

**Bachelorarbeit**

---

**mein thema**

---

vorgelegt von

**Maximilian Huber**

am

**Institut für Mathematik**

der

**Universität Augsburg**

betreut durch

**Prof. Dr. Marco Hien**

abgegeben am

**noch nicht**

stand: 16. Dezember 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iv</b>
<b>I Theorie</b>	<b>1</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra . . . . .	2
1.2 Weiterführende Definitionen . . . . .	3
1.3 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$ . . . . .	3
1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring . . . . .	6
1.4 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$ . . . . .	6
1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules . . . . .	6
1.6 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$ -Modules . . . . .	6
<b>2 Der Meromorphe Zusammenhang</b>	<b>7</b>
2.1 Definition . . . . .	7
2.2 Eigenschaften . . . . .	7
2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	9
2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	9
<b>3 Levelt-Turittin-Theorem</b>	<b>10</b>
<b>II Beispiele</b>	<b>14</b>
<b>4 Beispiele/Anwendung</b>	<b>15</b>
4.1 Einfache Beispiele . . . . .	15
4.1.1 erstes . . . . .	15
4.1.2 zweites . . . . .	16

4.1.3	drittes . . . . .	16
4.1.4	viertes . . . . .	17
4.1.5	fünftes - bsp e . . . . .	18
4.1.6	Einfaches Beispiel . . . . .	21
4.2	Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zuerfällt . . .	22
<b>Anhang</b>		<b>22</b>
<b>A Aufteilung von ...</b>		<b>23</b>

# Einleitung

# **Teil I**

## **Theorie**

# 1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [5] und [1] beziehen.

## 1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt  $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ .

**Lemma 1.1** (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1.  $\mathbb{C}[x]$  ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

*alle Ideale haben die form  $(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{C}$*

2. wenn  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $\mathbb{C}[x]$  (erzeugt von  $x$  ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}^k$$

*The ring  $\mathbb{C}[[x]]$  ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term  $\neq 0$  ist invertierbar.*

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt  $\mathfrak{m}$ -adische Firation, ist die Filtrierung  $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt  $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3.  $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$  ist ein Unterring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.

ist ähnlich zu  $\mathbb{C}[[x]]$

## 1.2 Weiterführende Definitionen

**Definition 1.2** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der Kommutator von  $a$  und  $b$  genannt.

**Definition 1.3** (pull-back). Der pull-back  $\rho^+M$  ist der Vektorraum  $\rho^*M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$  mit dem pull-back Zusammenhang  $\rho^*\nabla$  definiert durch  $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun  $N$  ein  $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung

**Definition 1.4** (push-forward). Der push-forward  $\rho_+N$  ist definiert durch:

- der  $\mathbb{C}((t))$ -VR  $\rho_*N$  ist der  $\mathbb{C}$ -VR  $N$  mit der  $\mathbb{C}((t))$  Struktur durch  $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die wirkung von  $\partial_t$  ist die von  $\rho'(u)^{-1}\partial_u$

**Satz 1.5.** es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+M) \cong \rho_+N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \quad (1.1)$$

## 1.3 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [5, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in \mathbb{C}[x]$  (bzw.  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw.  $\mathbb{C}[[x]]$ ). Man hat die

folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator*  $f$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

**Definition 1.6** (Weyl Algebra). Definiere nun die Weyl Algebra  $A_1(\mathbb{C})$  (bzw. die Algebra  $\mathcal{D}$  von linearen Operatoren mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw. die Algebra  $\hat{\mathcal{D}}$  (Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$ )) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation  $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$  (bzw.  $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$  bzw.  $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] < \partial_x >$ ) verwenden.

**Lemma 1.7.** *Sei  $A$  einer der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition*

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

*und die Multiplikation*

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

*definieren auf  $A$  eine Ringstruktur  $(A, +, \cdot)$ .*

*Beweis.* Zula Barbara: Kapittel 2 section 1 □

*Bemerkung 1.8.*  $A_1(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{D}$  und  $\hat{\mathcal{D}}$  sind nicht kommutative Algebren.

**Lemma 1.9.** *Es gelten die Formeln*

$$\begin{aligned} [\partial_x, x^k] &= kx^{k-1} \\ [\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1} \\ [\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \end{aligned}$$

*Beweis.* Zula Barbara □



**Proposition 1.10.** *Jedes Element in  $A_1(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathcal{D}$  oder  $\hat{\mathcal{D}}$ ) kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathcal{D}$  oder  $\hat{\mathcal{D}}$ ), geschrieben werden.*

*Beweis.* [5, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

**Definition 1.11.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$  gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man  $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$  sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

*Beweis.* Sei  $P \in F_N \mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.12.** *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$   
isomorph als grad. Ringen

**1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring**

Sei  $A$  nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring  $A \langle \partial_x \rangle$  kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit  $F(A \langle \partial_x \rangle)$  bezeichnen werden. Sei  $P$  ein bzgl. 1.10 minimal geschriebener Operator, so ist  $P$  in  $F_k$  falls der maximale Grad von  $\partial_x$  in  $P$  kleiner oder gleich  $k$ . So definiere den Grad  $\deg P$  von  $P$  als die Eindeutige ganze Zahl  $k$  mit  $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle / F_{k-1} \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

**1.4 Struktur von Links-Idealen auf  $\mathcal{D}$** **1.5 Lokalisierung eines  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules****1.6 Lokalisierung eines holonomen  $\mathcal{D}$ -Modules**

## 2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [5]

### 2.1 Definition

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an  $x = 0$ )  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vr
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$

erfüllen soll.

*Bemerkung 2.2.* Später wird man auf die angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}$  als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

### 2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

**Lemma 2.3.** *Sei  $(\mathcal{M}, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}$ , also in der Situation*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M} \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1}\partial\varphi} & K^r
 \end{array}$$

*gilt:  $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$  ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.*

*Beweis.* TODO, (3. Treffen)

□

Sind  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Meromorphe Zusammenhänge auf  $\mathcal{M}_K \cong K^r$ . So betrachte  $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  :

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

**Lemma 2.4.** *Da  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear und, wie eben gezeigt,  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$  allgemein gilt: Die differenz zweier Meromorpher Zusammenhänge ist  $K$ -linear.*

Insbesondere ist  $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also es existiert eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  mit  $\frac{d}{dz} - \partial = A$ , also ist  $\partial = \frac{d}{dz} - A$ .

**Definition 2.5** (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 \uparrow & \searrow \varphi \cong & & & \uparrow \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 \uparrow \cong T & & & & \uparrow T \cong \\
 & \nearrow \psi \cong & & & \searrow \psi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$  und  $(\frac{d}{dz} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:

Der Merom. Zush.  $\frac{d}{dz} + A$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

**Definition 2.6.**  $A \sim B$  differenziell Äquivalent  $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$  mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$$

$$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$$

## 2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 2.7** (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *Formaler Meromorpher Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $\hat{K}$ -Vr
- eine *Derivation*  $\partial$ , für die die *Leibnitzregel* (2.1), für alle  $f \in \hat{K}$  und  $u \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$ , erfüllt sein soll.

Oder einfach ein Meromorpher Zshg. über anderes  $K$  also  $\hat{K}$

## 2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 2.8** (Elementarer formaler Zusammenhang). Zu einem gegebenen  $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$ ,  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  und einem endlich dimensionalen  $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum  $R$  mit regulärem Zusammenhang  $\nabla$ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen  $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E} \otimes R)$$

### 3 Levelt-Turittin-Theorem

sabbah\_Fourier-local.pdf lemma 2.4 [4]

**Lemma 3.1.**  $\rho : u \mapsto u^p$ ,  $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$ , für alle  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

*Beweis.* Wir wählen eine  $\mathbb{C}((u))$  Basis  $\{e\}$  von  $\mathcal{E}^\varphi$  und zur vereinfachung nehmen wir an, dass  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  [1].

Dann ist die Familie  $e, ue, \dots, u^{p-1}e$  eine  $\mathbb{C}((t))$ -Basis von  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Setze  $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$ . Dann ist die Familie  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$  eine  $\mathbb{C}((u))$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ . Zerlege nun  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  (siehe: Anhang A).

Sei  $P$  die Permutationsmatrix, definiert durch  $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  [2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$u\partial_u e_k = u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e)$$

---


$$^{[1]} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$$

$$^{[2]} P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \underbrace{\partial_t(u^k e)}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi}) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u \partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u \partial_u \mathbf{e} &= (u \partial_u e_0, \dots, u \partial_u e_{p-1}) \\
&= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_u$  auf die Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{O}^{\varphi(u)}$  ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun  $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$  [3], mit  $\xi^p = 1$  und  $T \in GL_p(\mathbb{C})$ .

So dass gilt:

$$\begin{aligned} T \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\ &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} [4] \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von  $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$  aus?

---

[3] Klar, da mipo  $X^p - 1$



$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow[\cong]{} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$  und  $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$  ein Äquivalenter Memorpher Zusammenhang definiert ist.

□

## **Teil II**

# **Beispiele**

## 4 Beispiele/Anwendung

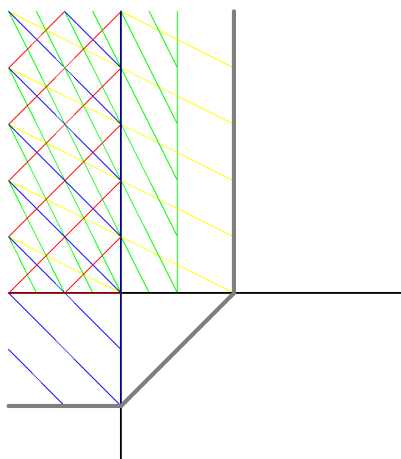
### 4.1 Einfache Beispiele

#### 4.1.1 erstes

$$P_a = t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + (t^2 - n^2) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

Mit:  $\alpha_{2,2} = 1$ ,  $\alpha_{1,1} = 1$ ,  $\alpha_{0,2} = t^2$  und  $\alpha_{0,0} = n^2$

$$P_a = t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + (t^2 - n^2) \Rightarrow \begin{cases} k=2, l=2 & \Rightarrow u \leq k=2, v \geq l-k=0 \\ k=1, l=1 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 0 \\ k=0, l=0 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \\ k=0, l=-2 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 2 \end{cases}$$

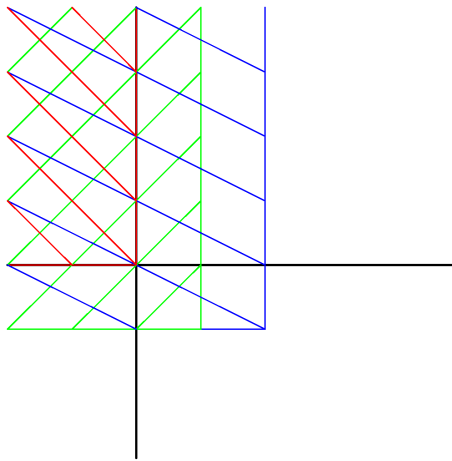


also  $\text{slopes}(P_a) = \{1\}$

**4.1.2 zweites**

$$P_b = t\partial_t^2 + 2\partial_t - 1$$

$$P_b = t\partial_t^2 + 2\partial_t - 1 \Rightarrow \begin{cases} k=2, l=1 & \Rightarrow u \leq k=2, v \geq l-k=-1 \\ k=1, l=0 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq -1 \\ k=0, l=0 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \end{cases}$$



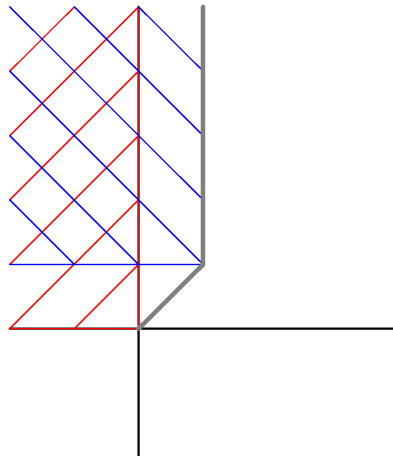
also  $\text{slopes}(P_b) = \{0\}$  also ist  $P_b$  regulär singular

**4.1.3 drittes**

zula Barbara Seite 46

$$P_c = t^2\partial_t + 1$$

$$P_c = t^2\partial_t + 1 \Rightarrow \begin{cases} k=1, l=2 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 1 \\ k=0, l=1 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \end{cases}$$



also  $\text{slopes}(P_c) = \{1\}$ .

#### 4.1.4 viertes

zula Barbara Seite 46

Original aus der Zula:

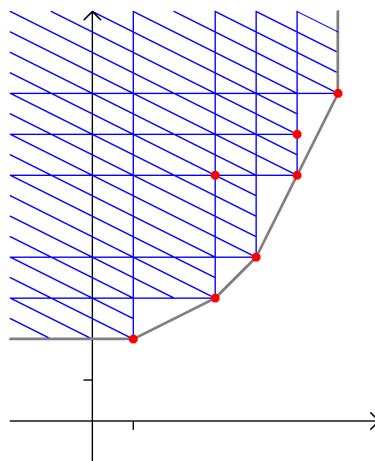
$$P_d = -3t^{14}\partial_t^6 + t^{11}(t+3)\partial_t^5 + 2t^8\partial_t^4 - t^6(t^3+1)\partial_t^3 + t^4\partial_t$$

$$P_d \Rightarrow \begin{cases} k=6, l=14 & \Rightarrow u \leq k=6, v \geq l-k=8 \\ k=5, l=12 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 7 \\ k=5, l=11 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 6 \\ k=4, l=8 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 4 \\ k=3, l=9 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 6 \\ k=3, l=6 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 3 \\ k=1, l=4 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 3 \end{cases}$$

also ist Abbildung 5.8 auf seite 53 der zula falsch?

$$P_d = -3t^{14}\partial_t^6 + t^{11}(t+3)\partial_t^5 + 2t^8\partial_t^4 - t^6(t^3+1)\partial_t^3 + t^3\partial_t$$

$$P_d \Rightarrow \begin{cases} k=6, l=14 & \Rightarrow u \leq 6, v \geq l-k=8 \\ k=5, l=12 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 7 \\ k=5, l=11 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 6 \\ k=4, l=8 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 4 \\ k=3, l=9 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 6 \\ k=3, l=6 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 3 \\ k=1, l=3 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 2 \end{cases}$$



also  $\text{slopes}(P_b) = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$  also ist  $P_d$  irregulär singulär.

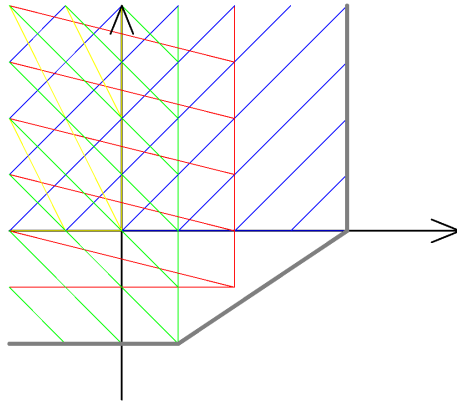
Offenbar ist der Hauptnenner der Steigungen gleich 2.

Betrachte also  $\rho : t \mapsto u^2$

und erhalte: ???

#### 4.1.5 fünftes - bsp e

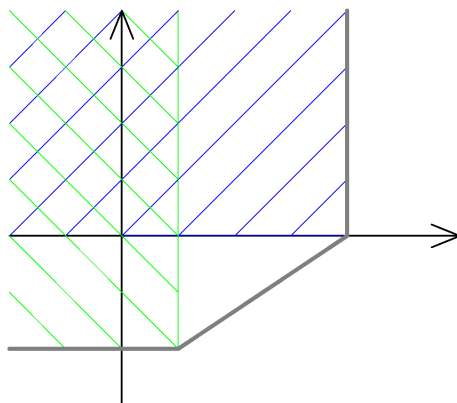
Für  $P_e = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$  sieht das Newton-Polygon wie folgt aus:



also sind die Slopes  $\text{slopes}(P_e) = \{0, \frac{2}{3}\}$ .

Dies gilt Analog für das *einfachere*:

$$\bar{P}_e = t^4 \partial_t^4 + \frac{1}{t} \partial_t$$



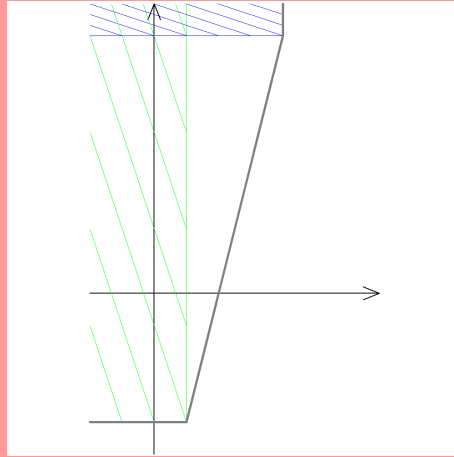
Also offensichtlich gilt  $\text{slopes}(\bar{P}_e) = \{0, \frac{2}{3}\}$ , also haben die Slopes den Hauptnenner 3, deshalb mache einen Pullback mit  $\rho : t \mapsto u^3$

Versuch:

$$\rho^+ \bar{P}_e = u^{12} \partial_u^4 + \frac{1}{u^3} \partial_u$$

FALSCH:  $\partial_t \nrightarrow \partial_u$

$$\rho^+ \bar{P}_e \Rightarrow \begin{cases} k=4, l=12 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 8 \\ k=1, l=-3 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq -4 \end{cases}$$



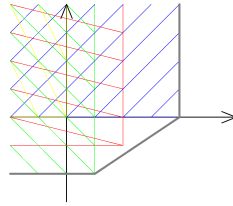
zu steil



### 4.1.6 Einfaches Beispiel

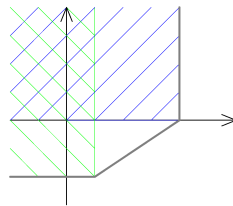
**Neuer start (der Weg zu einem leichten Beispiel):** Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



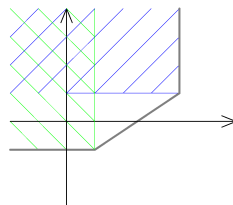
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit  $t$  und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [5, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$



und es gilt  $\text{slopes}(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$ . Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich  $\rho : t \mapsto u^3$  für den Pullback an.

Dieser Pullback Multipliziert (indirekt) die Slopes mit 3, **Quelle?**  
 aber wie wendet man ihn (explizit) an?

$$\rho^+ P = ???$$

welches die Slopes  $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$  hat. Schreibe nun dieses  $\rho^+ P = Q \cdot R$  mit  $P, Q \in \mathbb{C}[[u]]$  wobei gilt  $\text{slopes}(Q) = \{0\}$  und  $\text{slopes}(R) = \{2\}$ .

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

## 4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zuerfällt

Quellen??

$$\sum n! x^n$$

Weiteres Beispiel:

$$Sabbah\_Fourier - local.pdf \rightarrow 5.b.$$

## A Aufteilung von ...

Sei  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ , so ist  $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  also  $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-(i-1)}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ , welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ :

$$\begin{array}{c}
 u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots \\
 \begin{array}{c}
 \text{---} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \text{---} u\psi_1(u^p) \text{---} \psi_0(u^p) \text{---} \\
 \text{---} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \text{---} u\psi_1(u^p) \text{---} \psi_0(u^p) \text{---}
 \end{array}
 \end{array}$$

also:

$$\psi_0(u^p) = a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots$$

$$\psi_1(u^p) = a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots$$

$\vdots$

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$



# Literaturverzeichnis

- [1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [4] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal fourier-laplace transform. Paper.
- [5] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.
- [6] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform. *ArXiv e-prints*, June 2007.