rho^+ P) = \{1\}$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.
Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$\psi_0(u^p)$

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \ldots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \ldots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \ldots$$

$u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)$ $\quad$ $u\psi_1(u^p)$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \ldots \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \ldots \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^{p} + a_{-(p+2)}u^{2p} + \ldots
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] B. Alkofer and F. Vogl. Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht, 2009.

[2] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[4] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2007.

[5] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[6] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.

[7] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform, June 2007.

[8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. http://stacks.math.columbia.edu.