

Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
0 Mathematische Grundlagen	1
1 Moduln über \mathcal{D}_k	3
1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k	4
1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise	5
1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln	6
1.3 Holonome \mathcal{D}_k -Moduln	6
2 Meromorphe Zusammenhänge	7
2.1 Systeme von ODEs und meromorphe Zusammenhänge	7
2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge	7
2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten \mathcal{D} -Moduln	9
2.3 Newton Polygon	11
2.3.1 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol	13
2.4 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen	14
2.4.1 Tensorprodukt	14
2.4.2 pull-back und push-forward	15
2.4.3 Fouriertransformation	21
3 Elementare meromorphe Zusammenhänge	22
3.1 Elementare formale meromorphe Zusammenhänge	22
3.2 Elementare meromorphe Zusammenhänge	22
3.3 Twisten von meromorphen Zusammenhängen	27
3.4 Levelt-Turrittin-Theorem	29
4 Explizite berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung	31
4.1 Rezept für allgemeine φ	31
4.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für \mathcal{M}_φ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$	36
4.2.1 Konvergenz der Summanden	42
5 Schluss	48
Anhang	48
A Aufteilung von $t\varphi'(t)$	49
B Genauer zu $(x^2\partial_x)^k$	50

C	Numerische berechnung der Koeffizienten	51
----------	--	-----------

Abbildungsverzeichnis

2.1	Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$	12
2.2	Newton-Polygon zu P_2	12
2.3	Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$	20
2.4	Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$	20
2.5	Newton-Polygon zu P	21
2.6	Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P	21
4.1	Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$	34
4.2	Newton Polygon zu P_φ	36
4.3	Newton Polygon zu ρ^*P_φ	37
4.4	Newton Polygon zu \mathcal{N}	38
4.5	Newton-Polygon zu Q_1	39
4.6	Newton-Polygon zu Q_2	39
4.7	Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2}	45
4.8	Wurzlkriterium angewendet auf die Koeffizienten	46
4.9	Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten	47

Tabellenverzeichnis

C.1	Numerisch berechnete Koeffizienten von $u(t)$ und $v(t)$ für $a = \frac{1}{8}$	54
-----	--	----

Listings

4.1	Koeffs.hs	43
C.1	Main.hs	51
C.2	ComplRat.hs	52

Einleitung

0 Mathematische Grundlagen

Wir betrachten \mathbb{C} hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i | \text{pos. Konvergenzradius}\}$ ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit \tilde{K} bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$ und $K \subsetneq \widehat{K}$ gelten.

Es bezeichnet der Hut ($\hat{}$) das jeweils formale Äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

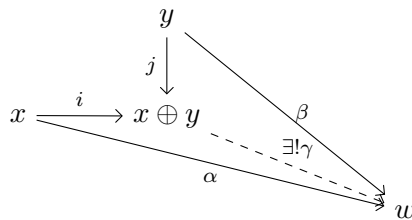
Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m dimensionalen Matrizen mit Einträgen in k .

Sei R ein Ring, dann bezeichnet R^\times die Einheitengruppe von R .

Definition 0.1 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *direkte Summe*, oder das *Coproduct* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$, so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$, so dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 0.2 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

Für eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned} \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

Bemerkung 0.3. Hier einige Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

Definition 0.4 (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exakt, wenn für alle i gilt, dass $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.5 (Kurze exakte Sequenz). Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

welche exakt ist.

Definition 0.6 (Kokern). Ist $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\text{coker}(f) = M / \text{im}(f)$.

Proposition 0.7. Ist $f : M' \rightarrow M$ eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz und $M/f(M') = \text{coker}(f)$ ist der Kokern von f .

Beweis.

□

1 Moduln über \mathcal{D}_k

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als Körper k immer ein Element aus $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$ betrachten.

Definition 1.1 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 1.2. Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \rightarrow k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x , so gilt

1. $[\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$
2. für $f \in k$ ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \tag{1.1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \tag{1.2}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \tag{1.3}$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g.$$

3. Siehe [Sab90, 1.2.4.]

□

1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.4)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 1.3. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.4). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ ^[1].

Bemerkung 1.4. • Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

- Offensichtlich erhält \mathcal{D}_k in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- \mathcal{D}_k ist nichtkommutativ.

Proposition 1.5. [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in \mathcal{D}_k kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

Definition 1.6. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* (oder den ∂_x -Grad) von P .

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

^[1]Wird mit $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$ bezeichnet, in [AV09].

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.7. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringe

also $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO

□

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Ein (*holomorpher*) *differenzial Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung m , falls $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$.

Definition 1.8. Mit \mathcal{D}_X bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf X .

Die Garbe \mathcal{D}_X hat eine Ringstruktur mittels der Komposition als Multiplikation und \mathcal{O}_X ist ein Unterring von \mathcal{D}_X . Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über X . Es gilt, dass Θ_X in \mathcal{D}_X enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links \mathcal{O}_X -Untermodule, aber kein rechts \mathcal{O}_X -Untermodule ist.

Proposition 1.9. [Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$. Wobei ∂_x als $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die alternative Definition bereits mit der einfachen überein.

1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn im folgendem von \mathcal{D} -Moduln gesprochen wird, werden immer links \mathcal{D} -Moduln gemeint.

Beispiel 1.10 (links \mathcal{D} -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ jeweils durch $x \cdot x^m = x^{m+1}$ und $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol $\exp(\lambda x)$ ein, mit $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$. So ist $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda x)$ ein \mathcal{D} -Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das \mathcal{D} -Modul $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über \mathcal{D} erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

1.3 Holonome \mathcal{D}_k -Moduln

Definition 1.11. Sei \mathcal{M}_k ein links \mathcal{D}_k -Modul. \mathcal{M}_k heißt *holonom*, falls es ein Element $m \in \mathcal{M}_k$ gibt, das \mathcal{M}_k als \mathcal{D}_k -Modul erzeugt. Im speziellen folgt damit, dass $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{D}_k / \mathfrak{a}$ für ein $0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}_k$.

Bemerkung 1.12. In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die charakteristische Varietät.

Bemerkung 1.13. Nach [Cou95, Prop 10.1.1] gilt

- Submoduln und Quotienten von holonomen \mathcal{D}_k -Moduln sind holonom
- sowie endliche Summen von holonomen \mathcal{D}_k -Moduln sind holonom

und laut [Sab90, Thm. 4.2.3] gilt, dass

- für ein holonomes $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ -Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. ein $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ -Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}$) ist die Lokalisierung

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K \quad (\text{bzw. } \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]} \otimes_{\mathbb{C}[[x]]} \widehat{K}),$$

mit der $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$) Modul Struktur durch

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

wieder holonom.

Satz 1.14. Sei \mathcal{M}_k ein holonomes \mathcal{D}_k -Modul, dann gilt, dass seine Lokalisierung isomorph zu $\mathcal{D}_k / \mathcal{D}_k \cdot P$, mit einem $P \in \mathcal{D}_k$ ungleich Null, ist.

Beweis. Siehe [Sab90, Cor 4.2.8]. □

2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei \mathcal{M} ein \mathcal{D} -Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit x bijektiv ist, so nennen wir \mathcal{M} einen meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

2.1 Systeme von ODEs und meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Alternativer Zugang

[Sab90, 3.1.1] Sei \mathcal{F} ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren \mathcal{D} wirken. Ein Element $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von $P \in \mathcal{D}$ falls $P \cdot u = 0$ gilt.

Falls u ein Lösung von P ist, so ist u auch Lösung von $Q \cdot P$ mit $Q \in \mathcal{D}$. Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal $\mathcal{D} \cdot P \triangleleft \mathcal{D}$ ab.

2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tupplel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum

- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.2 (Formaler meromorpher Zusammenhang). Analog definiert man einen *formalen meromorphen Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$ bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, ein endlich dimensionaler \widehat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

Definition 2.3. Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei meromorphe Zusammenhänge über k . Eine k -lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$.

Bemerkung 2.4. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.5 (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein meromorpher Zusammenhang so wähle eine K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u = {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x) e_i\right) \stackrel{\boxed{??}}{\downarrow} \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j(x)\right) e_i.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder meromorphe Zusammenhang (\mathcal{M}, ∂) ausgestattet mit einer K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten \mathcal{D} -Moduln

Satz 2.6. [Sab90, Thm 4.3.2] Ein meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes \mathcal{D}_K -Modul und umgekehrt.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma/Definition 2.7. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist \mathcal{M}_K ein meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$. So ein wird P dann als Minimalpolynom von \mathcal{M}_K bezeichnet.

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Lemma 2.8 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei \mathcal{M}_K ein meromorpher Zusammenhang. Es existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Korollar 2.9. In der Situation von Lemma 2.8 gibt es ein $P \in \mathcal{D}_K$ mit ∂ -Grad von P ist gleich d und $P \cdot m = 0$, in diesem Fall ist P ein Minimalpolynom zu \mathcal{M}_K , also gilt $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$.

Satz 2.10. [AV09, Seite 64] Ist $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ so gilt

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

Beweis. [AV09, Seite 57-64] □

Korollar 2.11. Sei $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ wie in Satz 2.10 so gilt

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

Beweis. Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.12. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r
 \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.13. Sei \mathcal{M}_K ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen, so gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

Korollar 2.14. Für (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang existiert ein $A \in M(r \times r, K)$, so dass $\partial = \frac{d}{dx} - A$.

Beweis. Es sei (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also lässt sich durch eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ darstellen, also ist, wie behauptet, $\partial = \frac{d}{dx} - A$. □

Proposition 2.15 (Transformationsformel). [HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 \uparrow & \searrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 \uparrow \cong T & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow T \cong \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$ und $(\frac{d}{dx} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:
Der meromorphe Zusammenhang $\frac{d}{dx} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

Definition 2.16 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

2.3 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, also insbesondere auch jedes $P \in \mathcal{D}_K$, lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) &:= \bigcup_{m, l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left((m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2 \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left((m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Definition 2.17. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\text{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Bemerkung 2.18. Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x) (x \partial_x)^k$$

mit $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexen Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left((m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.19. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ für die Menge der zu \mathcal{M} gehörigen slopes.
- P heißt *regulär* oder *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$ oder $\deg P = 0$, sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ (bzw. \mathcal{M}_K) heißt *regulär singulär*, falls es ein regulär singuläres $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ (bzw. $P \in \mathcal{D}_K$) gibt, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ (bzw. $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$).

Beispiel 2.20. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = x^1 \partial_x^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$m = 2 \quad \text{und} \quad l = 1$$

so dass

$$H(P_1) = \left((2, 1 - 2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.1 ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singular.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$, so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$ ist.

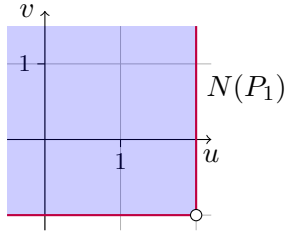


Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$

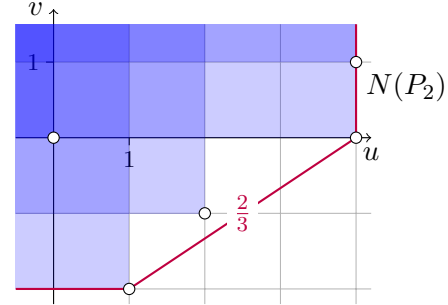


Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu P_2

Bemerkung 2.21. [AV09, Bem 5.4] Für alle $f \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}^\times$ gilt allgemein, dass das zu $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von $f \cdot P$ übereinstimmt.

Beweis. TODO □

Definition 2.22. In einem Polynom $P = \varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$, mit $\varepsilon, \alpha_{kl} \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$ sind die restlichen Monome *Therme im Quadranten* von $\varepsilon x^p \partial_x^q$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}_{\geq -N}$ mit $\alpha_{kl} \neq 0$ gilt: $k \leq q$ und $l - k \geq p - q$.

Bemerkung 2.23. • Anschaulich bedeutet das, dass

$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \left((q, p - q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \supset \left((k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = H(\alpha_{kl} x^l \partial_x^k),$$

für alle relevanten k und l .

- Sei P ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von $\varepsilon x^p \partial_x^q$ sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} H(P) &= H\left(\varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k\right) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \mathbf{T.i.Q. \ von \ } x^p \partial_x^q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q) \\ \Rightarrow N(P) &= N(\varepsilon x^p \partial_x^q). \end{aligned}$$

Also können Terme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Terms befinden und nicht der Term selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das **T.i.Q.** ist eine hier Abkürzung für Terme im Quadranten.

Lemma 2.24. [Sab90, Seite 26] Das Newton-Polygon hängt, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten meromorphen Zusammenhang ab.

Lemma 2.25. [Sab90, 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

Satz 2.26. [Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

Bemerkung 2.27. In Satz 2.26 ist es wirklich notwendig, formale meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente meromorphe Zusammenhänge.

2.3.1 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol

Sei $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ vollständig gekürzt, also mit λ_0 und λ_1 in \mathbb{N} relativ prim. Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ in zwei Variablen, sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. Falls $P = x^a \partial_x^b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \ell(b, b - a)$$

und falls $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$ mit $b_i \in \widehat{K}$, setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)).$$

Definition 2.28 (Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welche mit \mathbb{Z} indiziert ist, durch

$${}^\ell V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_\ell(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

Bemerkung 2.29. Man hat $\text{ord}_\ell(PQ) = \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q)$ und falls $\lambda_0 \neq 0$, hat man auch, das $\text{ord}_\ell([P, Q]) \leq \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q) - 1$.

Definition 2.30 (ℓ -Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls $\lambda_0 \neq 0$, ist der graduierte Ring $gr^{\ell V} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_{\lambda}^{\ell V} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von ∂_x in dem Ring durch ξ , dann ist der Ring isomorph zu $\widehat{K}[\xi]$. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, so ist $\sigma_\ell(P)$ definiert als die Klasse von P in $gr_{\text{ord}_\ell(P)}^{\ell V} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. σ_ℓ wird hierbei als das ℓ -Symbol Bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\sigma_\ell(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$.

Bemerkung 2.31. Bei [Sab90] wird der Buchstabe L anstatt ℓ für Linearformen verwendet, dieser ist hier aber bereits für $\mathbb{C}\{t\}$ reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol als L -Symbol zu finden.

Bemerkung 2.32. Ist $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ geschrieben als $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$. So erhält man $\sigma_\ell(P)$ durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) | \ell(i, i-j) = \text{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

Beweis. TODO □

Definition 2.33 (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zu dieser Ordnung verwendet.

Bemerkung 2.34. Wenn $\ell(x_0, s_1)$ wie oben aus Λ entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_\ell(P).$$

2.4 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

2.4.1 Tensorprodukt

Proposition 2.35. [Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ meromorphe Zusammenhänge. Sei $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$. Durch Setzen von

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \tag{2.3}$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem meromorphen Zusammenhang.

Lemma 2.36. [Sab90, Ex 5.3.7] Falls \mathcal{N} regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ genau die Menge der Slopes von \mathcal{M} .

Beweis. TODO □

2.4.2 pull-back und push-forward

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \quad \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir meistens $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho,$$

wobei L (bzw. \widehat{L}) eine endliche Körpererweiterung von K (bzw. \widehat{K}) ist. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.37 (pull-back). [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *inverse Bild* $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.4)$$

Für ein allgemeines $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (2.5)$$

Satz 2.38. In der Situation von Lemma 2.37, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ für ein $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, gilt

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t).$$

Für $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ werden wir auch $\rho^* P(t, \partial_t)$ schreiben.

Für den Beweis von Satz 2.38 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

Lemma 2.39. Es gilt $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ -Vektorräume, mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

$$= \sum_k a_k(t) \rho'(t)^k (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k$$

und zerlege $a_k(t) \rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \left(\sum_k a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \right) \\ &= \Phi \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes \left(\sum_k a_{k,i}(x) (\partial_x)^k \right) \right). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.40. *Das in Lemma 2.39 definierte Φ ist sogar ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar $\rho^* \mathcal{D}_{\hat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \cong \mathcal{D}_{\hat{L}}$ als meromorphe Zusammenhänge.*

Beweis. Sei ∂_t wie gewohnt und ∂_{\otimes} der Zusammenhang auf $\hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$, welcher wie in Proposition 2.35 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_{\otimes}$ gilt, also dass Φ ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\hat{L}} \end{array}$$

und für einen Elementartensor $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$ folgt dann

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\ & & \uparrow \\ f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \end{array} \quad ,$$

also kommutiert das Diagramm. □

Lemma 2.41. *Sei $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$. In der Situation*

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
 \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 2.39 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. Betrachte ein $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. So gilt

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\
 & & \downarrow \Phi \\
 & & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\
 \downarrow \Phi & & \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)} & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit $\alpha = _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$. \square

Beweis zu Satz 2.38. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\
 & & & & & & u \longmapsto u \bmod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P
 \end{array}$$

ist exakt, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil \widehat{K} flach ist, da Körper, ist auch, nach Anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} _$, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\parallel} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$$

exakt. Also mit Φ wie in Lemma 2.39 und $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ nach Lemma 2.41 ergibt sich

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \cong \Phi \quad \downarrow \cong \Phi$$

$$\mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{D}_{\widehat{L}}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, weil $\cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz fortsetzen

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \cong \Phi \quad \downarrow \cong \Phi$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Cokerne, die Behauptung. \square

Lemma 2.42. [Sab90, 5.4.3] Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$.

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ mit $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$, dann ist $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ mit

$$P'(t, \partial_t) = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$$

$$= \sum a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i$$

$$= \sum a_i(t^p) ((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i$$

\square

Beispiel 2.43 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.3). Wende den pull-back mit $\rho : t \rightarrow x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 2.38 einfacher anwenden können:

$$\partial_x \rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)} \partial_t = \frac{1}{2t} \partial_t,$$

$$\partial_x^2 \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t} \partial_t \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right) = \frac{1}{2t} \left(-\frac{1}{2t^2} \partial_t + \frac{1}{2t} \partial_t^2\right) = \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t.$$

Also ergibt Einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^*P &= (t^2)^3 \left(\frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t \right) - 4(t^2)^2 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \underbrace{t^3 \frac{1}{4} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t}_{-2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t} - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - 2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t - 1.
 \end{aligned}$$

Also ist $\rho^*P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^*P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.4) und somit $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1)$.

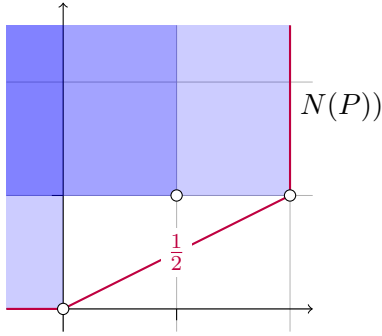


Abbildung 2.3: Newton Polygon zu
 $P = x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$

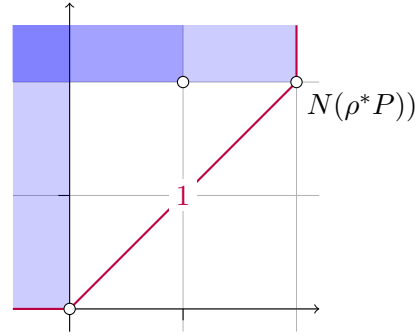


Abbildung 2.4: Newton Polygon zu
 $\rho^*P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$

Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler \widehat{L} -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.44 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *direkte Bil* $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

- der \widehat{K} -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist definiert als der \mathbb{C} -Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der \widehat{K} -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ und $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1} \partial_t$.

Satz 2.45. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.6)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}} \text{)} \\
 &\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\
 &\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\
 &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?)
 \end{aligned}$$

□

2.4.3 Fouriertransformation

Definition 2.46 (Fouriertransformation). [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1] Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$. Dann ist die *fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i$$

Definition 2.47 (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$ so ist die fouriertransformierte davon ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$.

Beispiel 2.48. Sei $P = x^3 \partial_x^4 + x^2 \partial_x^2 + x$ dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_P &= \partial_z^3 (-z)^4 + \partial_z^2 (-z)^2 + \partial_z \\ &= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{[\partial_z^3, z^4]} + \partial_z \\ &= \underbrace{z^4 \partial_z^3 + [\partial_z^3, z^4]}_{z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z} + \underbrace{z^2 \partial_z^2 + [\partial_z^2, z^2]}_{z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2}} + \partial_z \\ &= z^4 \partial_z^3 + \sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i} + z^2 \partial_z^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i} + \partial_z \\ &= z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z + z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2} + \partial_z \\ &= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2 \end{aligned}$$

mit den Newton Polygonen wie in Abbildung 2.5 und 2.6.

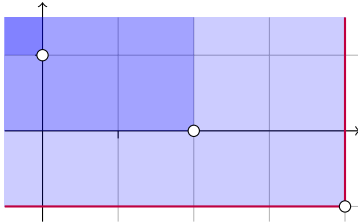


Abbildung 2.5: Newton-Polygon zu P

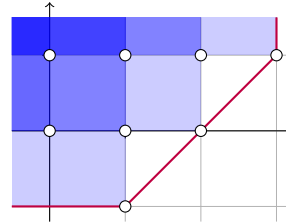


Abbildung 2.6: Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P

3 Elementare meromorphe Zusammenhänge

3.1 Elementare formale meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.1. Ein *elementarer formaler meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang \mathcal{M} , welcher isomorph zu $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$, mit passendem α und p , ist.

Lemma 3.2. [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.8). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \widehat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$.

Tatsächlich kann man $b_i(x) = x^i b'_i(x)$ mit $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$. □

Lemma 3.3. [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.

Beweis. Siehe [Sab90, Thm 5.2.2] □

Satz 3.4. Ein regulärer formaler Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen.

Beweisskizze. Siehe [Sab90, Cor. 5.2.6]. Man wählt eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, in der die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist. Diese Matrix kann in Jordan Normalform gebracht werden und damit erhält man das Ergebnis. □

3.2 Elementare meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.5. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbf{e} \cdot \widehat{K}$, wobei $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$ Basis ist, ausgestattet mit $\partial_x(f \cdot \mathbf{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \mathbf{e}$, im speziellen also $\partial_x \mathbf{e} = \varphi'$.

Bemerkung 3.6. 1. Die $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$ stellen so etwas, wie die einfachsten meromorphen Zusammenhänge mit einem ganzzahligem Slope, dar.

2. Wir werden oft $e = 1$ als Basis nehmen.
3. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.
4. Es ist $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$, weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$.

Lemma 3.7. Für $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$ mit $a_{-p} \neq 0$ gilt, dass $\mathcal{P}(\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi) = \begin{cases} \{p\} & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=-p+1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \\ &= \underbrace{-p a_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \end{aligned}$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können, $(1, -1)$ und $(0, -(p+1))$ sind. Da einer der Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesamt nur einen Slope Λ geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max\left\{0, \frac{-1 - (-(p+1))}{1}\right\} \\ &= \max\{0, p\} \\ &= \begin{cases} p & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$.

Lemma 3.8. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung ?? berechtigt. Wir wählen eine \widehat{L} Basis \mathbf{e} des Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum \mathcal{E}^φ und damit erhält man die Familie $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$ als \widehat{K} -Basis von $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$. Es gilt

$$\partial_x t^k \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \overbrace{(t^k \partial_t + k t^{k-1})}^{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \mathbf{e}. \quad (3.1)$$

Durch die Setzung $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$ wird die Familie $\mathbf{e} := (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$ eine \widehat{L} -Basis von $\rho^+\rho_+\mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}] \quad (3.2)$$

mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ (siehe: Anhang A). Damit gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e}_k &= t \partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} t \overbrace{(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x (\underbrace{t^k \mathbf{e}}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi}))}^{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \overbrace{(pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}^{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \overbrace{(kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}^{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \underbrace{t\varphi'(t) \mathbf{e}}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}. \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-1}, \mathbf{e}_0)$ gilt. Es gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t \mathbf{e}_0, \dots, t\partial_t \mathbf{e}_{p-1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]. \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis \mathbf{e} von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$ ist also beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(X) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. Sei so ein ξ ab jetzt fixiert. So dass gilt:

$$T \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} = \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1} \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1} t)^{p-1} \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da $\varphi'(t) = pt^{p-1}$. Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & &
 \end{array}$$

k-te Stelle

der mit (\star) bezeichnete Teil kommutiert, wobei $\Phi : (0, \dots, 0, \frac{1}{t}, 0, \dots, 0) \mapsto e_k$ der kanonische Basisisomorphismus und e_k Basis von $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$. Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi(\Phi^{-1}(v) \cdot \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right]) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente e_k gilt. Nach Definition 3.5 gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_t e_k &= (\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t) e_k \\
 &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})} \cdot \underbrace{\varphi'(t)} e_k \\
 &= (\xi^{k-1})^p \cdot (pt^{p-1}) e_k \\
 &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k
 \end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\
 \downarrow & & \\
 \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\
 \downarrow & & \\
 (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t) \xi^{k-1} e_k
 \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt. \square

Definition 3.9. Ein *elementarer meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang \mathcal{M} , für den es $\psi \in \mathbb{C}((x))$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$, also ein elementarer formaler meromorpher Zusammenhang, ist.

3.3 Twisten von meromorphen Zusammenhängen

Lemma 3.10. Sei $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ ein meromorpher Zusammenhang mit P von Grad q und mit e als ein zyklischer Vektor, so ist $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi$.

Beweis. Da der Grad von P gleich q ist, ist nach Lemma 3.11 auch Q von Grad q und somit $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$. Also reicht es zu zeigen, dass $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_x(e \otimes 1) &= (\partial_x e) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\
 &= (\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x) \\
 &= (\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\mathbf{e} \otimes 1)) \\
 &= (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + (\partial_x \mathbf{e}) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(\mathbf{e} \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(x)) \\
 &= (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi''(x)(\mathbf{e} \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)^2(\mathbf{e} \otimes 1) \\
 &= (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(\mathbf{e} \otimes 1) \\
 &\vdots \\
 \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} \mathbf{e}) \otimes 1 + \cdots + \lambda_1(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \lambda_0(\mathbf{e} \otimes 1)
 \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \otimes 1 \\ \partial_x(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \otimes 1 \\ (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} \mathbf{e}) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich $\mathbf{e} \otimes 1, (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1, (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1, \dots, (\partial_x^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $\mathbf{e} \otimes 1, \partial_x(\mathbf{e} \otimes 1), \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.11. [Hei10, Seite 44] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ und sei $\varphi \in \widehat{K}$. So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$.

Beweisskizze. Zeige, dass $P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})\mathbf{e} \otimes 1 = 0$ gilt, da $\mathbf{e} \otimes 1$ eine zyklischer Vektor folgt damit aus Gradgründen die Behauptung. \square

Korollar 3.12. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und φ wie in 3.11, so gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} = \mathcal{M}_{\widehat{K}}.$$

Beweis. Denn

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \underbrace{\partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}.
 \end{aligned}$$

\square

3.4 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

Satz 3.13. [Sab90, Thm 5.4.7] *Sie $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl p so dass der Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, mit $\rho : t \mapsto x := t^p$, isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren meromorphen Zusammenhängen ist.*

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

Beweis. Zum Beweis wird Induktion auf die Lexicographisch geordnetem Paare $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$ angewendet. Wobei $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dem größtem Slope von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Es wird $\kappa = \infty$ gesetzt, falls der größte Slope nicht Ganzzahlig ist.

Wir nehmen oBdA an, dass $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ genau einen Slope Λ hat, sonst Teile $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ mittels Satz 2.26 in meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ (vollständig gekürzt) Definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$. Wir nennen $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$ die *Determinanten Gleichung* von P . Da L zu einem Slope von P gehört, besteht $\sigma_L(P)$ aus zumindest zwei Monomen. Schreibe

$$\begin{aligned} \sigma_L(P) &= \sum_{L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i, i-j) = 0} \alpha_{ij} x^j \xi^i. \end{aligned}$$

Sei $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x i^{\lambda_1}$ so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei $\alpha_0 \neq 0$ ist.

Erster Fall: $\lambda_1 = 1$. Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_{\beta}}.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. Sei β_0 eine der Nullstellen. So setze $R(z) := (\beta_0 / (\lambda_0 + 1)) z^{\lambda_0 + 1}$ und betrachte $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$. Falls $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$ gilt

$$P\left(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\right) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial (\frac{\beta_0}{\lambda_0 + 1} x^{-(\lambda_0 + 1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 x^{-(\lambda_0 + 2)}. \end{aligned}$$

Schreibe $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0 + 2)})$.

Lemma 3.14. *Es gilt, dass P' Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.*

Beweis. TODO □

Des weiteren ist $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$. Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat nur eine Nullstelle.**
2. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat mehrere Nullstellen.**

Zweiter Fall: $\lambda_1 \neq 1$. In diesem Fall ist einzige Slope Λ nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit λ_1 . Sei $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$ und erhalte P' so dass $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$. Nach Lemma 2.42 hat P' den einen Slope $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$. Damit können wir nun die zugehörige Linearform $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$ definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \dots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an. □

4 Explizite berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von \mathcal{D} -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu einem Beispiel unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem φ D-Moduln ergibt. Im Laufe des Kapitels werden immer speziellere φ betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

4.1 Rezept für allgemeine φ

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich, } a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und beginne mit \mathcal{E}^φ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left(\text{Hauptnenner von } \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\widehat{L}}^*} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left(t^{\max(I)+1} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \right)}_{=: Q(t, \partial_t)}. \end{aligned}$$

3. Fouriertransformiere \mathcal{E}^φ und erhalte

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle}. \end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an. Was passiert mit der Ableitung ∂_x ? Es gilt

$$\partial_x \left(f \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \partial_z(f) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -x^2 \partial_x$, und somit

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle.$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom P_φ assoziierten formalen Meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$ betrachten.

Lemma 4.1. *Zu einem $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ ist das Minimalpolynom von \mathcal{M}_φ explizit gegeben durch*

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle.$$

Beweis. Sei $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$, so ist

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \left(\partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle \\ \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k} \end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= -(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 (x^{-1} \partial_x - x^{-2}) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle \end{aligned}$$

□

Im Anhang B wird das $(x^2 \partial_x)^k$ genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

Lemma 4.2. *Es gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$.*

Beweis. Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir P_φ um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von bedeutung sind und deshalb vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die Konvexen Hüllen, die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert werden. Sei $q := \max(I)$.

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(\underbrace{(-x^2 \partial_x)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}}(x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{(-1)^q (x^{2q} \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^{2q} \partial_x^q)}^{\text{liefere keinen Beitrag}}(x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \underbrace{x^{2q} \partial_x^q (x \partial_x - 1)}_{\text{liefert keinen Beitrag}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q} \overbrace{(x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1})} \partial_x - x^{2q} \partial_x^q + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q} \partial_x^q - x^{2q} \partial_x^q}_{\substack{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \\ \text{sind also vernachlässigbar}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe auch vernachlässigt werden kann.

Behauptung: Es gilt

$$H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \subset H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)$$

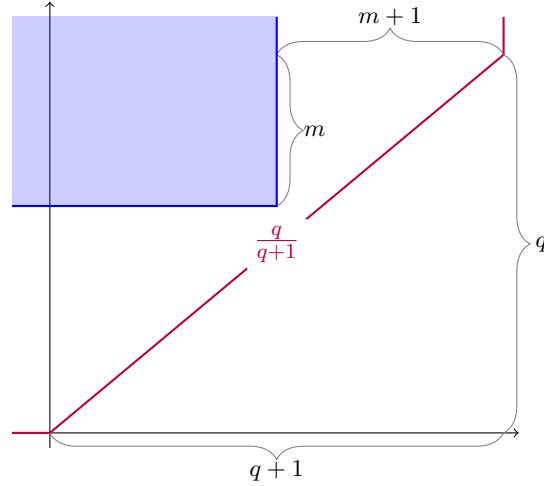
Denn: Betrachte zu einem $m \in I \setminus \{q\}$, einen Summanden $m a_m (-x^2 \partial_x)^{q-m}$ aus der Summe:

$$\begin{aligned}
 H(m a_m (-x^2 \partial_x)^{q-m}) &= H(m a_m (-1)^q (x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m} + \text{T.i.Q. von } x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})) \\
 &= H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m}) \\
 &= (q - m, q - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

In Abbildung 4.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten dargestellt, mit $N(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q)$ in der gewohnten Farbe und in Blau ist $H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})$ eingezeichnet. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh. \square

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &\stackrel{\text{Beh.}}{=} H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)
 \end{aligned}$$


 Abbildung 4.1: Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$

Also ist

$$N(P_\varphi(x, \partial_x)) = N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q).$$

womit die Behauptung des Lemmas folgt und das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.1 aussieht. \square

Also ist, nach Lemma 2.42, ein pull-back mit Grad $q+1$ hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Denn wir wissen, dass nach Anwenden eines solchem pull-backs die Slopes mit $q+1$ multipliziert werden, also gilt $\mathcal{P}(\rho^+\mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$.

Lemma 4.3. *Im Fall $\varphi = \frac{a}{t^q}$ ist mit $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$ der pull-back gegeben durch*

$$\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2}\partial_t)^q(t\partial_t - (q+1)) + (q+1)qa).$$

Beweis. Sei $\varphi = \frac{a}{t^q}$, so ist P gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2\partial_x)^q(x\partial_x - 1) + qa,$$

und sei $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \rho^+\mathcal{M}_\varphi &= \rho^+(\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^*P_\varphi(x, \partial_x) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi\left(-(q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2t^q}\partial_t\right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left(\underbrace{(-(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q+1)^2t^q} \partial_t)^q}_{\text{first part}} \underbrace{(-(q+1)t^{q+1} \frac{-1}{(q+1)^2t^q} \partial_t - 1)}_{\text{second part}} + qa \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{(q+1)^2}{(q+1)^2} t^{2(q+1)-q} \partial_t \right)^q}_{=1} \left(\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left((t^{q+2} \partial_t)^q \left(\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa \right)
 \end{aligned}$$

□

Definiere mittels $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$ und berechne die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ell(i, i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\
 &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i
 \end{aligned}$$

Da $\widehat{L}[\xi]$ kommutativ ist gilt hier, dass $(t^j \xi^i)^k = t^{jk} \xi^{ik}$ ist. Setze $\theta = t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^{q+1} \xi$ so können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta \text{ Nullstelle}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$ eine Konstante ist. Sei β eine der Nullstellen. Da $\text{ord}_\ell(\rho^* P_\varphi) = 0$ und der einzige Slope von $\rho^* P_\varphi$ nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass $\alpha_0 \neq 0$. Also ist 0 keine Nullstelle von $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0) t^{-\lambda_0} = (\beta/q) t^{-q}$ und betrachte

$$\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi) \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi.$$

Zerlege nun wie in Satz 2.26 den Meromorphen Zusammenhang \mathcal{N} in $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$ wobei \mathcal{N}_i Meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. Twiste die \mathcal{N}_i jeweils mit $\mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$ und somit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun, falls dieser nicht schon ein Elementarer Meromorpher Zusammenhang ist, Induktion anwenden.

4.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für \mathcal{M}_φ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Als konkreten Fall betrachten wir nun \mathcal{M}_φ bezüglich $\varphi_1 := \frac{a}{x}$. Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\
 &= -x^2 \underbrace{\partial_x x \partial_x}_{=0} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^2 \underbrace{(x \partial_x + 1) \partial_x}_{=0} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^3 \underbrace{\partial_x^2 - x^2 \partial_x + x^2 \partial_x}_{=0} + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 + a
 \end{aligned}$$

Erhalte daraus das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$.

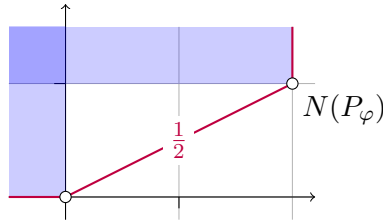
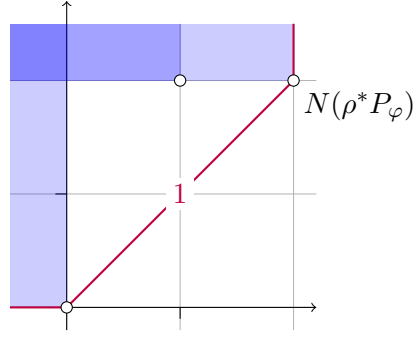


Abbildung 4.2: Newton Polygon zu P_φ

Berechne nun zu $\rho : t \mapsto x := -2t^2$ ein Minimalpolynom $\rho^* P_\varphi$ zu $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
 \rho^* P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t \partial_t - 2) + 2a \\
 &= t^3 \underbrace{\partial_t t \partial_t}_{=0} - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^3 (t \partial_t + 1) \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 + t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 - t^3 \partial_t + 2a
 \end{aligned}$$

und erhalte einen Meromorphen Zusammenhang $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_\varphi$ mit genau dem Slope $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$.


 Abbildung 4.3: Newton Polygon zu $\rho^* P_\varphi$

Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$. Berechne nun die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ von $\rho^* P_\varphi$.

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) | 2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= t^4 \xi^2 + 2a \end{aligned}$$

Setze $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$ so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \theta^2 + 2a,$$

mit den Nullstellen $i\sqrt{2a} =: \beta$ und $-i\sqrt{2a}$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2at}^{-1}$ und betrachte den Twist $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}^\psi$ von $\rho^+ \mathcal{M}$. Es ist $e \otimes 1$ ein zyklischer Vektor, wobei e ein zyklischer Vektor von $\rho^+ \mathcal{M}$ ist. Mit dem Lemma vom Zyklischem Vektor wollen wir nun ein Minimalpolynom zu \mathcal{N} berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t(\partial_t(e \otimes 1)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \partial_t((\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} (\partial_t^2 e) \otimes 1 + (\partial_t e) \otimes \psi'(t) + (\partial_t e) \otimes \psi'(t) + e \otimes (\psi''(t) + \psi'(t)^2) \\ &= ((t^{-1} \partial_t - 2at^{-4})e) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= (t^{-1} \partial_t e) \otimes 1 - 2at^{-4} e \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi''(t)e \otimes 1 + \psi'(t)^2 e \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))(\partial_t e) \otimes 1 + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &\stackrel{(2.3)}{=} (t^{-1} + 2\psi'(t))(\partial_t(e \otimes 1) - e \otimes \psi'(t)) + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t(e \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= ((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= ((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2)e \otimes 1 \end{aligned}$$

also

$$0 = \underbrace{\left(\partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right)}_{=:P'} e \otimes 1$$

und mit $\psi(t) = i\sqrt{2at}^{-1}$ ist $\psi'(t) = -i\sqrt{2at}^{-2}$ und $\psi''(t) = 2i\sqrt{2at}^{-3}$. Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2})\partial_t - i\sqrt{2at}^{-3} + 2at^{-4} - 2i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{(-i\sqrt{2at}^{-2})^2}_{=0} \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3} \end{aligned}$$

mit, wie gewünscht, mehr als einem Slope.

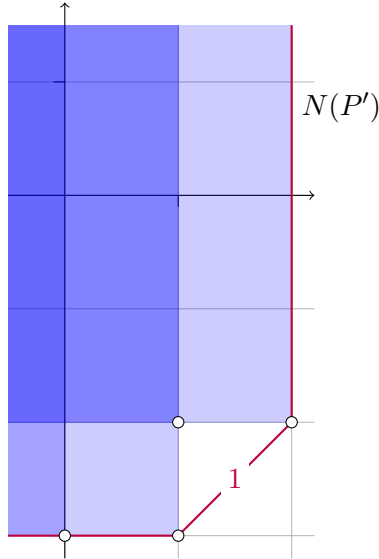


Abbildung 4.4: Newton Polygon zu \mathcal{N}

nachdem wir jetzt ein Minimalpolynom gefunden haben ist unser nächstes Ziel, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot P'$ in zwei Meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt $P'(t, \partial_t) = Q_1(t, \partial_t) \cdot Q_2(t, \partial_t)$.

Da der ∂_t -Grad von P' genau 2 ist, müssen die Q_i jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen.

Beobachtung 4.4. Ist Q_1 und Q_2 so ein solches Paar, dann ist für $\sigma \in \hat{L}$ das Paar $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$ und $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$ ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{=1} \cdot Q_2 = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2.$$

Mit der Beobachtung 4.4 ist klar, dass wir den Faktor vor ∂_t in Q_2 frei wählen können. Setze diesen also allgemein auf 1 und erhalte

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 := \partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \hat{L}$$

und somit ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2}at^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2}at^{-3} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Damit ist ebenfalls $\bar{v}(t) = 1$.

Durch das Wissen über die Slopes der Q_i erhalten wir noch Informationen über die Reihen $v(t) := \sum_n v_n t^n$ bzw. $u(t) := \sum_n u_n t^n$. Die beiden Polynome Q_1 und Q_2 enthalten ∂_t als einziges Monom vom ∂_t -Grad 1, deshalb ist $(1, -1)$ in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da Q_1 nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.5 aussen und somit wissen wir, dass $v_n = 0$ für alle $n < -1$. Da Q_2 genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 4.6. Damit ist $u_n = 0$ für alle $n < -2$ und $u_{-2} \neq 0$.

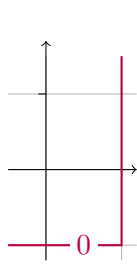


Abbildung 4.5: Newton-Polygon zu Q_1

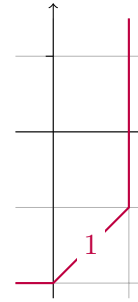


Abbildung 4.6: Newton-Polygon zu Q_2

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (4.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (4.2)$$

und mit denn Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + [\partial_t, u_n t^n]) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + n u_n t^{n-1}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis nun in (4.2) einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}}_{\text{Indexshift}} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Betrachte nun das Letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) &\stackrel{\text{Indexshift}}{\downarrow} = t^{-3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n \right) \\
 &\stackrel{\text{Cauchy Produkt}}{\downarrow} = t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} \right) t^{n-3} \\
 &\stackrel{\text{Indexshift}}{\downarrow} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n
 \end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (4.3) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \sum_{n=-3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n}_{\text{Indexshift}} \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left((n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}
 \end{aligned}$$

Nun haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit der gewünschten Formel vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2a}t^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \tag{4.4}$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left((n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \tag{4.5}$$

Nun können wir mit (4.4) und (4.5) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich machen und erhalten zunächst aus (4.4), dass

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \tag{4.6}$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \quad (4.7)$$

$$0 = u_n + v_n \quad \forall n \geq 0 \quad (4.8)$$

Als nächstes wollen wir dieses Ergebnis mit (4.5) kombinieren. Betrachte zunächst die Vorfaktoren vor t^{-3} :

$$\begin{aligned} -3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-3-k+1} \\ &= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\ \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} \\ &= u_{-1} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinen Koeffizienten vor t^n mit $n > -3$:

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)u_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{v_{n+2}u_{-2}}}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{v_{n+2}u_{-2}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) + \overbrace{v_{n+2}u_{-2}} \\ \Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= -\left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) \\ \stackrel{u_{-2} \neq 0}{\Rightarrow} v_{n+2} &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) \end{aligned}$$

und nach passendem Indexshift $n+2 \rightarrow n$ folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right)$$

Zusammen mit $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, $u_{-1} = -\frac{3}{2}$ und $v_{-1} = \frac{1}{2}$ sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (4.9)$$

die Koeffizienten von $v(t)$ und $u(t)$ vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit $\mathcal{E}^{-\psi(t)}$ zurücktwisten und erhalte damit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &\stackrel{3.12}{=} \underbrace{\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)}}_{\otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \\ &= \underbrace{(\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2)}_{\otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \\ &= \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \oplus \mathcal{N}_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\ &= (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \oplus (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \end{aligned}$$

und, da Q_1 regulär, ist $\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$ bereits ein Elementarer Meromorpher Zusammenhang. Betrachte also noch $\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} &\stackrel{3.11}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{(\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2} + u(t))}_{\otimes \mathcal{E}^{\psi(t)}} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \\ &= \underbrace{\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right)}_{\text{regulär}} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \end{aligned}$$

Damit ist der zweite Summand also auch ein Elementarer Meromorpher Zusammenhang. Also zerlegt sich \mathcal{M} , nach einem pull-back mit $\rho : t \mapsto x = -2t^2$, in

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \underbrace{\left(\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_1} \oplus \underbrace{\left(\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_2}.$$

Nach zerlegen von \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 in eine direkte Summe von elementaren formalen Meromorphen Zusammenhängen, wie in Satz 3.4, ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

4.2.1 Konvergenz der Summanden

Für $n > 0$ gilt $v_{n-1} \stackrel{(4.8)}{=} -u_{n-1}$ und damit wollen wir die Formel (4.9) noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt. Aus (4.9) ergeben sich


```

7 import ComplRat
8 import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
9
10 -- returns array with the coefficients of v(t)
11 -- first element in array is koefficient from t^{-1}
12 vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
13 vKoeffs uMin2 = 1/2:+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
14 where koeff :: Int -> ComplRat
15       koeff = memo koeff'
16       koeff' :: Int -> ComplRat
17       koeff' n | n > 0 = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
18                 | n == 0 = -3/(uMin2*4)
19                 | n == -1 = 1/2
20                 | otherwise = 0
21       where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
22
23 -- returns array with the coefficients of u(t)
24 -- first element in array is koefficient from t^{-2}
25 uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
26 uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2:+:0 : (tail $ vKoeffs uMin2)
    
```

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von u_{-2} eine unendliche Liste von Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `ComplRat`, welcher die Menge $\mathbb{Q}(i)$ implementiert. Hier ist `+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a+ib$ entspricht. `ComplRat` ermöglicht es, dass die Berechnung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

In folgender Abbildung sind die Beträge der Koeffizienten von $v(t)$ in Abhängigkeit von n für verschiedene u_{-2} angetragen.

Nun zum Konvergenzverhalten. Es ist klar, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_L \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \hat{L} \setminus L \quad \text{bzw.} \quad (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \in \mathcal{D}_L \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$$

Deshalb wollen wir die Potenzreihen v und u und im besonderen deren konvergenzverhalten, noch genauer betrachten. Außerdem gilt, dass $v(t) \in \hat{L} \setminus L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$. Wir betrachten wir den folgenden zwei klassischen Konvergenzkriterien.

Satz 4.5 (Wurzkriterium nach Cauchy). *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

Beweis. siehe [Kno64, §18, Satz 94]. □

Satz 4.6 (Quotientenkriterium). *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

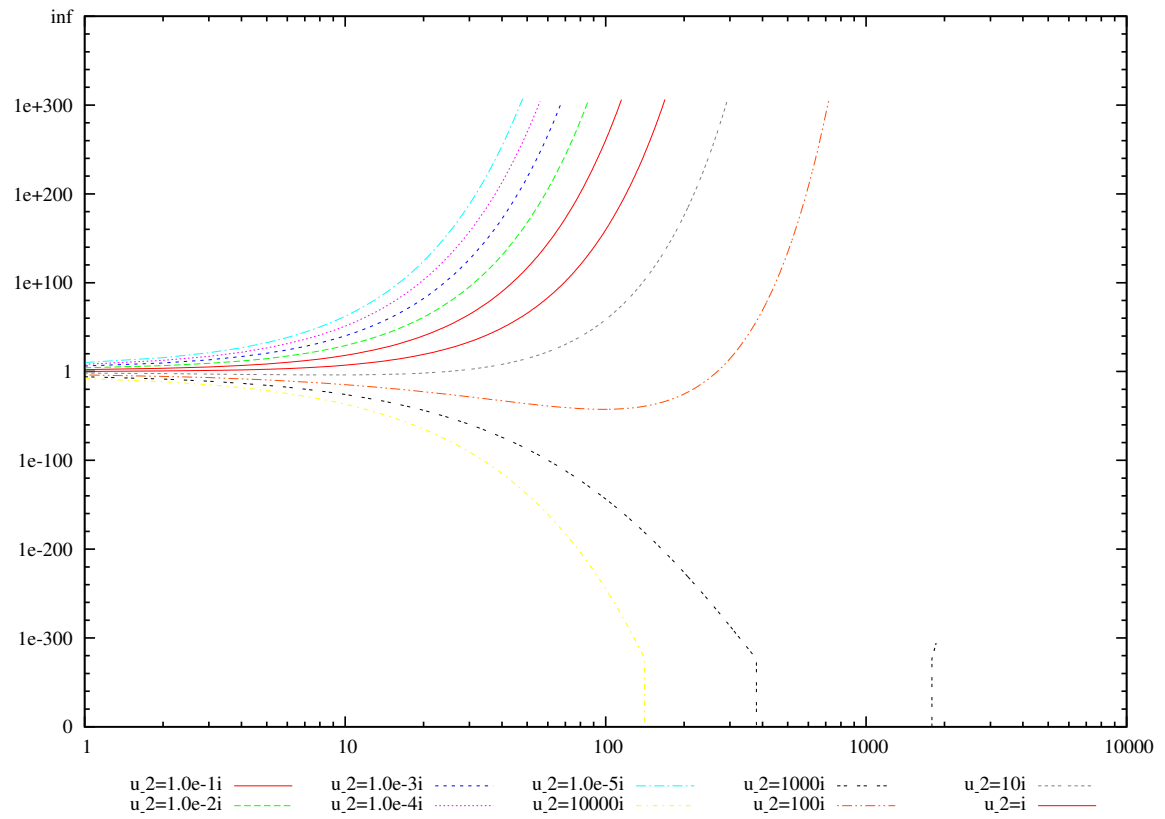


Abbildung 4.7: Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2} .

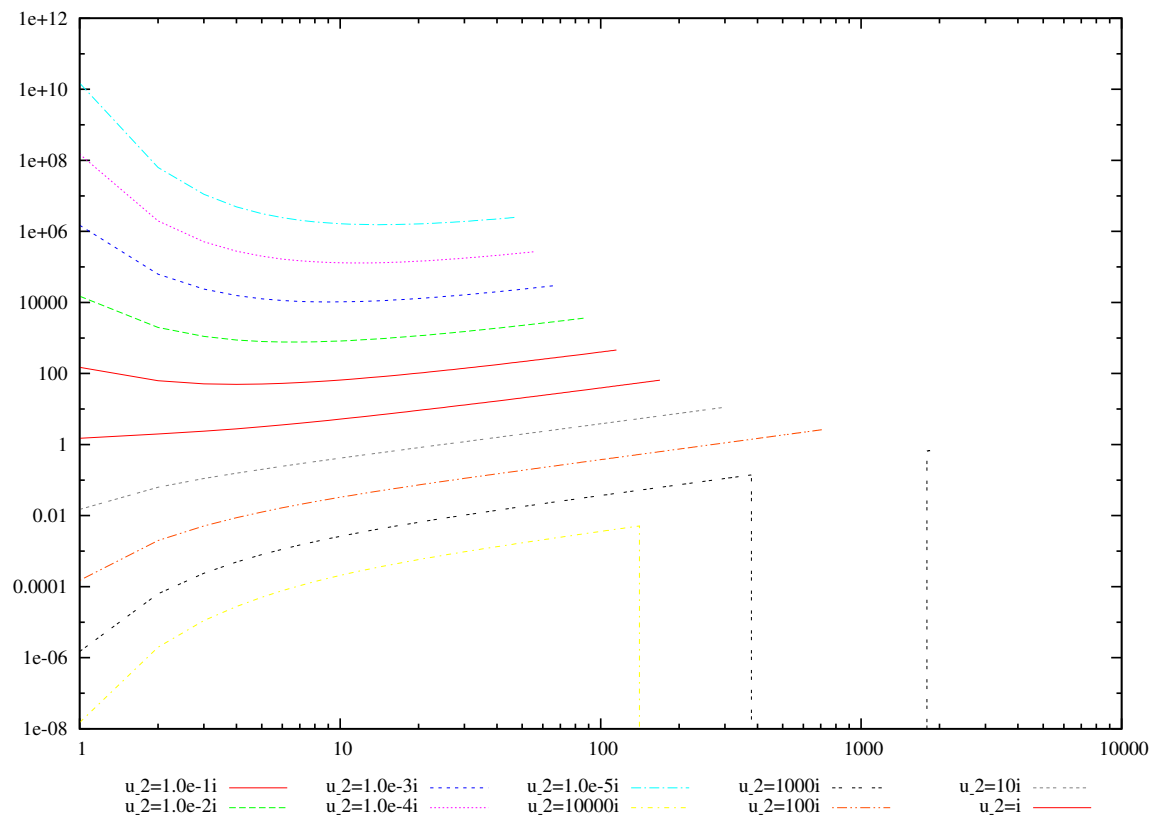


Abbildung 4.8: Wurzkriterium angewendet auf die Koeffizienten

Beweis. Es gilt, dass $\sum_n a_n x^n$ für ein $x \in \mathbb{C}$ konvergent ist, falls

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \leq \eta < 1$$

und das ist äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1.$$

Also konvergiert die Reihe für alle x mit $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. □

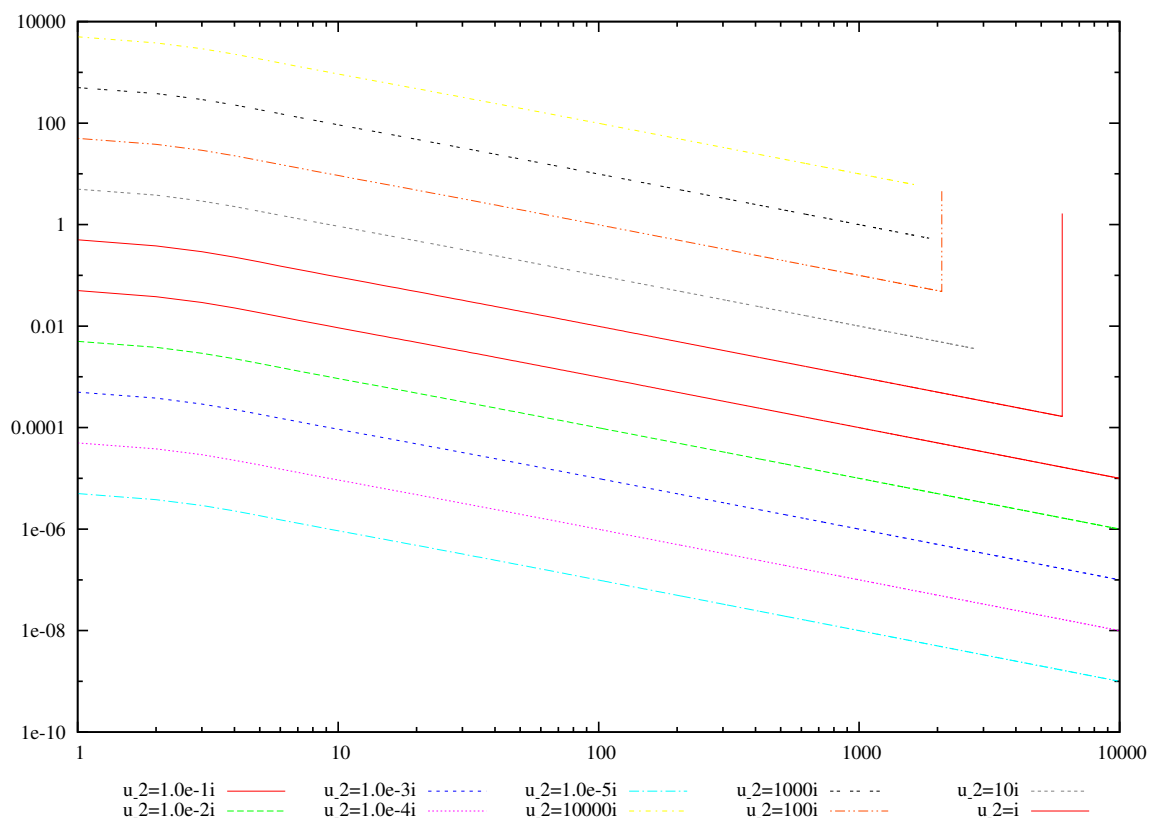


Abbildung 4.9: Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten

5 Schluss

B Genaueres zu $(x^2\partial_x)^k$

Nun wollen wir noch $(x^2\partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$\begin{aligned}
(x^2\partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(2x + x^2\partial_x)} (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= x^2 (2x + x^2\partial_x) \partial_x (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2) (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2) (x^2\partial_x) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(2x + x^2\partial_x)} + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2 \partial_x}_{(2x\partial_x + 1 + x^2\partial_x^2)}) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 (2x + x^2\partial_x) \partial_x + x^4 (2x\partial_x + 1 + x^2\partial_x^2) \partial_x) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (4x^4\partial_x + 2x^5\partial_x^2 + 2x^5\partial_x^2 + x^4\partial_x + x^6\partial_x^3) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
\end{aligned}$$

also gilt für spezielle k

$$(x^2\partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

C Numerische berechnung der Koeffizienten

Hier nun ein Haskell Programm, dass in der Funktion **main** die Koeffizienten von v und u für Abschnitt 4.2.1 numerisch berechnet. Für die beispielhaften Berechnungen hier, wählen wir $a = \frac{1}{8}$, dadurch gilt $u_{-2} = i$.

Listing C.1: Main.hs

```
1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4
5  -- parallel
6  import qualified Control.Monad.Parallel as P
7
8  -- for writing to file
9  import System.Environment
10 import System.IO
11 import Data.Time
12
13 genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
14 genLine (i,v1,v2) = concat [ show i           , "\t"
15                             , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
16                             , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
17                             , genItemQuot (i,v1,v2)   , "\n" ]
18
19 where
20   genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
21   genItemBetrag (_,v,_) = show $ fromRational $ magnitude v
22
23   genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
24   genItemCauchy (i,v,_) = show $ genItemCauchy'*(1 / (fromIntegral i))
25   where genItemCauchy' = fromRational $ magnitude v
26
27   genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
28   genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
29   where genItemQuot' = magnitudeSq v2 / magnitudeSq v1
30
31 -- #####
32 printData :: Int -> ComplRat -> IO()
33 printData end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip3 [0..] (tail vals) vals
34   where vals        = vKoeffs uMin2
35         addLine a    = putStr $ genLine a
36
37 printAsFrac :: Int -> ComplRat -> IO()
38 printAsFrac end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip [0..] $ vKoeffs uMin2
39   where addLine (i,a) = putStr $ show i ++ "\t" ++ show a ++ "\n"
40
41 saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
42 saveData end (fn, uMin2) =
43   do start <- getCurrentTime
44     withFile fn WriteMode (\handle -> do
45       hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
46     stop <- getCurrentTime
47     putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
48   where vals        = vKoeffs uMin2
```



```

49     triples = zip3 [0..] (tail vals) vals
50
51 main :: IO()
52 main = do x <- getArgs
53         P.sequence_ (main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
54     where main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"      , (0:+:1))
55                                       {-, ("./data/u_-2=10000i" , (0:+:10000))-}
56                                       {-, ("./data/u_-2=1000i"   , (0:+:1000))-}
57                                       {-, ("./data/u_-2=100i"    , (0:+:100))-}
58                                       {-, ("./data/u_-2=10i"     , (0:+:10))-}
59                                       {-, ("./data/u_-2=1.0e-1i"  , (0:+:1.0e-1))-}
60                                       , ("./data/u_-2=1.0e-2i"  , (0:+:1.0e-2))
61                                       {-, ("./data/u_-2=1.0e-3i"  , (0:+:1.0e-3))-}
62                                       {-, ("./data/u_-2=1.0e-4i"  , (0:+:1.0e-4))-}
63                                       {-, ("./data/u_-2=1.0e-5i"  , (0:+:1.0e-5))-}
64                                       ]

```

Listing C.2: ComplRat.hs

```

1  -- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
2  -- Zahlen, also den Elementen von  $\mathbb{Q}(i)$ , bereit.
3  module ComplRat
4      ( ComplRat(..)
5        , realPart
6        , imagPart
7        , magnitude
8        , magnitudeSq
9        ) where
10 import Data.Ratio
11
12 -- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
13 -- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
14 data ComplRat = !Rational :+: !Rational
15     deriving (Eq)
16
17 -----
18 -- Functions over ComplRat
19
20 -- | Extracts the real part of a complex number.
21 realPart :: ComplRat -> Rational
22 realPart (x :+: _) = x
23
24 -- | Extracts the imaginary part of a complex number.
25 imagPart :: ComplRat -> Rational
26 imagPart (_ :+: y) = y
27
28 -- | The nonnegative magnitude of a complex number.
29 -- only for pure real or pure complex numbers
30 magnitude :: ComplRat -> Rational
31 magnitude (x :+: 0) = abs x
32 magnitude (0 :+: y) = abs y
33 magnitude (_ :+: _) = error "Oops!"
34 {-magnitude (x :+: y) = P.sqrt (sqr x P.+ (sqr y)) -}
35 {-where sqr z = z P.* z-}
36
37 -- | The square of magnitude of a complex number.
38 magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
39 magnitudeSq (x :+: 0) = x*x
40 magnitudeSq (0 :+: y) = y*y
41 magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y
42
43 -- TODO: approx. log
44
45 -----
46 -- Instances of ComplRat
47

```

```

48 instance Show ComplRat where
49     show (x :+: y) | y == 0      = show x
50                             | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"
51
52 instance Num ComplRat where
53     (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
54     (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
55     negate (x :+: y)        = negate x :+: negate y
56     fromInteger i           = fromInteger i :+: 0
57     abs z                   = magnitude z :+: 0
58     signum (0 :+: 0)        = 0
59     {-signum z@(x :+: y)    = x P./ r :+: y P./ r where r = magnitude z-}
60
61 instance Fractional ComplRat where
62     fromRational r          = fromRational r :+: 0
63     (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/n) :+: ((b*c - (a*d))/n)
64     where sqr z = z * z
65           n     = sqr c + (sqr d)

```

Ist der Code in einer Datei `/Pfad/zu/koeff.hs` gespeichert, so lässt er sich in Unix-Ärtigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen. Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von v und u bis zum Index 15 sowie einzelne Werte an 20, 30, 40, 50, 100 und 150 und produziert einen Ausgang, der wie folgt aussieht

n	v_n	u_n
-2	0.0 :+: 0.0	0.0 :+: 1.0
-1	0.5 :+: 0.0	(-1.5) :+: (-0.0)
0	(-0.0) :+: 0.75	0.0 :+: (-0.75)
1	1.5 :+: 0.0	(-1.5) :+: (-0.0)
2	0.0 :+: (-3.9375)	(-0.0) :+: 3.9375
3	(-13.5) :+: (-0.0)	13.5 :+: 0.0
4	0.0 :+: 59.34375	(-0.0) :+: (-59.34375)
5	324.0 :+: 0.0	(-324.0) :+: (-0.0)
6	0.0 :+: (-2122.98046875)	(-0.0) :+: 2122.98046875
7	(-16213.5) :+: (-0.0)	16213.5 :+: 0.0
8	0.0 :+: 141115.447265625	(-0.0) :+: (-141115.447265625)
9	1376311.5 :+: 0.0	(-1376311.5) :+: (-0.0)
10	0.0 :+: (-1.4850124677246094e7)	(-0.0) :+: 1.4850124677246094e7
11	(-1.75490226e8) :+: (-0.0)	1.75490226e8 :+: 0.0
12	0.0 :+: 2.2530628205925293e9	(-0.0) :+: (-2.2530628205925293e9)
13	3.1217145174e10 :+: 0.0	(-3.1217145174e10) :+: (-0.0)
14	0.0 :+: (-4.641652455250599e11)	(-0.0) :+: 4.641652455250599e11
15	(-7.3709524476135e12) :+: (-0.0)	7.3709524476135e12 :+: 0.0
20	0.0 :+: 1.753906248830001e19	(-0.0) :+: (-1.753906248830001e19)
30	0.0 :+: (-2.7520294973343126e33)	(-0.0) :+: 2.7520294973343126e33
40	0.0 :+: 1.1055855646065139e49	(-0.0) :+: (-1.1055855646065139e49)
50	0.0 :+: (-5.0878905001062135e65)	(-0.0) :+: 5.0878905001062135e65
100	0.0 :+: 3.045728894141079e159	(-0.0) :+: (-3.045728894141079e159)
150	0.0 :+: (-2.7737283214890534e264)	(-0.0) :+: 2.7737283214890534e264

In Haskell ist das `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse **Data.Complex**. So erzeugt ein Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a + ib$ entspricht.

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise sieht das Ergebnis also wie folgt aus:

n	v_n	u_n
-2	0	i
-1	0,5	-1,5
0	$0,75i$	-0,75 <i>i</i>
1	1,5	-1,5
2	-3,9375 <i>i</i>	3,9375 <i>i</i>
3	-13,5	13,5
4	59,34375 <i>i</i>	-59,34375 <i>i</i>
5	324,0	-324,0
6	-2122,98046875 <i>i</i>	2122,98046875 <i>i</i>
7	-16213,5	16213,5
8	141115,447265625 <i>i</i>	-141115,447265625 <i>i</i>
9	1376311,5	-1376311,5
10	$-1,4850124677246094 \cdot 10^7 i$	$1,4850124677246094 \cdot 10^7 i$
11	$-1,75490226 \cdot 10^8$	$1,75490226 \cdot 10^8$
12	$2,2530628205925293 \cdot 10^9 i$	$-2,2530628205925293 \cdot 10^9 i$
13	$3,1217145174 \cdot 10^{10}$	$-3,1217145174 \cdot 10^{10}$
14	$-4,641652455250599 \cdot 10^{11} i$	$4,641652455250599 \cdot 10^{11} i$
15	$-7,3709524476135 \cdot 10^{12}$	$7,3709524476135 \cdot 10^{12}$
⋮	⋮	⋮
20	$1.753906248830001 \cdot 10^{19} i$	$-1.753906248830001 \cdot 10^{19} i$
⋮	⋮	⋮
30	$-2.7520294973343126 \cdot 10^{33} i$	$2.7520294973343126 \cdot 10^{33} i$
⋮	⋮	⋮
40	$1.1055855646065139 \cdot 10^{49} i$	$-1.1055855646065139 \cdot 10^{49} i$
⋮	⋮	⋮
50	$-5.0878905001062135 \cdot 10^{65} i$	$5.0878905001062135 \cdot 10^{65} i$
⋮	⋮	⋮
100	$3.045728894141079 \cdot 10^{159} i$	$-3.045728894141079 \cdot 10^{159} i$
⋮	⋮	⋮
150	$-2.7737283214890534 \cdot 10^{264} i$	$2.7737283214890534 \cdot 10^{264} i$
⋮	⋮	⋮

Tabelle C.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von $u(t)$ und $v(t)$ für $a = \frac{1}{8}$

Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov, *D -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for d -modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer D -Moduln und Fourier-transformation*, 2010.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Hut07] Graham Hutton, *Programming in Haskell*, Cambridge University Press, January 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara, *D -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [Kno64] Konrad Knopp, *Theorie und anwendung der unendlichen reihen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1964.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d -modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.