Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turittin-Zerlegung einer Klasse von Fourier-Transformationen

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 11.05.2013

stand: 8. März 2013

Inhaltsverzeichnis

0 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

Wir betrachten $\mathbb{C}$ hier als Complexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i | \text{pos. Konvergenzradius}\} = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_0$ die formalen Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\hat{K} := \mathbb{C}(\!(x)\!) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit $\tilde{K}$ bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inclulsionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[\![x]\!]$ und $K \subsetneq \hat{K}$ gelten.

Es bezeichnet der Hut ($\hat{}$) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 0.1 (Seite 2)**.** *ein paar eigenschaften*

1. *$\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.*

   alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. *wenn* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* $\mathbb{C}[x]$ *(erzeugt von* x *ist), so ist*

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \backslash \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ *ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term* $\neq 0$ *ist invertierbar.*

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt $\mathfrak{m}$*-adische Fitration, ist die Filtrierung* $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Für $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m Dimensionalen Matritzen mit einträgen in k.

Definition 0.2 (Direkte Summe)**.** [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
& & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 0.3 (Tensorprodukt)**.** [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Für eine Abbildung $f : M \to M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_N \otimes f : \quad N \otimes_R M &\to N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

Bemerkung 0.4. Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \tag{0.1}$$

$$M \otimes_R R \cong M \tag{0.2}$$

Sei $f : M' \to M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M/\operatorname{im}(f)) \cong N \otimes_R M/\operatorname{im}(\mathrm{id}_R \otimes f) \tag{0.3}$$

Definition 0.5 (Exacte Sequenz)**.** Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.6 (Kurze exacte Sequenz)**.** Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 0.7 (Kokern)**.** Ist $f : M' \to M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\operatorname{coker}(f) = M/\operatorname{im}(f)$.

Proposition 0.8. *Ist $f : M' \to M$ eine injektive Abbildung, so ist*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') & \longrightarrow & 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \mod f(M') & & \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz und $M/f(M') = \operatorname{coker}(f)$ ist der Kokern *von f.*

Beweis. □

Definition 0.9 (Filtrierung)**.** [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung F* von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_iA)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_iA/F_{k-1}A$ und damit das zu A mit Filtrierung F *assoziierte graduierte Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} gr_i^F A \,.$$

gr_i^F als was??

Definition 0.10. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

Definition 0.11 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 0.12. *Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \hat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \to k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x, so gilt*

1. $[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$

2. *für* $f \in k$ *ist*

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

3. *Es gelten die Formeln*

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \tag{0.4}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \tag{0.5}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i} \tag{0.6}$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f]\cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□

1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ab hier sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \hat{K}\}$.

1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g\,.$$

Definition 1.1. Definiere nun den Ring $\mathcal{D}_k$ als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[\![x]\!]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) < \partial_x >$ falls $k = K \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\hat{K}} := \mathbb{C}(\!(x)\!) < \partial_x >$ falls $k = \hat{K} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Bemerkung 1.2.
- Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$.
- Offensichtlich erhält $\mathcal{D}_k$ in kanonischer weiße eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapittel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- $\mathcal{D}_k$ ist offensichtlich nichtkommutativ.

Proposition 1.3. *[Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in $\mathcal{D}_k$ kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.*

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exersice"

□

Besser?:
erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 1.4. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 1.3, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von P.

Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.5. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} \underbrace{:= \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr^F_N\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr^F_N\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] =}_{\substack{\cong \\ \textit{isomorph als grad. Ringe}}} \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$$

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$ *als graduierte Ringe.*

Beweis. TODO

Treffen?

$\square$

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-Dimensionale Complexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Ein (holomorpher) *differential Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x)\partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzten $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat Ordnung m, falls $\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$. Mit $\mathcal{D}_X$ bezeichnen wir die Garbe von Differentialoperatoren auf X. Die Garbe $\mathcal{D}_X$ hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und $\mathcal{O}_X$ ist ein Unterring von $\mathcal{D}_X$. Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über über X. Es gilt, dass Θ_X in $\mathcal{D}_X$ enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links $\mathcal{O}_X$-Untermodul, aber kein rechts $\mathcal{O}_X$-Untermodul ist.

Proposition 1.6. *[Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[t]\partial$. Wobei ∂ als $\partial(t^n) = nt^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren*

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[t,\partial], \qquad \textit{mit} \qquad \partial t - t\partial = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

Definition 1.7. [Ark12, Defn 2.1] Sei $X = \mathbb{A}^1$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\mathcal{D}_X = [t,\partial]$ mit der Relation $[\partial, t] = 1$. Dann definieren wir die links $\mathcal{D}$-Moduln über $\mathbb{A}^1$ als die $\mathbb{C}[t,\partial]$-Moduln. Sie werden geschrieben als $\mathcal{D} - mod(\mathbb{A}^1)$

1.2 (Links) $\mathcal{D}$-Moduln

Sei $\mathcal{D} := \mathcal{D}_k$ für eines der oben genannten k. Da $\mathcal{D}$ ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links unr rechts $\mathcal{D}$-Moduln unterschiden. Wenn ich im folgendem von $\mathcal{D}$-Moduln rede, werde ich mich immer auf links $\mathcal{D}$-Moduln beziehen.

Beispiel 1.8 (links $\mathcal{D}$-Moduln)**.** [Ark12, Exmp 2.2]

1. $\mathcal{D}$ ist ein links und rechts $\mathcal{D}$-Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ jeweils durch $t \cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergurnd, ein Symbol $\exp(\lambda t)$ ein, mit $\partial(f(t)\exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\exp(\lambda t) + f\lambda\exp(\lambda t)$. So ist $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X \exp(\lambda t)$ ein $\mathcal{D}$-Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(t)$ mit den Eigenschaften $\partial \cdot \log(t) = \frac{1}{t}$ ein. Erhalte nun das $\mathcal{D}$-Modul $\mathbb{C}[t]\log(t) + \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Dieses Modul ist über $\mathcal{D}$ erzeugt durch $\log(t)$ und man hat

$$\mathbb{C}[t]\log(t) + \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(t) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial t \partial)\,.$$

Lemma 1.9. *[Sab90, Lem 2.3.3.] Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist. Dann ist $\mathcal{M}$ bereits ein freies $\mathbb{C}\{x\}$-Modul.*

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.]. □

Korollar 1.10. *[Sab90, Cor 2.3.4.] Falls $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon $\mathcal{M} = \{0\}$.*

1.2.1 Holonome $\mathcal{D}$-Moduln

TODO: defn of Car als Charakteristische Varietät

Definition 1.11. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei $\mathcal{M}$ lineares Differentialsystem (linear differential system) . Man sagt, $\mathcal{M}$ ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\operatorname{Car} \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.12. *[Sab90, Lem 3.3.8.] Ein $\mathcal{D}$-Modul ist holonom genau dann, wenn $\dim_{gr^F \mathcal{D},0} gr^F \mathcal{M} = 1$.*

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

1.3 Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$-Moduln

[Sab90, Chap 4.1.] Sei M ein $\mathbb{C}\{x\}$-Modul. Wir schreiben $M[x^{-1}]$ für den K-Vektor Raum $M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$. Im allgemeinen gilt, falls M von andlichen Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist, so ist $C[x^{-1}]$ von endlichem Typ über K. Bemerke aber, dass $M[x^{-1}]$ generell nicht von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist.

1.4 Lokalisierung eines (holonomen) $\mathcal{D}$-Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul. Betrachte $\mathcal{M}$ als $\mathbb{C}\{x\}$-Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von $\mathcal{M}$.

Proposition 1.13. *[Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ erhält in natürlicher Weise eine $\mathcal{D}$-Modul Struktur.*

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

beweis der $\mathcal{D}$-linearität ist als übung gelassen

□

2 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.1 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [Sab07, Def 2.1]

Alternative. ausfürlichere / komplexe definition [Sab90, Def 5.4.5.]

Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$, $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E}^{\varphi} \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$ ab.

Lemma 2.2. *[Sab07, Lem 2.2]*

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 2.3. *[Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ gilt*

$$\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi} = \bigoplus_{\xi^p = 1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+\mathscr{E}^\varphi})) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k\varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1}\varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p)(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0,..,p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\
u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\
u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\
u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\
u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)
\end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$ [3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j] T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j] \\
&= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j]
\end{aligned}$$

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j \left(\xi^1\right)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j \left(\xi^{p-1}\right)^j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

$\square$

Lemma 2.4. *[Sab07, Lem 2.6.] Es gilt* $El([u \mapsto u^p], \varphi, R) \cong El([u \mapsto u^p], \psi, S)$ *genau dann, wenn*

- *es ein* ζ *gibt, mit* $\zeta^p = 1$ *und* $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$
- *und* $S \cong R$ *als* $\mathbb{C}(\!(u)\!)$*-Vektorräume mit Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Lem 2.6.] $\square$

Proposition 2.5. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale* $\mathbb{C}(\!(x)\!)$*-Vektorraum* $\mathcal{M}$ *mit Zusammenhang ist isomorph zu* $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes L)$*, wobei* $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$*,* $\rho : u \to u^p$ *vom grad* $p \geq 1$ *und ist minimal unter* φ*. (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und* L *ist ein Rang* 1 $\mathbb{C}(\!(x)\!)$*-Vektrorraum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] $\square$

3 Levelt-Turrittin-Theorem

Quellen:
sabbah_cimpa90 seite 28 / 30

Satz 3.1 (Levelt-Turittin). *Es ex. endliche Körper* $\hat{L}|\hat{K}$ *mit* $\hat{L} = \mathbb{C}((u))$ *mit* $\hat{K} \hookrightarrow \hat{L}, x \mapsto u^p$ *so dass:*

$$\hat{M} \otimes_{\hat{K}} \hat{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{M}_i$$

mit $\mathrm{slopes}(\hat{M}_i) = 1 \forall i$ *bzw. genauer* $\hat{M}_i = \xi^{\varphi_i} \otimes R$

Satz 3.2 (Levelt-Turrittin-Malgrange). $\exists \hat{L}|\hat{K}$ *mit* $\hat{M}_i \otimes_{\hat{K}} \hat{L} = \bigoplus_{j=1}^{s} \hat{N}_j$ *mit*

$$\hat{N}_i = \xi^{\varphi_j} \otimes R$$

und

- $\dim_L \xi^{\varphi_j} = 1$, $\varphi_j \in \mathbb{C}[u^{-1}] \cdot u^{-1}$
- R *regulär singulär, also mit* $\mathrm{slopes} = \{0\}$

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindes 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 3.3. *Es existiert eine Aufteilung* $P = P_1 P_2$ *mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$ *und* $N(P_2) \subset N_2$
- A *ist eine kante von ...*

3.1 Klassische Definition

[Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$ als den Vektor Raum über $\hat{L}$: $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial \varphi}{\partial t}) \otimes m)\,.$$

Satz 3.4. *[Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Beispiel 3.5. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel **??**. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turrittin-Theorems Zerlegen.

3.2 Sabbah's Refined version

Proposition 3.6. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^-1]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit grad $p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 3.7 (Refined Turrittin-Levelt)**.** *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus El(\rho, \varphi, R) \underset{def}{=} \rho_+(\mathscr{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

4 DIE Klasse der Fourier-Transformationen

4.1 Rezept für allgemeine φ

siehe: [Sab07, 5.b]

bzeug zu $\mathscr{E}^{\varphi}$??

sei $\varphi \in \{\frac{1}{t^k}, \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}, \dots\}$

1. Starte mit: $P(t, \partial_t) := (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$
2. Furiertrafo: $F_P(z, \partial_z) = P(\partial_z, -z) \in \mathbb{C}[z] < \partial_z >$
3. $x = z^{-1}$ und $\partial_x = -z^2\partial_z$

$$Q(x, \partial_x) := F_P(x^{-1}, -x^2\partial_x) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[x] < \partial_x >$$

   Hauptnenner unnötig?!?

4. Berechne für Q das NP usw...

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in= \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} | I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und definiere dann $\tilde{Q}(t, \partial_t) := \partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t) \in \mathbb{C}[t][t^{-1}] < \partial_t >$.

3. Wir wollen aber ein Element in $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$, deshalb multipliziere mit Hauptnenner und erhalte

$$Q(t,\partial_t) := (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \cdot \underbrace{\text{Hauptnenner}}_{\in \mathbb{C}[t]} \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$$

Dies ändert den Assozierten Meromorphen Zusammenhang nicht.

Lemma?

4. Fouriertransformiere Q und erhalte $\mathcal{F}_Q(z,\partial_z) = Q(\partial_z, -z)$ in $\mathbb{C}[z] < \partial_z >$

5. Wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an.
   Was passiert mit der Ableitung ∂_x? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

   also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2\partial_z$.

$$P_\varphi(x,\partial_x) := F_Q(x^{-1}, -x^2\partial_x) \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$$

6. Erhalte den zu P_φ assoziierten Meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi$.

warum sind diese wichtig??

Wende das Rezept allgemein für $\varphi = \sum_{k\in I} \frac{a_k}{t^k}$ an. So ist

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(t,\partial_t) &= \partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t) \\
&= \partial_t + \sum_{k\in I} k\frac{a_k}{t^{k+1}} && \in \mathbb{C}[t][t^{-1}] < \partial_t > \\
Q(t,\partial_t) &= \partial_t t^{\max(I)+1} + \sum_{k\in I} k\frac{a_k}{t^{k-\max(I)}} \\
&= \partial_t t^{\max(I)+1} + \sum_{k\in I} k a_k t^{\max(I)-k} && \in \mathbb{C}[t] < \partial_t > \\
\mathcal{F}_Q(z,\partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\
&= -z\partial_z^{\max(I)+1} + \sum_{k\in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k} \\
P_\varphi(x,\partial_x) &= F_Q(x^{-1}, -x^2\partial_x)
\end{aligned}$$

$$= x\partial_x(-x^2\partial_x)^{\max(I)} + \sum_{k\in I} ka_k(-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \qquad \in \mathbb{C}[x] < \partial_x >$$

Nun müssen wir noch $(x^2\partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$\begin{aligned}
(x^2\partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2}\partial_x(x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= x^2 \overbrace{(2x + x^2\partial_x)}\partial_x(x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)(x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)(x^2\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2}\partial_x + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2}\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 \overbrace{(2x + x^2\partial_x)}\partial_x + x^4 \overbrace{(2x\partial_x + 1 + x^2\partial_x^2)}\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (4x^4\partial_x + 2x^5\partial_x^2 + 2x^5\partial_x^2 + x^4\partial_x + x^6\partial_x^3)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3)(x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= \ldots \text{geschlossene Formel??}
\end{aligned}$$

also gilt für spezielle k

$$(x^2\partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \ldots \end{cases} \tag{4.1}$$

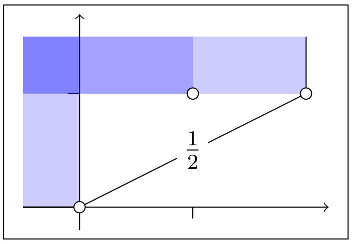
4.2 Angewendet für $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Berechne zunächst $\mathcal{M}_{\varphi_1}$

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_1} &= a - x \underbrace{\partial_x x^2}\partial_x \\
&\overset{\boxed{(0.4)}}{\downarrow} \\
&= a - x \overbrace{(2x + x^2\partial_x)}\partial_x \\
&= a - 2x^2\partial_x - x^3\partial_x^2
\end{aligned}$$

Finde nun das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\varphi_1})$

Abbildung 4.1: Newton Polygon zu P_{φ_1}

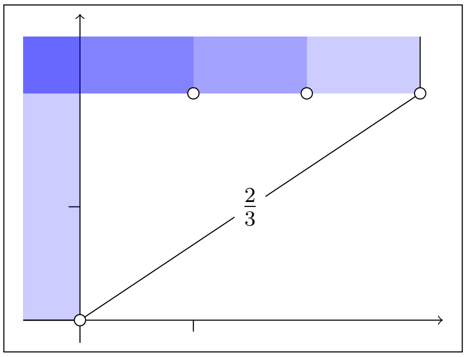


4.3 Angewendet für $\varphi_2 := \frac{a}{x^2}$

also für $\varphi_2 := \frac{a}{x^2}$ ist

$$
\begin{aligned}
P_{\varphi_2} &= 2 + \frac{1}{x} \underbracket{(x^2 \partial_x)^3} \\
&\overset{\boxed{(4.1)}}{\downarrow} \\
&= 2 + \frac{1}{x} \overbracket{(5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3)} \\
&= 2 + 5x^3 \partial_x + 4x^4 \partial_x^2 + x^5 \partial_x^3 \\
P_{\varphi_2} &= 2a + x\partial_x \underbracket{(-x^2 \partial_x)^2} \\
&= 2a + x\partial_x \overbracket{(2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2)} \\
&= 2a + 2x \underbracket{\partial_x x^3} \partial_x + x \underbracket{\partial_x x^4} \partial_x^2 \\
&= 2a + 2x \overbracket{(3x^2 + x^3 \partial_x)} \partial_x + x \overbracket{(4x^3 + x^4 \partial_x)} \partial_x^2 \\
&= 2a + 5x^3 \partial_x + 4x^4 \partial_x^2 + x^5 \partial_x^3
\end{aligned}
$$

Abbildung 4.2: Newton Polygon zu P_{φ_2}



4.4 Angewendet für $\varphi_3 := \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

also für $\varphi_3 := \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ist

$$
\begin{aligned}
P_{\varphi_3} &= x\partial_x(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i\in I} k_i(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)-k_i} \\
&= x\partial_x \underbrace{(x^2\partial_x)^2}_{} + 1(-x^2\partial_x)^1 + 2(-x^2\partial_x)^0
\end{aligned}
$$

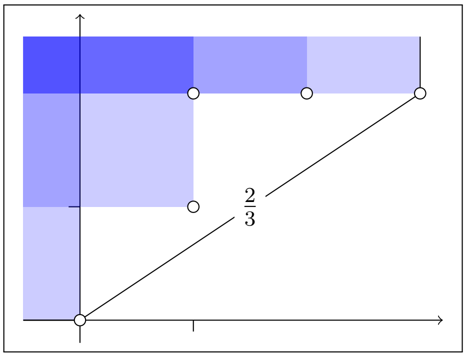
$\boxed{(4.1)}$
$\downarrow$

$$
\begin{aligned}
&= x\partial_x \overbrace{(2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)}^{} - x^2\partial_x + 2 \\
&= 2x \underbrace{\partial_x x^3}_{} \partial_x + x \underbrace{\partial_x x^4}_{} \partial_x^2 - x^2\partial_x + 2
\end{aligned}
$$

$\boxed{(0.4)}$
$\downarrow$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{2x \overbrace{(3x^2 + x^3\partial_x)}^{} \partial_x}_{} + \underbrace{x \overbrace{(4x^3 + x^4\partial_x)}^{} \partial_x^2}_{} - x^2\partial_x + 2 \\
&= \overbrace{6x^3\partial_x + 2x^4\partial_x^2}^{} + \overbrace{4x^4\partial_x^2 + x^5\partial_x^3}^{} - x^2\partial_x + 2 \\
&= x^5\partial_x^3 + 6x^4\partial_x^2 + (6x^3 - x^2)\partial_x + 2
\end{aligned}
$$

Abbildung 4.3: Newton Polygon zu P_{φ_3}

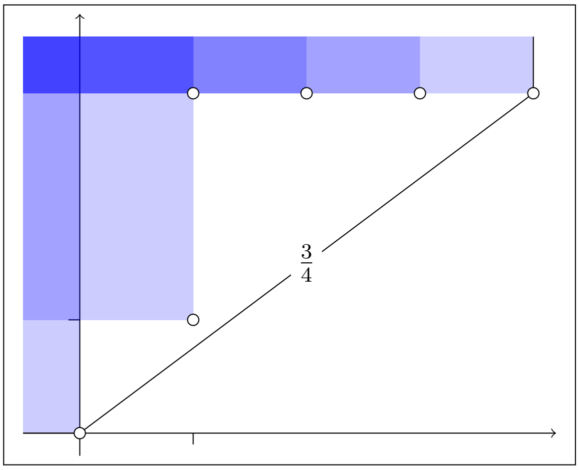


4.5 Angewendet für $\varphi_4 := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

also für $\varphi_4 := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ist

$$
\begin{aligned}
P_{\varphi_4} &= x\partial_x(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i\in I} k_i(-x^2\partial_x)^{\max_j(k_j)-k_i} \\
&= -x\partial_x \underbrace{(x^2\partial_x)^3} -2x^2\partial_x + 3 \\
& \boxed{(4.1)} \\
& \downarrow \\
&= \; -x\partial_x \overbrace{(5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3)} -2x^2\partial_x + 3 \\
&= -5x \underbrace{\partial_x x^4} \partial_x - 4x \underbrace{\partial_x x^5} \partial_x^2 - x \underbrace{\partial_x x^6} \partial_x^3 - 2x^2\partial_x + 3 \\
& \boxed{(0.4)} \\
& \downarrow \\
&= \; \underbrace{-5x \overbrace{(4x^3 + x^4\partial_x)} \partial_x} \underbrace{-4x \overbrace{(5x^4 + x^5\partial_x)} \partial_x^2} \underbrace{-x \overbrace{(6x^5 + x^6\partial_x)} \partial_x^3} -2x^2\partial_x + 3 \\
&= \overbrace{-20x^4\partial_x - 5x^5\partial_x^2} \overbrace{-20x^5\partial_x^2 - 4x^6\partial_x^3} \overbrace{-6x^6\partial_x^3 - x^7\partial_x^4} -2x^2\partial_x + 3 \\
&= -x^7\partial_x^4 - 10x^6\partial_x^3 - 25x^5\partial_x^2 - (20x^4 + 2x^2)\partial_x + 3
\end{aligned}
$$

Abbildung 4.4: Newton Polygon zu P_{φ_4}



A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.
Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$\psi_0(u^p)$

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \ldots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \ldots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \ldots$$

$u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)$ $\quad$ $u\psi_1(u^p)$

also:

$$\psi_0(u^p) = a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \ldots$$
$$\psi_1(u^p) = a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \ldots$$
$$\vdots$$

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$

Literaturverzeichnis

[Ara] D. Arapura, *Notes on d-modules and connections with hodge theory*, Notizen?

[Ark12] S. Arkhipov, *D-modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.

[AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.

[Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d-modules*, Vorlesungsskript, 2009.

[BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Ell10] C. Elliott, *D-modules*, unpublished notes available online, April 2010.

[Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d-modules*, Vorlesungsskript, 1998.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.

[Kas03] M. Kashiwara, *D-modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

[Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.

[Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules*.

[Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, December 2012.