

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 22. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen	1
2	Der Ring \mathcal{D}	4
2.1	Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}	4
2.2	(Links) \mathcal{D} -Moduln	7
3	Der Meromorphe Zusammenhang	8
3.1	Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls	8
3.2	Meromorpher Zusammenhang (Definition)	8
3.3	Eigenschaften	9
3.4	Newton Polygon	12
3.5	Formale Meromorphe Zusammenhänge	13
3.6	pull-back und push-forward	14
3.7	Elementare Meromorphe Zusammenhänge	22
4	Levelt-Turrittin-Theorem	23
4.1	Klassische Definition	23
4.2	Sabbah's Refined version	24
	Anhang	28
A	Aufteilung von ...	29

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

Wobei offensichtlich $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ gilt.

Es bezeichnet der Hut (^) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 1.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

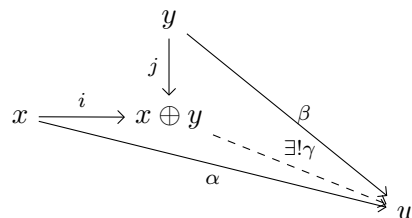
The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Firation, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Definition 1.2 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 1.3 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

Definition 1.4 (Exacte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 1.5 (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

2 Der Ring \mathcal{D}

2.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 2.1 (Weyl Algebra, \mathcal{D}). Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra \mathcal{D} von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (2.1).

Definition 2.2. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (2.1). Wir schreiben diesen Ring als

- $A_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} = \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K = \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$

- $\mathcal{D}_{\hat{K}} = \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \hat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

Bemerkung 2.3. Es gilt $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$) verwenden.

Beispiele und Alternative Definition:

Sergey-Arkhipov-MAT1191_Lecture_Notes.pdf Chapter 2.1

Lemma 2.4. Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, so definieren die Addition

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

eine Ringstruktur auf A .

Beweis. [AV09, Kapittel 2 Section 1] □

Bemerkung 2.5. $A_1(\mathbb{C})$, \mathcal{D} und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Definition 2.6 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

der Kommutator von a und b genannt.

Proposition 2.7. 1. Es gilt

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, so gilt:

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Denn für $g \in \mathbb{C}[x]$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis. [AV09]

□

Proposition 2.8. [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.

Beweis. [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 2.9. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, wie in Proposition 2.8, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 2.10. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{isomorph als grad. Ringe}} \cong$

also $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO

Treffen?

□

2.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von \mathcal{D} -Moduln rede, werde ich mich immer, wie auch [\[Ara, Chapter 1.6.\]](#), auf links \mathcal{D} -Moduln beziehen.

Beispiel 2.11 (Einfachste links \mathcal{D} -Moduln). Sei $X = \mathbb{A}^1$ und $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$.

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ durch
 - $\partial(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}$ und $t \cdot f(t) = tf$
 - oder [\[Gin98, Exmp 3.1.2\]](#) $\mathcal{O}_X = \mathcal{D} \cdot 1 = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot \partial$.
3. $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda t)$ mit $\partial(f(t) \exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t} \exp(\lambda t) + f \lambda \exp(\lambda t)$
4. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ mit $t \cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$

3 Der Meromorphe Zusammenhang

- wofür sind die gut?
- wieso kommt man ursprünglich dazu

3.1 Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls

Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul. Betrachte \mathcal{M} als $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$M[x^{-1}] := M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von \mathcal{M} .

Proposition 3.1. [Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ bekommt in natürlicher Weise eine \mathcal{D} -Modul Struktur.

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

□

3.2 Meromorpher Zusammenhang (Definition)

Definition 3.2 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (3.1)$$

erfüllen soll.

Bemerkung 3.3. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

2. Wir betrachten hier Meromorphe Zusammenhänge an $x = 0$ als Singularität.

Definition 3.4. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}((u))$. Wir schreiben \mathcal{E}^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((u))$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathbb{C}((u)) \xrightarrow{\partial_u} \mathbb{C}((u)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(u) \\ f(u) &\mapsto f'(u) + f(u)\varphi'(u) \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$.

3.3 Eigenschaften

[Sab90, 4.2] Let \mathcal{M} be a left \mathcal{D} -module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 3.6 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 3.7. [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein \mathcal{D}_K -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 3.8. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Bemerkung 3.9. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

Lemma 3.10. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 3.11. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Isomorphismus so ist $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ein zu $(\mathcal{M}_K, \partial)$ isomorpher Zusammenhang.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 3.12. Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

Korollar 3.13. Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 3.14 (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & \nwarrow \cong \psi & \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \varphi & \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r \\
 \uparrow \cong T & & & & \downarrow \cong T \\
 K^r & & & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 3.15 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

$$\begin{aligned} 1 = TT^{-1} &\rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0 \\ 1 = T^{-1}T &\rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0 \end{aligned}$$

3.4 Newton Polygon

Quelle: sabba?

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \left((k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Bei Sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe Hülle davon in \mathbb{R}^2

Definition 3.16. Das Randpolygon von $\text{conv}(H(P))$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 3.17. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$, sonst *irregulär singulär*.
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu \mathcal{M}_K gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang \mathcal{M}_K heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres P gibt, mit $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

Beispiel 3.18. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = t^{\textcolor{red}{1}}\partial_t^{\textcolor{blue}{2}}$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{k} = 2$$

$$\textcolor{red}{l} = 1$$

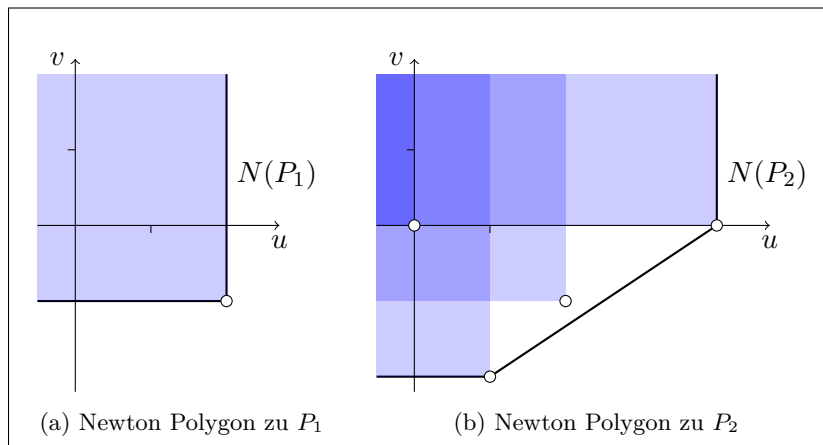
so dass

$$H(P_1) = \left((2, 1 - 2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 3.2a ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singular.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ so kann man daraus das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 3.2b visualisiert.

Abbildung 3.1: Zu Beispiel 3.18



Lemma 3.19. [Sab90, 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exacte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

3.5 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definiere $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}[x^{-1}] = \hat{K} < \partial_x > =: \mathcal{D}_{\hat{K}}$ wobei $\hat{K} = \mathbb{C}[[u]][x^{-1}]$.

bei ZulaBarbara ist $\hat{\mathcal{D}}_{\hat{K}} = \mathbb{C}((u)) < \partial_u >$ hier $= \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Definition 3.20 (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *formaler Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht, analog wie in Definition 3.2, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler \hat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\hat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (3.1) erfüllen soll.

Bemerkung 3.21. Alle bisher getroffene Aussagen stimmen auch für formale Meromorphe Zusammenhänge. Im besonderen existiert für jedes $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein ein $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ mit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$.

3.6 pull-back und push-forward

[HTT07, 1.3]

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $(\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto t := \rho(u)) \in u\mathbb{C}[[u]]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei \mathcal{M} ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 3.22 (pull-back). [Sab07, 1.a] Der *pull-back (Inverses Bild)* $\rho^+ \mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m. \quad (3.2)$$

Lemma 3.23. Es gilt $\rho^* \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$ mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \\ f(u) \otimes m(t, \partial_t) &\longmapsto f(u)m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

Beweis.

□

Bemerkung 3.24. Das soeben, in Lemma 3.23, definierte Φ erfüllt für $1 \otimes m$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(u) \otimes \partial_t m \\ &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(u) \rho'(u)^{-1}}_{=1} \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \\ &= \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

und somit (3.2) wie gewollt.

Lemma 3.25. *In der Situation*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(t, \partial_t)} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \\
 \cong \downarrow \Phi & & \cong \downarrow \Phi \\
 \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}
 \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 3.23 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis.

□

Lemma 3.26. *Sie $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \setminus \{0\}$. Eine Abbildung der Form $\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$ ist immer surjektiv.*

Beweis. GEGENBEISPIEL:

$Q := \partial_u, u \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$

suche ein y so dass $y \partial_u = u$

$$_ \cdot Q(y) = u$$

$$y \partial_u = u$$

$$y \partial_u u = uu \quad [\text{Sab90, Chap. 4.}] \text{ links Multiplikation mit } u \text{ ist nicht bijektiv}$$

$$y = u^2$$

aber

$$u^2 \partial_u = u \cdot u \cdot \partial_u$$

$$= u \cdot (\partial_u \cdot u - 1)$$

$$= u \cdot (1 - 1)$$

$$= 0$$

□

Lemma 3.27. *In der Situation von Lemma 3.22, mit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P(t, \partial_t)$ für ein $P(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$$

also wird der Übergang beschrieben durch

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \rho(t) \\ \partial_t &\rightarrow \rho'(t)^{-1} \partial_u \end{aligned}$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$ und $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P$. Es ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{-.P} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

exact und flach, da über Körper. Deshalb ist auch

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\text{id} \otimes -.P} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \longrightarrow \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

exact. Also mit Φ wie in Lemma 3.23 und $Q(u, \partial_u) := \rho^+ P(t, \partial_t) := P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ nach Lemma 3.25 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes -.P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \Phi & & \cong \downarrow \Phi & & \\ & & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{-.Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & & \end{array}$$

nun lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen (weil $-.Q$ surjektiv)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes -.P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \Phi & & \cong \downarrow \Phi & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{-.Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

und damit gilt dann

$$\begin{aligned}\rho^* \mathcal{M} &\cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) .\end{aligned}$$

- warum sind die zusammenhänge isomorph?

□

Bemerkung 3.28 (versuch 1). Wieso sieht die Wirkung auf dem pull-back Zusammenhang so aus?

Betrachte ein Element der Form $f(t)m = f(\rho(u))m$.

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m) \\ &= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u)) \underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t} m = (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{pu^{p-1}} \partial_u(f(u^p)m) \\ &= f'(u^p)m + f(u^p) \frac{1}{pu^{p-1}} \partial_u m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m)$ und somit ist die Wirkung von ∂_t gleich der Wirkung von $\rho'(u)^{-1} \partial_u$.

Lemma 3.29. *Ein pull-back mit $u \mapsto u^p$ multipliziert alle slopes mit p .*

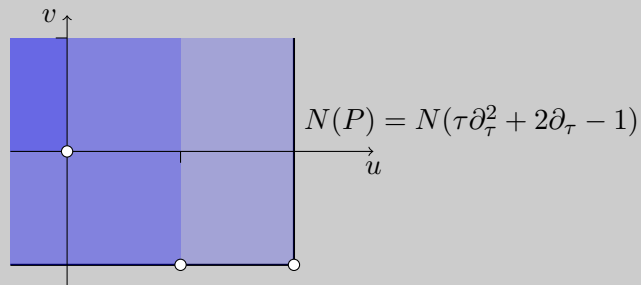
Beweis.

□

Beispiel 3.30 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$



und gehe von τ über zu t via $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2 \partial_t)$?

$$\begin{aligned} \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t \end{aligned}$$

- was passiert mit $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

$$\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\
&= t (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\
&= t (t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t) - 2t^2 \partial_t - 1 \\
&= t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1 =: P
\end{aligned}$$

Wir wollen $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ bzgl. $P := t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 3.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back $\rho : t \rightarrow u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 3.27 anwenden können.

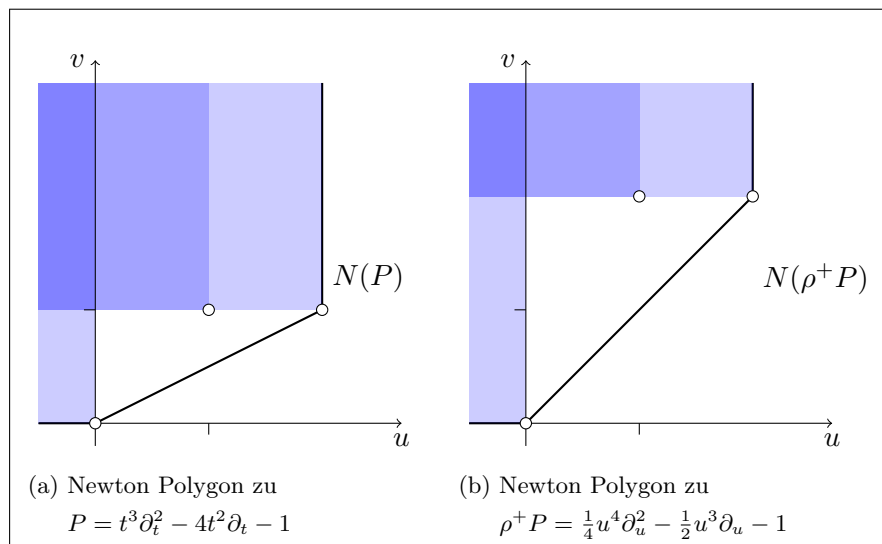
$$\begin{aligned}
\partial_t &\rightarrow \frac{1}{\rho'} \partial_u = \frac{1}{2u} \partial_u \\
\partial_t^2 &\rightarrow \left(\frac{1}{2u} \partial_u \right)^2 \\
&= \frac{1}{2u} \partial_u \left(\frac{1}{2u} \partial_u \right) \\
&= \frac{1}{2u} \left(-\frac{1}{2u^2} \partial_u + \frac{1}{2u} \partial_u^2 \right) \\
&= \frac{1}{4u^2} \partial_u^2 - \frac{1}{4u^3} \partial_u
\end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
\rho^+ P &= u^6 \left(\frac{1}{4u^2} \partial_u^2 - \frac{1}{4u^3} \partial_u \right) - 4u^4 \frac{1}{2u} \partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - u^3 \frac{1}{4u^3} \partial_u - 4u^3 \frac{1}{2} \partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - 2 \frac{1}{4} u^3 \partial_u - 1
\end{aligned}$$

Also ist $\rho^+ P = \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - \frac{1}{2} u^3 \partial_u - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.3b) und somit $\rho^* \mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot \left(\frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - \frac{1}{2} u^3 \partial_u - 1 \right)$.

Abbildung 3.2: Zu Beispiel 3.30

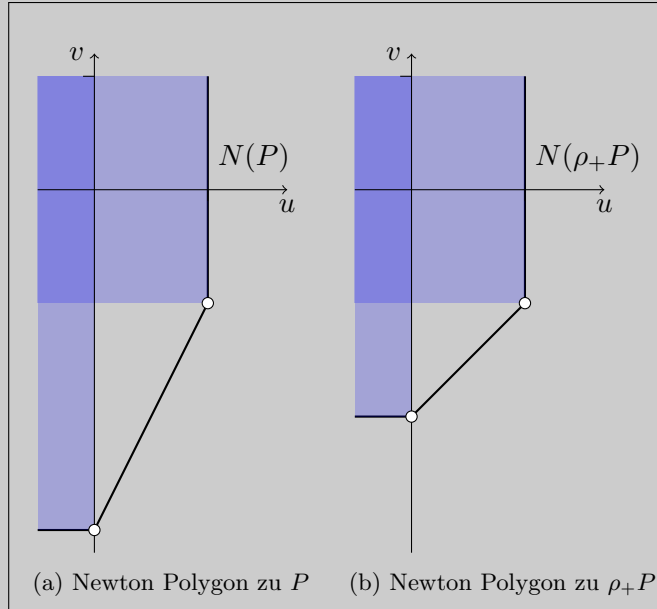


Sei \mathcal{N} ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 3.31 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* (*Direktes Bild*) $\rho_+ \mathcal{N}$ ist

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist der \mathbb{C} -Vektor Raum \mathcal{N} mit der $\mathbb{C}((t))$ -Vektor Raum Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_t beschrieben durch $\rho'(u)^{-1} \partial_u$.

Abbildung 3.3: Zu Beispiel 3.32



Beispiel 3.32 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=:P} \end{aligned}$$

mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 3.4a). Bilde nun das Direkte Bild über ρ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.4b)

Satz 3.33. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) \cong \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}. \quad (3.3)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &= \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \end{aligned}$$

□

Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

3.7 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.34 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \bmod \mathbb{C}[[u]]$ ab.

Lemma 3.35. [Sab07, Lem 2.2]

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Quellen:

sabbah_cimpa90 seite 28 / 30

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 4.1. *Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$ und $N(P_2) \subset N_2$
- A ist eine kante von ...

4.1 Klassische Definition

Satz 4.2. [[Sab90](#), Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.

Beweis. [[Sab90](#), Thm 5.3.1]

□

Aussagen, die aus dem Beweis entstehen:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

Korollar 4.3. [[Sab90](#), Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

[Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$ als den Vektor Raum über $\hat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + \left(t \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \otimes m.$$

Satz 4.4. [Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.

Beispiel 4.5. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel ???. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turrittin-Theorems Zerlegen.

4.2 Sabbah's Refined version

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 4.6. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ ^[1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ ^[2].

^[1] $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

^[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t (\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1} u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1} (ku^{k-1} e + u^k \varphi'(u) e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1} e + u^k \varphi'(u) e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1} e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u) e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u) e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, \dots, u\partial_u e_{p-1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\ u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\ u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & u^3\psi_3(u^p) \\ u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
 \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$ [3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
 T \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} & \end{pmatrix} \quad [4]
 \end{aligned}$$

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\begin{aligned} \partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Proposition 4.7. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.8 (Refined Turrittin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] *Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindeutiger Weise geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus_{\text{def}} \text{El}(\rho, \varphi, R) =_{\text{def}} \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-(i-1)}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$\begin{array}{c}
 u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots \\
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{\psi_0(u^p)} \quad \quad \quad \xrightarrow{\psi_1(u^p)} \\
 \xrightarrow{u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)} \quad \quad \quad \xrightarrow{u\psi_1(u^p)}
 \end{array}
 \end{array}$$

also:

$$\psi_0(u^p) = a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots$$

$$\psi_1(u^p) = a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots$$

\vdots

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$

Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.