Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turrittin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

stand: 31. Mai 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Listings

0 Mathematische Grundlagen

Kommentar: Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

Wir betrachten $\mathbb{C}$ hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$ ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}(\!(x)\!) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit $\tilde{K}$ bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inclulsionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[\![x]\!]$ und $K \subsetneq \widehat{K}$ gelten.

Es bezeichnet der Hut ($\widehat{\ }$) das jeweils formale Äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Kommentar: Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$$^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den transponierten Vektor.

Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m dimensionalen Matritzen mit Einträgen in k.

Sei R ein Ring, dann bezeichnet $R^{\times}$ die Einheitengruppe von R.

Definition 0.1 (Direkte Summe)**.** [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *direkte Summe*, oder das *Coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$, so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
& & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 0.2 (Tensorprodukt)**.** [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\
& T
\end{tikzcd}$$

Für eine Abbildung $f : M \to M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_N \otimes f : \quad N \otimes_R M &\to N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

Bemerkung 0.3. Hier einige Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \tag{0.1}$$

$$M \otimes_R R \cong M \tag{0.2}$$

Sei $f : M' \to M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M/\operatorname{im}(f)) \cong N \otimes_R M/\operatorname{im}(\mathrm{id}_R \otimes f) \tag{0.3}$$

Definition 0.4 (Exakte Sequenz)**.** Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exakt, wenn für alle i gilt, dass $\mathrm{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.5 (Kurze exakte Sequenz)**.** Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0\,,$$

welche exakt ist.

Definition 0.6 (Kokern)**.** Ist $f : M' \to M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\mathrm{coker}(f) = M/\,\mathrm{im}(f)$.

Proposition 0.7. *Ist $f : M' \to M$ eine injektive Abbildung, so ist*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') & \longrightarrow & 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \mod f(M') & & \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz und $M/f(M') = \mathrm{coker}(f)$ ist der Kokern *von f.*

Beweis. □

Kommentar:

Definition 0.8 (Filtrierung)**.** [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung F* von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_iA)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_iA/F_{k-1}A$ und damit das zu A mit Filtrierung F *assoziierte graduierte Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} gr_i^F A\,.$$

Definition 0.9. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als Körper k immer ein Element aus $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \widehat{K}\}$ betrachten.

Definition 1.1 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 1.2. *Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \widehat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \to k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x, so gilt*

1. $[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$
2. *für $f \in k$ ist*
$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}\,. \tag{1.1}$$
3. *Es gelten die Formeln*
$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \tag{1.2}$$
$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \tag{1.3}$$
$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i} \tag{1.4}$$

Beweis.

1. Klar.
2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist
$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g\,.$$
3. Siehe [Sab90, 1.2.4.]

□

1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.5}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g\,.$$

Definition 1.3. Definiere nun den Ring $\mathcal{D}_k$ als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.5). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[\![x]\!]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) < \partial_x >$ falls $k = K \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}(\!(x)\!) < \partial_x >$ falls $k = \widehat{K} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ [1].

Bemerkung 1.4.
- Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$
- Offensichtlich erhält $\mathcal{D}_k$ in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapittel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- $\mathcal{D}_k$ ist nichtkommutativ.

Proposition 1.5. *[Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in $\mathcal{D}_k$ kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.*

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

[1] Wird mit $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$ bezeichnet, in [AV09].

> **Kommentar:** Gilt das folgende??
>
> $$\alpha_i(x)\partial_x^i \equiv \frac{\alpha_i}{x^i}(x\partial_x)^i \mod F_{i-1}\mathcal{D}$$

> **Kommentar:** Besser?:
> erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 1.6. Sei $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad (oder den ∂_x-Grad)* von P.

> **Kommentar:** Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

$\square$

Proposition 1.7. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} \underbrace{:= \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \quad}_{\cong \atop \textit{isomorph als grad. Ringe}} \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$$

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$ *als graduierte Ringe.*

Beweis. TODO

Kommentar: Treffen?

$\square$

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Kommentar: Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Ein *(holomorpher) differenzial Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzten $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung m, falls $\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$.

Definition 1.8. Mit $\mathcal{D}_X$ bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf X.

Die Garbe $\mathcal{D}_X$ hat eine Ringstruktur mittels der Komposition als Multiplikation und $\mathcal{O}_X$ ist ein Unterring von $\mathcal{D}_X$. Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über über X. Es gilt, dass Θ_X in $\mathcal{D}_X$ enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links $\mathcal{O}_X$-Untermodul, aber kein rechts $\mathcal{O}_X$-Untermodul ist.

Proposition 1.9. *[Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$. Wobei ∂_x als $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren*

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \qquad \text{mit} \qquad \partial_x x - x\partial_x = 1.$$

Somit stimmt die alternative Definition bereits mit der einfachen überein.

Kommentar:

Definition 1.10. [Ark12, Defn 2.1] Sei $X = \mathbb{A}^1$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{D}_X = [x, \partial_x]$ mit der Relation $[\partial_x, x] = 1$. Dann definieren wir die links $\mathcal{D}$-Moduln über $\mathbb{A}^1$ als die $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-Moduln. Sie werden geschrieben als $\mathcal{D} - mod(\mathbb{A}^1)$

1.2 (Links) $\mathcal{D}$-Moduln

Da $\mathcal{D}$ ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts $\mathcal{D}$-Moduln unterschiden. Wenn im folgendem von $\mathcal{D}$-Moduln gesprochen wird, werden immer links $\mathcal{D}$-Moduln gemeint.

Beispiel 1.11 (links $\mathcal{D}$-Moduln)**.** [Ark12, Exmp 2.2]

1. $\mathcal{D}$ ist ein links und rechts $\mathcal{D}$-Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ jeweils durch $x \cdot x^m = x^{m+1}$ und $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergurnd, ein Symbol $\exp(\lambda x)$ ein, mit $\partial(f(x)\exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x}\exp(\lambda x) + f\lambda\exp(\lambda x)$. So ist $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X \exp(\lambda x)$ ein $\mathcal{D}$-Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das $\mathcal{D}$-Modul $\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über $\mathcal{D}$ erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_x x \partial_x)\,.$$

Kommentar:

Lemma 1.12. *[Sab90, Lem 2.3.3.] Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist. Dann ist $\mathcal{M}$ bereits ein freies $\mathbb{C}\{x\}$-Modul.*

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.]. □

Korollar 1.13. *[Sab90, Cor 2.3.4.] Falls $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon $\mathcal{M} = \{0\}$.*

1.3 Holonome $\mathcal{D}_k$-Moduln

Definition 1.14. Sei $\mathcal{M}_k$ ein links $\mathcal{D}_k$-Modul. $\mathcal{M}_k$ heißt *holonom*, falls es ein Element $m \in \mathcal{M}_k$ gibt, das $\mathcal{M}_k$ als $\mathcal{D}_k$-Modul erzeugt. Im speziellen folgt damit, dass $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{D}_k/\mathfrak{a}$ für ein $0 \neq \mathfrak{a} \lhd \mathcal{D}_k$.

Bemerkung 1.15. In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die charakteristische Varietät.

Bemerkung 1.16. Nach [Cou95, Prop 10.1.1] gilt

- Submoduln und Quotienten von holonomen $\mathcal{D}_k$-Moduln sind holonom
- sowie endliche Summen von holonomen $\mathcal{D}_k$-Moduln sind holonom

und laut [Sab90, Thm. 4.2.3] gilt, dass

- für ein holonomes $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$-Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. ein $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[\![x]\!]}$-Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}[\![x]\!]}$) ist die Lokalisierung

  $$\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K \qquad (\text{bzw. } \mathcal{M}_{\mathbb{C}[\![x]\!]}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}[\![x]\!]} \otimes_{\mathbb{C}[\![x]\!]} \widehat{K}\ ),$$

  mit der $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[\![x]\!]}$) Modul Struktur durch

  $$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

  wieder holonom.

Satz 1.17. *Sei $\mathcal{M}_k$ ein holonomes $\mathcal{D}_k$-Modul, dann gilt, dass seine Lokalisierung isomorph zu $\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_k \cdot P$, mit einem $P \in \mathcal{D}_k$ ungleich Null, ist.*

Beweis. Siehe [Sab90, Cor 4.2.8]. □

Kommentar:

Alternative Definition B

Definition 1.18. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei $\mathcal{M}$ lineares Differentialsystem (linear differential system) . Man sagt, $\mathcal{M}$ ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\operatorname{Car} \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.19. *[Sab90, Lem 3.3.8.] Ein $\mathcal{D}$-Modul ist holonom genau dann, wenn* $\dim_{gr^F \mathcal{D},0} gr^F \mathcal{M} = 1$.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

Kommentar:

Alternative Definition A

Definition 1.20 (Holonome $\mathcal{D}$-Moduln)**.** [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich genertierter $\mathcal{D}$-Modul $\mathcal{M}$ ist *holonom*, falls $\mathcal{M} = 0$ gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

Bemerkung 1.21. [Cou95, Chap 10 §1] Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Links-Ideal von $\mathcal{D}$. Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$. Falls $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$, dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$. Somit ist $\mathcal{D}/\mathfrak{a}$ ein holonomes $\mathcal{D}$-Modul.

2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{D}$-Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit x bijektiv ist, so nennen wir $\mathcal{M}$ einen meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

Kommentar: [HTT07, Chap 5.1.1]

Systeme von ODEs Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ definieren wir das *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)* als

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x)\,, \tag{2.1}$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor[1] von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \ldots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Kommentar: TODO: zeige, das der lösungsraum die eigenschaften von $\mathcal{D}$-Moduln erfüllt siehe alternativer Zugang

Alternativer Zugang

[1] Für $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet ${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ den transponierten Vektor.

Kommentar: Sei P ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ geschrieben als $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i$. Man sagt eine Funktion $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von P, falls u die Gleichung $Pu = 0$ erfüllt. Man sagt 0 ist ein singulärer Punkt falls $a_d(0) = 0$. Falls 0 kein singulärer Punkt ist, hat P genau d über $\mathbb{C}$ Unabhängige Lösungen in $\mathbb{C}\{x\}$.

[Sab90, 3.1.1] Sei $\mathcal{F}$ ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren $\mathcal{D}$ wirken. Ein Element $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von $P \in \mathcal{D}$ falls $P \cdot u = 0$ gilt.

Falls u ein Lösung von P ist, so ist u auch Lösung von $Q \cdot P$ mit $Q \in \mathcal{D}$. Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal $\mathcal{D} \cdot P \lhd \mathcal{D}$ ab.

2.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tuppel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.2}$$

  erfüllen soll.

Bemerkung 2.2 (Formaler meromorpher Zusammenhang)*.* Analog definiert man einen *formalen meromorphen Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$ bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, ein endlich dimensionaler $\widehat{K}$-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \to \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

Definition 2.3. Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei meromorphe Zusammenhänge über k. Eine k-lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ist ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$.

Kommentar: TODO: Wann sind die Isomorph
$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ und die Ableitungen kommutieren mit dem Isomorphismus

Kommentar:

Definition 2.4. Wir erhalten damit die Kategorie dier meromorphen Zusammenhänge über k mit

$$\text{Objekte: } (M, \partial) \text{ meromorpher Zusammenhang über } k$$
$$\text{Morphismen: } (M, \partial) \xrightarrow{f} (M', \partial') \text{ Morphismus von meromorphen Zusammenhängen.}$$

Bemerkung 2.5. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet, sofern klar ist, welches K gemeint ist.

Kommentar: [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u\,,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.6 (Zusammenhangsmatrix)**.** [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein meromorpher Zusammenhang so wähle eine K-Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ von $\mathcal{M}$. Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j\,.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \ldots, u_n)$ beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\Big(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\Big) \overset{\overset{\boxed{??}}{\downarrow}}{=} \sum_{i=1}^n \Big(u_i'(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\Big)e_i\,.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_ie_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \ldots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder meromorphe Zusammanhang $(\mathcal{M}, \partial)$ ausgestattet mit einer K-Basis $\{e_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ von $\mathcal{M}$ zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^{n} K e_i \,, \qquad \partial_A \sum_{i=1}^{n} u_i e_i := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_j \right) e_i \,.$$

Genauer ausgeführt wird dies beispielsweise in [HTT07, Sec 5.1].

2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$-Moduln

Satz 2.7. *[Sab90, Thm 4.3.2] Ein meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes $\mathcal{D}_K$-Modul und umgekehrt.*

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma/Definition 2.8. *[AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$. So ein wird P dann als* Minimalpolynom *von $\mathcal{M}_K$ bezeichnet.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Kommentar:

Bemerkung 2.9. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$$

Kommentar: [Sab90, 4.2] Let $\mathcal{M}$ be a left $\mathcal{D}$-module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$-module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 2.10 (Lemma vom zyklischen Vektor)**.** *[Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei $\mathcal{M}_K$ ein meromorpher Zusammenhang. Es existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ eine K-Basis von $\mathcal{M}_K$ ist.*

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Korollar 2.11. *In der Situation von Lemma 2.10 gibt es ein $P \in \mathcal{D}_K$ mit ∂-Grad von P ist gleich d und $P \cdot m = 0$, in diesem Fall ist P ein Minimalpolynom zu $\mathcal{M}_K$, also gilt $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.*

Satz 2.12. *[AV09, Seite 64] Ist $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \,.$$

Beweis. [AV09, Seite 57-64] □

Korollar 2.13. *Sei $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ wie in Satz 2.12 so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

Beweis. Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.14. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}_K$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\ K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Kommentar:

Lemma 2.15. *Sei* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ *ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und* $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *ein Isomorphismus so ist* $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ *ein zu* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ *isomorpher Zusammenhang.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\ \mathcal{N} \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi"] & \mathcal{N} \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.16. *Sei* $\mathcal{M}_K$ *ein endlich dimensionaler* K*-Vektor Raum mit* ∂_1 *und* ∂_2 *zwei darauf definierte Derivationen, so gilt, die differenz zweier Derivationen ist* K*-linear.*

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{M}_K$. Da ∂_1 und ∂_2 $\mathbb{C}$-linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)\ \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

□

Korollar 2.17. *Für* (K^r, ∂) *ein meromorpher Zusammenhang existiert ein* $A \in M(r \times r, K)$*, so dass* $\partial = \frac{d}{dx} - A$.

Beweis. Es sei (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also lässt sich durch eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ darstellen , also ist, wie behauptet, $\partial = \frac{d}{dx} - A$. □

Proposition 2.18 (Transformationsformel)**.** *[HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation*

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\overset{\varphi}{\cong}"] & & & K^r \arrow[dl, "\overset{\varphi}{\cong}"'] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\overset{\psi}{\cong}"] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\overset{\psi}{\cong}"']
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dx}+A)$ und $(\frac{d}{dx}+B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der meromorphe Zusammenhang. $\frac{d}{dx}+A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r,K)$ zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

Definition 2.19 (Differenziell Äquivalent)**.** Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r,K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

Kommentar: $1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$
$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

2.3 Newton Polygon

Kommentar: Quelle: sabbah?
sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, also insbesondere auch jedes $P \in \mathcal{D}_K$, lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\partial_x^k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl}x^l)\partial_x^k$$

mit $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) :&= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \Big((m, l-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \subset \mathbb{R}^2 \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \Big((m, deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \subset \mathbb{R}^2 . \end{aligned}$$

Definition 2.20. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\mathrm{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Bemerkung 2.21. Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x)(x\partial_x)^k$$

mit $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexen Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \Big((m, deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Definition 2.22. Die Menge $\mathrm{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ für die Menge der zu $\mathcal{M}$ gehörigen slopes.
- P heißt *regulär* oder *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \mathrm{slopes}(P) = \{0\}$ oder $\deg P = 0$, sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ (bzw. $\mathcal{M}_K$) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ (bzw. $P \in \mathcal{D}_K$) gibt, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ (bzw. $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$).

Beispiel 2.23. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = x^1 \partial_x^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$m = 2 \qquad \text{und} \qquad l = 1$$

so dass

$$H(P_1) = \Big((2, 1-2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\} .$$

In Abbildung 2.1 ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\mathrm{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$, so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$ ist.

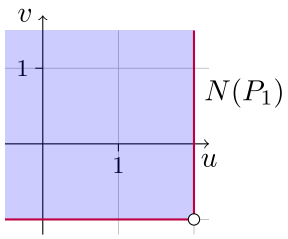


Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$

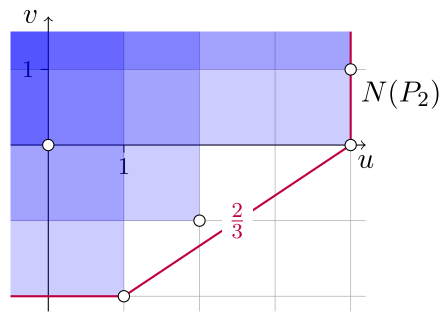


Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu P_2

Bemerkung 2.24. [AV09, Bem 5.4] Für alle $f \in \mathcal{D}^{\times}_{\widehat{K}}$

Kommentar: $f \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$

gilt allgemein, dass das zu $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von $f \cdot P$ übereinstimmt.

Beweis. TODO □

Kommentar: Damit Lässt sich das Newton Polygon, durch ein f, immer so Verschieben, dass $(0,0) \in N(f \cdot P)$, und es gilt, dass

$$\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \lhd \mathcal{D}_K$$

ist.

Definition 2.25. In einem Polynom $P = \varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$, mit $\varepsilon, \alpha_{kl} \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$ sind die restlichen Monome *Therme im Quadranten* von $\varepsilon x^p \partial_x^q$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}_{\geq -N}$ mit $\alpha_{kl} \neq 0$ gilt: $k \leq q$ und $l - k \geq p - q$.

Bemerkung 2.26.

- Anschaulich bedeutet das, dass
$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \Big((q, p-q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \supset \Big((k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) = H(\alpha_{kl} x^l \partial_x^k)\,,$$
für alle relevanten k und l.

- Sei P ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von $\varepsilon x^p \partial_x^q$ sind, dann gilt:
$$H(P) = H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^{n} (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l) \partial_x^k)$$

$$
\begin{aligned}
&= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \textbf{T.i.Q. von } x^p \partial_x^q) \\
&= H(\varepsilon x^p \partial_x^q) \\
\Rightarrow N(P) &= N(\varepsilon x^p \partial_x^q)\,.
\end{aligned}
$$

Also können Therme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Therms befinden und nicht der Therm selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das **T.i.Q.** ist eine hier Abkürzung für Therme im Quadranten.

Kommentar:

Beispiel 2.27.

$$(x^a \partial_x^b)^c = x^{ac}\partial_x^{bc} + \textbf{T.i.Q. von } x^{ac}\partial_x^{bc}$$

und somit gilt

$$
\begin{aligned}
N((x^a \partial_x^b)^c) &= N(x^{ac}\partial_x^{bc} + \textbf{T.i.Q. von } x^{ac}\partial_x^{bc}) \\
&= N(x^{ac}\partial_x^{bc})
\end{aligned}
$$

Lemma 2.28. *[Sab90, Seite 26] Das Newton-Polygon hängt, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten meromorphen Zusammenhang ab.*

Kommentar: *ODER: assoziierte meromorphen Zusammenhänge haben gleiche Slopes aber sind möglicherweise vertikal verschoben.*

Lemma 2.29. *[Sab90, 5.1]*

1. *$\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$*
2. *Wenn man eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{M}'_K \to \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}''_K \to 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.*

Kommentar: *Siehe auch [Sab90, Thm 5.3.4]*

Dort Steht:
Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_1 \to \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \to \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_2 \to 0$$

Korollar 2.30. *[Sab90, Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$*

Satz 2.31. *[Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge seiner slopes. Es exisitiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung*

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

Bemerkung 2.32. In Satz 2.31 ist es wirklich notwendig, formale meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente meromorphe Zusammenhänge.

Kommentar:

Beispiel 2.33. [Sab90, Ex 5.3.6] Sei $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$. So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

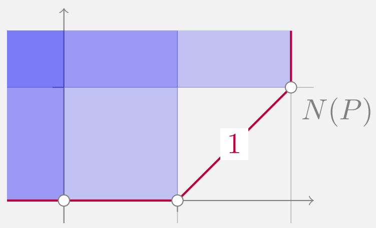


Abbildung 2.3: Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$

mit den Slopes $\mathcal{P}(P) = \{0, 1\} =: \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Nach dem Satz 2.31 existiert eine Zerlegung $P = P_1 \cdot P_2$ mit $\mathcal{P}(P_1) = \{\Lambda_1\}$ und $\mathcal{P}(P_2) = \{\Lambda_2\}$. Durch scharfes hinsehen erkennt man, dass

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &\dots \\ &= (x(x\partial_x) + \dots) \cdot (x\partial_x + \dots) \\ &\dots \\ &= P_1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

anders geschrieben

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= xx\partial_x x\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^2(x\partial_x + 1)\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^3\partial_x^2 + x^2\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^3\partial_x^2 + (x^2 + x)\partial_x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

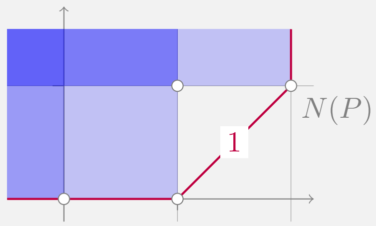


Abbildung 2.4: Newton Polygon zu P

Kommentar:

Korollar 2.34. *[Sab90, Cor 5.2.6] Falls $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein regulärer formaler meromorpher Zusammenhang ist, dann ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen Zusammenhängen. Wobei die elementaren formalen Zusammenhänge die sind, die zu passendem $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$ isomorph sind.*

2.3.1 Die Filtrierung ${}^{\ell}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ-Symbol

Kommentar: TODO: mache alle Linearform L zu ℓ

Sei $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ vollständig gekürtzt, also mit λ_0 und λ_1 in $\mathbb{N}$ relativ prim. Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ in zwei Variablen, sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. Falls $P = x^a\partial_x^b$ mit $a \in \mathbb{Z}$

und $b \in \mathbb{N}$, setzen wir

$$\operatorname{ord}_\ell(P) = \ell(b, b-a)$$

und falls $P = \sum_{i=0}^{d} b_i(x)\partial_x^i$ mit $b_i \in \widehat{K}$, setzen wir

$$\operatorname{ord}_\ell(P) = \max_{\{i \mid a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)) \,.$$

Definition 2.35 (Die Filtrierung ${}^{\ell}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$)**.** [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration ${}^{\ell}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welche mit $\mathbb{Z}$ indiziert ist, durch

$${}^{\ell}V_\lambda\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \operatorname{ord}_\ell(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

Bemerkung 2.36. Man hat $\operatorname{ord}_\ell(PQ) = \operatorname{ord}_\ell(P) + \operatorname{ord}_\ell(Q)$ und falls $\lambda_0 \neq 0$, hat man auch, das $\operatorname{ord}_\ell([P,Q]) \leq \operatorname{ord}_\ell(P) + \operatorname{ord}_\ell(Q) - 1$.

Definition 2.37 (ℓ-Symbol)**.** [Sab90, Seite 25] Falls $\lambda_0 \neq 0$, ist der graduierte Ring $gr^{{}^{\ell}V}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_\lambda^{{}^{\ell}V}\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von ∂_x in dem Ring durch ξ, dann ist der Ring isomorph zu $\widehat{K}[\xi]$. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, so ist $\sigma_\ell(P)$ definiert als die Klasse von P in $gr^{{}^{\ell}V}_{\operatorname{ord}_\ell(P)}\mathcal{D}_{\widehat{K}}$. σ_ℓ wird hierbei als das ℓ-Symbol Bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\sigma_\ell(x^a\partial_x^b) = x^a\xi^b$.

Bemerkung 2.38. Bei [Sab90] wird der Buchstabe L anstatt ℓ für Linearformen verwedet, dieser ist hier aber bereits für $\mathbb{C}\{t\}$ reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als ${}^{L}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ-Symbol als L-Symbol zu finden.

Bemerkung 2.39. Ist $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ geschrieben als $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$. So erhält man $\sigma_\ell(P)$ durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) \mid \ell(i,i-j) = \operatorname{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \,.$$

Beweis. TODO □

Kommentar: Ich will die Linearform vermeiden und direkt die skalare Steigung verwenden

Definition 2.40 (Stützfunktion)**.** Die Funktion

$$\omega_P : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u.v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zu dieser Ordnung verwendet.

Bemerkung 2.41. Wenn $\ell(x_0, s_1)$ wie oben aus Λ entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = ord_\ell(P)\,.$$

Kommentar: TODO: ist ℓ Slope (gehört zu Slope) dann hat $\sigma_\ell(P)$ zumindest 2 Monome

2.4 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

2.4.1 Tensorprodukt

Proposition 2.42. *[Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_\mathcal{M})$ und $(\mathcal{N}, \partial_\mathcal{N})$ meromorphe Zusammenhänge. Sei $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$. Durch Setzten von*

$$\partial_\otimes(m \otimes n) = \partial_\mathcal{M}(m) \otimes n + m \otimes \partial_\mathcal{N}(n) \tag{2.3}$$

als die Wirkung von ∂ auf das K-Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem meromorphen Zusammenhang.

Kommentar:

Beweis. Klar □

Lemma 2.43. *[Sab90, Ex 5.3.7] Falls $\mathcal{N}$ regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ genau die Menge der Slopes von $\mathcal{M}$.*

Beweis. TODO □

2.4.2 pull-back und push-forward

Kommentar: Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3].

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \qquad \in t\mathbb{C}[\![t]\!]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir meistens $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \qquad \text{bzw.} \qquad \rho^* : \mathbb{C}[\![x]\!] \hookrightarrow \mathbb{C}[\![t]\!], f \mapsto f \circ \rho\,.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \qquad \text{bzw.} \qquad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}(\!(t)\!), f \mapsto f \circ \rho\,,$$

wobei L (bzw. $\widehat{L}$) eine endliche Körpererweiterung von K (bzw. $\widehat{K}$) ist.

Kommentar: TODO: damit wird $\widehat{L}$ zu einem $\widehat{K}$ Vektorraum.

Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 2.44 (pull-back)**.** [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *inverse Bild* $\rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}(\!(t)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(x)\!)} \mathcal{M}_{\mathbb{C}(\!(x)\!)}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m\,. \tag{2.4}$$

Für ein allgemeines $\varphi \otimes m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m\,. \tag{2.5}$$

Kommentar: Nun wollen wir uns noch genauer mit dem pull-back beschäftigen, und stellen uns die Frage:

Wie sieht die Wirkung der Derivation auf dem pull-back Zusammenhang aus? Für $\rho(t) = t^p$ betrachten wir beispielsweise ein Element der Form $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\
&= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t))\underbrace{\partial_{\rho(t)}}_{=\partial_x} m \\
&= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m = (\star) \\
\rho'(t)^{-1}\partial_t(f(x)m) &= \frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t(f(t^p)m) \\
&= f'(t^p)m + f(t^p)\frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t m = (\star)
\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$ und somit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_x gleich der Wirkung von $\rho'(t)^{-1}\partial_t$ ist. In der Tat stimmt diese Vermutung, wie das folgende Lemma zeigt.

Satz 2.45. *In der Situation von Lemma 2.44, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ für ein $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, gilt*

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}\Big/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)\,.$$

Für $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ werden wir auch $\rho^*P(t, \partial_t)$ schreiben.

Kommentar: [Cou95, Seite 130] Holonomic modules are preserved under this construction.

Kommentar: [Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ als den Vektor Raum über $\widehat{L}$: $\pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \otimes m)\,.$$

Man erhält damit die Wirkung von $\partial_t = t^{-1}(t\partial_t)$.

Für den Beweis von Satz 2.45 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

Lemma 2.46. *Es gilt* $\rho^*\mathcal{D}_{\widehat{K}} \overset{def}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ *als* $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$*-Vektorräume, mittels*

Kommentar: *VR oder Moduln??*

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\qquad\cong\qquad} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{aligned}$$

Versuch 1. *Beweis.* Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ erfüllt, in diesem Fall folgt die Behauptung. Zunächst sei die bilineare Abbildung

$$\kappa : \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} \to \mathcal{D}_{\widehat{L}},\ (f(t), Q(x, \partial_x)) \mapsto f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$$

gegeben, und nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es genau eine lineare Abbildung, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\kappa"'] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{tikzcd}$$

Dieser so erhaltene eindeutige Morphismus ist genau unser Φ.

$$\begin{tikzcd} \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\kappa"] \arrow[ddr, "\gamma"'] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[d, "\Phi"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "\exists!"] \\ & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[d, dashed, "\exists?"] \\ & V \end{tikzcd}$$

$\square$

Versuch 2. *Beweis.* Prüfe zunächst die Injektivität. Sei $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \ker(\Phi)$ so, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(f(t) \otimes Q(x, \partial_x)) \\ &= f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{aligned}$$

und, da hier alles nullteilerfrei ist, ist die Bedingung äquivalent zur folgenden

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 0 = f(t) \quad \text{oder} \quad 0 = Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\
&\Leftrightarrow \quad \dots \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = f(t) \otimes Q(x, \partial_x)\,.
\end{aligned}$$

Kommentar: TODO

Nun zur Surjektivität. Sei $g(t,\partial_t) = \sum_k a_k(t)\partial_t^k \in \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ so gilt

$$\begin{aligned}
g(t,\partial_t) &= \sum_k a_k(t)\partial_t^k \\
&= \sum_k a_k(t)(\underbrace{\rho'(t)\rho'(t)^{-1}}_{=1})^k\partial_t^k \\
&= \sum_k a_k(t)\rho'(t)^k(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^k
\end{aligned}$$

und zerlege $a_k(t)\rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
g(t,\partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^k \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \Big(\sum_k a_{k,i}(t^p)(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^k \Big) \\
&= \Phi\Big(\sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes (\sum_k a_{k,i}(x)(\partial_x)^k) \Big)\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.47. *Das in Lemma 2.46 definierte Φ ist sogar ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar $\rho^*\mathcal{D}_{\widehat{K}} \overset{def}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als meromorphe Zusammenhänge.*

Beweis. Sei ∂_t wie gewohnt und $\partial_\otimes$ der Zusammenhang auf $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welcher wie in Proposition 2.42 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_\otimes$ gilt, also dass Φ ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\partial_\otimes"] \arrow[d, "\cong\Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[d, "\cong\Phi"] \\
\mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\partial_t"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
\end{tikzcd}$$

und für einen Elementartensor $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

Kommentar: Q wie in großen beweis später, Namenskollision

folgt dann

$$\begin{tikzcd}
f(t) \otimes Q(x,\partial_x) \arrow[r, mapsto, "\partial_\otimes"] \arrow[dd, mapsto, "\Phi"] & \partial_t f(t) \otimes Q(x,\partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x,\partial_x) \arrow[d, mapsto, "\Phi"] \\
 & \partial_t f(t) Q(x,\partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q}\partial_t) \arrow[d, bend left, "="] \\
f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \arrow[r, mapsto, "\partial_t"] & \partial_t f(t) Q(x,\partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q}\partial_t)
\end{tikzcd},$$

also kommutiert das Diagramm. $\square$

Kommentar:

Bemerkung 2.48. BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma **2.46**, definierte Φ erfüllt für Elementartensoren $1 \otimes m \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

$$\begin{aligned}
\partial_u(1 \otimes m) &\overset{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\
&\overset{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(t)\rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\
&= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

und somit (**2.4**) wie gewollt.

Lemma 2.49. *Sei $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$. In der Situation*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes _ \cdot P(x,\partial_x)"] \arrow[d, "\cong \Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[d, "\cong \Phi"] \\
\mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
\end{tikzcd}$$

mit Φ wie in Lemma 2.46 macht $\alpha := \_\cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. Betrachte ein $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. So gilt

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x,\partial_x) & \xmapsto{\mathrm{id}\otimes \_\cdot P(x,\partial_x)} & f(t)\otimes Q(x,\partial_x)\cdot P(x,\partial_x) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ & & f(t)Q(\rho(t),\rho'(t)^{-1}\partial_t)\cdot P(\rho(t),\rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} f(t)\otimes Q(x,\partial_x) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \\ f(t)Q(\rho(t),\rho'(t)^{-1}\partial_t) & \xmapsto{\_\cdot P(\rho(t),\rho'(t)^{-1}\partial_t)} & f(t)Q(\rho(t),\rho'(t)^{-1}\partial_t)\cdot P(\rho(t),\rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit $\alpha = \_\cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$. □

Beweis zu Satz 2.45. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \overset{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\_\cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & 0 \\ & & u & \longmapsto & u\cdot P & & & & \\ & & & & u & \longmapsto & u \mod \mathcal{D}_{\widehat{K}}\cdot P & & \end{array}$$

ist exakt, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}\Big/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \operatorname{coker}(\_ \cdot P)$. Weil $\widehat{K}$ flach ist, da Körper, ist auch, nach Anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \_$, die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\_\cdot P} & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \| & & \\ & & & & & & \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} & & \end{array}$$

exakt.

Kommentar: Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} &\cong \operatorname{coker}(\mathrm{id}\otimes \_ \cdot P) && \text{(weil exakt)} \\ &\cong \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \Big/ \Big((\widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}})\cdot(\mathrm{id}\otimes \_ \cdot P)\Big) && \text{(nach def. von coker)} \end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 2.46 und $Q(t,\partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ nach Lemma 2.49 ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\_\cdot P"] \arrow[d, "\cong\Phi"] & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong\Phi"] & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\_\cdot Q"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & & \end{tikzcd}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, weil $\_\cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz fortsetzen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\_\cdot P"] \arrow[d, "\cong\Phi"] & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\pi_{\widehat{K}}"] \arrow[d, "\cong\Phi"] & \widehat{L}\otimes_{\widehat{K}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\_\cdot Q"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\pi_{\widehat{L}}"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}}\big/\mathcal{D}_{\widehat{L}}\cdot Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Cokerne, die Behauptung. □

Lemma 2.50. *[Sab90, 5.4.3] Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p\cdot\Lambda_n$.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}}\cdot P$ mit $P = \sum a_i(x)\partial_x^i$, dann ist $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}}\cdot P'$ mit

$$\begin{aligned} P'(t,\partial_t) &= P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\ &= \sum a_i(\rho(t))(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^i \\ &= \sum a_i(t^p)((p\cdot t^{p-1})^{-1}\partial_t)^i \end{aligned}$$

Kommentar: TODO: Hier weiter...

□

Beispiel 2.51 (pull-back)**.** Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt $\operatorname{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.5). Wende den pull-back mit $\rho : t \to x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 2.45 einfacher anwenden können:

$$
\begin{aligned}
&\partial_x \rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)}\partial_t = \frac{1}{2t}\partial_t\,,\\
&\partial_x^2 \rightsquigarrow (\frac{1}{2t}\partial_t)^2 = \frac{1}{2t}\partial_t(\frac{1}{2t}\partial_t) = \frac{1}{2t}(-\frac{1}{2t^2}\partial_t + \frac{1}{2t}\partial_t^2) = \frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t\,.
\end{aligned}
$$

Also ergibt Einsetzen

$$
\begin{aligned}
\rho^* P &= (t^2)^3(\frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t) - 4(t^2)^2\frac{1}{2t}\partial_t - 1\\
&= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 \underbrace{-t^3\frac{1}{4}\partial_t - 4t^3\frac{1}{2}\partial_t}\, -1\\
&= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 \overbrace{-2\frac{1}{4}t^3\partial_t}\, -1\,.
\end{aligned}
$$

Also ist $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$ mit $\operatorname{slopes}(\rho^*P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.6) und somit $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1)$.

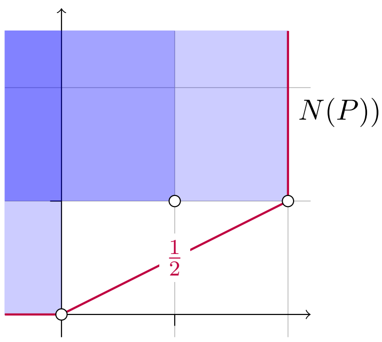


Abbildung 2.5: Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$

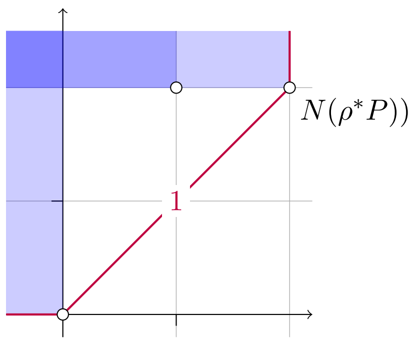


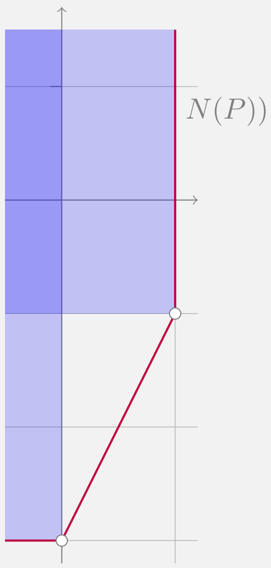
Abbildung 2.6: Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$

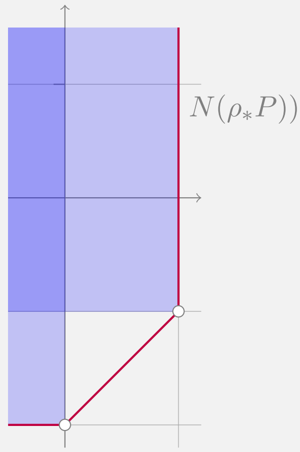
Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler $\widehat{L}$-VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.52 (push-forward)**.** [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *direktes Bil* $\rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

- der $\widehat{K}$-VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist definiert als der $\mathbb{C}$-Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der $\widehat{K}$-Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \begin{array}{ccc} \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} & \to & \mathcal{N}_{\widehat{L}} \\ (f(x), m) & \mapsto & f(x) \cdot m := f(\rho(t))m \end{array}$ und
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1}\partial_t$.

Kommentar:





Newton-Polygon zu $\rho_+ P$

Newton-Polygon zu P

Beispiel 2.53 (push-forward)**.** Für $\rho : t \to u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^{\varphi} &\cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=:P} \end{aligned}$$

mit slopes$(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 2.4.2). Bilde nun das Direkte Bild über ρ, betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist $\rho_+\mathscr{E}^\varphi \cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}}\cdot(\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\operatorname{slopes}(\rho_+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.4.2)

Satz 2.54. *[Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}\,. \tag{2.6}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && (\text{def von } \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}})\\
&\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && (\text{Rechenregeln Tensorprodukt})\\
&\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && (\text{Rechenregeln Tensorprodukt})\\
&= \rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?)
\end{aligned}$$

$\square$

Kommentar: Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned}
\rho^+\mathscr{E}^{\varphi(t)} &= \mathscr{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathscr{E}^{\varphi(u^p)}\\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta\in\mu_p} \mathscr{E}^{\varphi(\zeta\cdot u)}
\end{aligned}$$

2.4.3 Fouriertransformation

Definition 2.55 (Fouriertransformation)**.** [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1] Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x)\partial_x^i$. Dann ist die *fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^{d} a_i(\partial_z)(-z)^i$$

Definition 2.56 (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln)**.** Ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K}\cdot P$ so ist die fouriertransformierte davon ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K}\cdot\mathcal{F}_P(x, \partial_x)$.

Beispiel 2.57. Sei $P = x^3\partial_x^4 + x^2\partial_x^2 + x$ dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_P &= \partial_z^3(-z)^4 + \partial_z^2(-z)^2 + \partial_z \\
&= \underbrace{\partial_z^2 z^2} + \underbrace{\partial_z^3 z^4} + \partial_z \\
&= \overbrace{z^4\partial_z^3 + \underbrace{[\partial_z^3, z^4]}} + \overbrace{z^2\partial_z^2 + \underbrace{[\partial_z^2, z^2]}} + \partial_z \\
&= z^4\partial_z^3 + \overbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{4\cdot 3\ldots(5-i)\cdot 3\cdot 2\ldots(4-i)}{i!} z^{4-i}\partial_z^{3-i}}} + z^2\partial_z^2 \\
&\quad + \overbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{2} \frac{2\cdot 1\ldots(3-i)\cdot 2\cdot 1\ldots(3-i)}{i!} z^{2-i}\partial_z^{2-i}}} + \partial_z \\
&= z^4\partial_z^3 + \overbrace{12z^3\partial_z^2 + \frac{72}{2}z^2\partial_z + \frac{144}{6}z} + z^2\partial_z^2 + \overbrace{4z\partial_z + \frac{4}{2}} + \partial_z \\
&= z^4\partial_z^3 + (12z^3 + z^2)\partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1)\partial_z + 24z + 2
\end{aligned}$$

mit den Newton Polygonen wie in Abbildung 2.7 und 2.8.

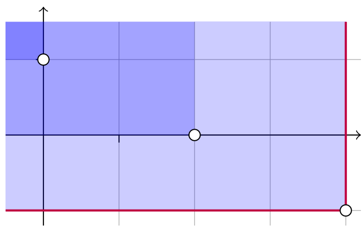


Abbildung 2.7: Newton-Polygon zu P

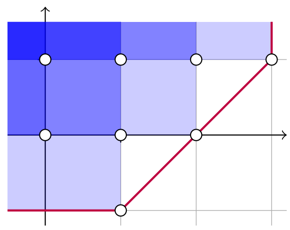


Abbildung 2.8: Newton-Polygon zu $\mathcal{F}_P$

Kommentar:

2.4.4 Betrachten bei Unendlich

3 Elementare meromorphe Zusammenhänge

3.1 Elementare formale meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.1. Ein *elementarer formaler meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang $\mathcal{M}$, welcher isomorph zu $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$, mit passendem α und p, ist.

Lemma 3.2. *[Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über $\widehat{K}$ mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[\![x]\!]$ hat.*

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \ldots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.10). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1}(-b_i(x))\partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \widehat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x)\partial_x^i m = 0$.

Kommentar: TODO: bis hier schon klar

Tatsächlich kann man $b_i(x) = x^i b_i'(x)$ mit $b_i' \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \ldots, (x\partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[\![x]\!]$. □

Lemma 3.3. *[Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über $\widehat{K}$ so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.*

Beweis. Siehe [Sab90, Thm 5.2.2] □

Satz 3.4. *Ein regulärer formaler Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen.*

Beweisskizze. Siehe [Sab90, Cor. 5.2.6]. Man wählt eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, in der die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist. Diese Matrix kann in Jordan Normalform gebracht werden und damit erhält man das Ergenis. □

3.2 Elementare meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: einführen als Bausteine oder kleinste meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: ALT:

Definition 3.5. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben $\mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((x)) \overset{\text{def}}{=} \widehat{K}$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_x + \partial_x\varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$.

Definition 3.6. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben $\mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\boldsymbol{e} \cdot \widehat{K}$, wobei $\boldsymbol{e} \in \mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}$ Basis ist, ausgestattet mit $\partial_x(f \cdot \boldsymbol{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \boldsymbol{e}$, im speziellen also $\partial_x \boldsymbol{e} = \varphi'$.

Bemerkung 3.7.

1. Die $\mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}$ stellen so etwas, wie die einfachsten meromorphen Zusammenhänge mit einem ganzzahligem Slope, dar.
2. Wir werden oft $\boldsymbol{e} = 1$ als Basis nehmen.
3. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.
4. Es ist $\mathscr{E}^{\varphi} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$, weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$.

Lemma 3.8. *Für* $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$ *mit* $a_{-p} \neq 0$ *gilt, dass* $\mathcal{P}(\mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}) = \begin{cases} \{p\} & , \textit{wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \textit{wenn } p < 0 \end{cases}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\
&= \sum_{i=-p+1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \\
&= \underbrace{-pa_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i
\end{aligned}$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können, $(1,-1)$ und $(0,-(p+1))$ sind. Da einer der Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesammt nur einen Slope Λ geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \max\{0, \frac{-1-(-(p+1))}{1}\} \\ &= \max\{0,p\} \\ &= \begin{cases} p & \text{, wenn } p \geq 0 \\ 0 & \text{, wenn } p < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

Kommentar:

Bemerkung 3.9. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathscr{E}^{\varphi} \cong \mathscr{E}^{\psi}$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$.

Lemma 3.10. *[Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt*

$$\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi} = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}\,.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d, "\partial_t"] & \bigoplus_{\xi^p=1}\mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_t"] \\ \rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1}\mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \end{tikzcd}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung 3.9 berechtigt. Wir wählen eine $\widehat{L}$ Basis $\boldsymbol{e}$ des Rang 1 $\widehat{L}$-Vektorraum $\mathscr{E}^{\varphi}$ und damit erhält man die Familie $\boldsymbol{e}, t\boldsymbol{e}, ..., t^{p-1}\boldsymbol{e}$ als $\widehat{K}$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^{\varphi}$. Es gilt

$$\partial_x t^k \boldsymbol{e} = \rho'(t)^{-1}\,\underbrace{\partial_t t^k}\,\boldsymbol{e} = \rho'(t)^{-1}\,\overbrace{(t^k\partial_t + kt^{k-1})}\,\boldsymbol{e}\,. \tag{3.1}$$

Durch die Setzung $\boldsymbol{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \boldsymbol{e}$ wird die Familie $\mathbf{e} := (\boldsymbol{e}_0, ..., \boldsymbol{e}_{p-1})$ eine $\widehat{L}$-Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^\varphi$.

Zerlege nun

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \qquad\qquad \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}] \tag{3.2}$$

mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ (siehe: Anhang A). Damit gilt:

$$t\partial_t \boldsymbol{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \boldsymbol{e}_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \boldsymbol{e}_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
t\partial_t \boldsymbol{e}_k &= t\,\partial_t(t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \boldsymbol{e}) \\
&\overset{(2.3)}{=} t\,(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \boldsymbol{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x(\underbrace{t^k \boldsymbol{e}}_{\in \rho_+ \mathscr{E}^\varphi})) \\
&\overset{(3.1)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \boldsymbol{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (pt^{p-1})^{-1}(kt^{k-1}\boldsymbol{e} + t^k \varphi'(t)\boldsymbol{e}) \\
&= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \boldsymbol{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1}\boldsymbol{e} + t^k\varphi'(t)\boldsymbol{e}) \\
&= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \boldsymbol{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1}\boldsymbol{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t)\boldsymbol{e} \\
&= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k\, t\varphi'(t)\, \boldsymbol{e} \\
&\overset{(3.2)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p)\, \boldsymbol{e} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p)(t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \boldsymbol{e}) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p)(t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i}\boldsymbol{e}) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \boldsymbol{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \boldsymbol{e}_{k+i-p}\,.
\end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_{p-1}, \boldsymbol{e}_0)$ gilt. Es gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t \boldsymbol{e}_0, ..., t\partial_t \boldsymbol{e}_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \boldsymbol{e}_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \boldsymbol{e}_{k+i-p} \right)_{k \in \{0,..,p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & & \cdots & t^3\psi_3(t^p) & t^2\psi_2(t^p) & t^1\psi_1(t^p) \\
t^1\psi_1(t^p) & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & & & \ddots & t^2\psi_2(t^p) \\
t^2\psi_2(t^p) & t^1\psi_1(t^p) & \ddots & & & t^3\psi_3(t^p) \\
t^3\psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & t^1\psi_1(t^p) & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & \\
t^{p-2}\psi_{p-2}(t^p) & \cdots & t^3\psi_3(t^p) & t^2\psi_2(t^p) & t^1\psi_1(t^p) & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p)
\end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right] .
\end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis $\mathbf{e}$ von $\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi(t)}$ ist also beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right] .$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(X) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. Sei so ein ξ ab jetzt fixiert. So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\
&= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p) \left(\xi^1\right)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p) \left(\xi^{p-1}\right)^j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1}\psi_j(t^p)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j(t^p)\xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}t)\xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1}\xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1}t)^{p-1}\xi^{p-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

da $\varphi'(t) = pt^{p-1}$. Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_t"] & \widehat{L}^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)V^j}"] & \widehat{L}^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)D^j}"] & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_{\xi^i}} \arrow[d, "\partial_t"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \widehat{L}^p \arrow[l, "\cong"'] & \widehat{L}^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_{\xi^i}} \\
 & (\star) & &
\end{tikzcd}
$$

der mit $(\star)$ bezeichnete Teil kommutiert, wobei $\Phi : (0, \dots, 0, \overset{\boxed{\text{k-te Stelle}}\downarrow}{1}, 0, \dots, 0) \mapsto e_k$ der kanonische Basisisomorphismus und e_k Basis von $\mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_{\xi^{k-1}}}$. Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$
\partial_t(v) = \Phi\big(\Phi^{-1}(v) \cdot \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)D^j\right]\big) \qquad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_{\xi^i}}
$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente e_k gilt. Nach Definition 3.6 gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t e_k &= \underbrace{(\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t)}\, e_k \\
&\boxed{\text{Kettenregel}} \\
&\downarrow \\
&= \overbrace{\underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})}\cdot\underbrace{\varphi'(t)}}\, e_k \\
&= \overbrace{(\xi^{k-1})^p}\cdot\overbrace{(pt^{p-1})}\, e_k \\
&= p(\xi^{k-1}t)^{p-1}\xi^{k-1}e_k
\end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{tikzcd}
\Phi^{-1}(e_k) = (\dots,0,1,0,\dots) \arrow[d, mapsto, "\boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)D^j}"] & e_k \arrow[l, mapsto, "\Phi^{-1}"'] \\
(\dots,0,p(\xi^{k-1}t)^{p-1},0,\dots) \arrow[r, mapsto, "\Phi"] & \varphi'(\xi^{k-1}t)\xi^{k-1}e_k
\end{tikzcd}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt. □

Definition 3.11. Ein *elementarer meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang $\mathcal{M}$, für den es $\psi \in \mathbb{C}(\!(x)\!)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathscr{E}^{\psi} \otimes R_{\alpha,p}\,,$$

mit $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$, also ein elementarer formaler meromorpher Zusammenhang, ist.

Kommentar:

Lemma 3.12. $\mathscr{E}^{\psi} \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot(x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p$

Beweis. Siehe [Hei10, Lem 5.12] □

Kommentar:

3.3 Defnintion in [Sab07]

Definition 3.13 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in t\mathbb{C}[\![t]\!]$, $\varphi \in \widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}(\!(t)\!)$ und einem endlich dimensionalen $\widehat{L}$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten elementaren endlich dimensionalen $\widehat{K}$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E}^{\varphi} \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \mod \mathbb{C}[\![t]\!]$ ab.

Lemma 3.14. *[Sab07, Lem 2.2]*

Lemma 3.15. *[Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$ genau dann, wenn*

- *es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \mod \mathbb{C}[\![t]\!]$*
- *und $S \cong R$ als $\widehat{L}$-Vektorräume mit Zusammenhang.*

Beweis. Siehe [Sab07, Lem 2.6.] □

Proposition 3.16. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale $\widehat{K}$-Vektorraum $\mathcal{M}$ mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^{\varphi} \otimes L)$, wobei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, $\rho : t \to t^p$ vom Grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ. (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 $\widehat{L}$-Vektrorraum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. Siehe [Sab07, Prop 3.1] □

3.4 Twisten von meromorphen Zusammenhängen

Kommentar: [Cou95, Chap 5 §2]

Lemma 3.17. *Sei $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ ein meromorpher Zusammenhang mit P von Grad q und mit $\boldsymbol{e}$ als ein zyklischer Vektor, so ist $\boldsymbol{e} \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{\psi}_{\widehat{K}}$.*

Beweis. Da der Grad von P gleich q ist, ist nach Lemma 3.18 auch Q von grad q und somit $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$. Also reicht es zu zeigen, dass $\boldsymbol{e} \otimes 1$, $\partial_x(\boldsymbol{e} \otimes 1)$, $\partial_x^2(\boldsymbol{e} \otimes 1)$,..., $\partial_x^{q-1}(\boldsymbol{e} \otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x(\boldsymbol{e} \otimes 1) &= (\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\
&= (\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \boldsymbol{e} \otimes \psi'(x) \\
&= (\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\boldsymbol{e} \otimes 1) \\
\partial_x^2(\boldsymbol{e} \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\boldsymbol{e} \otimes 1)) \\
&= (\partial_x^2 \boldsymbol{e}) \otimes 1 + (\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(\boldsymbol{e} \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \boldsymbol{e} \otimes \psi'(x)) \\
&= (\partial_x^2 \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \psi''(x)(\boldsymbol{e} \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \psi'(x)^2(\boldsymbol{e} \otimes 1) \\
&= (\partial_x^2 \boldsymbol{e}) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(\boldsymbol{e} \otimes 1) \\
&\vdots \\
\partial_x^{q-1}(\boldsymbol{e} \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \cdots + \lambda_1(\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \lambda_0(\boldsymbol{e} \otimes 1)
\end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \otimes 1 \\ \partial_x(\boldsymbol{e} \otimes 1) \\ \partial_x^2(\boldsymbol{e} \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(\boldsymbol{e} \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(\boldsymbol{e} \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \otimes 1 \\ (\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 \boldsymbol{e}) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} \boldsymbol{e}) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} \boldsymbol{e}) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich $\boldsymbol{e} \otimes 1$, $(\partial_x \boldsymbol{e}) \otimes 1$, $(\partial_x^2 \boldsymbol{e}) \otimes 1$,..., $(\partial_x^{q-1} \boldsymbol{e}) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $\boldsymbol{e} \otimes 1$, $\partial_x(\boldsymbol{e} \otimes 1)$, $\partial_x^2(\boldsymbol{e} \otimes 1)$,..., $\partial_x^{q-1}(\boldsymbol{e} \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 3.18. *Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ und sei $\varphi \in \widehat{K}$. So gilt*

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{\varphi} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$.

Beweisskizze. Zeige, dass $P(x, \partial_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x})\boldsymbol{e} \otimes 1 = 0$ gilt, da $\boldsymbol{e} \otimes 1$ eine zyklischer Vektor folgt damit aus Gradgründen die Behauptung. Genauer ausgeführt wird dies in [Hei10, Seiten 39 bis 44].

Kommentar:

$$P(x, \partial_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x})\boldsymbol{e} \otimes 1 = TODO$$

□

Korollar 3.19. *Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und φ wie in 3.18, so gilt*

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{-\varphi} = \mathcal{M}_{\widehat{K}}\,.$$

Beweis. Denn

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{-\varphi} \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathscr{E}^{-\varphi} \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x \underbrace{- \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}\,.
\end{aligned}$$

□

3.5 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

Kommentar:

3.5.1 Klassische Version

Satz 3.20. *[Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl p so dass der Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, mit $\rho : t \mapsto x := t^p$, isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren meromorphen Zusammenhänge ist.*

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

Beweis. Zum Beweis wird Induktion auf die Lexicographisch geordnetem Paare $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$ angewendet. Wobei $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dem größtem Slope von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Es wird $\kappa = \infty$ gesetzt, falls der größte Slope nicht Ganzzahlig ist.

Kommentar: TODO: induktionsanfang und -schritt kennzeichnen

Wir nehmen oBdA an, dass $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ genau einen Slope Λ hat, sonst Teile $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ mittels Satz 2.31 in meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ (vollständig gekürtzt) Definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$. Wir nennen $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$ die *Determinanten Gleichung* von P. Da L zu einem Slope von P gehört, besteht $\sigma_L(P)$ aus zumindest zwei Monomen.

Kommentar: and is homogeneous of degree $\mathrm{ord}_L(P) = 0$ because P is chosen with coefficients in $\mathbb{C}[\![x]\!]$, one of them, being a unit.

Schreibe

$$\begin{aligned}\sigma_L(P) &= \sum_{L(i,i-j)=\mathrm{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i,i-j)=0} \alpha_{ij} x^j \xi^i \,.\end{aligned}$$

Sei $\theta := x^{\lambda_0+\lambda_1} xi^{\lambda_1}$ so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei $\alpha_0 \neq 0$ ist.

Erster Fall: $\lambda_1 = 1$. Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta} \,.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. Sei β_0 eine der Nullstellen. So setze $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0+1)) z^{\lambda_0+1}$ und betrachte $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}^R_{\widehat{K}}$.

Kommentar: AB HIER VLT NICHT RICHTIG, nur versuch

Falls $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$ gilt

$$P\Big(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\Big) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial(\frac{\beta_0}{\lambda_0+1} x^{-(\lambda_0+1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 z^{-(\lambda_0+2)}\,.\end{aligned}$$

Schreibe $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0+2)})$.

Lemma 3.21. *Es gilt, dass P' Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$ hat.*

Beweis. TODO ☐

Des weiteren ist $\sigma_L(P') = \sum_{k\geq 0} \alpha_k(\theta + \beta_0)^k$. Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat nur eine Nullstelle.**

Kommentar: TODO: Hier weiter

2. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat mehrere Nullstellen.**

Kommentar: TODO: Hier weiter

Zweiter Fall: $\lambda_1 \neq 1$. In diesem Fall ist einzige Slope Λ nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit λ_1. Sei $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$ und erhalte P' so dass $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$. Nach Lemma 2.50 hat P' den einen Slope $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$. Damit können wir nun die zugehörige Linearform $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$ definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \ldots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an.

☐

Kommentar:

3.5.2 Sabbah's Refined version

Proposition 3.22. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$, wobei $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^-1]$, $\rho : x \mapsto t = x^p$ mit grad $p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und S ist ein Rang 1 $\widehat{K}$-Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 3.23 (Refined Turrittin-Levelt)**.** *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus El(\rho, \varphi, R) \overset{def}{=} \bigoplus \rho_+(\mathscr{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

4 Explizite berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von $\mathcal{D}$-Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu einem Beispiel unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem φ D-Moduln ergibt. Im laufe des Kapitels werden immer speziellere φ betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

4.1 Rezept für allgemeine φ

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} | I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und beginne mit $\mathscr{E}^\varphi$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Big(\underbrace{\textbf{Hauptnenner von } \tfrac{d}{dt}\varphi(t)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}^*_{\widehat{L}}} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t))\Big) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\Big(t^{\max(I)+1} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t))\Big)}_{=:Q(t,\partial_t)}.
\end{aligned}$$

Kommentar: Dies ändert den meromorphen Zusammenhang nicht, weil $t^{\max(I)+1}$ eine Einheit in $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ (und auch in $\mathcal{D}_L$) ist.

3. Fouriertransformiere $\mathscr{E}^{\varphi}$ und erhalte

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{F}}\mathscr{E}^{\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z,\partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z,-z)}_{\in\mathbb{C}[z]<\partial_z>}. \end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an. Was passiert mit der Ableitung ∂_x? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f)\cdot(-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f)\cdot z^2 = -z^2\cdot\partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2\partial_z$, und somit

$$P_\varphi(x,\partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1},-x^2\partial_x) \in \mathbb{C}[t] < \partial_t > \; .$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom P_φ assoziierten formalen meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$ betrachten.

Lemma 4.1. *Zu einem* $\varphi = \sum_{k\in I}\frac{a_k}{t^k} \in \{\varphi = \sum_{k\in I}\frac{a_k}{t^k} | I \subset \mathbb{N}$ *endlich*$, a_k \in \mathbb{C}\}$ *ist das Minimalpolynom von* $\mathcal{M}_\varphi$ *explizit gegeben durch*

$$P_\varphi(x,\partial_x) = (-x^2\partial_x)^{\max(I)}(x\partial_x - 1) + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \qquad \in \mathbb{C}[x] < \partial_x > \; .$$

Beweis. Sei $\varphi = \sum_{k\in I}\frac{a_k}{t^k}$, so ist

$$\begin{aligned} Q(t,\partial_t) &= t^{\max(I)+1}(\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \\ &= t^{\max(I)+1}\Big(\partial_t + \sum_{k\in I} k\frac{a_k}{t^{k+1}}\Big) \\ &= t^{\max(I)+1}\partial_t + \sum_{k\in I} k a_k t^{\max(I)-k} \qquad\qquad \in \mathbb{C}[t] < \partial_t > \\ \mathcal{F}_Q(z,\partial_z) &= Q(\partial_z,-z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k\in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k} \end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} P_\varphi(x,\partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1},-x^2\partial_x) \\ &= -(-x^2\partial_x)^{\max(I)+1}x^{-1} + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2\partial_x)^{\max(I)} x^2\,\partial_x x^{-1} + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-x^2\partial_x)^{\max(I)}\, x^2 \left(x^{-1}\partial_x - x^{-2}\right) + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \\
&= (-x^2\partial_x)^{\max(I)} \left(x\partial_x - 1\right) + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \qquad \in \mathbb{C}[x] < \partial_x >
\end{aligned}
$$

□

Im Anhang B wird das $(x^2\partial_x)^k$ genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

Lemma 4.2. *Es gilt* $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$.

Beweis. Kommentar: [Sab07, 5.b.]

Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir P_φ um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von bedeutung sind und deshalb vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die Konvexen Hüllen, die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert werden. Sei $q := \max(I)$.

$$
\begin{aligned}
H\Big(P_\varphi(x,\partial_x)\Big) &= H\Big((-x^2\partial_x)^q(x\partial_x - 1) + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\
&= H\Big((-1)^q(x^{2q}\partial_x^q + \underbrace{\textbf{T.i.Q. von } x^{2q}\partial_x^q}_{\text{liefern keinen Beitrag}})(x\partial_x - 1) + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\
&= H\Big(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \quad x^{2q}\partial_x^q(x\partial_x - 1) + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\
&= H\Big(x^{2q}\,\partial_x^q x\,\partial_x - x^{2q}\partial_x^q + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\
&= H\Big(x^{2q}\left(x\partial_x^q + q\partial_x^{q-1}\right)\partial_x - x^{2q}\partial_x^q + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\
&= H\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q}\partial_x^q - x^{2q}\partial_x^q}_{\substack{\text{im Quadranten von } x^{2q+1}\partial_x^{q+1}, \\ \text{sind also vernachlässigbar}}} + \sum_{k\in I} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\
&= H\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k\in I\setminus\{q\}} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big)
\end{aligned}
$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe auch vernachlässigt werden kann.

Behauptung: Es gilt

$$
H\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k\in I\setminus\{q\}} k a_k (-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \subset H\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + q a_q\Big)
$$

Denn: Betrachte zu einem $m \in I \backslash \{q\}$, einen Summanden $ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}$ aus der Summe:

$$\begin{aligned} H(ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}) &= H(ma_m(-1)^q(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m} + \textbf{T.i.Q. von } x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})) \\ &= H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m}) \\ &= (q-m, q-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

In Abbildung 4.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten dargestellt, mit $N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q)$ in der gewohnten Farbe und in Blau ist $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$ eingezeichnet. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh.□

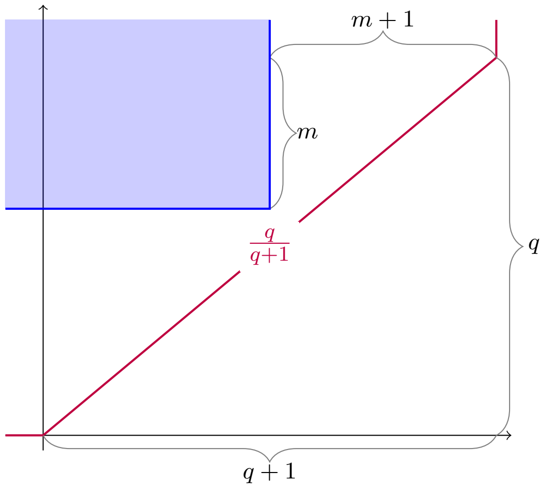


Abbildung 4.1: Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$\begin{aligned} H\Big(P_\varphi(x,\partial_x)\Big) &= H\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q + \sum_{k \in I\backslash\{q\}} ka_k(-x^2\partial_x)^{q-k}\Big) \\ &\overset{\text{Beh.}}{=} H\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q\Big) \end{aligned}$$

Also ist

$$N\Big(P_\varphi(x,\partial_x)\Big) = N\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q\Big).$$

womit die Behauptung des Lemmas folgt und das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.1 aussieht. □

Also ist, nach Lemma 2.50, ein pull-back mit Grad $q+1$ hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Denn wir wissen, dass nach Anwenden eines solchem pull-backs die Slopes mit $q+1$ multipliziert werden, also gilt $\mathcal{P}(\rho^+\mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$.

Lemma 4.3. *Im Fall $\varphi = \frac{a}{t^q}$ ist mit $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$ der pull-back gegeben durch*

$$\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2}\partial_t)^q(t\partial_t - (q+1)) + (q+1)qa)\,.$$

Beweis. Sei $\varphi = \frac{a}{t^q}$, so ist P gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2\partial_x)^q(x\partial_x - 1) + qa\,,$$

und sei $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\rho^+\mathcal{M}_\varphi &= \rho^+(\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \rho^* P_\varphi(t, \partial_t) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi\Big(-(q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2t^q}\partial_t\Big) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Bigg((-(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q+1)^2t^q}\partial_t)^q (-(q+1)t^{q+1}\frac{-1}{(q+1)^2t^q}\partial_t - 1) + qa \Bigg) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Bigg(\Big(\underbrace{\frac{(q+1)^2}{(q+1)^2}}_{=1} t^{2(q+1)-q}\partial_t \Big)^q (\frac{1}{q+1}t\partial_t - 1) + qa \Bigg) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Big((t^{q+2}\partial_t)^q(\frac{1}{q+1}t\partial_t - 1) + qa \Big) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Big((t^{q+2}\partial_t)^q(t\partial_t - (q+1)) + (q+1)qa \Big)
\end{aligned}$$

□

Kommentar:

Korollar 4.4. *Ordnung vom pull-back ist* 0

Definiere mittels $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = qs_0 + s_1\,.$$

Schreibe $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$ und berechne die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$.

Kommentar: Schon gezeigt, das $ord_\ell = 0$?

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \mid \ell(i,i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\ &= \sum_{\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i\end{aligned}$$

Da $\widehat{L}[\xi]$ kommutativ ist gilt hier, dass $(t^j\xi^i)^k = t^{jk}\xi^{ik}$ ist. Setze $\theta = t^{\lambda_0+\lambda_1}\xi^{\lambda_1} = t^{q+1}\xi$ so können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \theta^k \qquad\qquad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta \text{ Nullstelle}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}\,.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$ eine Konstante ist. Sei β eine der Nullstellen. Da $\mathrm{ord}_\ell(\rho^* P_\varphi) = 0$ und der einzige Slope von $\rho^* P_\varphi$ nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass $\alpha_0 \neq 0$. Also ist 0 keine Nullstelle von $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = (\beta/q)t^{-q}$ und betrachte

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &:= \rho^+\mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathscr{E}^\psi_{\widehat{L}} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t,\partial_t)) \otimes_{\widehat{L}} \mathscr{E}^\psi_{\widehat{L}} \\ &\overset{3.18}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t,\partial_t - \frac{\partial\psi}{\partial t})) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t,\partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}})) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (t^{q+2}(\partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}))^q (t(\partial_x + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}) - (q+1)) + (q+1)qa\end{aligned}$$

Kommentar: TODO: hier weiter vereinfachen

Zerlege nun wie in Satz 2.31 den meromorphen Zusammenhang $\mathcal{N}$ in $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$ wobei $\mathcal{N}_i$ meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. Twiste die $\mathcal{N}_i$ jeweils mit $\mathscr{E}^{-\psi}_{\widehat{L}}$ und somit ist dann

$$\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathscr{E}^{-\psi}_{\widehat{L}}\,.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun, falls dieser nicht schon ein elementarer meromorpher Zusammenhang ist, Induktion anwenden.

Kommentar: nicht elementar, sondern regulär otimes E

4.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Kommentar: rechtfertigen, das mehr gerechnet wird, als nötig

Als konkreten Fall betrachten wir nun $\mathcal{M}_\varphi$ bezüglich $\varphi_1 := \frac{a}{x}$. Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2\partial_x(x\partial_x - 1) + a \\
&= -x^2\, \partial_x x\, \partial_x + x^2\partial_x + a \\
&= -x^2\, (x\partial_x + 1)\, \partial_x + x^2\partial_x + a \\
&= -x^3\partial_x^2 \underbrace{- x^2\partial_x + x^2\partial_x}_{=0} + a \\
&= -x^3\partial_x^2 + a
\end{aligned}$$

Erhalte daraus das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$.

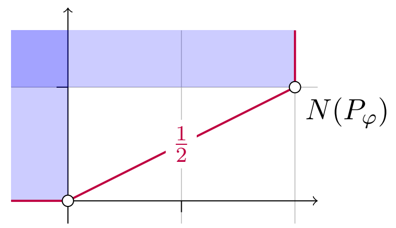


Abbildung 4.2: Newton Polygon zu P_φ

Berechne nun zu $\rho : t \mapsto x := -2t^2$ ein Minimalpolynom $\rho^* P_\varphi$ zu $\rho^+\mathcal{M}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
\rho^* P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3\partial_t(t\partial_t - 2) + 2a \\
&= t^3\, \partial_t t\, \partial_t - 2t^3\partial_t + 2a \\
&= t^3\, (t\partial_t + 1)\, \partial_t - 2t^3\partial_t + 2a \\
&= t^4\partial_t^2 + t^3\partial_t - 2t^3\partial_t + 2a \\
&= t^4\partial_t^2 - t^3\partial_t + 2a
\end{aligned}$$

und erhalte einen meromorphen Zusammenhang $\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_\varphi$ mit genau dem Slope $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$.

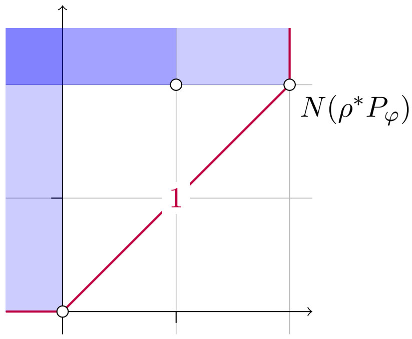


Abbildung 4.3: Newton Polygon zu $\rho^* P_\varphi$

Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$. Berechne nun die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ von $\rho^* P_\varphi$.

$$\begin{aligned}\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \mid 2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= t^4 \xi^2 + 2a\end{aligned}$$

Setze $\theta := t^{\lambda_0+\lambda_1}\xi^{\lambda_1} = t^2\xi$ so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \theta^2 + 2a\,,$$

mit den Nullstellen $i\sqrt{2a} =: \beta$ und $-i\sqrt{2a}$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$ und betrachte den Twist $\mathcal{N} := \rho^+\mathcal{M}_\varphi \otimes \mathscr{E}^\psi$ von $\rho^+\mathcal{M}$. Es ist $\boldsymbol{e} \otimes 1$ ein zyklischer Vektor, wobei $\boldsymbol{e}$ ein zyklischer Vektor von $\rho^+\mathcal{M}$ ist. Mit dem Lemma vom Zyklischem Vektor wollen wir nun ein Minimalpolynom zu $\mathcal{N}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\partial_t^2(\boldsymbol{e} \otimes 1) &= \partial_t(\partial_t(\boldsymbol{e} \otimes 1)) \\ &\overset{(2.3)}{=} \partial_t((\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \boldsymbol{e} \otimes \psi'(t)) \\ &\overset{(2.3)}{=} (\partial_t^2 \boldsymbol{e}) \otimes 1 + (\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes \psi'(t) + (\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes \psi'(t) + \boldsymbol{e} \otimes \underbrace{(\psi''(t) + \psi'(t)^2)}_{\in K} \\ &= ((t^{-1}\partial_t - 2at^{-4})\boldsymbol{e}) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)\boldsymbol{e} \otimes 1 \\ &= (t^{-1}\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes 1 - 2at^{-4}\boldsymbol{e} \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes 1 + \psi''(t)\boldsymbol{e} \otimes 1 + \psi'(t)^2 \boldsymbol{e} \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))\,(\partial_t \boldsymbol{e}) \otimes 1 + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\boldsymbol{e} \otimes 1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.3)}{=} (t^{-1} + 2\psi'(t))\,(\partial_t(\boldsymbol{e} \otimes 1) - \boldsymbol{e} \otimes \psi'(t)) + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\boldsymbol{e} \otimes 1 \\
&= (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t(\boldsymbol{e} \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2)\boldsymbol{e} \otimes 1 \\
&\qquad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\boldsymbol{e} \otimes 1 \\
&= \Big((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2\Big)\boldsymbol{e} \otimes 1 \\
&= \Big((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2\Big)\boldsymbol{e} \otimes 1
\end{aligned}
$$

also

$$
0 = \underbrace{\Big(\partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2\Big)}_{=:P'}\boldsymbol{e} \otimes 1
$$

und mit $\psi(t) = i\sqrt{2a}t^{-1}$ ist $\psi'(t) = -i\sqrt{2a}t^{-2}$ und $\psi''(t) = 2i\sqrt{2a}t^{-3}$. Also durch Einsetzen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\
&= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-3} + 2at^{-4} - 2i\sqrt{2a}t^{-3} + (-i\sqrt{2a}t^{-2})^2 \\
&= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\
&= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}
\end{aligned}
$$

mit, wie gewünscht, einem regulärem Anteil.

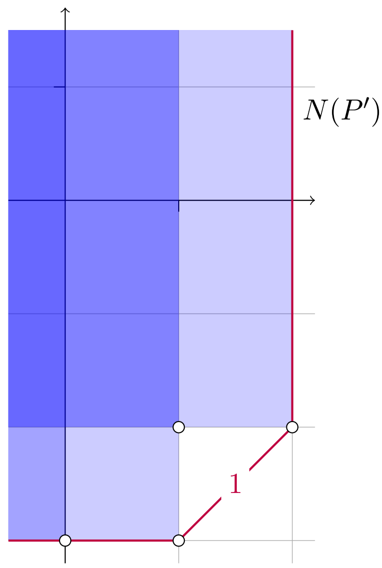


Abbildung 4.4: Newton Polygon zu $\mathcal{N}$

Kommentar:

Bemerkung 4.5. Alternativ ließe sich ein Minimalpolynom von $\mathcal{N}$ mit der Formel aus Lemma 3.18 berechnen. Denn mit $\rho^*P(t,\partial_t) = t^4\partial_t^2 - t^3\partial_t + 2a$, ist

$$\begin{aligned}
\rho^*P(t,\partial_t - \frac{\partial\psi}{\partial t}) &= \rho^*P(t,\partial_t - \frac{-i\sqrt{2a}}{t^2}) \\
&= t^4\,(\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2})^2 - t^3(\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2}) + 2a \\
&= t^4\,(\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2})(\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
&= t^4\,(\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^{-2}\partial_t + \partial_t i\sqrt{2a}t^{-2} + (i\sqrt{2a}t^{-2})^2) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
&= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^4\,\partial_t t^{-2} - 2at^{-4}\,t^4 - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
&= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^4\,(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t \\
&= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^2\partial_t - 2i\sqrt{2a}t - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t \\
&= t^4\partial_t^2 - (t^3 - 2i\sqrt{2a}t^2)\partial_t - 3i\sqrt{2a}t \\
&= t^4P'(t,\partial_t)
\end{aligned}$$

Nachdem wir jetzt ein Minimalpolynom gefunden haben ist unser nächstes Ziel, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}}\cdot P'$ in zwei meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt $P'(t,\partial_t) = Q_1(t,\partial_t)\cdot Q_2(t,\partial_t)$.

Da der ∂_t-Grad von P' genau 2 ist, müssen die Q_i jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen. Allgemein haben dir Q_i also die Form

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \qquad Q_2 := \bar{u}(t)\partial_t + u(t) \qquad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), \bar{u}(t), u(t) \in \widehat{L}\,.$$

Beobachtung 4.6. Ist Q_1 und Q_2 so ein solches Paar, dann ist für $\sigma \in \widehat{L}$ das Paar $\bar{Q}_1 := Q_1\cdot\sigma^{-1}$ und $\bar{Q}_2 := \sigma\cdot Q_2$ ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1\cdot Q_2 = Q_1\cdot\underbrace{\sigma^{-1}\cdot\sigma}_{=1}\cdot Q_2 = \bar{Q}_1\cdot\bar{Q}_2\,.$$

Mit der Beobachtung 4.6 ist klar, dass wir den Faktor vor ∂_t in Q_2 frei wählen können. Setze $\bar{u}(t) := 1$ und erhalte

$$Q_1 = \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \qquad Q_2 = \partial_t + u(t) \qquad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \widehat{L}$$

und somit ist ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\overset{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3} \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Damit ist ebenfalls $\bar{v}(t) = 1$.

Durch das Wissen über die Slopes der Q_i erhalten wir noch Informationen über die Reihen $v(t) := \sum_n v_n t^n$ und $u(t) := \sum_n u_n t^n$. Die beiden Polynome Q_1 und Q_2 enthalten ∂_t als einziges Monom vom ∂_t-Grad 1, deshalb ist $(1, -1)$ in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da Q_1 nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.5 aussenen und somit wissen wir, dass $v_n = 0$ für alle $n < -1$. Da Q_2 genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 4.6. Damit ist $u_n = 0$ für alle $n < -2$ und $u_{-2} \neq 0$.

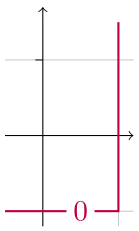


Abbildung 4.5: Newton-Polygon zu Q_1

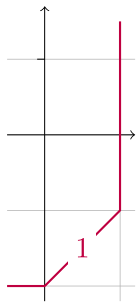


Abbildung 4.6: Newton-Polygon zu Q_2

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (4.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) \tag{4.2}$$

und mit denn Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \underbrace{[\partial_t, u_n t^n]}) \\ &\overset{(1.1)}{=} \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \overbrace{n u_n t^{n-1}}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergenis nun in (4.2) einsetzen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) \\
&= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Betrachte nun das Letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) &\overset{\boxed{\text{Indexshift}}}{=} t^{-3}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n\Big) \\
&\overset{\boxed{\text{Cauchy Produkt}}}{=} t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} v_{k-1} u_{n-k-2}\Big) t^{n-3} \\
&\overset{\boxed{\text{Indexshift}}}{=} \sum_{n=-3}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1}\Big) t^n
\end{aligned}
$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (4.3) integrieren, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \sum_{n=-3}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1}\Big) t^n \\
&= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \Big((n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1}\Big) t^n \\
&\overset{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a} t^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2a} t^{-3}
\end{aligned}
$$

Nun haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit der gewünschten Formel vergleichen lässt:

$$
2i\sqrt{2a} t^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \tag{4.4}
$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty}\Big((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big)t^n \tag{4.5}$$

Nun können wir mit (4.4) und (4.5) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich machen und erhalten zunächst aus (4.4), dass

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \tag{4.6}$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \tag{4.7}$$

$$0 = u_n + v_n \qquad \forall n \geq 0 \tag{4.8}$$

Als nächstes wollen wir dieses Ergenis mit (4.5) kombinieren. Betrachte zunächst die Vorfaktoren vor t^{-3}:

$$\begin{aligned}
-3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^{0} v_{k-1}u_{-3-k+1} \\
&= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\
&\overset{(4.6)}{=} -2\cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\
\overset{a\neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\overset{(4.7)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} \\
&= u_{-1} + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Nun zum allgemeinem Koeffizienten vor t^n mit $n > -3$:

$$\begin{aligned}
0 &= (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1} \\
&= (n+1)u_{n+1} + \Big(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big) + v_{n+3-1}\,u_{n-(n+3)+1} \\
&= (n+1)u_{n+1} + \Big(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big) + v_{n+2}\,u_{-2} \\
\Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= -\left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\overset{u_{-2}\neq 0}{\Rightarrow} v_{n+2} = -\frac{1}{u_{-2}}\left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right)$$

und nach passendem Indexshift folgt

Kommentar: $n+2 \to n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}}\left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-1}\right)\\
&\overset{(4.6)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}}\left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-1}\right)\\
&= \frac{i}{2\sqrt{2a}}\left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-1}\right)
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ mit $\mathcal{N}_1 = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n)$ und $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n)$ Zusammen mit $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, $u_{-1} = -\frac{3}{2}$ und $v_{-1} = \frac{1}{2}$ sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}}\left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \qquad \forall n \geq 0 \tag{4.9}$$

die Koeffizienten von $v(t)$ und $u(t)$ vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit $\mathscr{E}^{-\psi(t)}$ zurücktwisten und erhalte damit die Zerlegung

$$\begin{aligned}
\rho^{+}\mathcal{M}_{\varphi} &\overset{3.19}{=} \rho^{+}\mathcal{M}_{\varphi} \otimes \mathscr{E}^{\psi(t)} \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)}\\
&= (\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)}\\
&= \mathcal{N}_1 \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)} \oplus \mathcal{N}_2 \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)}\\
&= (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)}) \oplus (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)})
\end{aligned}$$

wobei Q_1 bereits regulär. Betrachte also noch $\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)} &\overset{3.18}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2})\\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2} + u(t))\\
&= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n)\\
&\overset{3.18}{=} \underbrace{\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n)}_{\text{regulär}} \otimes \mathscr{E}^{\psi(t)}
\end{aligned}$$

Kommentar: Damit ist der zweite Summand also auch ein elementarer meromorpher Zusammenhang.

Also zerlegt sich $\mathcal{M}$, nach einem pull-back mit $\rho : t \mapsto x = -2t^2$, in

$$\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \Bigg(\underbrace{\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Big(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big) \otimes \mathscr{E}^{-\psi(t)}}_{=:\mathcal{R}_1}\Bigg) \oplus \Bigg(\underbrace{\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \Big(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n\Big) \otimes \mathscr{E}^{\psi(t)}}_{=:\mathcal{R}_2}\Bigg).$$

Nach zerlegen von $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ in eine direkte Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen, wie in Satz 3.4, ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

4.2.1 Konvergenz der Summanden

Kommentar: TODO: text
Es ist klar, dass die Potenzreihen nicht konvergent sein dürfen, trotzdem wollen wir die Potenzreihen auf Konvergenz untersuchen

Für $n > 0$ gilt $v_{n-1} \overset{(4.8)}{=} -u_{n-1}$ und damit wollen wir die Formel (4.9) noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt. Aus (4.9) ergeben sich zunächst für $n = 0$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{u_{-2}}((-1)u_{-1} + \sum_{k=0}^{0} v_{k-1}u_{-k-1}) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}}(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}) \\ &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\ &\overset{(4.6)}{=} \frac{3i}{8\sqrt{2a}} = -u_0 \end{aligned}$$

Kommentar: Somit ergeben sich für $n = 1$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{u_{-2}}((1-1)u_{1-1} + \sum_{k=0}^{1} v_{k-1}u_{1-k-1}) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}}(v_{-1}u_0 + v_0u_{-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{v_0}{u_{-2}}(-v_{-1}+u_{-1}) \\
&= \frac{3}{u_{-2}\cdot 4u_{-2}}(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}) \\
&= \frac{3}{4u_{-2}^2}(-2) \\
&= -\frac{3}{2u_{-2}^2} \\
&= \frac{3}{16a} = -u_1 && \overset{a=\frac{1}{8}}{=} 1.5
\end{aligned}
$$

und für $n = 2$ ist

$$
\begin{aligned}
v_2 &= -\frac{1}{u_{-2}}((2-1)u_{2-1} + \sum_{k=0}^{2} v_{k-1}u_{2-k-1}) \\
&= -\frac{1}{u_{-2}}(u_1 + v_{-1}u_1 + v_0u_0 + v_1u_{-1}) \\
&= -\frac{1}{u_{-2}}(\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{-3}{4u_{-2}}\frac{3}{4u_{-2}} + \frac{-3}{2u_{-2}^2}\frac{-3}{2}) \\
&= -\frac{1}{u_{-2}^3}(\frac{24}{16} + \frac{12}{16} - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}) \\
&= -\frac{63}{16u_{-2}^3} \\
&= -\frac{63}{16(2i\sqrt{2a})^3} \\
&= \frac{63}{256ia\sqrt{2a}} \\
&= -\frac{63}{256a\sqrt{2a}} = -u_2 && \overset{a=\frac{1}{8}}{\approx} -3.9375i
\end{aligned}
$$

und für $n = 3$ ist

$$
\begin{aligned}
v_3 &= -\frac{1}{u_{-2}}((3-1)u_{3-1} + \sum_{k=0}^{3} v_{k-1}u_{3-k-1}) \\
&\approx -u_{-2}^{-4}(\underbrace{-\frac{63}{8} - \frac{1}{2}v_2} - v_0v_1 - v_1v_0 - \frac{3}{2}v_2) \\
&= -u_{-2}^{-4}(\overbrace{-\frac{(4-1)63}{32}} - 2\frac{-3}{4}\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\frac{-63}{16}) \\
&= -\frac{-(4-1)63 - 8\cdot 9 + 3\cdot 63}{32u_{-2}^4} \\
&= -\frac{-8\cdot 9}{8\cdot 4u_{-2}^4} \\
&= \frac{9}{4u_{-2}^4}
\end{aligned}
$$

Kommentar: und analog, für $n = 1$ und $n = 2$

$$v_1 = -\frac{3}{2u_{-2}^2} = \frac{3}{16a} = -u_1 \qquad \text{und} \qquad v_2 = -\frac{63}{16u_{-2}^3} = -\frac{63i}{256a\sqrt{2a}} = -u_2\,.$$

Die letzten zwei Paare sind für die Berechnung nicht von bedeutung und dienen nur dazu, das Programm zu prüfen.

Nun vereinfachen wir die Formel:

$$\begin{aligned}
v_n &= -\frac{1}{u_{-2}}\Big((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-1}\Big)\\
&= -\frac{1}{u_{-2}}\Big((n-1)u_{n-1} + v_{-1}\,u_{n-1} + \big(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}\,u_{n-k-1}\big) + v_{n-1}u_{-1}\Big)\\
&\overset{(4.8)}{=} -\frac{1}{u_{-2}}\Big(-(n-1)v_{n-1} + v_{-1}\,(-v_{n-1}) + \big(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}\,(-v_{n-k-1})\big) + v_{n-1}u_{-1}\Big)\\
&= -\frac{1}{u_{-2}}\Big(-(n-1)v_{n-1} - \frac{1}{2}v_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} - \frac{3}{2}v_{n-1}\Big)\\
&= \frac{1}{u_{-2}}\Big((n-1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1}\Big)\\
&= \frac{1}{u_{-2}}\Big((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1}\Big)
\end{aligned}$$

Also, zu gegebenem $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, sind die Koeffizienten gegeben durch:

$$\begin{aligned}
v_{-1} &= \frac{1}{2} & u_{-1} &= -\frac{3}{2}\\
v_0 = -u_0 &= -\frac{3}{4u_{-2}}\\
v_n = -u_n &= \frac{1}{u_{-2}}\left((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1}\right) & &\forall n > 0
\end{aligned}$$

Ein Haskell Modul, welches die Koeffizienten des Systems berechnet, kann wie folgt aussehen:

Listing 4.1: Koeffs.hs

```
-- | Dieses Modul stellt Funktionen bereit, welche die zu einem Startwert
-- gehörigen Koeffizienten von v(t) und u(t) generieren
module Koeffs
  ( vKoeffs
  , uKoeffs
  ) where
```

```
import ComplRat
import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie

-- returns array with the coefficients of v(t)
-- first element in array is koefficient from t^{-1}
vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
vKoeffs uMin2 = 1/2:+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
  where koeff :: Int -> ComplRat
        koeff = memo koeff'
        koeff' :: Int -> ComplRat
        koeff' n | n >   0    = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
                 | n ==  0    = -3/(uMin2*4)
                 | n == -1    = 1/2
                 | otherwise = 0
                 where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]

-- returns array with the coefficients of u(t)
-- first element in array is koefficient from t^{-2}
uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2:+:0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))
```

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von u_{-2} eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `CompRat`, welcher die Menge $\mathbb{Q}(i)$ implementiert. Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a+ib$ entspricht. `ComplRat` ermöglicht es, dass die Berechung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

In folgender Abbildung sind die Beträge der Koeffizienten von $v(t)$ in Abhängigkeit von n für verschiedene u_{-2} angetragen.

Nun zum Konvergenzverhalten. Es ist klar, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_{\widehat{L}} \backslash \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \widehat{L} \backslash L \qquad \text{bzw.} \qquad (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \in \mathcal{D}_{\widehat{L}} \backslash \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \widehat{L} \backslash L$$

Deshalb wollen wir die Potenzreihen v und u und im besonderen deren konvergenzverhalten, noch genauer betrachten. Außerdem gilt, dass $v(t) \in \widehat{L} \backslash L \Leftrightarrow u(t) \in \widehat{L} \backslash L$. Wir betrachten wir den folgenden zwei klasischen Konvergenzkriterien.

Satz 4.7 (Wurzlkriterium nach Cauchy)**.** *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{ die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

Beweis. siehe [Kno64, §18, Satz 94]. □

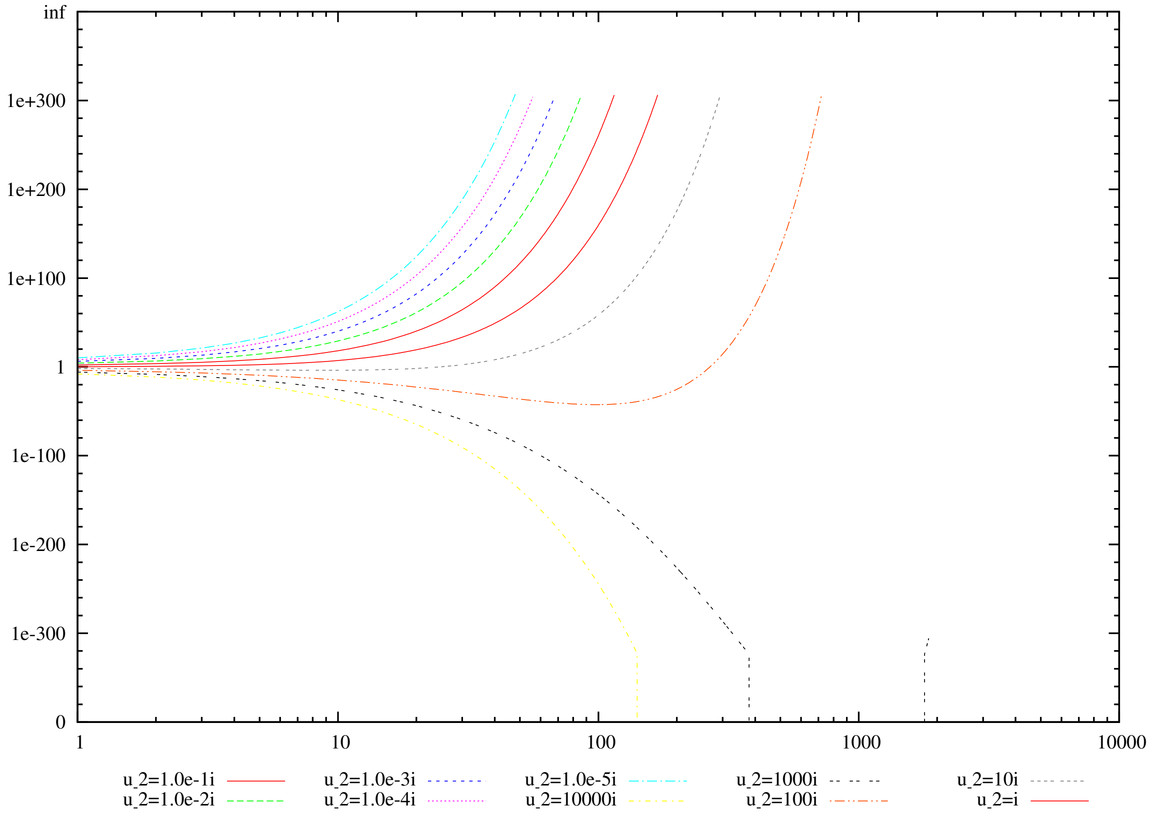


Abbildung 4.7: Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2}.

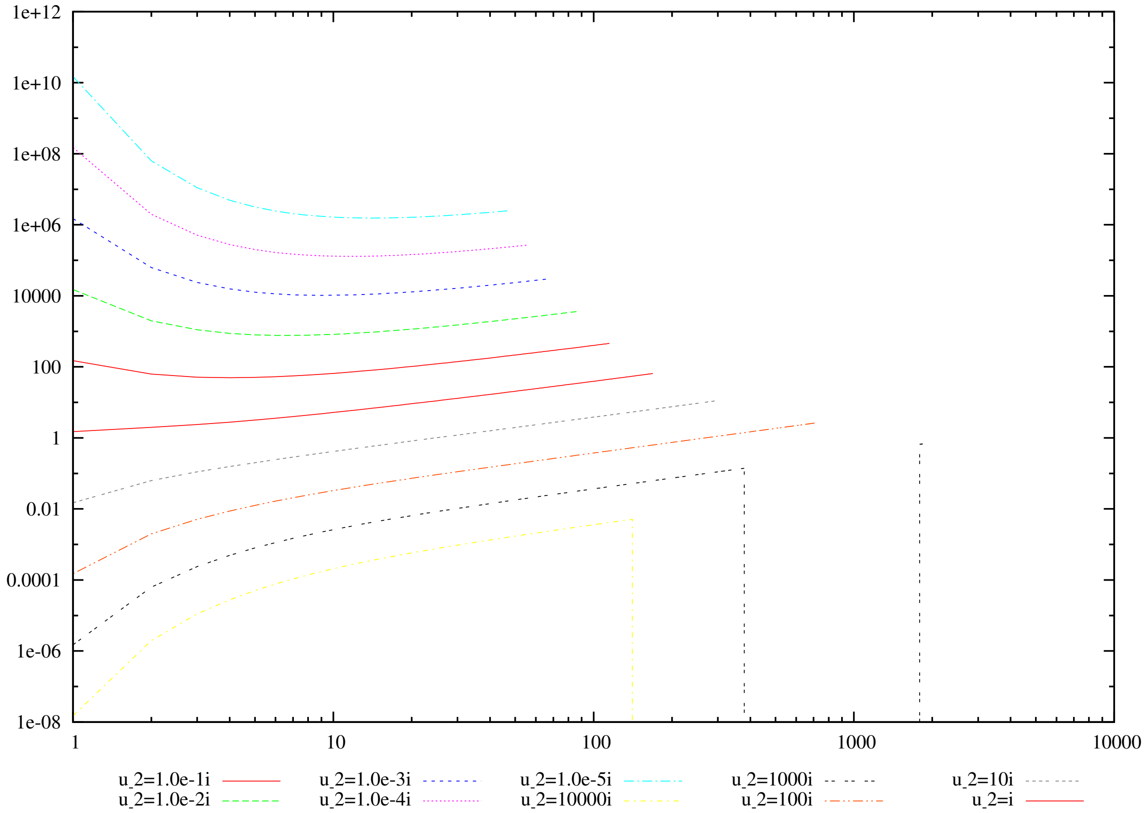


Abbildung 4.8: Wurzlkriterium angewendet auf die Koeffizienten

Satz 4.8 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{ die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

Beweis. Es gilt, dass $\sum_n a_n x^n$ für ein $x \in \mathbb{C}$ konvergent ist, falls

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \leq \eta < 1$$

und das ist äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1 \,.$$

Also konvergiert die Reihe für alle x mit $|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. □

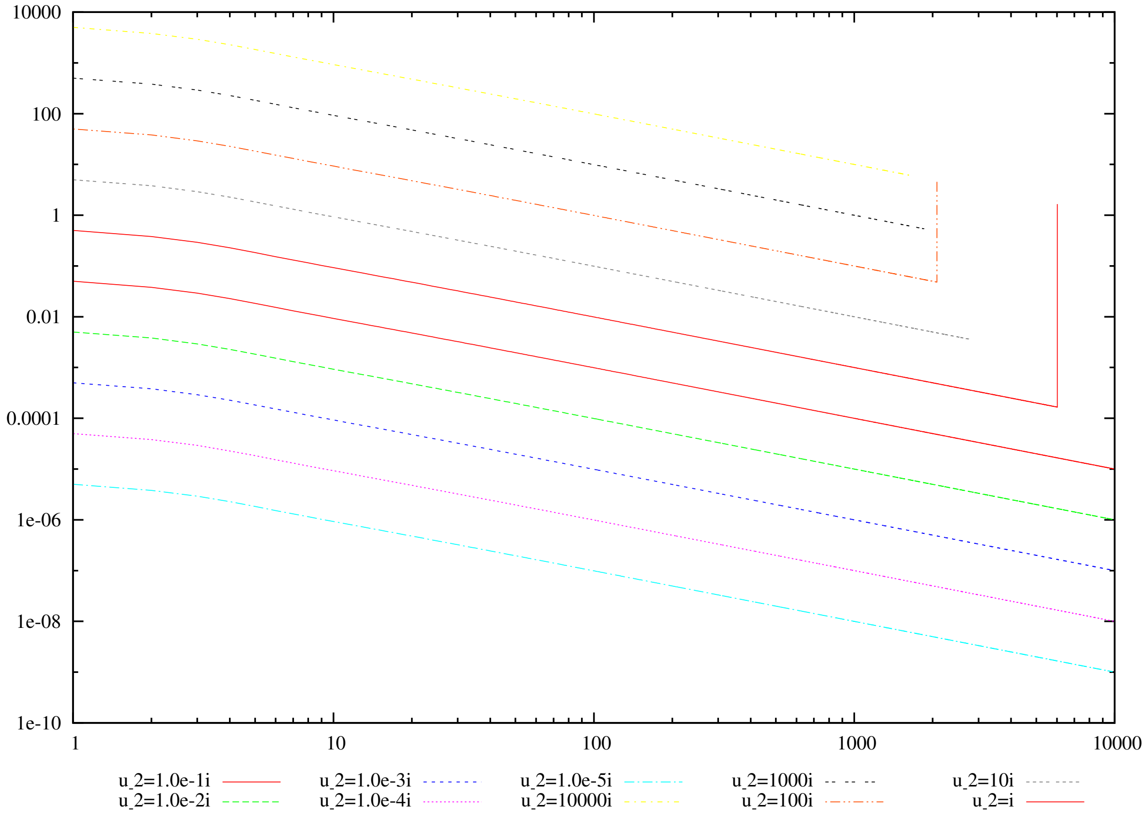


Abbildung 4.9: Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten

A Aufteilung von $t\varphi'(t)$

Sei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}t^{-i} \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ also $u\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}t^{-i} \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$:

$$\psi_0(t^p)$$

$$t\varphi'(t) = a_{-2}t^{-1} + \ldots + a_{-p}t^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(p+2)}t^{-(p+1)} + \ldots + a_{-2p}t^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + a_{-(2p+3)}t^{-(2p+1)} + \ldots$$

$$t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) \qquad t\psi_1(t^p)$$

also:

$$\psi_0(t^p) = a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + \ldots$$
$$\psi_1(t^p) = a_{-p}t^{-p} + a_{-2p}t^{2p} + \ldots$$
$$\vdots$$
$$\psi_{p-1}(t^p) = a_{-2}t^{p} + a_{-(p+2)}t^{2p} + \ldots$$

B Genaueres zu $(x^2\partial_x)^k$

Nun wollen wir noch $(x^2\partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$\begin{aligned}
(x^2\partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbracket{\partial_x x^2} \partial_x (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= x^2 \overbracket{(2x + x^2\partial_x)} \partial_x (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)(x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)(x^2\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 \underbracket{\partial_x x^2} \partial_x + x^4 \underbracket{\partial_x^2 x^2} \partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 \overbracket{(2x + x^2\partial_x)} \partial_x + x^4 \overbracket{(2x\partial_x + 1 + x^2\partial_x^2)} \partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (4x^4\partial_x + 2x^5\partial_x^2 + 2x^5\partial_x^2 + x^4\partial_x + x^6\partial_x^3)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k}\partial_x^n
\end{aligned}$$

Kommentar: Stirlingzahlen

also gilt für spezielle k

$$(x^2\partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k}\partial_x^n & \end{cases} \tag{B.1}$$

C Quelltexte

C.1 ComplRat.hs

Das Modul ComplRat implementiert die Zahlen $\mathbb{Q}(i)$.

Listing C.1: ComplRat.hs

```haskell
-- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
-- Zahlen, also den Elementen von /Q(i)/, bereit.
module ComplRat
    ( ComplRat(..)
    , realPart
    , imagPart
    , magnitude
    , magnitudeSq
    ) where
import Data.Ratio

-- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
-- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
data ComplRat = !Rational :+: !Rational
    deriving (Eq)

-- ---------------------------------------------------------------------------
-- Funktionen

-- | Gibt den reelen Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
realPart :: ComplRat -> Rational
realPart (x :+: _) =  x

-- | Gibt den imaginären Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
imagPart :: ComplRat -> Rational
imagPart (_ :+: y) =  y

-- | Der nichtnegative Betrag einer complexen Zahl
-- nur für rein reele oder complexe Zahlen, da es sonst, aufgrund der fehlenden
-- Wurzel, zu problemen kommt
magnitude :: ComplRat -> Rational
magnitude (x :+: 0) = abs x
magnitude (0 :+: y) = abs y
```

```
magnitude (_ :+: _) = error "Oops! Use magnitudeSq instead."
{-magnitude (x :+: y) = P.sqrt ( sqr x P.+ (sqr y) )-}
  {-where sqr z = z P.* z-}

-- | Das quadrat des Betrags einer complexen Zahl
-- ist für alle complexen zahlen geeignet
magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y

-- -----------------------------------------------------------------------------
-- Instanzen von ComplRat

instance Show ComplRat where
    show (x :+: y) | y == 0    = show x
                   | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"

instance Num ComplRat where
    (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
    (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
    negate (x :+: y)        = negate x :+: negate y
    fromInteger i           = fromInteger i :+: 0
    abs z                   =  magnitude z :+: 0
    signum (0:+:0)          =  0
    {-signum z@(x:+:y)        =  x P./ r :+: y P./ r  where r = magnitude z-}

instance  Fractional ComplRat  where
  fromRational r      = fromRational r :+: 0
  (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/n) :+: ((b*c - (a*d))/n)
    where n = c*c + d*d
```

Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a + ib$ entspricht.

C.2 Koeffs.hs

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von u_{-2} eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `ComplRat`. Dies ermöglicht es, dass die Berechung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

Listing C.2: Koeffs.hs

```
-- | Dieses Modul stellt Funktionen bereit, welche die zu einem Startwert
-- gehörigen Koeffizienten von v(t) und u(t) generieren
module Koeffs
  ( vKoeffs
  , uKoeffs
```

```haskell
  ) where
import ComplRat
import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie

-- returns array with the coefficients of v(t)
-- first element in array is koefficient from t^{-1}
vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
vKoeffs uMin2 = 1/2:+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
  where koeff :: Int -> ComplRat
        koeff = memo koeff'
        koeff' :: Int -> ComplRat
        koeff' n | n >   0    = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
                 | n ==  0    = -3/(uMin2*4)
                 | n == -1    = 1/2
                 | otherwise  = 0
                 where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]

-- returns array with the coefficients of u(t)
-- first element in array is koefficient from t^{-2}
uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2:+:0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))
```

Beispielhaft kann man mit dem folgendem Programm die Koeffizienten von $v(t)$, zu $a = \frac{1}{8}$ also $u_{-2} = i = 2i\sqrt{2a}$, erzeugen lassen.

Listing C.3: testKoeffs.hs

```haskell
module Main where
import ComplRat
import Koeffs
import System.Environment

uMin2=(0:+:1)

main :: IO()
main = do x <- getArgs
          putStrLn $ "n \t| v_n\n--------+"++(replicate 70 '-')
          main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x
  where main' :: Int -> IO()
        main' end = mapM_ addLine $ zip [-1..end] $ vKoeffs uMin2
          where addLine (i,a) = putStrLn $ show i ++ "\t| " ++ show a
```

Ist der Code in einer Datei **/Pfad/zu/testKoeffs.hs** gespeicher, so lässt er sich in Unix-Artigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen.

```
$ ghc --make /Pfad/zu/testKoeffs.hs
$ /Pfad/zu/testKoeffs 15
```

Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von v bis zum Index 15 und gibt in der Konsole das folgende aus

```
n        | v_n
---------+-----------------------------------------------------------------------
-1       | 1 % 2
0        | (0 % 1+i3 % 4)
1        | 3 % 2
2        | (0 % 1+i(-63) % 16)
3        | (-27) % 2
4        | (0 % 1+i1899 % 32)
5        | 324 % 1
6        | (0 % 1+i(-543483) % 256)
7        | (-32427) % 2
8        | (0 % 1+i72251109 % 512)
9        | 2752623 % 2
10       | (0 % 1+i(-30413055339) % 2048)
11       | (-175490226) % 1
12       | (0 % 1+i9228545313147 % 4096)
13       | 31217145174 % 1
14       | (0 % 1+i(-30419533530730323) % 65536)
15       | (-14741904895227) % 2
```

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise ergibt sich daraus die folgende Tabelle:

n	v_n
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{4}i$
1	$\frac{3}{2}$
2	$-\frac{63}{16}i$
3	$-\frac{27}{2}$
4	$\frac{1899}{32}i$
5	$\frac{342}{1}$
6	$-\frac{543483}{256}i$
7	$-\frac{32427}{2}$
8	$\frac{72251109}{512}i$
9	$\frac{2752623}{2}$
10	$-\frac{30413055339}{2048}i$
11	$-\frac{175490226}{1}$
12	$\frac{9228545313147}{4096}i$
13	$\frac{31217145174}{1}$
14	$-\frac{30419533530730323}{65536}i$
15	$-\frac{14741904895227}{2}$

Tabelle C.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von $v(t)$ für $u_{-2} = i$ bzw. $a = \frac{1}{8}$

Kommentar:

$$
\begin{aligned}
v(t) = {} & \frac{1}{2}t^{-1} + \frac{3}{4}it^{0} + \frac{3}{2}t^{1} + \frac{-63}{16}it^{2} + \frac{-27}{2}t^{3} + \frac{1899}{32}it^{4} + \frac{324}{1}t^{5} + \frac{-543483}{256}it^{6} + \\
& \frac{-32427}{2}t^{7} + \frac{72251109}{512}it^{8} + \frac{2752623}{2}t^{9} + \frac{-30413055339}{2048}it^{10} + \frac{-175490226}{1}t^{11} + \\
& \frac{9228545313147}{4096}it^{12} + \frac{31217145174}{1}t^{13} + \frac{-30419533530730323}{65536}it^{14} + \\
& \frac{-14741904895227}{2}t^{15} + \frac{163171919170793761 29}{131072}it^{16} + \frac{4456057685561073}{2}t^{17} + \\
& \frac{-22082325223708363779009}{524288}it^{18} + \frac{-1677161966915352627}{2}t^{19} + \\
& \frac{18391039987731669876160557}{1048576}it^{20} + \frac{384452768592440499024}{1}t^{21} + \\
& \frac{-7393025877660986955009416631 9}{8388608}it^{22} + \frac{-21087871794973149300282 6}{1}t^{23} + \\
& \frac{882049807198739209641055440389 37}{16777216}it^{24} + \frac{1363466860110111358690540 74}{1}t^{25} + \\
& \frac{-2464746843007242103304665576707498 27}{67108864}it^{26} +
\end{aligned}
$$

$$\frac{-1026149976774513033117345302 76}{1}t^{27}+$$
$$\frac{39860896682077795111205674332177810857 1}{134217728}it^{28}+$$
$$\frac{88929857099067937229443324337874}{1}t^{29}+$$
$$\frac{-118198766886781909175106598024354415058144 03}{4294967296}it^{30}+\ldots$$

C.3 SaveToFile.hs

Listing C.4: SaveToFile.hs

```
module Main where
import ComplRat
import Koeffs

-- parallel
import qualified Control.Monad.Parallel as P

-- for writing to file
import System.Environment
import System.IO
import Data.Time

main :: IO()
main = do x <- getArgs
          P.sequence_ (main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
  where
    main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"        , (0:+:1))
                                {-, ("./data/u_-2=10000i"   , (0:+:10000))-}
                                {-, ("./data/u_-2=1000i"    , (0:+:1000))-}
                                {-, ("./data/u_-2=100i"     , (0:+:100))-}
                                {-, ("./data/u_-2=10i"      , (0:+:10))-}
                                {-, ("./data/u_-2=1.0e-1i" , (0:+:1.0e-1))-}
                                , ("./data/u_-2=1.0e-2i" , (0:+:1.0e-2))
                                {-, ("./data/u_-2=1.0e-3i" , (0:+:1.0e-3))-}
                                {-, ("./data/u_-2=1.0e-4i" , (0:+:1.0e-4))-}
                                {-, ("./data/u_-2=1.0e-5i" , (0:+:1.0e-5))-}
                                ]

    saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
    saveData end (fn, uMin2) =
      do start <- getCurrentTime
         withFile fn WriteMode (\handle -> do
           hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
```

```
        stop <- getCurrentTime
        putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
      where vals    = vKoeffs uMin2
            triples = zip3 [0..] (tail vals) vals

genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
genLine (i,v1,v2) = concat [ show  i                  , "\t"
                           , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
                           , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
                           , genItemQuot (i,v1,v2)   , "\n" ]
  where genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
        genItemBetrag (_,v,_) = show $ fromRational $ magnitude v

        genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
        genItemCauchy (i,v,_) = show $ genItemCauchy'**(1/(fromIntegral i))
          where genItemCauchy' = fromRational $ magnitude v

        genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
        genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
          where genItemQuot' = magnitudeSq v2/magnitudeSq v1
```

Das folgende Script nutzt 7 Prozessoren, um mit `SaveToFile.hs` die ersten 10000 werte zu berechnen. Anschließend werden mittels `gnuplot` die Plots als PDF erzeugt.

Listing C.5: GeneratePlots.sh

```
#!/bin/sh
max=10000
ghc --make -threaded ./SaveToFile.hs
mkdir -p ./data
./SaveToFile $max +RTS -N7
mkdir -p ./plot
art[2]="betrag"; art[3]="cauchy"; art[4]="quot";
for i in 2 3 4; do
  name="${art[i]}"
  echo $name
  gnuplot << EOF
set samples 1001
set key below
set term push
set term post enh color lw 1 12 "Times-Roman"
set output "${name}.eps"
set log xy
plot for [fn in system("ls data/*")] fn every ::0::${max} using 1:${i} with lines title system("basename ".fn)
EOF
  epstopdf "${name}.eps" --outfile "./plot/${name}.pdf"
  rm "${name}.eps"
done
```

Literaturverzeichnis

[Ara] D. Arapura, *Notes on d-modules and connections with hodge theory*, Notizen?

[Ark12] S. Arkhipov, *D-modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.

[AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.

[Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d-modules*, Vorlesungsskript, 2009.

[BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.

[Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for d-modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Ell10] C. Elliott, *D-modules*, unpublished notes available online, April 2010.

[Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d-modules*, Vorlesungsskript, 1998.

[GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer D-Moduln und Fouriertransformation*, 2010.

[HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.

[Hut07] Graham Hutton, *Programming in Haskell*, Cambridge University Press, January 2007.

[Kas03] M. Kashiwara, *D-modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[Kno64] Konrad Knopp, *Theorie und anwendung der unendlichen reihen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1964.

[MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

[Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.

[Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules.*

[Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, December 2012.

Kommentar: TODO: Erklärung das das wirklich selbstgemacht ist