

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

Inhaltsverzeichnis

0	Mathematische Grundlagen	1
1	Moduln über \mathcal{D}_k	5
1.1	Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k	5
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise	6
1.2	(Links) \mathcal{D} -Moduln	7
1.2.1	Holonome \mathcal{D} -Moduln	8
1.3	Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls	8
2	Der Meromorphe Zusammenhang	9
2.1	Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge	9
2.2	Eigenschaften	10
2.3	Newton Polygon	12
2.4	Formale Meromorphe Zusammenhänge	14
2.5	Formale Struktur regulärer Zusammenhänge	14
2.6	pull-back und push-forward	15
3	Elementare Meromorphe Zusammenhänge	20
4	Levelt-Turrittin-Theorem	24
4.1	Klassische Definition	24
4.2	Sabbah's Refined version	24
5	Beispiel	25
5.1	Allgemein	25
5.2	Explizit	25
	Anhang	25
A	Aufteilung von ...	26

0 Mathematische Grundlagen

Wir betrachten \mathbb{C} hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\} = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_0$ die formalen Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit \tilde{K} bezeichnet)

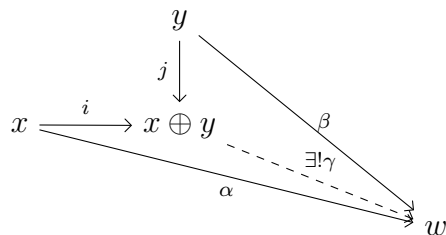
Wobei offensichtlich die Inklusionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$ und $K \subsetneq \hat{K}$ gelten.

Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m Dimensionalen Matrizen mit Einträgen in k .

Definition 0.1 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram



kommutiert.

Definition 0.2 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{\quad} & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\
 & & T
 \end{array}$$

Bemerkung 0.3. Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

Definition 0.4 (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exact*, wenn für alle i gilt, dass $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.5 (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 0.6 (Kokern). Ist $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\text{coker}(f) = M / \text{im}(f)$.

Proposition 0.7. *Ist $f : M' \rightarrow M$ eine injektive Abbildung, so ist*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz und $M/f(M') = \text{coker}(f)$ ist der Kokern von f .

Beweis. □

Definition 0.8 (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$ und damit das zu A mit Filtrierung F *assoziierte graduierte Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

Definition 0.9. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

Definition 0.10 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 0.11. Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \hat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \rightarrow k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. für $f \in k$ ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□

1 Moduln über \mathcal{D}_k

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ab hier sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \hat{K}\}$.

1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 1.1. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\hat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \hat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

Bemerkung 1.2. Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$.

Proposition 1.3. [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in \mathcal{D}_k kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

Definition 1.4. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, wie in Proposition 1.3, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von P .

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.5. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringe

also $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO □

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-Dimensionale Komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Ein (holomorpher) *differential Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat Ordnung m , falls $\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$. Mit \mathcal{D}_X bezeichnen wir die Garbe von Differentialoperatoren auf X . Die Garbe \mathcal{D}_X hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und \mathcal{O}_X ist ein Unterring von \mathcal{D}_X . Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über X . Es gilt, dass Θ_X in \mathcal{D}_X enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links \mathcal{O}_X -Untermodule, aber kein rechts \mathcal{O}_X -Untermodule ist.

Proposition 1.6. [[Ark12](#), Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[t]\partial$. Wobei ∂ als $\partial(t^n) = nt^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[t, \partial], \quad \text{mit} \quad \partial t - t\partial = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von \mathcal{D} -Moduln rede, werde ich mich immer, wie auch [[Ara](#), Chapter 1.6.], auf links \mathcal{D} -Moduln beziehen.

Beispiel 1.7 (Einfachste links \mathcal{D} -Moduln). [[Ark12](#), Exmp 2.2]

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t]$ durch
 - $\partial(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}$ und $t \cdot f(t) = tf$
 - oder [[Gin98](#), Exmp 3.1.2] $\mathbb{C}[t] = \mathcal{D} \cdot 1 = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot \partial$.
3. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ mit $t \cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$

Beispiel 1.8 (Weiter \mathcal{D} -Moduln). 1. [[Ark12](#), Exmp 2.2] Führe formal, also ohne jeglichen analytischen Hintergrund, ein Symbol $\exp(\lambda t)$ ein, mit $\partial(f(t)\exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\exp(\lambda t) + f\lambda\exp(\lambda t)$. So ist $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda t)$ ein \mathcal{D} -Modul.

2. [[Gin98](#), Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial \cdot \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das \mathcal{D} -Modul $\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über \mathcal{D} erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial x \partial).$$

1.2.1 Holonome \mathcal{D} -Moduln

Definition 1.9. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei \mathcal{M} lineares Differentialsystem (linear differential system) . Man sagt, \mathcal{M} ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.10. [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein \mathcal{D} -Modul ist holonom genau dann, wenn $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

1.3 Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul. Betrachte \mathcal{M} als $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von \mathcal{M} .

Proposition 1.11. [Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ bekommt in natürlicher weiße eine \mathcal{D} -Modul Struktur.

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

□

2 Der Meromorphe Zusammenhang

2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tupplel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhvolksumfrageang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

Definition 2.2. Seien $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine K -lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$.

Bemerkung 2.3. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.4 (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) \stackrel{\boxed{??}}{\downarrow} = \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammenhang (\mathcal{M}, ∂) ausgestattet mit einer K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten Meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

2.2 Eigenschaften

Lemma 2.5 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 2.6. [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein \mathcal{D}_K -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 2.7. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Lemma 2.8. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.9. Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

□

Korollar 2.10. *Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.*

Definition 2.11 (Transformationsformel). [HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & \nwarrow \cong \psi & \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \varphi & \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r \\
 \cong T \uparrow & & & & \uparrow T \cong
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.12 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

Proposition 2.13. [Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzen von

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem Meromorphen Zusammenhang.

2.3 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \left((k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.14. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\text{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Definition 2.15. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär* (oder *regulär singulär*) $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$, sonst *irregulär singulär*.
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu \mathcal{M}_K gehörigen slopes.
- Ein meromorpher Zusammenhang \mathcal{M}_K heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres P gibt, mit $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

Beispiel 2.16. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = t^{\textcolor{blue}{2}}\partial_t^{\textcolor{red}{1}}$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{k} = 2 \qquad \qquad \qquad \textcolor{red}{l} = 1$$

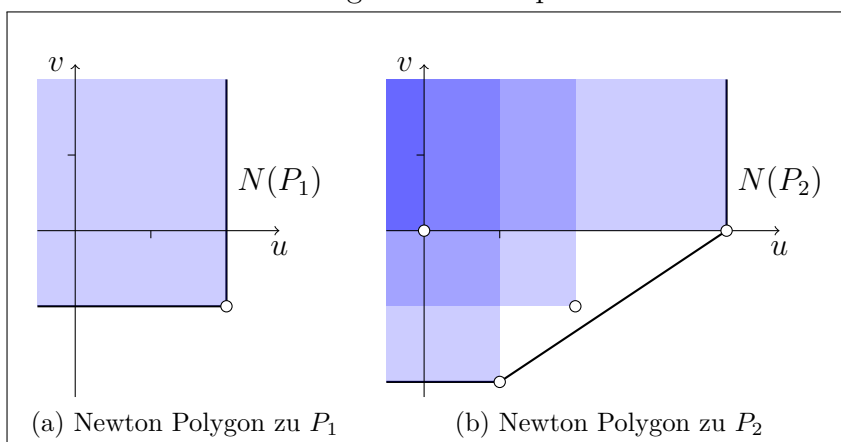
so dass

$$H(P_1) = \left((\textcolor{blue}{2}, \textcolor{red}{1} - \textcolor{blue}{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.2a ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2b visualisiert.

Abbildung 2.1: Zu Beispiel 2.16



Lemma 2.17. [Sab90, 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exacte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

2.4 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.18 (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *formaler Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler \hat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\hat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

Bemerkung 2.19. Alle bisher getroffene Aussagen stimmen auch für formale Meromorphe Zusammenhänge. Im besonderen existiert für jedes $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein ein $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ mit $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$.

Definition 2.20. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}((u))$. Wir schreiben \mathcal{E}^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((u))$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Bemerkung 2.21. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$.

Satz 2.22. [Sab90, Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] □

2.5 Formale Struktur regulärer Zusammenhänge

[Sab90, Chap 5.2] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein regulärer Formaler Meromorpher Zusammenhang, also $\text{slopes}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = 1$. Das nun folgende Kapitel wird sich mit der Struktur solcher Zusammenhänge genauer auseinandersetzen.

Lemma 2.23. [Sab90, Def 5.1.1 Remarks 3.] Ein $P = \sum_{i=0}^d a_i(x)(x\partial_x)^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}[[x]]$ ist regulär, genau dann wenn der Koeffizient a_d vor dem dominanten Term eine Einheit ist.

Beweis. □

Dank diesem Satz ist es berechtigt, reguläre Zusammenhänge genauer zu betrachten.

Lemma 2.24. [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ über \hat{K} mit der Eigenschaften, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.5). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \hat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$.

Tatsächlich werden wir $b_i(x) = x^i b'_i(x)$ mit $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$. □

Lemma 2.25. [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ über \hat{K} so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.

Beweis. □

2.6 pull-back und push-forward

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $(\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto t := \rho(u)) \in u\mathbb{C}[[u]]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei \mathcal{M} ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.26 (pull-back). [Sab07, 1.a] Der *pull-back* (Inverses Bild) $\rho^+ \mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m. \quad (2.3)$$

Lemma 2.27. Es gilt $\rho^* \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$ mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \\ f(u) \otimes m(t, \partial_t) &\longmapsto f(u) m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

Beweis. □

Bemerkung 2.28. Das soeben, in Lemma 2.27, definierte Φ erfüllt für $1 \otimes m \in \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(u) \otimes \partial_t m \\ &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(u) \rho'(u)^{-1}}_{=1} \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \\ &= \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

und somit (2.3) wie gewollt.

Lemma 2.29. *In der Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(t, \partial_t)} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 2.27 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. □

Lemma 2.30. *In der Situation von Lemma 2.26, mit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P(t, \partial_t)$ für ein $P(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u).$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$ und $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\ & & & & & & u \longmapsto u \bmod \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P \end{array}$$

ist **exact**, weil $\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil $\mathbb{C}((u))$ **flach** ist, da Körper, ist auch, nach anwenden von $\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} _$, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \rho^* \mathcal{M}$$

exact. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^* \mathcal{M} &\cong \text{coker}(\text{id} \otimes _ \cdot P) && (\text{weil exact}) \\ &\cong \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / (\text{id} \otimes _ \cdot P) \left(\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \right) && (\text{nach def. von coker}) \end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 2.27 und $Q(u, \partial_u) := P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$ nach Lemma 2.29 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ & & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & & \end{array}$$

wobei das Diagramm kommutiert. Nun lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen (weil $_ \cdot Q$ injektiv)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi} & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nun wollen wir einen Isomorphismus

$$\varphi : \rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \left(\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P \right) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q$$

finden, so dass $\varphi \circ (\text{id} \otimes \pi) = \Pi \circ \Phi$. □

Lemma 2.31. *Ein pull-back mit $u \mapsto u^p$ multipliziert alle slopes mit p .*

Beweis.

□

Beispiel 2.32 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Wir wollen $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ bzgl. $P := t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back $\rho : t \rightarrow u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 2.30 anwenden können.

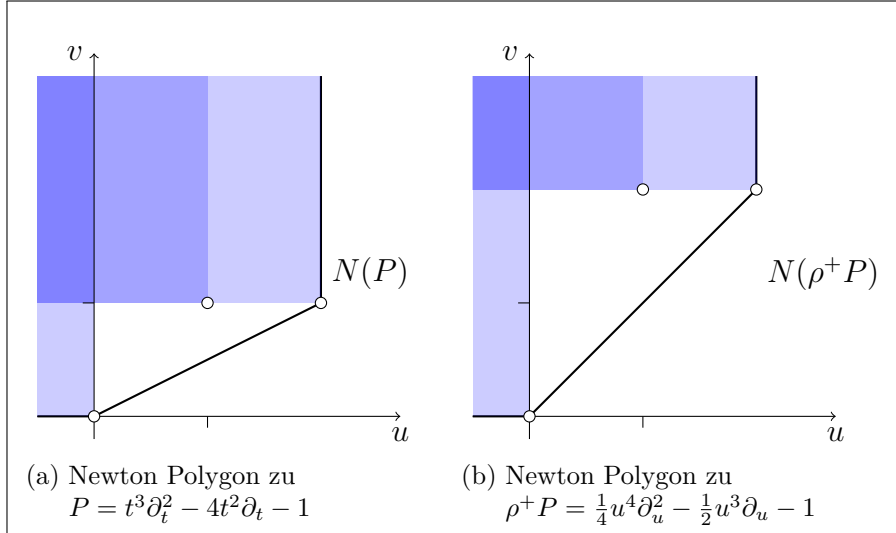
$$\begin{aligned}\partial_t &\rightarrow \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\ \partial_t^2 &\rightarrow \left(\frac{1}{2u}\partial_u\right)^2 \\ &= \frac{1}{2u}\partial_u\left(\frac{1}{2u}\partial_u\right) \\ &= \frac{1}{2u}\left(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2\right) \\ &= \frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u\end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}\rho^+P &= u^6\left(\frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u\right) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\ &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\ &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1\end{aligned}$$

Also ist $\rho^+P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.3b) und somit $\rho^*\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (\frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1)$.

Abbildung 2.2: Zu Beispiel 2.32



Sei \mathcal{N} ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.33 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* (*Direktes Bild*) $\rho_+ \mathcal{N}$ ist

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist der \mathbb{C} -Vektor Raum \mathcal{N} mit der $\mathbb{C}((t))$ -Vektor Raum Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_t beschrieben durch $\rho'(u)^{-1} \partial_u$.

Satz 2.34. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) \cong \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}. \quad (2.4)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} && (?) \end{aligned}$$

□

3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.1 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \bmod \mathbb{C}[[u]]$ ab.

Lemma 3.2. [Sab07, Lem 2.2]

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 3.3. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ [2].

Es gilt:

[1] $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \bmod \mathbb{C}[[u]]$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho + \mathcal{E}^\varphi})) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, \dots, u\partial_u e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$, mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned} T \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

^[3]Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\begin{aligned} \partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Lemma 3.4. [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([u \mapsto u^p], \varphi, R) \cong El([u \mapsto u^p], \psi, S)$ genau dann, wenn

- es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$
- und $S \cong R$ als $\mathbb{C}((u))$ -Vektorräume mit Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Lem 2.6.]

□

Proposition 3.5. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale $\mathbb{C}((x))$ -Vektorraum \mathcal{M} mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \rightarrow u^p$ vom grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((x))$ -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

4.1 Klassische Definition

Satz 4.1. [Sab90, Thm 5.4.7] *Sie $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Beispiel 4.2. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel ???. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turrittin-Theorems Zerlegen.

4.2 Sabbah's Refined version

Proposition 4.3. [Sab07, Prop 3.1] *Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((u))$ -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.4 (Refined Turrittin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] *Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

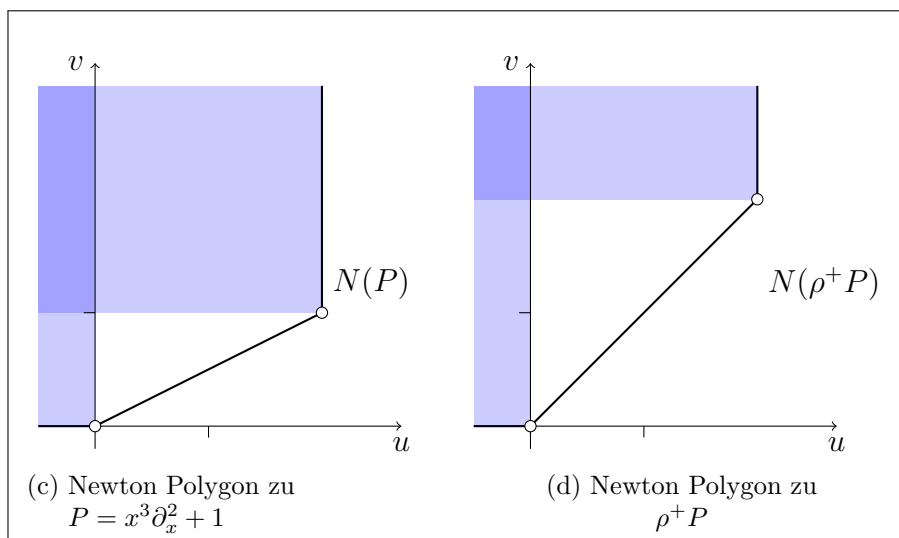
5 Beispiel

5.1 Allgemein

5.2 Explizit

Betrachte nun Spezialfälle von 5.1.

Im besonderen zunächst $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x^3\partial_x^2 + 1)$ also mit $P = x^3\partial_x^2 + 1$



A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-(i+1)}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$\begin{array}{c}
 \psi_0(u^p) \\
 \text{---} \\
 u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots \\
 \text{---} \\
 u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \quad \dots \quad u\psi_1(u^p)
 \end{array}$$

also:

$$\begin{aligned}
 \psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots \\
 \psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots \\
 &\vdots \\
 \psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov, *D -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara, *D -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d -modules*.

- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.