Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

Wir betrachten $\mathbb{C}$ hier als Complexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\} = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_0$ die formalen Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\hat{K} := \mathbb{C}(\!(x)\!) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.

Wobei offensichtlich die Inclulsionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[\![x]\!]$ und $K \subsetneq \hat{K}$ gelten.

Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$$^{t}v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor.

Definition 1.1 (Direkte Summe)**.** [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
& & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.2 (Tensorprodukt)**.** [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Definition 1.3 (Exacte Sequenz)**.** Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 1.4 (Kurze exacte Sequenz)**.** Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 1.5 (Filtrierung)**.** [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_iA)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_iA/F_{k-1}A$ und damit das zu A mit Filtrierung F assoziierte graduierte Modul

$$gr^F A := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} gr_i^F A\,.$$

Definition 1.6. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

Definition 1.7 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 1.8. *Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \hat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \to k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x, so gilt*

1. $[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$
2. *für $f \in k$ ist*

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

3. Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
[\partial_x, x^k] &= kx^{k-1}\\
[\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1}\\
[\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i}
\end{aligned}$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f]\cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□

2 Der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ab hier sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \hat{K}\}$.

2.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g\,.$$

Definition 2.1. Definiere nun den Ring $\mathcal{D}_k$ als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (2.1). Wir schreiben diesen Ring als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[\![x]\!]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) < \partial_x >$ falls $k = K \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\hat{K}} := \mathbb{C}(\!(x)\!) < \partial_x >$ falls $k = \hat{K} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Bemerkung 2.2. Es gilt $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Proposition 2.3. *[Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in $\mathcal{D}_k$ kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.*

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

Definition 2.4. Sei $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 2.3, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von P.

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 2.5. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$

isomorph als grad. Ringe

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ *als graduierte Ringe.*

Beweis. TODO □

2.2 Alternative Definition / Herangehensweise

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-Dimensionale Complexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Ein (holomorpher) *differential Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x)\partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzten $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat Ordnung m, falls $\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$. Mit $\mathcal{D}_X$ bezeichnen wir die Garbe von Differentialoperatoren auf X. Die Garbe $\mathcal{D}_X$ hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und $\mathcal{O}_X$ ist ein Unterring von $\mathcal{D}_X$. Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über über X. Es gilt, dass Θ_X in $\mathcal{D}_X$ enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links $\mathcal{O}_X$-Untermodul, aber kein rechts $\mathcal{O}_X$-Untermodul ist.

Proposition 2.6. *[Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[t]\partial$. Wobei ∂ als $\partial(t^n) = nt^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren*

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[t, \partial], \qquad \textit{mit} \qquad \partial t - t\partial = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

2.3 (Links) $\mathcal{D}$-Moduln

Da $\mathcal{D}$ ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links unr rechts $\mathcal{D}$-Moduln unterschiden. Wenn ich im folgendem von $\mathcal{D}$-Moduln rede, werde ich mich immer, wie auch [Ara, Chapter 1.6.], auf links $\mathcal{D}$-Moduln beziehen.

Beispiel 2.7 (Einfachste links $\mathcal{D}$-Moduln)**.** [Ark12, Exmp 2.2]

1. $\mathcal{D}$ ist ein links und rechts $\mathcal{D}$-Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t]$ durch
   - $\partial(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}$ und $t \cdot f(t) = tf$
   - oder [Gin98, Exmp 3.1.2] $\mathbb{C}[t] = \mathcal{D} \cdot 1 = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot \partial$.
3. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ mit $t \cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$

Beispiel 2.8 (Weiter $\mathcal{D}$-Moduln)**.**

1. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne jeglichen analytischen Hintergurnd, ein Symbol $\exp(\lambda t)$ ein, mit $\partial(f(t)\exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\exp(\lambda t) + f\lambda\exp(\lambda t)$. So ist $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X \exp(\lambda t)$ ein $\mathcal{D}$-Modul.
2. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial \cdot \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das $\mathcal{D}$-Modul $\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über $\mathcal{D}$ erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial x \partial)\,.$$

2.4 Lokalisierung eines (holonomen) $\mathcal{D}$-Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul. Betrachte $\mathcal{M}$ als $\mathbb{C}\{x\}$-Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von $\mathcal{M}$.

Proposition 2.9. *[Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ bekommt in natürlicher weiße eine $\mathcal{D}$-Modul Struktur.*

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

□

3 Der Meromorphe Zusammenhang

3.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(K, n \times n)$ betrachte des System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \tag{3.1}$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden dieses Problem immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (3.1) betrachten wir holomorphe (but possibly multivalued) auf der punktierten Scheibe $B_\varepsilon^* = x \in \mathbb{C}|0 < |x| < \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ klein genug sei. Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (3.1), falls für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt v_i eine holomorphe aber möglicherweise multivalued Funktion von B_ε^* nach $\mathbb{C}$ ist (diese Menge werde ich im folgendem wie [HTT07] mit $\tilde{K}$ bezeichnen) und es (3.1) erfüllt.

Bemerkung 3.1. Die Menge der holomorphen aber möglicherweise multivalued Funktionen von B_ε^* nach $\mathbb{C}$ werde ich im folgendem, wie auch [HTT07], mit $\tilde{K}$ bezeichnen.

Nun wollen wir dieses Klasische Gebilde in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 3.2 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tuppel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

  $$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{3.2}$$

  erfüllen soll.

Definition 3.3. Seien $(\mathcal{M}_K, \partial_\mathcal{M})$ und $(\mathcal{N}_K, \partial_\mathcal{N})$ zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine K-lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_\mathcal{M} = \varphi \circ \partial_\mathcal{N}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_\mathcal{M}) \to (\mathcal{N}_K, \partial_\mathcal{N})$.

Bemerkung 3.4. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (3.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u\,,$$

welche für alle $f \in K$ aber nur für alle $u \in \mathbb{C}\{x\}$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 3.5 (Zusammenhangsmatrix)**.** [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine K-Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ von $\mathcal{M}$. Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(K, n\times n)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j\,.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, die Wirkung von ∂ beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\Big(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(u_i'(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\Big)e_i\,.$$

Also ist die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{K}\otimes_K\mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x) \tag{3.3}$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{K}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammanhang $(\mathcal{M}, \partial)$ ausgestattet mit einer K-Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ von $\mathcal{M}$ zu einem ODE zugeordnet werden kann. Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten Meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n Ke_i\,, \qquad \partial_A e_i := -\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)e_i\,.$$

3.2 Eigenschaften

Lemma 3.6 (Lemma vom zyklischen Vektor)**.** *[Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1}m$ eine K-Basis von $\mathcal{M}_K$ ist.*

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 3.7. *[Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein $\mathcal{D}_K$-Modul und andersherum.*

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 3.8. *[AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Lemma 3.9. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}_K$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\
K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ\partial\circ\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"']
\end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\circ\partial\circ\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 3.10. *Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die differenz zweier Derivationen ist K-linear.*

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{M}_K$. Da ∂_1 und ∂_2 $\mathbb{C}$-linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)\ \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
&= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
&= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
&= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.11. *Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.*

Definition 3.12 (Transformationsformel)**.** [HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\varphi\cong"] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi\cong"'] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi\cong"'] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi\cong"]
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 3.13 (Differenziell Äquivalent)**.** Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

Proposition 3.14. *[Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzten von*

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K-Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem Meromorphen Zusammenhang.

3.3 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \Big((k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Definition 3.15. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\operatorname{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Definition 3.16. Die Menge $\operatorname{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \operatorname{slopes}(P) = \{0\}$, sonst *irregulär singulär.*
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu $\mathcal{M}_K$ gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_K$ heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres P gibt, mit $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

Beispiel 3.17. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = t^1 \partial_t^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

$k = 2$ $\qquad\qquad$ $l = 1$

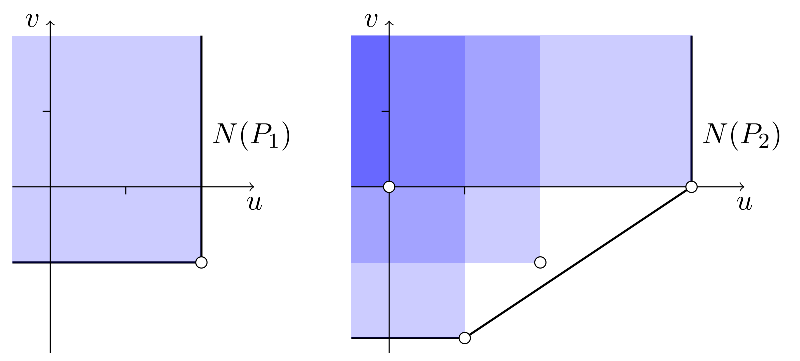
so dass

$$H(P_1) = \Big((2, 1-2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\}\,.$$

In Abbildung 3.2a ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\mathrm{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ so kann man daraus das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 3.2b visualisiert.

Abbildung 3.1: Zu Beispiel 3.17



(a) Newton Polygon zu P_1 (b) Newton Polygon zu P_2

Lemma 3.18. *[Sab90, 5.1]*

1. *$\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$*

2. *Wenn man eine exacte Sequenz $0 \to \mathcal{M}'_K \to \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}''_K \to 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.*

3.4 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.19 (Formaler Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *formaler Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht, analog wie in Definition 3.2, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler $\hat{K}$-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\hat{K}} \to \mathcal{M}_{\hat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (3.2) erfüllen soll.

Bemerkung 3.20. Alle bisher getroffene Aussagen stimmen auch für formale Meromorphe Zusammenhänge. Im besonderen existiert für jedes $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein ein $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ mit $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$.

Definition 3.21. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$. Wir schreiben $\mathscr{E}^{\varphi}$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Bemerkung 3.22. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathscr{E}^{\varphi} \cong \mathscr{E}^{\psi}$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$.

3.5 pull-back und push-forward

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $(\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, u \mapsto t := \rho(u)) \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei $\mathcal{M}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 3.23 (pull-back)**.** [Sab07, 1.a] Der *pull-back (Inverses Bild)* $\rho^+\mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^*\mathcal{M} = \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch

$$\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m\,. \tag{3.4}$$

Lemma 3.24. *Es gilt* $\rho^*\mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} = \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(u)\!)}$ *mittels*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} &\xrightarrow{\quad\cong\quad} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(u)\!)} \\ f(u) \otimes m(t, \partial_t) &\longmapsto f(u) m(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u) \end{aligned}$$

Beweis. □

Bemerkung 3.25. Das soeben, in Lemma 3.24, definierte Φ erfüllt für $1 \otimes m \in \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)}$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\overset{\text{def}}{=} \rho'(u) \otimes \partial_t m \\ &\overset{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(u)\rho'(u)^{-1}}_{=1} \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u) \\ &= \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u) \end{aligned}$$

und somit (3.4) wie gewollt.

Lemma 3.26. *In der Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \_ \cdot P(t, \partial_t)} & \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \\ \cong \big\downarrow \Phi & & \cong \big\downarrow \Phi \\ \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(u)\!)} & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(u)\!)} \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 3.24 macht $\alpha := \_\cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)$ das Diagram kommutativ.

Beweis. □

Lemma 3.27. *Sie $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}\backslash\{0\}$. Eine Abbildung der Form $\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \xrightarrow{\_\cdot Q} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$ ist immer surjectiv.*

Beweis. □

Lemma 3.28. *In der Situation von Lemma 3.23, mit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P(t, \partial_t)$ für ein $P(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$, gilt*

$$\rho^*\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}\Big/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)$$

also wird der Übergang beschrieben durch

$$\begin{aligned} t &\to \rho(t) \\ \partial_t &\to \rho'(t)^{-1}\partial_u \end{aligned}$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$ und $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P$. Es ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\_\cdot P} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

exact und flach, da über Körper. Deshalb ist auch

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\_\cdot P} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \longrightarrow \rho^*\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

exact. Also mit Φ wie in Lemma 3.24 und $Q(u, \partial_u) := \rho^+P(t, \partial_t) := P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)$ nach Lemma 3.26 ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\_\cdot P"] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \rho^*\mathcal{M} \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r, "\_\cdot Q"] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & & \end{tikzcd}$$

wobei das Diagram kommutiert. Nun lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen (weil $\_\cdot Q$ surjectiv, nach Lemma 3.27)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes _ \cdot P"] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \rho^*\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi", "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r, "_ \cdot Q"] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \big/ \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\rho^*\mathcal{M} &\overset{\varphi}{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \\
&= \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}\Big/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.29. *Ein pull-back mit $u \mapsto u^p$ multipliziert alle slopes mit p.*

Beweis. □

Beispiel 3.30 (pull-back)**.** Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Wir wollen $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$ bzgl. $P := t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 3.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back $\rho : t \to u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 3.28 anwenden können.

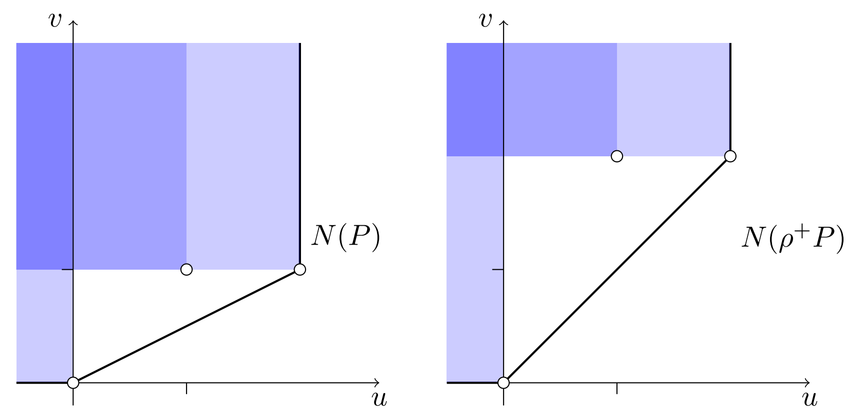
$$\begin{aligned}
\partial_t &\to \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\
\partial_t^2 &\to (\frac{1}{2u}\partial_u)^2 \\
&= \frac{1}{2u}\partial_u(\frac{1}{2u}\partial_u) \\
&= \frac{1}{2u}(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2) \\
&= \frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u
\end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
\rho^+ P &= u^6(\frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1
\end{aligned}$$

Also ist $\rho^+P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$ mit slopes$(\rho^+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.3b) und somit $\rho^*\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot(\frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1)$.

Abbildung 3.2: Zu Beispiel 3.30



(a) Newton Polygon zu $P = t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$

(b) Newton Polygon zu $\rho^+P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$

Sei $\mathcal{N}$ ein $\mathbb{C}((u))$-VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 3.31 (push-forward)**.** [Sab07, 1.a] Der *push-forward (Direktes Bild)* $\rho_+\mathcal{N}$ ist

- der $\mathbb{C}((t))$-VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist der $\mathbb{C}$-Vektor Raum $\mathcal{N}$ mit der $\mathbb{C}((t))$-Vektor Raum Struktur durch $f(t)\cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_t beschrieben durch $\rho'(u)^{-1}\partial_u$.

Satz 3.32. *[Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((u))}\rho^+\mathcal{M}) \cong \rho_+\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((t))}\mathcal{M}\,. \tag{3.5}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\rho_+(\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((u))}\rho^+\mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((u))}(\mathbb{C}((u))\otimes_{\mathbb{C}((t))}\mathcal{M}))\\ &\cong \rho_+((\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((u))}\mathbb{C}((u)))\otimes_{\mathbb{C}((t))}\mathcal{M})\\ &\cong \rho_+(\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((t))}\mathcal{M})\\ &= \rho_+\mathcal{N}\otimes_{\mathbb{C}((t))}\mathcal{M}\end{aligned}$$

□

3.6 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.33 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$, $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$ ab.

Lemma 3.34. *[Sab07, Lem 2.2]*

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

4.1 Klassische Definition

Satz 4.1. *[Sab90, Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es exisitiert eine (bis auf Permutation) eindutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.*

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] □

Satz 4.2. *[Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Beispiel 4.3. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel **??**. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turrittin-Theorems Zerlegen.

4.2 Sabbah's Refined version

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 4.4. *[Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ gilt*

$$\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}\,.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e}\cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e)\\
&= u(-ku^{-k-1}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))}\partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in\rho_+\mathscr{E}^\varphi}))\\
&= -ku^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1}\otimes_{\mathbb{C}((t))}(pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e)\\
&= -ku^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1}\otimes_{\mathbb{C}((t))}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e)\\
&= \underbrace{-ku^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1}\otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k\varphi'(u)e\\
&= u^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1}\varphi'(u)e\\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i\underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in\mathbb{C}((t))}e\\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)(u^{-k}\otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e)\\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u\mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j P^j]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u\mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1})\\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}\right)_{k\in\{0,..,p-1\}}
\end{aligned}$$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1\\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$
= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\
u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\
u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\
u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\
u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)
\end{pmatrix}
$$

$$
= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j]
$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$
\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j]
$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$ [3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$
\begin{aligned}
T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\
&= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\ (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\ (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} [4] \\
&= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

$\square$

Proposition 4.5. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^-1]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit grad $p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] $\square$

Satz 4.6 (Refined Turrittin-Levelt)**.** *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus El(\rho, \varphi, R) \underset{def}{=} \rho_+(\mathscr{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] $\square$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + ... + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + ... + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + ...$$

$\psi_0(u^p)$ $\quad u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)$ $\quad u\psi_1(u^p)$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + ... \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + ... \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + ...
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[Ara] D. Arapura, *Notes on d-modules and connections with hodge theory*, Notizen?

[Ark12] S. Arkhipov, *D-modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.

[AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.

[Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d-modules*, Vorlesungsskript, 2009.

[BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Ell10] C. Elliott, *D-modules*, unpublished notes available online, April 2010.

[Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d-modules*, Vorlesungsskript, 1998.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.

[Kas03] M. Kashiwara, *D-modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

[Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.

[Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules.*

[Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, December 2012.