

Bachelorarbeit

---

# Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

---

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik  
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

stand: 20. April 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Moduln über <math>\mathcal{D}_k</math></b>	<b>6</b>
1.1	Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$ . . . . .	6
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise . . . . .	8
1.2	(Links) $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	9
1.2.1	Holonome $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	10
1.3	Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln . . . . .	11
1.4	Lokalisierung eines $\mathcal{D}$ -Moduls . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>13</b>
2.1	Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	13
2.1.1	Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	14
2.2	Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	15
2.3	Newton Polygon . . . . .	19
2.3.1	Die Filtrierung ${}^L V \mathcal{D}_{\hat{K}}$ und das $L$ -Symbol . . . . .	24
2.4	Formale Struktur regulärer Zusammenhänge . . . . .	25
2.5	pull-back und push-forward . . . . .	26
2.6	Twisten von $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	35
2.7	Fouriertransformation . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Elementare Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>37</b>
3.1	Defnintion von Notizen und [Sab90, Cor 5.2.6] . . . . .	41
3.2	Defnintion in [Sab90] . . . . .	41
3.3	Defnintion in [Sab07] . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Levelt-Turrittin-Theorem</b>	<b>43</b>
4.1	Klassische Version . . . . .	43
4.2	Sabbah's Refined version . . . . .	45

<b>5 DIE Klasse der Fourier-Transformationen</b>	<b>46</b>
5.1 Rezept für allgemeine $\varphi$ . . . . .	46
5.2 Spezialfall $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . . . . .	51
5.2.1 Sabah's refined Levelt-Turrittin-Zerlegung für $\varphi_1$ . . . . .	53
<b>Anhang</b>	<b>53</b>
<b>A Aufteilung von <math>t\varphi'(t)</math></b>	<b>54</b>
<b>B Genauerer zu <math>(x^2\partial_x)^k</math></b>	<b>55</b>

Kommentar:

**Plan :**

- \* Grundlagen
- \* Moduln über D
- \* Meromorphe Zusammenhänge
  - Sind spezielle moduln über D ??
  - \* ODE zu Meromorphe Zush
  - \* Newton polygon und Steigungen
  - \* pullback und pushforward
  - \* Fouriertransformation
- \* Elementare Meromorphe Zusammenhänge
  - Braucht pullback oder pushforward
- \* Levelt Turrittin Theorem
  - Braucht elem, Meromorphe Zush
- \* Das Beispiel
  - \* Rezept
  - \* Anwenden

# 0 Mathematische Grundlagen

Kommentar: Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

Wir betrachten  $\mathbb{C}$  hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$  die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$  ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$  die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$  der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$  als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit  $\tilde{K}$  bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen  $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$  und  $K \subsetneq \widehat{K}$  gelten.

Kommentar: Es bezeichnet der Hut ( $\widehat{\phantom{x}}$ ) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Kommentar:

**Lemma 0.1** (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1.  $\mathbb{C}[x]$  ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese Graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

*alle Ideale haben die form  $(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{C}$*

2. wenn  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $\mathbb{C}[x]$  (erzeugt von  $x$  ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring  $\mathbb{C}[[x]]$  ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term  $\neq 0$  ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt  $\mathfrak{m}$ -adische Firation, ist die Filtrierung  $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

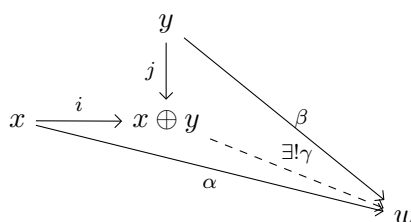
und es gilt  $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet  $M(n \times m, k)$  die Menge der  $n$  mal  $m$  Dimensionalen Matrizen mit Einträgen in  $k$ .

**Definition 0.2** (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien  $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von  $x$  und  $y$  ist ein Objekt  $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  zusammen mit Morphismen  $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$  und  $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$  so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes  $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Morphismen  $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$  und  $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$  existiert ein eindeutiges  $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$  so dass das Diagramm



kommutiert.

**Definition 0.3** (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Kommentar: Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

Kommentar: Für eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  definiere das Tensorprodukt davon über  $R$  mit  $N$  als

$$\begin{aligned} \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

**Bemerkung 0.4.** Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M/\text{im}(f)) \cong N \otimes_R M/\text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

**Definition 0.5** (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle  $i$  gilt, dass  $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$ .

**Definition 0.6** (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

**Definition 0.7** (Kokern). Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so ist der *Kokern* von  $f$  definiert als  $\text{coker}(f) = M/\text{im}(f)$ .

**Proposition 0.8.** Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz und  $M/f(M') = \text{coker}(f)$  ist der Kokern von  $f$ .

*Beweis.*

□

**Definition 0.9** (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung*  $F$  von einem Objekt (Ring)  $A$  ist eine Familie von  $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Unterobjekten (Unter-ring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter  $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$  und damit das zu  $A$  mit Filtrierung  $F$  assoziierte *graduierte Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

Kommentar:  $gr_i^F$  als was??

**Definition 0.10.** [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

**Definition 0.11** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator* von  $a$  und  $b$  definiert.

**Proposition 0.12.** Sei  $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$ . Sei  $\partial_x : k \rightarrow k$  der gewohnte Ableitungsoperator nach  $x$ , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. für  $f \in k$  ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \quad (0.4)$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \quad (0.5)$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \quad (0.6)$$

*Beweis.* 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt  $g \in k$  ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□



# 1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als  $k$  immer ein Element aus  $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$  betrachten.

## 1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in k$ . Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator*  $f$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

**Definition 1.1.** Definiere nun den Ring  $\mathcal{D}_k$  als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in  $k$  zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[x]$ , und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  [1].

**Bemerkung 1.2.** • Es gilt  $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$  und  $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

---

[1] Wird mit  $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$  bezeichnet, in [AV09].

- Offensichtlich erhält  $\mathcal{D}_k$  in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- $\mathcal{D}_k$  ist offensichtlich nichtkommutativ.

**Proposition 1.3.** [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in  $\mathcal{D}_k$  kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in k$ , geschrieben werden.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]

Kommentar: ein Teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Kommentar: Gilt das folgende??

$$\alpha_i(x) \partial_x^i \equiv \frac{\alpha_i}{x^i} (x \partial_x)^i \pmod{F_{i-1} \mathcal{D}}$$

Kommentar: Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

**Definition 1.4.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , wie in Proposition 1.3, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* (oder den  $\partial_x$ -Grad) (oder den  $\partial_x$ -Grad) von  $P$ .

Kommentar: Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung  $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$  mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

*Beweis.* Sei  $P \in F_N \mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.5.** *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$   
isomorph als grad. Ringe

also  $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$  als graduierte Ringe.

*Beweis.* TODO

Kommentar: Treffen?

□

### 1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Kommentar: Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei  $X$  eine 1-Dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X$ . Ein (*holomorpher*) *differenzial Operator* auf  $X$  ist ein Garben-Morphismus  $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ , lokal in der Koordinate  $x$  und mit holomorphen Funktionen  $a_n(x)$  als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für  $u \in \mathcal{O}_X$ ). Zusätzlich nehmen wir an, dass  $a_n(x) \equiv 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir setzen  $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$ . Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung  $m$ , falls  $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$ .

**Definition 1.6.** Mit  $\mathcal{D}_X$  bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf  $X$ .

Die Garbe  $\mathcal{D}_X$  hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und  $\mathcal{O}_X$  ist ein Unterring von  $\mathcal{D}_X$ . Sei  $\Theta_X$  die Garbe der Vektorfelder über  $X$ . Es gilt, dass  $\Theta_X$  in  $\mathcal{D}_X$  enthalten ist. Bemerke auch, dass  $\Theta_X$  ein links  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule, aber kein rechts  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule ist.

**Proposition 1.7.** [Ark12, Exmp 1.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$  und  $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$ . Wobei  $\partial_x$  als  $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$  wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

Kommentar:

**Definition 1.8.** [Ark12, Defn 2.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x]$  und  $\mathcal{D}_X = [x, \partial_x]$  mit der Relation  $[\partial_x, x] = 1$ . Dann definieren wir die links  $\mathcal{D}$ -Moduln über  $\mathbb{A}^1$  als die  $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als  $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

## 1.2 (Links) $\mathcal{D}$ -Moduln

Da  $\mathcal{D}$  ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts  $\mathcal{D}$ -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von  $\mathcal{D}$ -Moduln rede, werde ich mich immer auf links  $\mathcal{D}$ -Moduln beziehen.

**Beispiel 1.9** (links  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1.  $\mathcal{D}$  ist ein links und rechts  $\mathcal{D}$ -Modul
2.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$  oder  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  jeweils durch  $x \cdot x^m = x^{m+1}$  und  $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol  $\exp(\lambda x)$  ein, mit  $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$ . So ist  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda x)$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol  $\log(x)$  mit den Eigenschaften  $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$  ein. Erhalte nun das  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Dieses Modul ist über  $\mathcal{D}$  erzeugt durch  $\log(x)$  und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

Kommentar:

**Lemma 1.10.** [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist. Dann ist  $\mathcal{M}$  bereits ein freies  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.] □

**Korollar 1.11.** [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon  $\mathcal{M} = \{0\}$ .

### 1.2.1 Holonome $\mathcal{D}$ -Moduln

Kommentar: TODO: defn of Car als Charakteristische Varietät

**Definition 1.12.** [Sab90, Def 3.3.1.] Sei  $\mathcal{M}$  lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt,  $\mathcal{M}$  ist holonom, falls  $\mathcal{M} = 0$  oder falls  $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$ .

**Lemma 1.13.** [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein  $\mathcal{D}$ -Modul ist holonom genau dann, wenn  $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$ .

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

#### Alternative Definition A

Kommentar: Countinho definiert die Charakteristische Varietät erst nach holonom

**Definition 1.14** (Holonome  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich generierter  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathcal{M}$  ist *holonom*, falls  $\mathcal{M} = 0$  gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

*Bemerkung 1.15.* [Cou95, Chap 10 §1] Sei  $\mathfrak{a} \neq 0$  ein Links-Ideal von  $\mathcal{D}$ . Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass  $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$ . Falls  $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$ , dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass  $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$ . Somit ist  $\mathcal{D}/\mathfrak{a}$  ein holonomes  $\mathcal{D}$ -Modul.

*Bemerkung 1.16.* [Cou95, Prop 10.1.1]

- Submoduln und Quotienten von holonomen  $\mathcal{D}$ -Moduln sind holonom.
- Endliche Summen von holonomen  $\mathcal{D}$ -Moduln sind holonom.

## Alternative Definition B

**Definition 1.17.** Ein  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathcal{M}$  heißt *holonom*, falls es ein  $\mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}$  gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{D}/\mathfrak{a}.$$

*Bemerkung 1.18.* In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die Charakteristische Varietät.

Kommentar:

## 1.3 Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln

[Sab90, Chap 4.1.] Sei  $M$  ein  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul. Wir schreiben  $M[x^{-1}]$  für den  $K$ -Vektor Raum  $M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$ . Im allgemeinen gilt, falls  $M$  von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist, so ist  $M[x^{-1}]$  von endlichem Typ über  $K$ . Bemerke aber, dass  $M[x^{-1}]$  generell nicht von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist.

## 1.4 Lokalisierung eines $\mathcal{D}$ -Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul. Betrachte  $\mathcal{M}$  als  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 1.19.** [Sab90, Prop 4.2.1.]  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  erhält in natürlicher Weise eine  $\mathcal{D}$ -Modul Struktur.

*Beweis.* [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

Kommentar: beweis der  $\mathcal{D}$ -linearität ist als übung gelassen

□

**Korollar 1.20.** [[Sab90](#), Cor 4.2.8.] Sei  $\mathcal{M}$  ein holonomes Modul. Dann ist die lokalisierung von  $\mathcal{M}$  isomorph zu  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  für ein  $P \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$

Kommentar: Formal??

## 2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei  $\mathcal{M}$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit  $x$  bijektiv ist, so nennen wir  $\mathcal{M}$  einen Meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

### 2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$  betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \tag{2.1}$$

wobei  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$  ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um  $x = 0 \in \mathbb{C}$  betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an  $x = 0$  (geschrieben als  $\tilde{\mathcal{O}}$ ). Wir sagen  $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$  ist eine Lösung von (2.1), falls  $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $v$  die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

**Kommentar:** TODO: zeige, dass der Lösungsraum die Eigenschaften von  $\mathcal{D}$ -Moduln erfüllt  
siehe alternativer Zugang

#### Alternativer Zugang

**Kommentar:** Sei  $P$  ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in  $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  geschrieben als  $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$ . Man sagt eine Funktion  $u \in \mathcal{F}$  ist Lösung von  $P$ , falls  $u$  die Gleichung  $Pu = 0$  erfüllt. Man sagt 0 ist ein singulärer Punkt falls  $a_d(0) = 0$ . Falls 0 kein singulärer Punkt ist, hat  $P$  genau  $d$  über  $\mathbb{C}$  unabhängige Lösungen in  $\mathbb{C}\{x\}$ .



[Sab90, 3.1.1] Sei  $\mathcal{F}$  ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren  $\mathcal{D}$  wirken. Ein Element  $u \in \mathcal{F}$  ist Lösung von  $P \in \mathcal{D}$  falls  $P \cdot u = 0$  gilt.

Falls  $u$  ein Lösung von  $P$  ist, so ist  $u$  auch Lösung von  $Q \cdot P$  mit  $Q \in \mathcal{D}$ . Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal  $\mathcal{D} \cdot P \triangleleft \mathcal{D}$  ab.

### 2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses Klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei  $x = 0$ ) ist ein Tupplel  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

*Bemerkung 2.2* (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Analog definiert man einen *formalen Meromorphen Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$  bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , ein endlich dimensionaler  $\widehat{K}$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Derivation  $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

**Definition 2.3.** Seien  $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$  zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie  $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$  erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch  $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ .

**Kommentar:** TODO: Wann sind die Isomorph  $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$  und die Ableitungen kommutieren mit dem Isomorphismus

**Definition 2.4.** Wir erhalten damit die Kategorie der meromorphen Zusammenhänge über  $\widehat{K}$  mit

Objekte:  $()$

*Bemerkung 2.5.* 1. Später wird man auf die Angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}_K$  als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von  $K$  verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle  $f \in \tilde{\mathcal{O}}$  und für alle  $u \in \mathcal{M}_K$  erfüllt sein muss, äquivalent.

**Definition 2.6** (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$ . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$*  die Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$  definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , die Wirkung von  $\partial$  auf  $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$  beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) \overset{\boxed{??}}{\downarrow} \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung  $\partial u(x) = 0$ , für  $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$ , äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$ . Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammenhang  $(\mathcal{M}, \partial)$  ausgestattet mit einer  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$  zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))$  den assoziierten Meromorphen Zusammenhang  $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$  angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

## 2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln

Kommentar: [Sab90, 4.2] Let  $\mathcal{M}$  be a left  $\mathcal{D}$ -module. First we consider it only as a  $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  be the localized module.

**Lemma 2.7** (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element  $m \in \mathcal{M}_K$  und eine ganze Zahl  $d$  so dass  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  eine  $K$ -Basis von  $\mathcal{M}_K$  ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Kommentar: TODO: Wie findet man einen Zyklischen Vektor  
 TODO: wie bekommt man daraus das  $P$

**Satz 2.8.** [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes  $\mathcal{D}_K$ -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

**Lemma/Definition 2.9.** [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein  $P \in \mathcal{D}_K$  so dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ . So ein  $P$  heißt dann Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_K$ .

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Kommentar:

Bemerkung 2.10. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

**Satz 2.11.** [AV09, Seite 64] Ist  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  so gilt

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

Beweis. [AV09, Seite 57-64] □

**Korollar 2.12.** Sei  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  wie in Satz 2.11 so gilt

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\
 &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \\
 &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \\
 &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)
 \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.13.** Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}_K$ , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r
 \end{array}$$

gilt:  $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

*Beweis.* TODO, (3. Treffen)

□

Kommentar:

**Lemma 2.14.** Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Isomorphismus so ist  $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ein zu  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  isomorpher Zusammenhang.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N}
 \end{array}$$

*Beweis.* TODO, (3. Treffen)

□

**Lemma 2.15.** Sei  $\mathcal{M}_K$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum mit  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist  $K$ -linear.

*Beweis.* Seien  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Derivationen auf  $\mathcal{M}_K$ . Da  $\partial_1$  und  $\partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, ist  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.16.** Für  $(K^r, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang existiert ein  $A \in M(r \times r, K)$ , so dass  $\partial = \frac{d}{dx} - A$ .

*Beweis.* Es sei  $(K^r, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang. So ist  $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also lässt sich durch eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  darstellen, also ist, wie behauptet,  $\partial = \frac{d}{dx} - A$ . □

**Proposition 2.17** (Transformationsformel). [[HTT07](#), Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & & \nwarrow \cong \varphi \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong \psi & & & \nwarrow \cong \psi \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$  und  $(\frac{d}{dx} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:

Der Meromorphe Zusammenhang  $\frac{d}{dx} + A$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

**Definition 2.18** (Differenziell Äquivalent). Man nennt  $A$  und  $B$  differenziell Äquivalent ( $A \sim B$ ) genau dann, wenn es ein  $T \in GL(r, K)$  gibt, mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$ .

Kommentar:  $1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$   
 $1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

**Proposition 2.19.** [[Sch](#), Prop 4.1.1] Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzen von

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von  $\partial$  auf das  $K$ -Modul  $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ , wird  $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$  zu einem Meromorphen Zusammenhang.

*Beweis.* Klar □

**Lemma 2.20.** [[Sab90](#), Ex 5.3.7] Falls  $\mathcal{N}$  regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  genau die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}$ .

*Beweis.* TODO □

## 2.3 Newton Polygon

Kommentar: Quelle: sabbah?  
sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes  $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ , also insbesondere auch jedes  $P \in \mathcal{D}_K$ , lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit  $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$  schreiben. Betrachte das zu  $P$  dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) &:= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left( (m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2 \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Definition 2.21.** Das Randpolygon der konvexen Hülle  $\text{conv}(H(P))$  von  $H(P)$  heißt das *Newton Polygon* von  $P$  und wird als  $N(P)$  geschrieben.

*Bemerkung 2.22.* Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weiße. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x)(x\partial_x)^k$$

mit  $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexe Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

**Lemma 2.23.** [Sab90, Seite 26] Das Newton-Polygon hängt nur von dem assoziierten Meromorphen Zusammenhang ab.

**Definition 2.24.** Die Menge  $\text{slopes}(P)$  sind die nicht-vertikalen Steigungen von  $N(P)$ , die sich echt rechts von  $\{0\} \times \mathbb{R}$  befinden.

- Schreibe  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  für die Menge der zu  $\mathcal{M}$  gehörigen slopes.
- $P$  heißt *regulär* oder *regulär singular*  $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$  oder  $\deg P = 0$ , sonst *irregulär singular*.
- Ein meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $\mathcal{M}_K$ ) heißt regulär singular, falls es ein regulär singuläres  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $P \in \mathcal{D}_K$ ) gibt, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  (bzw.  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$ ).

Kommentar:

**Definition 2.25** (Alternative Definition). [HTT07, Def 5.1.6] We say a meromorphic connection  $(\mathcal{M}, \nabla)$  at  $x = 0$  is *regular* if there exists a finitely generated  $\mathcal{O}$ -submodule  $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$  which is stable by the action of  $\theta = x\nabla$  (i.e.,  $\theta\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ ) and generates  $\mathcal{M}$  over  $K$ . We call such an  $\mathcal{O}$ -submodule  $\mathcal{L}$  an  $\mathcal{O}$ -lattice of  $(\mathcal{M}, \nabla)$ .

**Beispiel 2.26.** 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist  $P_1 = x^1 \partial_x^2$ . Es ist leicht abzulesen, dass

$$m = 2 \qquad l = 1$$

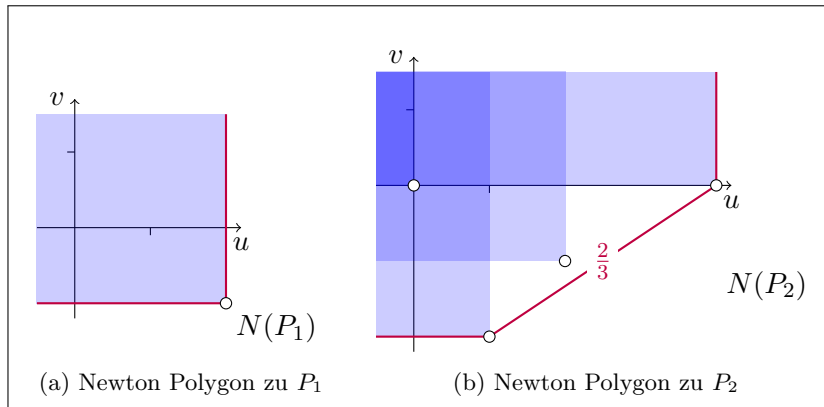
so dass

$$H(P_1) = \left( (2, 1 - 2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.2b ist  $H(P_1)$  (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist  $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$  und damit ist  $P_1$  regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei  $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$  so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung ?? visualisiert. Man erkennt, dass  $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$  ist.

Abbildung 2.1: Zu Beispiel 2.26



*Bemerkung 2.27.* [AV09, Bem 5.4] Für alle  $f \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$  gilt allgemein, dass das zu  $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$  gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von  $f \cdot P$  übereinstimmt.

*Beweis.* TODO

□

Damit lässt sich das Newton Polygon, durch ein  $f$ , immer so verschieben, dass  $(0, 0) \in N(f \cdot P)$ , und es gilt, dass

$$\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \triangleleft \mathcal{D}_K$$

ist. Dies stellt eine Normierung des Newton Polygons dar.

**Lemma 2.28.** [Sab90, 5.1]

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$  ist nicht Leer, wenn  $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exacte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$  hat, so gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$ .



*Kommentar:* Siehe auch [Sab90, Thm 5.3.4]

*Dort Steht:*

*Wir erhalten die Exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

**Korollar 2.29.** [Sab90, Thm 5.3.4]  $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$  und  $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

**Satz 2.30.** [Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

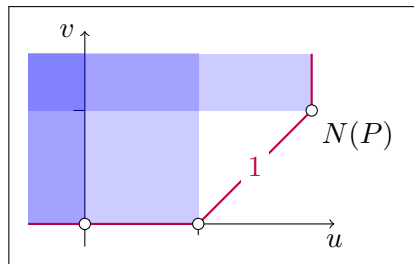
$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale Meromorphe Zusammenhänge mit  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$ .

*Beweis.* [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

**Beispiel 2.31.** [Sab90, Ex 5.3.6] Sei  $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$ . So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

Abbildung 2.2: Newton Polygon zu  $P$



mit den Slopes  $\mathcal{P}(P) = \{0, 1\} =: \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ . Nach dem Satz 2.30 existiert eine Zerlegung  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $\mathcal{P}(P_1) = \{\Lambda_1\}$  und  $\mathcal{P}(P_2) = \{\Lambda_2\}$ . Durch scharfes hinsehen erkennt man, dass

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &\dots \\ &= (x(x\partial_x) + \dots) \cdot (x\partial_x + \dots) \end{aligned}$$

...

$$= P_1 \cdot P_2$$

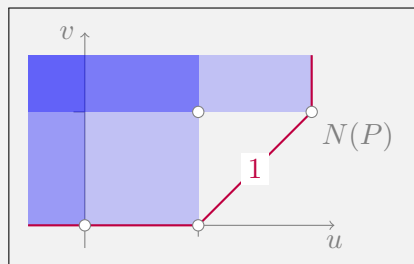
Kommentar:

anders geschrieben

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= xx\partial_x x\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^2(x\partial_x + 1)\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^3\partial_x^2 + x^2\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^3\partial_x^2 + (x^2 + x)\partial_x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

Abbildung 2.3: Newton Polygon zu  $P$



**Korollar 2.32.** [Sab90, Cor 5.2.6] Falls  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein regulärer formaler Meromorpher Zusammenhang ist, dann ist  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen Zusammenhängen. Wobei die elementaren formalen Zusammenhänge die sind, die zu passendem  $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$  isomorph sind.

### 2.3.1 Die Filtrierung ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $L$ -Symbol

Sei  $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$  vollständig gekürzt, also mit  $\lambda_0$  und  $\lambda_1$  in  $\mathbb{N}$  relativ prim. Definiere die Linearform  $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  in zwei Variablen, Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . Falls  $P = x^a \partial_x^b$  mit  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\text{ord}_L(P) = L(b, b - a)$$

und falls  $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$  mit  $b_i \in \widehat{K}$  setzen wir

$$\text{ord}_L(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} L(i, i - v(b_i)).$$

**Definition 2.33** (Die Filtrierung  ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration  ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , welche mit  $\mathbb{Z}$  indiziert ist, durch

$${}^L V_{\lambda} \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_L(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

*Bemerkung 2.34.* Man hat  $\text{ord}_L(PQ) = \text{ord}_L(P) + \text{ord}_L(Q)$  und falls  $\lambda_0 \neq 0$  hat man auch, dass  $\text{ord}_L([P, Q]) \leq \text{ord}_L(P) + \text{ord}_L(Q) - 1$ .

**Definition 2.35** ( $L$ -Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls  $\lambda_0 \neq 0$  ist der graduierte Ring  $gr {}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_{\lambda} {}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von  $\partial_x$  in dem Ring durch  $\xi$ , dann ist der Ring isomorph zu  $\widehat{K}[\xi]$ . Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , so ist  $\sigma_L(P)$  definiert als die Klasse von  $P$  in  $gr_{\text{ord}_L(P)} {}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ .  $\sigma_L$  wir hierbei als das  $L$ -Symbol bezeichnet.

Zum Beispiel ist  $\sigma_L(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$ .

*Bemerkung 2.36.* Ist  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  geschrieben als  $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$ . So erhält man  $\sigma_L(P)$  durch die Setzung

$$\sigma_L(P) = \sum_{\{(i,j) \mid L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

*Beweis.*

□

**Kommentar:** Ich will die Linearform vermeiden und direkt die skalare Steigung verwenden

**Definition 2.37** (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als alternative zu dieser Ordnung verwendet.

*Bemerkung 2.38.* Wenn  $L(x_0, s_1)$  wie oben aus  $\Lambda$  entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_L(P).$$

**Kommentar:** TODO: ist  $L$  Slope (gehört zu Slope) dann hat  $\sigma_L(P)$  zumindest 2 Monome

## 2.4 Formale Struktur regulärer Zusammenhänge

[Sab90, Chap 5.2] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein regulärer formaler Meromorpher Zusammenhang.

**Lemma 2.39.** [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die  $x\partial_x$  beschreibt, nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.

*Beweis.* Wähle einen zyklischen Vektor  $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und betrachte die Basis  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  (siehe Lemma 2.7). Schreibe  $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$  in Basisdarstellung mit Koeffizienten  $b_i \in \widehat{K}$ . Also erfüllt  $m$  die Gleichung  $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$ .

**Kommentar:** bis hier schon klar

Tatsächlich werden wir  $b_i(x) = x^i b'_i(x)$  mit  $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$  schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass  $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$  ebenfalls eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist.

Die Matrix von  $x\partial_x$  zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$ . □

**Lemma 2.40.** [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  so dass die Matrix zu  $x\partial_x$  konstant ist.

*Beweis.* TODO □

## 2.5 pull-back und push-forward

Kommentar: TODO: Variable zu x machen

Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3]. Sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \quad \in t\mathbb{C}[[t]]$$

mit Bewertung  $p \geq 1$ .

Kommentar: TODO: muss das ein Homomorphismus sein? [Cou95, Seite 130]

Hier werden wir immer  $\rho(t) = t^p$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho$$

analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho$$

wobei  $L$  (bzw.  $\widehat{L}$ ) eine endliche Körpererweiterung von  $K$  (bzw.  $\widehat{K}$ ) ist.

Kommentar: TODO: damit wird  $\widehat{L}$  zu einem  $\widehat{K}$  Vektorraum.

Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}((t))$  Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang  $\nabla$ .

**Definition 2.41** (pull-back). [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *Inverses Bild*  $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  von  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$  ist der Vektorraum

$$\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang*  $\rho^* \nabla$  definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.3)$$

Für ein allgemeines  $\varphi \otimes m \in \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (2.4)$$

**Lemma 2.42.** *In der Situation von Lemma 2.41, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$  für ein  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , gilt*

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t).$$

*Kommentar:* also wird der Übergang beschrieben durch

$$x \rightarrow \rho(t)$$

$$\partial_x \rightarrow \rho'(t)^{-1} \partial_t$$

*Kommentar:* [Cou95, Seite 130] Holonomic modules are preserved under this construction.

*Kommentar:* [Sab90, Page 34] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert  $\pi^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  als den Vektor Raum über  $\widehat{L} : \pi^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ . Dann definiert man die Wirkung von  $\partial_t$  durch:  $t \partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x \partial_x \otimes m))$  und damit

$$t \partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x \partial_x \cdot m)) + ((t \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

Man erhält damit die Wirkung von  $\partial_t = t^{-1}(t \partial_t)$ .

Für den Beweis von Lemma 2.42 werden zunächst zwei kleine Lemmata bewiesen.

**Lemma 2.43.** *Es gilt  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  mittels*

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes m(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

*Beweis.*

□

*Kommentar:*

*Bemerkung 2.44.* BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma 2.43, definierte  $\Phi$  erfüllt für Elementartensoren  $1 \otimes m \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\ &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(t)\rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ &= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

und somit (2.3) wie gewollt.

**Lemma 2.45.** Sei  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$ . In der Situation

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(t, \partial_t)} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\hat{L}} \end{array}$$

mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.43 macht  $\alpha := \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  das Diagramm kommutativ.

*Beweis.*

□

*Bemerkung 2.46.* Wie sieht die Wirkung auf dem pull-back Zusammenhang so aus?

Betrachte ein Element der Form  $f(t)m = f(\rho(u))m$ .

**Kommentar:** TODO: Umformulieren als Vermutung, oder ähnliches

$$\begin{aligned} \partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m) \\ &= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u)) \underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t} m = (\star) \end{aligned}$$

$$\rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m) = \frac{1}{pu^{p-1}} \partial_u(f(u^p)m)$$

$$= f'(u^p)m + f(u^p)\frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u m = (\star)$$

Also gilt  $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$  und somit ist die Wirkung von  $\partial_t$  gleich der Wirkung von  $\rho'(u)^{-1}\partial_u$ .

*Beweis.* von Lemma 2.42. Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für  $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & u \longmapsto & & u \cdot P & & \\ & & & & u \longmapsto & & u \bmod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \end{array}$$

ist **exact**, weil  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(\cdot P)$ . Weil  $\widehat{K}$  **flach** ist, da Körper, ist auch, nach anwenden des Funktors  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \_$ , die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \end{array}$$

exact. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} &\cong \text{coker}(\text{id} \otimes \_ \cdot P) && (\text{weil exact}) \\ &\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \left( (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\text{id} \otimes \_ \cdot P) \right) && (\text{nach def. von coker}) \end{aligned}$$

Also mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.43 und  $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  nach Lemma 2.45 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & & \end{array}$$

als kommutatives Diagram. Nun, weil  $\_ \cdot Q$  injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{- \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0
 \end{array}$$

und damit folgt die Behauptung.

Kommentar: Quelle?

Kommentar: Ingo sagt:

Nun zu deiner Situation: Da geht es jeweils um die rechten Endstücke. Anders als die Mittelstücke sind diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt;  $C$  ist der Kokern von  $(A \rightarrow B)$  und  $c$  der Kokern von  $(a \rightarrow b)$ . Aufgrund der Kommutativität des Quadrats links müssen daher diese Kokerne zueinander isomorph sein.

Konkret kannst du einen Isomorphismus über eine Diagrammjagd konstruieren: Sei  $x \in C$  beliebig. Wir wollen ein zugehöriges Element in  $c$  angeben. Da  $(B \rightarrow C)$  surjektiv ist, gibt es ein  $y \in B$ , das unter  $(B \rightarrow C)$  auf  $x$  geschickt wird. Unser gesuchtes Element in  $c$  ist dann das Bild von  $y$  unter  $(B \rightarrow b)$  und  $(b \rightarrow c)$ . Dann ist noch Wohldefiniertheit nachzuweisen. Die Umkehrfunktion konstruiert man auf analoge Weise. Dann muss man natürlich noch nachrechnen, dass die beiden Morphismen zueinander invers sind.

(Geheimtipp: Linearität muss man, obwohl es eigentlich so scheint, tatsächlich nicht nachweisen – wenn man weiß, wie man intern in Topoi Mathematik betreiben kann. :-))

Kommentar:

- warum sind die schon zusammenhänge isomorph?  
eventuell noch ein Lemma bei kurzen exacten Sequenzen hinzufügen

□

**Lemma 2.47.** [Sab90, 5.4.3] Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , dann gilt für  $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$ , dass  $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  mit  $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$ , dann ist  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$  mit

$$P'(t, \partial_t) = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum a_i(\rho(t))(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^i \\
 &= \sum a_i(t^p)((p \cdot t^{p-1})^{-1}\partial_t)^i
 \end{aligned}$$

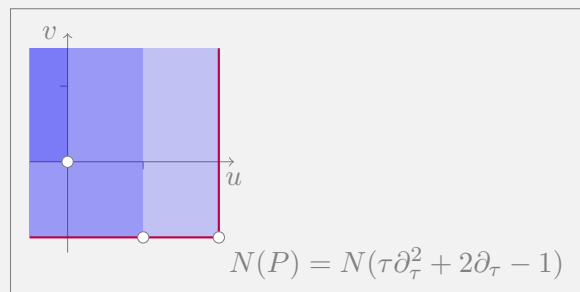
Kommentar: TODO: Hier weiter...

□

**Beispiel 2.48** (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Kommentar: Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$



und gehe von  $\tau$  über zu  $t$  via  $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$ :

- was passiert mit der Ableitung  $\partial_\tau$ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist  $\partial_t(t^2 \partial_t)$ ?

$$\begin{aligned}
 \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\
 &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\
 &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\
 &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t
 \end{aligned}$$

$$= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t$$

- was passiert mit  $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$ ?

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

$$\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1$$

$$= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1$$

$$= t (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1$$

$$= t(t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t) - 2t^2 \partial_t - 1$$

$$= t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1 =: P$$

Wir wollen  $\mathcal{M}_{\hat{K}} := \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  bzgl.  $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$  betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes zu erhalten. Es gilt  $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$  (siehe Abbildung 2.5a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back mit  $\rho : t \rightarrow x := t^2$  an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 2.42 einfacher anwenden können.

$$\partial_x \rightarrow \frac{1}{\rho'(t)} \partial_t = \frac{1}{2t} \partial_t$$

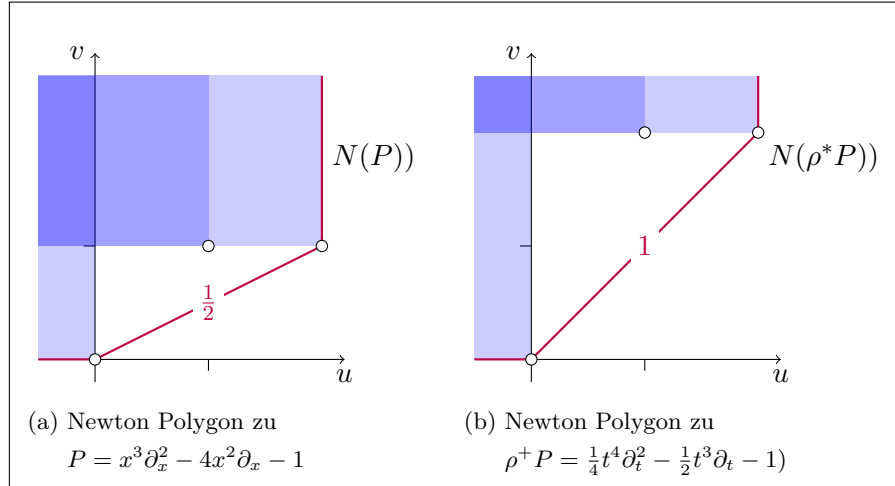
$$\begin{aligned} \partial_x^2 &\rightarrow \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2t} \partial_t \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right) \\ &= \frac{1}{2t} \left(-\frac{1}{2t^2} \partial_t + \frac{1}{2t} \partial_t^2\right) \\ &= \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t \end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned} \rho^+ P &= t^6 \left(\frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t\right) - 4t^4 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\ &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - t^3 \frac{1}{4t^3} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t - 1 \\ &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - 2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t - 1 \end{aligned}$$

Also ist  $\rho^+P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$  mit  $\text{slopes}(\rho^+P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.5b) und somit  $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1)$ .

Abbildung 2.4: Zu Beispiel 2.48



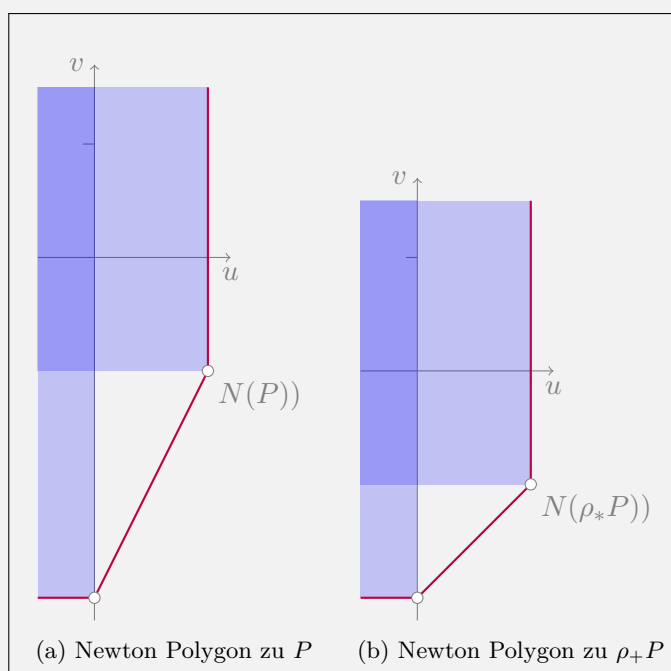
Sei  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ein endlich dimensionaler  $\widehat{L}$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

**Definition 2.49** (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *Direktes Bild*  $\rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  von  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ist

- der  $\widehat{K}$ -VR  $\rho_*\mathcal{N}$  ist definiert als der  $\mathbb{C}$ -Vektor Raum  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  mit der  $\widehat{K}$ -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation  $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$  und  $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung  $\partial_x$  beschrieben durch  $\rho'(t)^{-1}\partial_t$ .

Kommentar:

Abbildung 2.5: Zu Beispiel 2.50



**Beispiel 2.50** (push-forward). Für  $\rho : t \rightarrow u^2$ ,  $\varphi = \frac{1}{u^2}$  betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=: P} \end{aligned}$$

mit  $\text{slopes}(P) = \{2\}$  (siehe Abbildung 2.6a). Bilde nun das Direkte Bild über  $\rho$ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi \cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$  mit  $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$  und  $\text{slopes}(\rho_+P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.6b)

**Satz 2.51.** [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.5)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?) \end{aligned}$$

□

**Kommentar:** Sei  $\rho(u) = u^p = t$  und  $\varphi(t)$  gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

## 2.6 Twisten von $\mathcal{D}$ -Moduln

[Cou95, Chap 5 §2]

**Kommentar:**

**Lemma 2.52.** [Hei10, Seite 44] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot P(x, \partial_x)$  und sei  $\psi = \frac{\beta}{\lambda} x^{-\lambda}$ . So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit  $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x + \frac{\beta}{x^{\lambda+1}})$ .

## 2.7 Fouriertransformation

**Definition 2.53** (Fouriertransformation). [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1] Sei  $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$ . Dann ist die *Fouriertransformierte* von  $P$  gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i$$

**Definition 2.54** (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$  so ist die Fouriertransformierte davon  ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$ .

**Beispiel 2.55.** Sei  $P = t^2 \partial_t + 1$  dann ist die Fouriertransformierte davon  $\mathcal{F}_P = \dots$

Kommentar: TODO: hier weiter

### 3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: einführen als Bausteine oder kleinste Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 3.1.** [Sab07, 1.a] Sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}_K^\varphi$  für den (formalen) Rang 1 Vektorraum  $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$  ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$ , im speziellen also  $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$ .

Kommentar: Also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathbb{C}((x)) \xrightarrow{\partial_x} \mathbb{C}((x)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(x) \\ f(x) &\mapsto f'(x) + f(x)\varphi'(x) \end{aligned}$$

*Bemerkung 3.2.* 1. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird im folgendem meist verzichtet.

2. Offensichtlich ist  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$ , weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass  $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$ .

*Bemerkung 3.3.* [Sab07, 1.a] Es gilt  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$  genau dann wenn  $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$ .

Kommentar: ausformulierte version eines beweises im paper sabbah<sub>Fourier</sub> – local.pdf zulemma2.4

Sei  $\rho : t \mapsto x := t^p$  und  $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$ .



**Lemma 3.4.** [Sab07, Lem 2.4] Für alle  $\varphi \in \widehat{L}$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagram, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Es sei oBdA  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , dies ist nach Bemerkung 3.3 berechtigt. Wir wählen eine  $\widehat{L}$  Basis  $e$  des Rang 1  $\widehat{L}$ -Vektorraum  $\mathcal{E}^\varphi$  und damit erhält man die Familie  $e, te, \dots, t^{p-1}e$  als  $\widehat{K}$ -Basis von  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Durch die Setzung  $e_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e$  wird die Familie  $\mathbf{e} := (e_0, \dots, e_{p-1})$  eine  $\widehat{L}$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Zerlege nun  $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$  (siehe: Anhang A). Es gilt:

$$t\partial_t e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t e_k &= t\partial_t(t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e) \\ &= t(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x(\underbrace{t^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} e + t^k \varphi'(t) e) \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1} e + t^k \varphi'(t) e) \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} e}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) e \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+1} \varphi'(t) e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \underbrace{t^i \psi_i(t^p) e}_{\in \widehat{K}} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass  $\mathbf{e} \cdot V = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  gilt, so dass gilt:

$$t \partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} t \partial_t \mathbf{e} &= (t \partial_t e_0, \dots, t \partial_t e_{p-1}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right] \end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_t$  auf die Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$  ist also Beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da  $V$  das Minimalpolynom  $\chi_V(x) = X^p - 1$  hat, können wir diese Matrix durch Passendes  $T$  auf die Form

$$D := T V T^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit  $\xi^p = 1$ , bringen. So dass gilt:

$$\begin{aligned}
 T\left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j\right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j\right] \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j\right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Damit wissen wir bereits, das im Diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & & 
 \end{array}$$

der mit  $(\star)$  bezeichnete Teil kommutiert. Um zu zeigen, dass alles kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(\Phi(x)) = \Phi\left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(x) D^j\right) \quad \forall x \in \widehat{L}^p$$

gilt.

Kommentar: TODO: zeige das noch

Sei  $x = {}^t(x_1, \dots, x_p) \in \widehat{L}^p$ . So ist

$$\partial_t(\Phi(x)) = \partial_t({}^t(\dots))$$

und

$$\begin{aligned} \Phi\left({}^t x \left( \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right)\right) &= \Phi\left((x_1, \dots, x_p) \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix}\right) \\ &= \Phi\left((x_1 \varphi'(t), x_2 \varphi'(\xi t) \xi, \dots, x_p \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1})\right) \end{aligned}$$

□

### 3.1 Definition von Notizen und [Sab90, Cor 5.2.6]

**Definition 3.5.** Ein *Elementarer Meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang  $\mathcal{M}$ , für den es  $\psi \in \mathbb{C}[[x]]$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $p \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit  $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$ , ist.

**Lemma 3.6.**  $\mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (x\partial_x - (\alpha + x \frac{\partial \psi}{\partial x}))^p$

*Beweis.* [Hei10, Lem 5.12]

□

### 3.2 Definition in [Sab90]

Kommentar: in [Sab90] Teil 5.4.4 Seite 34

**Definition 3.7.** Sei  $R(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i \in z\mathbb{C}[z]$ . So ist der Meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{F}_K^R$  als Vektorraum isomorph zu  $\widehat{K}$  und hat der Basis  $e(R)$ . Die Wirkung von  $x\partial_x$  ist definiert durch

$$x\partial_x(\varphi \cdot e(R)) = \left[ \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \varphi x \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} \right] \cdot e(R)$$

Kommentar: hat das was mit fourier zu tun

Kommentar: This means that  $e(R)$  plays the role of  $\exp R(x^{-1})$ .

**Definition 3.8.** Ein *Elementarer Meromorpher Zusammenhang* (über  $\widehat{K}$ ) ist ein Zusammenhang welcher zu  $\mathcal{F}_{\widehat{K}}^R \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{G}_{\widehat{K}}$  isomorph ist. Wobei hier  $\mathcal{G}_{\widehat{K}}$  ein Elementarer regulärer Meromorpher Zusammenhang.

### 3.3 Defnition in [Sab07]

**Definition 3.9** (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1]

Kommentar: Alternative. ausführlichere / komplexe definition [Sab90, Def 5.4.5.]

Zu einem gegebenen  $\rho \in t\mathbb{C}[[t]]$ ,  $\varphi \in \widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t))$  und einem endlich dimensionalen  $\widehat{L}$ -Vektorraum  $R$  mit regulärem Zusammenhang  $\nabla$ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensional  $\widehat{K}$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt  $El(\rho, \varphi, R)$  nur von  $\varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$  ab.

**Lemma 3.10.** [Sab07, Lem 2.2]

**Lemma 3.11.** [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt  $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$  genau dann, wenn

- es ein  $\zeta$  gibt, mit  $\zeta^p = 1$  und  $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$
- und  $S \cong R$  als  $\widehat{L}$ -Vektorräume mit Zusammenhang.

*Beweis.* [Sab07, Lem 2.6.] □

**Proposition 3.12.** [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale  $\widehat{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{M}$  mit Zusammenhang ist isomorph zu  $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$ , wobei  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ ,  $\rho : t \rightarrow t^p$  vom Grad  $p \geq 1$  und ist minimal unter  $\varphi$ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und  $L$  ist ein Rang 1  $\widehat{L}$ -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

*Beweis.* [Sab07, Prop 3.1] □

## 4 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, Meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

### 4.1 Klassische Version

**Satz 4.1.** [Sab90, Thm 5.4.7] *Sie  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl  $p$  so dass der Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , mit  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

*Beweis.* Zum Beweis wird Induktion auf die Lexicographisch geordnetem Paare  $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$  angewendet. Wobei  $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  dem größtem Slope von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ . Es wird  $\kappa = \infty$  gesetzt, falls der größte Slope nicht Ganzzahlig ist.

Kommentar: TODO: induktionsanfang und -schritt kennzeichnen

Wir nehmen oBdA an, dass  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  genau einen Slope  $\Lambda$  hat, sonst Teile  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  mittels Satz 2.30 in Meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit  $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  (vollständig gekürzt) Definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform  $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ . Wir nennen  $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$  die *Determinanten Gleichung* von  $P$ . Da  $L$  zu einem Slope von  $P$  gehört, besteht  $\sigma_L(P)$  aus zumindest zwei Monomen.

Kommentar: and is homogeneous of degree  $\text{ord}_L(P) = 0$  because  $P$  is chosen with coefficients in  $\mathbb{C}[[x]]$ , one of them, being a unit.

Schreibe

$$\sigma_L(P) = \sum_{L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i$$

$$= \sum_{L(i,i-j)=0} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

Sei  $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x i^{\lambda_1}$  so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei  $\alpha_0 \neq 0$  ist.

**Erster Fall:**  $\lambda_1 = 1$ . Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_{\beta}}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  eine Konstante ist. Sei  $\beta_0$  eine der Nullstellen. So setze  $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0 + 1))z^{\lambda_0 + 1}$  und betrachte  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$ .

**Lemma 4.2.** Falls  $e$  ein zyklischer Vektor für  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist, so ist  $e \otimes e(R)$  ein zyklischer Vektor für  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$ .

*Beweis.* TODO

□

Kommentar: AB HIER VLT NICHT RICHTIG, nur versuch

Falls  $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$  gilt

$$P\left(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\right) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{\beta_0}{\lambda_0 + 1} x^{-(\lambda_0 + 1)}\right)}{\partial x} \\ &= -\beta_0 x^{-(\lambda_0 + 2)}. \end{aligned}$$

Schreibe  $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0 + 2)})$ .

**Lemma 4.3.** Es gilt, dass  $P'$  Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.

*Beweis.* TODO

□

Des weiteren ist  $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$ . Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. Die Determinanten Gleichung  $\sigma_L(P)$  hat nur eine Nullstelle.

Kommentar: TODO: Hier weiter

## 2. Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat mehrere Nullstellen.

Kommentar: TODO: Hier weiter

**Zweiter Fall:**  $\lambda_1 \neq 1$ . In diesem Fall ist einzige Slope  $\Lambda$  nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit  $\lambda_1$ . Sei  $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$  und erhalte  $P'$  so dass  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ . Nach Lemma 2.47 hat  $P'$  den einen Slope  $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$ . Damit können wir nun die zugehörige Linearform  $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$  definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \dots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an.

□

## 4.2 Sabbah's Refined version

**Proposition 4.4.** [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$  ist isomorph zu  $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$ , wobei  $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ ,  $\rho : x \mapsto t = x^p$  mit  $\text{grad } p \geq 1$  minimal bzgl.  $\varphi$  (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und  $S$  ist ein Rang 1  $\widehat{K}$ -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

**Satz 4.5** (Refined Turrittin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe  $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$ , so dass jedes  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$  irreduzibel ist und keine zwei  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$  isomorph sind.

Kommentar: In welchem Raum ist  $\mathcal{M}$  ?? in  $L$  oder in  $K$

Beweis. [Sab07, Cor 3.3]

□



## 5 DIE Klasse der Fourier-Transformationen

In diesem Kapittel werden Beispiele einer speziellen Klasse von  $\mathcal{D}$ -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu 2 Beispielen unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem  $\varphi$  D-Moduln ergibt. Im laufe des Kapitells werden immer speziellere  $\varphi$  betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

### 5.1 Rezept für allgemeine $\varphi$

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein  $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$  aus
2. und beginne mit  $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \tilde{Q}$  mit  $\tilde{Q}(t, \partial_t) := \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}] < \partial_t >$ .
3. Wir wollen aber ein Element in  $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$ , deshalb multipliziere mit Hauptnenner und erhalte

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \tilde{Q}(t, \partial_t) &= \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \underbrace{(\text{Hauptnenner})}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\hat{L}}^*} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t)) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \underbrace{(t^{\max(I)+1} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t)))}_{=: Q(t, \partial_t)} \quad \triangleleft \mathcal{D}_{\hat{L}} \end{aligned}$$

mit  $Q \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$ . Dies ändert den Assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht, weil  $t^{\max(I)+1}$  eine Einheit in  $\mathcal{D}_{\hat{L}}$  (und auch in  $\mathcal{D}_L$ ) ist.

4. Fouriertransformiere  $Q$  und erhalte  $\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \stackrel{\text{def}}{=} Q(\partial_z, -z)$  in  $\mathbb{C}[z] < \partial_z >$

5. Wende den Übergang  $x \rightsquigarrow z^{-1}$  an.

Was passiert mit der Ableitung  $\partial_x$ ? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also  $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$ .

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$$

6. Erhalte den zu  $P_\varphi$  assoziierten Meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$ .

Kommentar: warum sind diese wichtig??

**Wende das Rezept allgemein für  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$  an.** So ist

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t, \partial_t) &= \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \\ &= \partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[t][t^{-1}] \langle \partial_t \rangle$$

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k-\max(I)}} \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= -(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \underbrace{x^2 \partial_x x^{-1}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{(x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$$

Im Anhang B wird das  $(x^2 \partial_x)^k$  genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die richtige Richtung.

**Ab jetzt nur noch für den Spezialfall  $\varphi = \frac{a}{t^q}$ .** Also sei  $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$  mit

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^q (x \partial_x - 1) + q a,$$

so dass

**Lemma 5.1.**  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$  gilt.

*Beweis.* [Sab07, 5.b.] TODO

**Kommentar:** über L-Symbol? Stützfunktion? Versuch:

Mit  $L = qs_0 + (q+1)s_2$  gilt

$$\sigma_L(P) = \pm x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + qa,$$

welches aus mehr als einem Monom besteht, deshalb ist der zu  $L$  zugehörige Slope  $\frac{q}{q+1}$  ein Slope von  $P$ . Da  $q+1$  die höchste vorkommende  $\partial_x$ -Potez ist, kann es auch keinen weiteren Slope geben.

□

Also ist ein pull-back mit Grad  $q+1$  nötig, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen.

**Kommentar:** Sei  $\rho : t \mapsto x := t^{q+1}$  so ist

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \rho^+(\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(t^{q+1}, \frac{1}{(q+1)t^q} \partial_t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((- (t^{q+1})^2 \frac{1}{(q+1)t^q} \partial_t)^q (t^{q+1} \frac{1}{(q+1)t^q} \partial_t - 1) + qa) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((-\frac{1}{q+1} t^{2(q+1)-q} \partial_t)^q (\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1) + qa) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((-\frac{1}{q+1} t^{q+2} \partial_t)^q (\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1) + qa) \end{aligned}$$

Sei  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$  so ist

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \rho^+(\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(-(q+1)t^{q+1}, -(q+1)^{-1} \frac{1}{(q+1)t^q} \partial_t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((-(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-(q+1)^{-1}}{(q+1)t^q} \partial_t)^q (-(q+1)t^{q+1} \frac{-(q+1)^{-1}}{(q+1)t^q} \partial_t - 1) + qa) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((-\frac{(q+1)}{q+1} t^{2(q+1)-q} \partial_t)^q (\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1) + qa) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2} \partial_t)^q (\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1) + qa)
 \end{aligned}$$

mit  $\mathcal{P}(\rho^+ \mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$ . Definiere mittels  $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  die Linearform

$$L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe  $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$  und berechne die *Determinanten Gleichung*  $\sigma_L(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{K}[\xi]$ .

$$\begin{aligned}
 \sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid L(i,j)=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\
 &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i
 \end{aligned}$$

Da  $\widehat{K}[\xi]$  kommutativ ist gilt hier, dass  $(x^j \xi^i)^k = x^{jk} \xi^{ik}$  ist. Setze  $\theta = x^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = x^{q+1} \xi$  so können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  eine Konstante ist. Sei  $\beta_0$  eine der Nullstellen. Da  $\text{ord}_L(\rho^* P_\varphi) = 0$  und der einzige Slope von  $\rho^* P_\varphi$  nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass  $\alpha_0 \neq 0$ . Also ist 0 keine Nullstelle von  $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$ .

**Kommentar:** Setze  $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0 + 1))z^{\lambda_0+1} = (\beta_0/(q+1))z^{q+1}$  und betrachte

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi) \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R.$$

Setze  $\psi(z) := (\beta_0/(\lambda_0 + 1))z^{\lambda_0+1} = (\beta_0/(q+1))z^{q+1}$  und betrachte

**Kommentar:** TODO: bei Hedwig ist es  $\beta/\lambda \cdot x^{-\lambda}$

$$\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi) \otimes \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi.$$

**Lemma 5.2.** Sei  $e$  ein zyklischer Vektor zu  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$ , so ist  $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}} \in \mathcal{N}$  ein zyklischer Vektor für  $\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi$ .

*Beweis.* Es sei  $e$  ein zyklischer Vektor von  $\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1}$ . Da der Grad von  $\rho^* P_\varphi$  gleich  $q + 1$  ist, ist auch die Dimension von  $\rho^+ \mathcal{M}$  gleich  $q + 1$ . Damit ist auch  $\dim_K \mathcal{N} = q + 1$ , also reicht zu zeigen, dass  $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^q(e \otimes 1)$  ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_x(e \otimes 1) &= (\partial_x e) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\
 &= (\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x) \\
 &= (\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1) \\
 \partial_x^2(e \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1)) \\
 &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + (\partial_x e) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x)) \\
 &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)^2(e \otimes 1) \\
 &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(e \otimes 1) \\
 &\vdots \\
 \partial_x^q(e \otimes 1) &= (\partial_x^q e) \otimes 1 + \lambda_{q-1}(\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 + \dots + \lambda_1(\partial_x e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1)
 \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_x(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) \\ \partial_x^q(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{q-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_x e) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 \\ (\partial_x^q e) \otimes 1 \end{pmatrix}$$

Da bekanntlich  $e \otimes 1, (\partial_x e) \otimes 1, (\partial_x^2 e) \otimes 1, \dots, (\partial_x^q e) \otimes 1$  linear unabhängig sind, gilt dies auch für  $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^q(e \otimes 1)$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Kommentar:

**Lemma 5.3.** [Hei10, Seite 44] Wenn  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x))$  gilt, so ist

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x + \frac{\beta}{x^{\lambda+1}}))$$

$$= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x + \frac{\beta}{x^{\lambda+1}}))$$

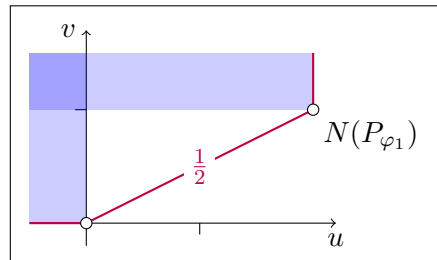
## 5.2 Spezialfall $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Als konkreten Fall betrachten wir nun  $\mathcal{M}_{\varphi_1}$  bezüglich  $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . Es ist das Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{\varphi_1}(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\ &= -x^2 \underbrace{\partial_x x \partial_x}_{\partial_x} + x^2 \partial_x + a \\ &= -x^2 (x \partial_x + 1) \partial_x + x^2 \partial_x + a \\ &= -x^3 \partial_x^2 - x^2 \partial_x + x^2 \partial_x + a \\ &= -x^3 \partial_x^2 + a \end{aligned}$$

Erhalte nun das Newton-Polygon mit den Slopes  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\varphi_1}) = \{\frac{1}{2}\}$ .

Abbildung 5.1: Newton Polygon zu  $P_{\varphi_1}$

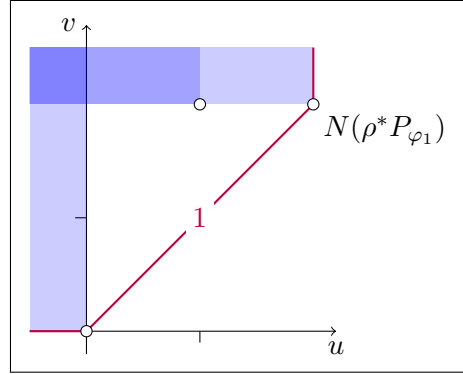


Berechne nun den pull-back mit  $\rho : t \mapsto x := -2t^2$

$$\begin{aligned} \rho^* P_{\varphi_1}(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (\frac{1}{2} t \partial_t - 1) + a \\ &= \frac{1}{2} t^3 \underbrace{\partial_t t \partial_t}_{\partial_t} - t^3 \partial_t + a \\ &= \frac{1}{2} t^3 (t \partial_t + 1) \partial_t - t^3 \partial_t + a \\ &= \frac{1}{2} t^4 \partial_t^2 + \frac{1}{2} t^3 \partial_t - t^3 \partial_t + a \\ &= \frac{1}{2} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t + a \end{aligned}$$

und erhalte einen Meromorphen Zusammenhang  $\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_{\varphi_1}$  mit genau dem Slope  $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ .

Abbildung 5.2: Newton Polygon zu  $\rho^* P_{\varphi_1}$



Definiere die Linearform  $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$ . Berechne nun die *Determinanten Gleichung*  $\sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) \in \widehat{K}[\xi]$  von  $\rho^* P_{\varphi_1}$ .

$$\begin{aligned} \sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) &= \sum_{\{(i,j) | 2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \frac{1}{2} x^4 \xi^2 + a \end{aligned}$$

Setze  $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = x^2 \xi$  so erhalten wir

$$\sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) = \frac{1}{2} \theta^2 + a$$

schreiben, welches wir als nächstes faktorisieren

$$\begin{aligned} \sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) &= \frac{1}{2} \theta^2 + a \\ &= \frac{1}{2} (\theta^2 - 4a) \\ &= \frac{1}{2} (\theta - \underbrace{2\sqrt{a}}_{=:\beta_0}) (\theta + 2\sqrt{a}) \end{aligned}$$

Dies geht, weil  $\widehat{K}[\xi]$  kommutativ ist. Setze  $\psi(x) := (\beta_0 / (\lambda_0 + 1)) x^{\lambda_0 + 1} = \sqrt{a} x^2$  und betrachte  $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1} \otimes_{\mathcal{E}_K}^{\psi} \mathcal{E}_K$  mit dem zyklischem Vektor  $e \otimes 1$ , wobei  $e$  ein zyklischer Vektor von  $\rho^+ \mathcal{M}$ . Es ist

$$\partial_t^2(e \otimes 1) = \partial_t(\underbrace{\partial_t(e \otimes 1)})$$

$$\begin{aligned}
&= \overbrace{\partial_t((\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)(e \otimes 1))} \\
&= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)(e \otimes 1) \\
&= (t^{-1}\partial_t - 2t^{-4}a)e \otimes 1 + \overbrace{2qt^{q-1}(\partial_t e) \otimes 1} + (q(q-2)t^{q-2} + (qt^{q-1})^2)(e \otimes 1) \\
&= \overbrace{2qt^{q-1}\partial_t(e \otimes 1) - 2qt^{q-1}(\psi'(t)(e \otimes 1))} + t^{-1}\partial_t(e \otimes 1) \\
&\quad + (-2t^{-4}a + q(q-2)t^{q-2} + (qt^{q-1})^2)(e \otimes 1) \\
&= 2qt^{q-1}\partial_t(e \otimes 1) - \overbrace{2(qt^{q-1})^2(e \otimes 1)} + t^{-1}\partial_t(e \otimes 1) \\
&\quad + (-2t^{-4}a + q(q-2)t^{q-2} + (qt^{q-1})^2)(e \otimes 1) \\
&= (2qt^{q-1} + t^{-1})\partial_t(e \otimes 1) + (-2t^{-4}a + q(q-2)t^{q-2} - (qt^{q-1})^2)(e \otimes 1) \\
&= ((2qt^{q-1} + t^{-1})\partial_t - 2t^{-4}a + q(q-2)t^{q-2} - (qt^{q-1})^2)(e \otimes 1)
\end{aligned}$$

Kommentar: TODO: verbessern

Also ist

$$\mathcal{N} = \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t^2 - ((2qt^{q-1} + t^{-1})\partial_t + (-2t^{-4}a + q(q-2)t^{q-2} - (qt^{q-1})^2)))$$

Kommentar:

$$\begin{aligned}
0 &= (\frac{1}{2}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t + a)e \\
0 &= (\partial_t^2 - t^{-1}\partial_t + 2t^{-4}a)e \\
\partial_t^2 e &= (t^{-1}\partial_t - 2t^{-4}a)e
\end{aligned}$$

und Aufgrund der linearen Abhängigkeit existieren  $a_0$  und  $a_1$ , so dass

$$\partial_x^2(e \otimes 1) = a_0 e \otimes 1 + a_1 \partial_x(e \otimes 1)$$

### 5.2.1 Sabah's refined Levelt-Turritin-Zerlegung für $\varphi_1$





## B Genaueres zu $(x^2 \partial_x)^k$

Nun wollen wir noch  $(x^2 \partial_x)^{k+1}$  besser verstehen.

$$\begin{aligned}
 (x^2 \partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2}_{(2x + x^2 \partial_x)} \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= x^2 \overbrace{(2x + x^2 \partial_x)}^{(2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2)} \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2}_{(2x + x^2 \partial_x)} \partial_x + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2}_{(2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2)} \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \overbrace{(2x + x^2 \partial_x)}^{(2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2)} \partial_x + x^4 \overbrace{(2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2)}^{(4x^4 \partial_x + 2x^5 \partial_x^2 + 2x^5 \partial_x^2 + x^4 \partial_x + x^6 \partial_x^3)} \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
 \end{aligned}$$

Kommentar: Stirlingzahlen

also gilt für spezielle  $k$

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

# Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on  $d$ -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov,  *$D$ -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for  $d$ -modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic  $d$ -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott,  *$D$ -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer  $D$ -Moduln und Fourier-transformation*, 2010.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki,  *$D$ -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara,  *$D$ -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to  $d$ -modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.

Kommentar: TODO: Erklärung das das wirklich selbstgemacht ist