

Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

stand: 30. Mai 2013

Inhaltsverzeichnis

0	Mathematische Grundlagen	1
1	Moduln über \mathcal{D}_k	4
1.1	Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k	5
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise	7
1.2	(Links) \mathcal{D} -Moduln	8
1.3	Holonome \mathcal{D}_k -Moduln	8
2	Meromorphe Zusammenhänge	11
2.1	Systeme von ODEs und meromorphe Zusammenhänge	11
2.1.1	Meromorphe Zusammenhänge	12
2.2	Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten \mathcal{D} -Moduln	14
2.3	Newton Polygon	17
2.3.1	Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol	22
2.4	Operationen auf meromorphen Zusammenhängen	24
2.4.1	Tensorprodukt	24
2.4.2	pull-back und push-forward	24
2.4.3	Fouriertransformation	34
2.4.4	Betrachten bei Unendlich	35
3	Elementare meromorphe Zusammenhänge	36
3.1	Elementare formale meromorphe Zusammenhänge	36
3.2	Elementare meromorphe Zusammenhänge	37
3.3	Defnition in [Sab07]	43
3.4	Twisten von meromorphen Zusammenhängen	43
3.5	Levelt-Turrittin-Theorem	45
3.5.1	Klassische Version	45
3.5.2	Sabbah's Refined version	48

4	Explizite berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung	49
4.1	Rezept für allgemeine φ	49
4.2	Levelt-Turrittin-Zerlegung für \mathcal{M}_φ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$	56
4.2.1	Konvergenz der Summanden	64
	Anhang	70
A	Aufteilung von $t\varphi'(t)$	71
B	Genaueres zu $(x^2\partial_x)^k$	72
C	Numerische berechnung der Koeffizienten	73
D	Quelltexte	78
D.1	ComplRat.hs	78
D.2	Koeffs.hs	79
D.3	GenDataToFile.hs	82

Abbildungsverzeichnis

2.1	Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$	19
2.2	Newton-Polygon zu P_2	19
2.3	Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$	21
2.4	Newton Polygon zu P	22
2.5	Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$	32
2.6	Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$	32
2.7	Newton-Polygon zu P	35
2.8	Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P	35
4.1	Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$	52
4.2	Newton Polygon zu P_φ	56
4.3	Newton Polygon zu ρ^*P_φ	57
4.4	Newton Polygon zu \mathcal{N}	58
4.5	Newton-Polygon zu Q_1	60
4.6	Newton-Polygon zu Q_2	60
4.7	Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2}	68
4.8	Wurzkriterium angewendet auf die Koeffizienten	69
4.9	Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten	70

Tabellenverzeichnis

C.1	Numerisch berechnete Koeffizienten von $u(t)$ und $v(t)$ für $a = \frac{1}{8}$	77
-----	--	----

D.1	Numerisch berechnete Koeffizienten von $v(t)$ für $u_{-2} = i$ bzw. $a = \frac{1}{8}$	82
-----	---	----

Listings

4.1	Koeffs.hs	66
C.1	Main.hs	73
C.2	ComplRat.hs	74
D.1	ComplRat.hs	78
D.2	Koeffs.hs	80
D.3	testKoeffs.hs	80
D.4	Main.hs	82

0 Mathematische Grundlagen

Kommentar: Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

Wir betrachten \mathbb{C} hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$ ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit \tilde{K} bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$ und $K \subsetneq \widehat{K}$ gelten.

Es bezeichnet der Hut ($\widehat{}$) das jeweils formale Äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

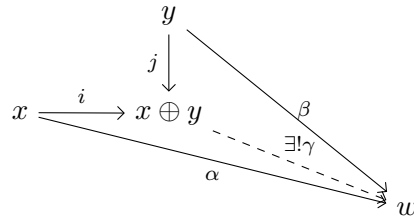
Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m dimensionalen Matrizen mit Einträgen in k .

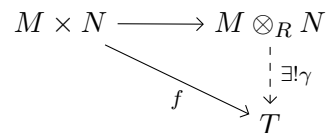
Sei R ein Ring, dann bezeichnet R^\times die Einheitengruppe von R .

Definition 0.1 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *direkte Summe*, oder das *Coproduct* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$, so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$, so dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 0.2 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]



Für eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned} \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

Bemerkung 0.3. Hier einige Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

Definition 0.4 (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exakt, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.5 (Kurze exakte Sequenz). Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

welche exakt ist.

Definition 0.6 (Kokern). Ist $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\operatorname{coker}(f) = M / \operatorname{im}(f)$.

Proposition 0.7. Ist $f : M' \rightarrow M$ eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz und $M/f(M') = \operatorname{coker}(f)$ ist der Kokern von f .

Beweis.

□

Kommentar:

Definition 0.8 (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unter-ring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$ und damit das zu A mit Filtrierung F assoziierte *graduierete Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

Definition 0.9. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

1 Moduln über \mathcal{D}_k

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als Körper k immer ein Element aus $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$ betrachten.

Definition 1.1 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 1.2. Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \rightarrow k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

$$2. \quad \text{für } f \in k \text{ ist}$$

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (1.1)$$

$$3. \quad \text{Es gelten die Formeln}$$

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \quad (1.2)$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \quad (1.3)$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \quad (1.4)$$

Beweis. 1. Klar.

$$2. \quad \text{Für ein Testobjekt } g \in k \text{ ist}$$

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g.$$

$$3. \quad \text{Siehe [Sab90, 1.2.4.]}$$

□

1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.5)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 1.3. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.5). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ ^[1].

Bemerkung 1.4. • Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

- Offensichtlich erhält \mathcal{D}_k in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- \mathcal{D}_k ist nichtkommutativ.

Proposition 1.5. [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in \mathcal{D}_k kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

^[1]Wird mit $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$ bezeichnet, in [AV09].

Kommentar: Gilt das folgende??

$$\alpha_i(x)\partial_x^i \equiv \frac{\alpha_i}{x^i}(x\partial_x)^i \pmod{F_{i-1}\mathcal{D}}$$

Kommentar: Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 1.6. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* (oder den ∂_x -Grad) von P .

Kommentar: Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.7. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringe

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO

Kommentar: Treffen?

□

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Kommentar: Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Ein (*holomorpher*) *differenzial Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung m , falls $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$.

Definition 1.8. Mit \mathcal{D}_X bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf X .

Die Garbe \mathcal{D}_X hat eine Ringstruktur mittels der Komposition als Multiplikation und \mathcal{O}_X ist ein Unterring von \mathcal{D}_X . Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über X . Es gilt, dass Θ_X in \mathcal{D}_X enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links \mathcal{O}_X -Untermodul, aber kein rechts \mathcal{O}_X -Untermodul ist.

Proposition 1.9. [Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$. Wobei ∂_x als $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die alternative Definition bereits mit der einfachen überein.

Kommentar:

Definition 1.10. [Ark12, Defn 2.1] Sei $X = \mathbb{A}^1$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{D}_X = [x, \partial_x]$ mit der Relation $[\partial_x, x] = 1$. Dann definieren wir die links \mathcal{D} -Moduln über \mathbb{A}^1 als die $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn im folgendem von \mathcal{D} -Moduln gesprochen wird, werden immer links \mathcal{D} -Moduln gemeint.

Beispiel 1.11 (links \mathcal{D} -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ jeweils durch $x \cdot x^m = x^{m+1}$ und $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol $\exp(\lambda x)$ ein, mit $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$. So ist $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda x)$ ein \mathcal{D} -Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das \mathcal{D} -Modul $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über \mathcal{D} erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

Kommentar:

Lemma 1.12. [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist. Dann ist \mathcal{M} bereits ein freies $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.] □

Korollar 1.13. [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon $\mathcal{M} = \{0\}$.

1.3 Holonome \mathcal{D}_k -Moduln

Definition 1.14. Sei \mathcal{M}_k ein links \mathcal{D}_k -Modul. \mathcal{M}_k heißt *holonom*, falls es ein Element $m \in \mathcal{M}_k$ gibt, das \mathcal{M}_k als \mathcal{D}_k -Modul erzeugt. Im speziellen folgt damit, dass $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{D}_k / \mathfrak{a}$ für ein $0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}_k$.

Bemerkung 1.15. In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die charakteristische Varietät.

Bemerkung 1.16. Nach [Cou95, Prop 10.1.1] gilt

- Submoduln und Quotienten von holonomen \mathcal{D}_k -Moduln sind holonom
- sowie endliche Summen von holonomen \mathcal{D}_k -Moduln sind holonom

und laut [Sab90, Thm. 4.2.3] gilt, dass

- für ein holonomes $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ -Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. ein $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ -Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}$) ist die Lokalisierung

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K \quad (\text{bzw. } \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]} \otimes_{\mathbb{C}[[x]]} \widehat{K}),$$

mit der $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$) Modul Struktur durch

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

wieder holonom.

Satz 1.17. *Sei \mathcal{M}_k ein holonomes \mathcal{D}_k -Modul, dann gilt, dass seine Lokalisierung isomorph zu $\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_k \cdot P$, mit einem $P \in \mathcal{D}_k$ ungleich Null, ist.*

Beweis. Siehe [Sab90, Cor 4.2.8]. □

Kommentar:

Alternative Definition B

Definition 1.18. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei \mathcal{M} lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt, \mathcal{M} ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.19. [Sab90, Lem 3.3.8.] *Ein \mathcal{D} -Modul ist holonom genau dann, wenn $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$.*

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

Kommentar:

Alternative Definition A

Definition 1.20 (Holonome \mathcal{D} -Moduln). [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich genertierter \mathcal{D} -Modul \mathcal{M} ist *holonom*, falls $\mathcal{M} = 0$ gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

Bemerkung 1.21. [Cou95, Chap 10 §1] Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Links-Ideal von \mathcal{D} . Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$. Falls $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$, dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$. Somit ist \mathcal{D}/\mathfrak{a} ein holonomes \mathcal{D} -Modul.

2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei \mathcal{M} ein \mathcal{D} -Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit x bijektiv ist, so nennen wir \mathcal{M} einen meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

2.1 Systeme von ODEs und meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Kommentar: TODO: zeige, dass der Lösungsraum die Eigenschaften von \mathcal{D} -Moduln erfüllt
siehe alternativer Zugang

Alternativer Zugang

Kommentar: Sei P ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ geschrieben als $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$. Man sagt eine Funktion $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von P , falls u die Gleichung $Pu = 0$ erfüllt. Man sagt 0 ist ein singulärer Punkt falls $a_d(0) = 0$. Falls 0 kein singulärer Punkt ist, hat P genau d über \mathbb{C} unabhängige Lösungen in $\mathbb{C}\{x\}$.

[Sab90, 3.1.1] Sei \mathcal{F} ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren \mathcal{D} wirken. Ein Element $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von $P \in \mathcal{D}$ falls $P \cdot u = 0$ gilt.

Falls u ein Lösung von P ist, so ist u auch Lösung von $Q \cdot P$ mit $Q \in \mathcal{D}$. Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal $\mathcal{D} \cdot P \triangleleft \mathcal{D}$ ab.

2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tupplel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.2}$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.2 (Formaler meromorpher Zusammenhang). Analog definiert man einen *formalen meromorphen Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$ bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, ein endlich dimensionaler \widehat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

Definition 2.3. Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei meromorphe Zusammenhänge über k . Eine k -lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$.

Kommentar: TODO: Wann sind die Isomorph
 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ und die Ableitungen kommutieren mit dem Isomorphismus

Kommentar:

Definition 2.4. Wir erhalten damit die Kategorie der meromorphen Zusammenhänge über k mit

Objekte: (M, ∂) meromorpher Zusammenhang über k

Morphismen: $(M, \partial) \xrightarrow{f} (M', \partial')$ Morphismus von meromorphen Zusammenhängen.

Bemerkung 2.5. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.6 (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein meromorpher Zusammenhang so wähle eine K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$* die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\begin{array}{c} \boxed{??} \\ \downarrow \\ \partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i. \end{array}$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder meromorphe Zusammenhang (\mathcal{M}, ∂) ausgestattet mit einer K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten \mathcal{D} -Moduln

Satz 2.7. [Sab90, Thm 4.3.2] *Ein meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes \mathcal{D}_K -Modul und umgekehrt.*

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma/Definition 2.8. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] *Ist \mathcal{M}_K ein meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$. So ein wird P dann als Minimalpolynom von \mathcal{M}_K bezeichnet.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Kommentar:

Bemerkung 2.9. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

Kommentar: [Sab90, 4.2] Let \mathcal{M} be a left \mathcal{D} -module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 2.10 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] *Sei \mathcal{M}_K ein meromorpher Zusammenhang. Es existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.*

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Korollar 2.11. *In der Situation von Lemma 2.10 gibt es ein $P \in \mathcal{D}_K$ mit ∂ -Grad von P ist gleich d und $P \cdot m = 0$, in diesem Fall ist P ein Minimalpolynom zu \mathcal{M}_K , also gilt $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.*

Satz 2.12. *[AV09, Seite 64] Ist $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

Beweis. [AV09, Seite 57-64] □

Korollar 2.13. *Sei $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ wie in Satz 2.12 so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

Beweis. Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.14. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Kommentar:

Lemma 2.15. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Isomorphismus so ist $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ein zu $(\mathcal{M}_K, \partial)$ isomorpher Zusammenhang.*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N}
 \end{array}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen)

□

Lemma 2.16. *Sei \mathcal{M}_K ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen, so gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.*

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1u - f'u - f\partial_2u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1u - \partial_2u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

Korollar 2.17. *Für (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang existiert ein $A \in M(r \times r, K)$, so dass $\partial = \frac{d}{dx} - A$.*

Beweis. Es sei (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also lässt sich durch eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ darstellen, also ist, wie behauptet, $\partial = \frac{d}{dx} - A$. □

Proposition 2.18 (Transformationsformel). [[HTT07](#), Chap 5.1.1] *In der Situation*

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 & \searrow \varphi & & \swarrow \varphi & \\
 \cong T & & M \xrightarrow{\partial} M & & T \cong \\
 & \swarrow \psi & & \searrow \psi & \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$ und $(\frac{d}{dx} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der meromorphe Zusammenhang. $\frac{d}{dx} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

Definition 2.19 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

Kommentar: $1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$

$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

2.3 Newton Polygon

Kommentar: Quelle: sabbah?

sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, also insbesondere auch jedes $P \in \mathcal{D}_K$, lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$\begin{aligned}
 H(P) &:= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left((m, l-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2 \\
 &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left((m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.
 \end{aligned}$$

Definition 2.20. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\text{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Bemerkung 2.21. Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x)(x\partial_x)^k$$

mit $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexen Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left((m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.22. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ für die Menge der zu \mathcal{M} gehörigen slopes.
- P heißt *regulär* oder *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$ oder $\deg P = 0$, sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ (bzw. \mathcal{M}_K) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ (bzw. $P \in \mathcal{D}_K$) gibt, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ (bzw. $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$).

Beispiel 2.23. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = x^{\textcolor{red}{1}}\partial_x^{\textcolor{blue}{2}}$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{m} = 2 \qquad \text{und} \qquad \textcolor{red}{l} = 1$$

so dass

$$H(P_1) = \left((\textcolor{blue}{2}, \textcolor{red}{1} - \textcolor{blue}{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.1 ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$, so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$ ist.

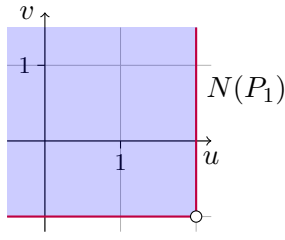


Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu $P_1 = x^2$

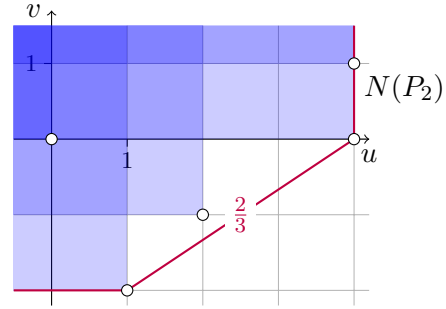


Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu P_2

Bemerkung 2.24. [AV09, Bem 5.4] Für alle $f \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}^\times$

Kommentar: $f \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$

gilt allgemein, dass das zu $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von $f \cdot P$ übereinstimmt.

Beweis. TODO □

Kommentar: Damit lässt sich das Newton Polygon, durch ein f , immer so Verschieben, dass $(0,0) \in N(f \cdot P)$, und es gilt, dass

$$\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \triangleleft \mathcal{D}_K$$

ist.

Definition 2.25. In einem Polynom $P = \varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l) \partial_x^k$, mit $\varepsilon, \alpha_{kl} \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$ sind die restlichen Monome *Therme im Quadranten* von $\varepsilon x^p \partial_x^q$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}_{\geq -N}$ mit $\alpha_{kl} \neq 0$ gilt: $k \leq q$ und $l - k \geq p - q$.

Bemerkung 2.26. • Anschaulich bedeutet das, dass

$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \left((q, p - q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \supset \left((k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = H(\alpha_{kl} x^l \partial_x^k),$$

für alle relevanten k und l .

• Sei P ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von $\varepsilon x^p \partial_x^q$ sind, dann gilt:

$$H(P) = H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l) \partial_x^k)$$

$$\begin{aligned}
 &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \mathbf{T.i.Q. \ von } x^p \partial_x^q) \\
 &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q) \\
 \Rightarrow N(P) &= N(\varepsilon x^p \partial_x^q).
 \end{aligned}$$

Also können Terme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Terms befinden und nicht der Term selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das **T.i.Q.** ist eine hier Abkürzung für Terme im Quadranten.

Kommentar:

Beispiel 2.27.

$$(x^a \partial_x^b)^c = x^{ac} \partial_x^{bc} + \mathbf{T.i.Q. \ von } x^{ac} \partial_x^{bc}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}
 N((x^a \partial_x^b)^c) &= N(x^{ac} \partial_x^{bc} + \mathbf{T.i.Q. \ von } x^{ac} \partial_x^{bc}) \\
 &= N(x^{ac} \partial_x^{bc})
 \end{aligned}$$

Lemma 2.28. [[Sab90](#), Seite 26] Das Newton-Polygon hängt, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten meromorphen Zusammenhang ab.

Kommentar: ODER: assoziierte meromorphen Zusammenhänge haben gleiche Slopes aber sind möglicherweise vertikal verschoben.

Lemma 2.29. [[Sab90](#), 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

Kommentar: Siehe auch [[Sab90](#), Thm 5.3.4]

Dort Steht:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

Korollar 2.30. [[Sab90](#), Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

Satz 2.31. [Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

Bemerkung 2.32. In Satz 2.31 ist es wirklich notwendig, formale meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente meromorphe Zusammenhänge.

Kommentar:

Beispiel 2.33. [Sab90, Ex 5.3.6] Sei $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$. So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

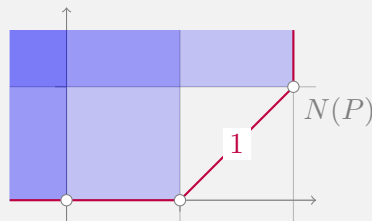


Abbildung 2.3: Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$

mit den Slopes $\mathcal{P}(P) = \{0, 1\} =: \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Nach dem Satz 2.31 existiert eine Zerlegung $P = P_1 \cdot P_2$ mit $\mathcal{P}(P_1) = \{\Lambda_1\}$ und $\mathcal{P}(P_2) = \{\Lambda_2\}$. Durch scharfes hinsehen erkennt man, dass

$$P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$$

...

$$= (x(x\partial_x) + \dots) \cdot (x\partial_x + \dots)$$

...

$$= P_1 \cdot P_2$$

anders geschrieben

$$\begin{aligned}
 P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= xx\partial_x x\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= x^2(x\partial_x + 1)\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= x^3\partial_x^2 + x^2\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= x^3\partial_x^2 + (x^2 + x)\partial_x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

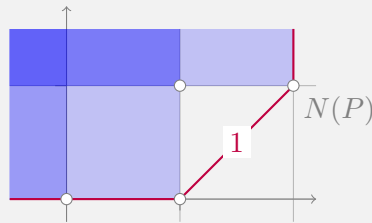


Abbildung 2.4: Newton Polygon zu P

Kommentar:

Korollar 2.34. [Sab90, Cor 5.2.6] Falls $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein regulärer formaler meromorpher Zusammenhang ist, dann ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen Zusammenhängen. Wobei die elementaren formalen Zusammenhänge die sind, die zu passendem $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$ isomorph sind.

2.3.1 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol

Kommentar: TODO: mache alle Linearform L zu ℓ

Sei $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ vollständig gekürzt, also mit λ_0 und λ_1 in \mathbb{N} relativ prim. Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ in zwei Variablen, sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. Falls $P = x^a \partial_x^b$ mit $a \in \mathbb{Z}$

und $b \in \mathbb{N}$, setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \ell(b, b - a)$$

und falls $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$ mit $b_i \in \widehat{K}$, setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)).$$

Definition 2.35 (Die Filtrierung ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welche mit \mathbb{Z} indiziert ist, durch

$${}^\ell V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_\ell(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

Bemerkung 2.36. Man hat $\text{ord}_\ell(PQ) = \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q)$ und falls $\lambda_0 \neq 0$, hat man auch, das $\text{ord}_\ell([P, Q]) \leq \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q) - 1$.

Definition 2.37 (ℓ -Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls $\lambda_0 \neq 0$, ist der graduierte Ring $gr {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_\lambda {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von ∂_x in dem Ring durch ξ , dann ist der Ring isomorph zu $\widehat{K}[\xi]$. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, so ist $\sigma_\ell(P)$ definiert als die Klasse von P in $gr_{\text{ord}_\ell(P)} {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. σ_ℓ wird hierbei als das ℓ -Symbol bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\sigma_\ell(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$.

Bemerkung 2.38. Bei [Sab90] wird der Buchstabe L anstatt ℓ für Linearformen verwendet, dieser ist hier aber bereits für $\mathbb{C}\{t\}$ reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol als L -Symbol zu finden.

Bemerkung 2.39. Ist $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ geschrieben als $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$. So erhält man $\sigma_\ell(P)$ durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) | \ell(i, i-j) = \text{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

Beweis. TODO □

Kommentar: Ich will die Linearform vermeiden und direkt die skalare Steigung verwenden

Definition 2.40 (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zu dieser Ordnung verwendet.

Bemerkung 2.41. Wenn $\ell(x_0, s_1)$ wie oben aus Λ entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_\ell(P).$$

Kommentar: TODO: ist ℓ Slope (gehört zu Slope) dann hat $\sigma_\ell(P)$ zumindest 2 Mono-

2.4 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

2.4.1 Tensorprodukt

Proposition 2.42. [Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ meromorphe Zusammenhänge. Sei $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$. Durch Setzen von

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \tag{2.3}$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem meromorphen Zusammenhang.

Kommentar:

Beweis. Klar □

Lemma 2.43. [Sab90, Ex 5.3.7] Falls \mathcal{N} regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ genau die Menge der Slopes von \mathcal{M} .

Beweis. TODO □

2.4.2 pull-back und push-forward

Kommentar: Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3].

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \quad \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir meistens $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho,$$

wobei L (bzw. \widehat{L}) eine endliche Körpererweiterung von K (bzw. \widehat{K}) ist.

Kommentar: TODO: damit wird \widehat{L} zu einem \widehat{K} Vektorraum.

Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.44 (pull-back). [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *inverse Bild* $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.4)$$

Für ein allgemeines $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (2.5)$$

Kommentar: Nun wollen wir uns noch genauer mit dem pull-back beschäftigen, und stellen uns die Frage:

Wie sieht die Wirkung der Derivation auf dem pull-back Zusammenhang aus? Für $\rho(t) = t^p$ betrachten wir beispielsweise ein Element der Form $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\ &= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t)) \underbrace{\partial_{\rho(t)} m}_{=\partial_x m} \\ &= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m = (\star) \\ \rho'(t)^{-1}\partial_t(f(x)m) &= \frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t(f(t^p)m) \\ &= f'(t^p)m + f(t^p)\frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$ und somit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_x gleich der Wirkung von $\rho'(t)^{-1}\partial_t$ ist. In der Tat stimmt diese Vermutung, wie das folgende Lemma zeigt.

Satz 2.45. *In der Situation von Lemma 2.44, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ für ein $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, gilt*

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t).$$

Für $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ werden wir auch $\rho^*P(t, \partial_t)$ schreiben.

Kommentar: [Cou95, Seite 130] Holonomic modules are preserved under this construction.

Kommentar: [Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ als den Vektor Raum über $\widehat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

Man erhält damit die Wirkung von $\partial_t = t^{-1}(t\partial_t)$.

Für den Beweis von Satz 2.45 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

und, da hier alles nullteilerfrei ist, ist die Bedingung äquivalent zur folgenden

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 0 = f(t) & \text{oder} & \quad 0 = Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ \Leftrightarrow \quad & \dots & & \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = f(t) \otimes Q(x, \partial_x). \end{aligned}$$

Kommentar: TODO

Nun zur Surjektivität. Sei $g(t, \partial_t) = \sum_k a_k(t) \partial_t^k \in \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ so gilt

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k a_k(t) \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \underbrace{(\rho'(t) \rho'(t)^{-1})^k}_{=1} \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \rho'(t)^k (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \end{aligned}$$

und zerlege $a_k(t) \rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \left(\sum_k a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \right) \\ &= \Phi \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes \left(\sum_k a_{k,i}(x) (\partial_x)^k \right) \right). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.47. *Das in Lemma 2.46 definierte Φ ist sogar ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als meromorphe Zusammenhänge.*

Beweis. Sei ∂_t wie gewohnt und ∂_{\otimes} der Zusammenhang auf $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welcher wie in Proposition 2.42 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_{\otimes}$ gilt, also dass Φ ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{array}$$

und für einen Elementartensor $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

Kommentar: Q wie in großen beweis später, Namenskollision

folgt dann

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
 & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\
 & & \uparrow \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm. □

Kommentar:

Bemerkung 2.48. BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma 2.46, definierte Φ erfüllt für Elementartensoren $1 \otimes m \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

$$\begin{aligned}
 \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\
 &\xrightarrow{\Phi} \underbrace{\rho'(t) \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

und somit (2.4) wie gewollt.

Lemma 2.49. Sei $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$. In der Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
 \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 2.46 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. Betrachte ein $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. So gilt

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\ & & \downarrow \Phi \\ & & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\ \downarrow \Phi & & \\ f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)} & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit $\alpha = _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$. □

Beweis zu Satz 2.45. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\ & & & & u & \longmapsto & u \mod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \end{array}$$

ist exakt, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil \widehat{K} flach ist, da Körper, ist auch, nach Anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} _$, die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \end{array}$$

exakt.

Kommentar: Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} &\cong \operatorname{coker}(\operatorname{id} \otimes _ \cdot P) && (\text{weil exakt}) \\ &\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \left((\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\operatorname{id} \otimes _ \cdot P) \right) && (\text{nach def. von coker}) \end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 2.46 und $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ nach Lemma 2.49 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & & \end{array}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, weil $_ \cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz fortsetzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Cokerne, die Behauptung. \square

Lemma 2.50. [*Sab90*, 5.4.3] Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$.

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ mit $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$, dann ist $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ mit

$$\begin{aligned} P'(t, \partial_t) &= P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ &= \sum a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i \\ &= \sum a_i(t^p) ((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i \end{aligned}$$

Kommentar: TODO: Hier weiter...

□

Beispiel 2.51 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.5). Wende den pull-back mit $\rho : t \rightarrow x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 2.45 einfacher anwenden können:

$$\begin{aligned}\partial_x &\rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)}\partial_t = \frac{1}{2t}\partial_t, \\ \partial_x^2 &\rightsquigarrow \left(\frac{1}{2t}\partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t}\partial_t\left(\frac{1}{2t}\partial_t\right) = \frac{1}{2t}\left(-\frac{1}{2t^2}\partial_t + \frac{1}{2t}\partial_t^2\right) = \frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t.\end{aligned}$$

Also ergibt Einsetzen

$$\begin{aligned}\rho^*P &= (t^2)^3\left(\frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t\right) - 4(t^2)^2\frac{1}{2t}\partial_t - 1 \\ &= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \underbrace{t^3\frac{1}{4}\partial_t - 4t^3\frac{1}{2}\partial_t}_{-2\frac{1}{4}t^3\partial_t} - 1 \\ &= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - 2\frac{1}{4}t^3\partial_t - 1.\end{aligned}$$

Also ist $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^*P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.6) und somit $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1)$.

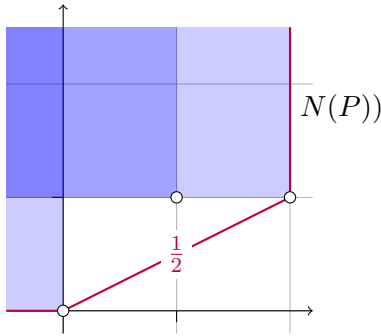


Abbildung 2.5: Newton Polygon zu

$$P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$$

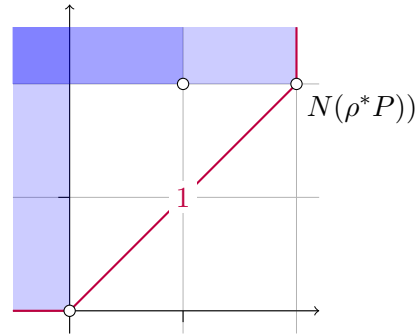


Abbildung 2.6: Newton Polygon zu

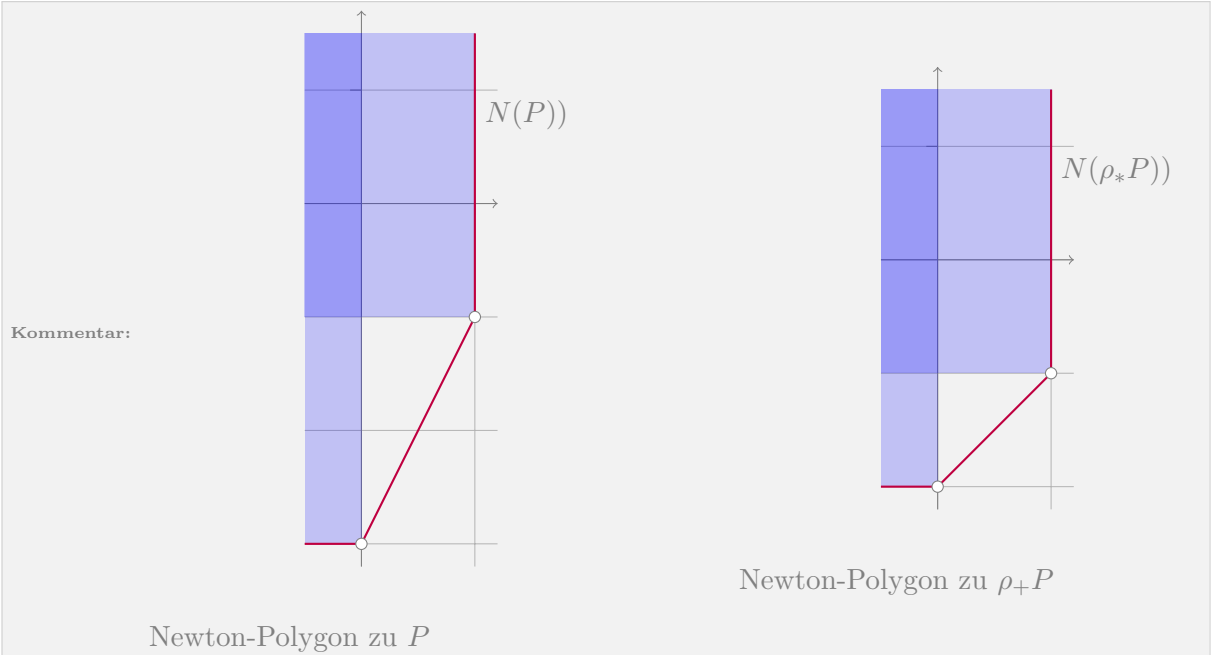
$$\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$$

Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler \widehat{L} -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.52 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *direkte Bil* $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

- der \widehat{K} -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist definiert als der \mathbb{C} -Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der \widehat{K} -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ und

$$(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$$
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1} \partial_t$.



Beispiel 2.53 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \underbrace{\frac{2}{u^3}}_{=:P}) \end{aligned}$$

mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 2.4.2). Bilde nun das Direkte Bild über ρ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+ P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.4.2)

Satz 2.54. [*Sab07*, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.6)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?) \end{aligned}$$

□

Kommentar: Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

2.4.3 Fouriertransformation

Definition 2.55 (Fouriertransformation). [*Blo04*, Def 3.1] [*GL04*] [*AV09*, Def 6.1] Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$. Dann ist die *fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i$$

Definition 2.56 (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$ so ist die fouriertransformierte davon ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$.

Beispiel 2.57. Sei $P = x^3 \partial_x^4 + x^2 \partial_x^2 + x$ dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_P &= \partial_z^3 (-z)^4 + \partial_z^2 (-z)^2 + \partial_z \\
 &= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{[\partial_z^3, z^4]} + \partial_z \\
 &= \underbrace{z^4 \partial_z^3}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{[\partial_z^3, z^4]}_{\sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i}} + \underbrace{z^2 \partial_z^2}_{z^2 \partial_z^2} + \underbrace{[\partial_z^2, z^2]}_{\sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i}} + \partial_z \\
 &= \underbrace{z^4 \partial_z^3}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z}_{12z^3 \partial_z^2 + 36z^2 \partial_z + 24z} + \underbrace{z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2}}_{z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + 2} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2
 \end{aligned}$$

mit den Newton Polygonen wie in Abbildung 2.7 und 2.8.

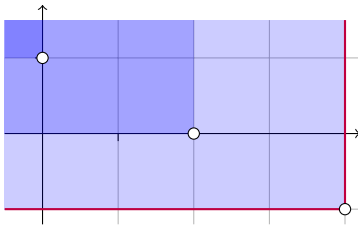


Abbildung 2.7: Newton-Polygon zu P

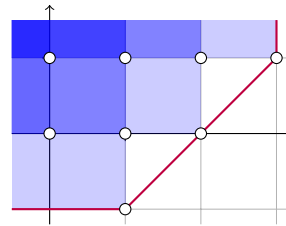


Abbildung 2.8: Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P

Kommentar:

2.4.4 Betrachten bei Unendlich

3 Elementare meromorphe Zusammenhänge

3.1 Elementare formale meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.1. Ein *elementarer formaler meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang \mathcal{M} , welcher isomorph zu $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$, mit passendem α und p , ist.

Lemma 3.2. [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.10). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \widehat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$.

Kommentar: TODO: bis hier schon klar

Tatsächlich kann man $b_i(x) = x^i b'_i(x)$ mit $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$. □

Lemma 3.3. [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.

Beweis. Siehe [Sab90, Thm 5.2.2] □

Satz 3.4. Ein regulärer formaler Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen.

Beweisskizze. Siehe [Sab90, Cor. 5.2.6]. Man wählt eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, in der die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist. Diese Matrix kann in Jordan Normalform gebracht werden und damit erhält man das Ergebnis. □

3.2 Elementare meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: einführen als Bausteine oder kleinste meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: ALT:

Definition 3.5. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben \mathcal{E}_K^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$.

Definition 3.6. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben \mathcal{E}_K^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbf{e} \cdot \widehat{K}$, wobei $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_K^\varphi$ Basis ist, ausgestattet mit $\partial_x(f \cdot \mathbf{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \mathbf{e}$, im speziellen also $\partial_x \mathbf{e} = \varphi'$.

Bemerkung 3.7. 1. Die \mathcal{E}_K^φ stellen so etwas, wie die einfachsten meromorphen Zusammenhänge mit einem ganzzahligem Slope, dar.

2. Wir werden oft $\mathbf{e} = 1$ als Basis nehmen.

3. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.

4. Es ist $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$, weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$.

Lemma 3.8. Für $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$ mit $a_{-p} \neq 0$ gilt, dass $\mathcal{P}(\mathcal{E}_K^\varphi) = \begin{cases} \{p\} & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=-p+1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \\ &= \underbrace{-p a_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \end{aligned}$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können, $(1, -1)$ und $(0, -(p+1))$ sind. Da einer der Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesamt nur einen Slope Λ geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \max\left\{0, \frac{-1 - (-(p+1))}{1}\right\} \\ &= \max\{0, p\} \\ &= \begin{cases} p & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

Kommentar:

Bemerkung 3.9. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$.

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$.

Lemma 3.10. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung 3.9 berechtigt. Wir wählen eine \widehat{L} Basis \mathbf{e} des Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum \mathcal{E}^φ und damit erhält man die Familie $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$ als \widehat{K} -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Es gilt

$$\partial_x t^k \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k}_{\text{}} \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \overbrace{(t^k \partial_t + k t^{k-1})} \mathbf{e}. \quad (3.1)$$

Durch die Setzung $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$ wird die Familie $\mathbf{e} := (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$ eine \widehat{L} -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2} \mathbb{C}[t^{-1}] \quad (3.2)$$

mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1} \mathbb{C}[x^{-1}]$ (siehe: Anhang A). Damit gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e}_k &= t \partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} t \left(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x \left(\underbrace{t^k \mathbf{e}}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi} \right) \right) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e}) \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e}) \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \underbrace{t \varphi'(t) \mathbf{e}} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}. \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ gilt. Es gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t e_0, \dots, t\partial_t e_{p-1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]. \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis \mathbf{e} von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$ ist also beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(X) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. Sei so ein ξ ab jetzt fixiert. So dass gilt:

$$\begin{aligned} T \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1} \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1} t)^{p-1} \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da $\varphi'(t) = pt^{p-1}$. Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & &
 \end{array}$$

k-te Stelle

↓

der mit (\star) bezeichnete Teil kommutiert, wobei $\Phi : (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mapsto e_k$ der kanonische Basisisomorphismus und e_k Basis von $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$. Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi \left(\Phi^{-1}(v) \cdot \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \right) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente e_k gilt. Nach Definition 3.6 gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_t e_k &= \underbrace{(\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t)}_{\text{Kettenregel}} e_k \\
 &\downarrow \\
 &= \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})} \cdot \underbrace{\varphi'(t)} e_k \\
 &= \underbrace{(\xi^{k-1})^p} \cdot \underbrace{(pt^{p-1})} e_k \\
 &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k
 \end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\
 \downarrow & & \\
 \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\
 \downarrow & & \\
 (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t) \xi^{k-1} e_k
 \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt. \square

Definition 3.11. Ein *elementarer meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang \mathcal{M} , für den es $\psi \in \mathbb{C}((x))$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$, also ein elementarer formaler meromorpher Zusammenhang, ist.

Kommentar:

Lemma 3.12. $\mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (x\partial_x - (\alpha + x \frac{\partial \psi}{\partial x}))^p$

Beweis. Siehe [Hei10, Lem 5.12] \square

Kommentar:

3.3 Defnintion in [Sab07]

Definition 3.13 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in t\mathbb{C}[[t]]$, $\varphi \in \hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t))$ und einem endlich dimensionalen \hat{L} -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten elementaren endlich dimensionalen \hat{K} -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$ ab.

Lemma 3.14. [Sab07, Lem 2.2]

Lemma 3.15. [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$ genau dann, wenn

- es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$
- und $S \cong R$ als \hat{L} -Vektorräume mit Zusammenhang.

Beweis. Siehe [Sab07, Lem 2.6.] □

Proposition 3.16. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale \hat{K} -Vektorraum \mathcal{M} mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, $\rho : t \rightarrow t^p$ vom Grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 \hat{L} -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. Siehe [Sab07, Prop 3.1] □

3.4 Twisten von meromorphen Zusammenhängen

Kommentar: [Cou95, Chap 5 §2]

Lemma 3.17. Sei $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ ein meromorpher Zusammenhang mit P von Grad q und mit e als ein zyklischer Vektor, so ist $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi$.

Beweis. Da der Grad von P gleich q ist, ist nach Lemma 3.18 auch Q von Grad q und somit $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$. Also reicht es zu zeigen, dass $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x(e \otimes 1) &= (\partial_x e) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\ &= (\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x) \\ &= (\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1)) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + (\partial_x e) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x)) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)^2(e \otimes 1) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(e \otimes 1) \\ &\vdots \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 + \dots + \lambda_1(\partial_x e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1) \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_x(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(e \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_x e) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich $e \otimes 1, (\partial_x e) \otimes 1, (\partial_x^2 e) \otimes 1, \dots, (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.18. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ und sei $\varphi \in \widehat{K}$. So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$.

Beweisskizze. Zeige, dass $P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = 0$ gilt, da $e \otimes 1$ ein zyklischer Vektor folgt damit aus Gradgründen die Behauptung. Genauer ausgeführt wird dies in [Hei10, Seiten 39 bis 44].

Kommentar:

$$P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = \text{TODO}$$

□

Korollar 3.19. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und φ wie in 3.18, so gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} = \mathcal{M}_{\widehat{K}}.$$

Beweis. Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \underbrace{\partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \end{aligned}$$

□

3.5 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

Kommentar:

3.5.1 Klassische Version

Satz 3.20. [Sab90, Thm 5.4.7] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl p so dass der Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, mit $\rho : t \mapsto x := t^p$, isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren meromorphen Zusammenhängen ist.

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

Beweis. Zum Beweis wird Induktion auf die Lexicographisch geordneten Paare $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$ angewendet. Wobei $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dem größtem Slope von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Es wird $\kappa = \infty$ gesetzt, falls der größte Slope nicht Ganzzahlig ist.

Kommentar: TODO: induktionsanfang und -schritt kennzeichnen

Wir nehmen oBdA an, dass $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ genau einen Slope Λ hat, sonst Teile $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ mittels Satz 2.31 in meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ (vollständig gekürzt) Definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$. Wir nennen $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$ die *Determinanten Gleichung* von P . Da L zu einem Slope von P gehört, besteht $\sigma_L(P)$ aus zumindest zwei Monomen.

Kommentar: and is homogeneous of degree $\text{ord}_L(P) = 0$ because P is chosen with coefficients in $\mathbb{C}[[x]]$, one of them, being a unit.

Schreibe

$$\begin{aligned} \sigma_L(P) &= \sum_{L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i, i-j) = 0} \alpha_{ij} x^j \xi^i. \end{aligned}$$

Sei $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x^i \xi^{\lambda_1}$ so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei $\alpha_0 \neq 0$ ist.

Erster Fall: $\lambda_1 = 1$. Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_{\beta}}.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. Sei β_0 eine der Nullstellen. So setze $R(z) := (\beta_0 / (\lambda_0 + 1)) z^{\lambda_0 + 1}$ und betrachte $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$.

Kommentar: AB HIER VLT NICHT RICHTIG, nur versuch

Falls $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$ gilt

$$P\left(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\right) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial(\frac{\beta_0}{\lambda_0+1}x^{-(\lambda_0+1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 x^{-(\lambda_0+2)}. \end{aligned}$$

Schreibe $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0+2)})$.

Lemma 3.21. *Es gilt, dass P' Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.*

Beweis. TODO □

Des weiteren ist $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$. Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat nur eine Nullstelle.**

Kommentar: TODO: Hier weiter

2. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat mehrere Nullstellen.**

Kommentar: TODO: Hier weiter

Zweiter Fall: $\lambda_1 \neq 1$. In diesem Fall ist einzige Slope Λ nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit λ_1 . Sei $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$ und erhalte P' so dass $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$. Nach Lemma 2.50 hat P' den einen Slope $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$. Damit können wir nun die zugehörige Linearform $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$ definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \dots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an. □

Kommentar:

3.5.2 Sabbah's Refined version

Proposition 3.22. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$, wobei $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$, $\rho : x \mapsto t = x^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und S ist ein Rang 1 \widehat{K} -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 3.23 (Refined Turrittin-Levelt). *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ kann in eindeutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

4 Explizite berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von \mathcal{D} -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu einem Beispiel unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem φ D-Moduln ergibt. Im laufe des Kapitels werden immer speziellere φ betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

4.1 Rezept für allgemeine φ

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und beginne mit \mathcal{E}^φ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left(\text{Hauptnenner von } \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\widehat{L}}^*} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left(t^{\max(I)+1} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \right)}_{=: Q(t, \partial_t)}. \end{aligned}$$

Kommentar: Dies ändert den meromorphen Zusammenhang nicht, weil $t^{\max(I)+1}$ eine Einheit in $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ (und auch in \mathcal{D}_L) ist.

3. Fouriertransformiere \mathcal{E}^φ und erhalte

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle}.\end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an.

Was passiert mit der Ableitung ∂_x ? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$, und somit

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle.$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom P_φ assoziierten formalen meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$ betrachten.

Lemma 4.1. *Zu einem $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ ist das Minimalpolynom von \mathcal{M}_φ explizit gegeben durch*

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle.$$

Beweis. Sei $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$, so ist

$$\begin{aligned}Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \underbrace{(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t))}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} \\ &= t^{\max(I)+1} \left(\partial_t + \underbrace{\sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}}}_{\text{---}} \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k}\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= \underbrace{-(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1}}_{\text{---}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= \underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}_{\text{---}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{x^2 (x^{-1} \partial_x - x^{-2})} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\
 &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{(x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle
 \end{aligned}$$

□

Im Anhang B wird das $(x^2 \partial_x)^k$ genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

Lemma 4.2. *Es gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$.*

Beweis. *Kommentar:* [Sab07, 5.b.]

Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir P_φ um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von Bedeutung sind und deshalb vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die Konvexen Hüllen, die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert werden. Sei $q := \max(I)$.

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(\underbrace{(-x^2 \partial_x)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{(-1)^q (x^{2q} \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^{2q} \partial_x^q)}^{\text{liefere keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \underbrace{x^{2q} \partial_x^q (x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q} \overbrace{(x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1})} \partial_x - x^{2q} \partial_x^q + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q} \partial_x^q - x^{2q} \partial_x^q}_{\substack{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \\ \text{sind also vernachlässigbar}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe auch vernachlässigt werden kann.

Behauptung: Es gilt

$$H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \subset H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)$$

Denn: Betrachte zu einem $m \in I \setminus \{q\}$, einen Summanden $ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}$ aus der Summe:

$$\begin{aligned} H(ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}) &= H(ma_m(-1)^q(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m} + \mathbf{T.i.Q. von } x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})) \\ &= H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m}) \\ &= (q-m, q-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

In Abbildung 4.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten dargestellt, mit $N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q)$ in der gewohnten Farbe und in Blau ist $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$ eingezeichnet. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh. \square

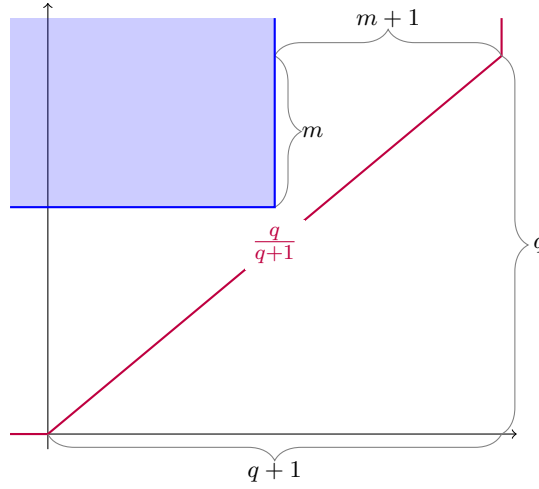


Abbildung 4.1: Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$\begin{aligned} H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} ka_k(-x^2\partial_x)^{q-k}) \\ &\stackrel{\text{Beh.}}{=} H(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q) \end{aligned}$$

Also ist

$$N(P_\varphi(x, \partial_x)) = N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q).$$

womit die Behauptung des Lemmas folgt und das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.1 aussieht. \square

Kommentar:

Korollar 4.3. *Ordnung vom pull-back ist 0*

Also ist, nach Lemma 2.50, ein pull-back mit Grad $q + 1$ hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Denn wir wissen, dass nach Anwenden eines solchem pull-backs die Slopes mit $q + 1$ multipliziert werden, also gilt $\mathcal{P}(\rho^+ \mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$.

Lemma 4.4. *Im Fall $\varphi = \frac{a}{t^q}$ ist mit $\rho : t \mapsto x := -(q + 1)t^{q+1}$ der pull-back gegeben durch*

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q + 1)) + (q + 1)qa).$$

Beweis. Sei $\varphi = \frac{a}{t^q}$, so ist P gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^q (x \partial_x - 1) + qa,$$

und sei $\rho : t \mapsto x := -(q + 1)t^{q+1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \rho^+ (\mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_\varphi(x, \partial_x) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi\left(- (q + 1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q + 1)^2 t^q} \partial_t\right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left(\underbrace{\left(-(-(q + 1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q + 1)^2 t^q} \partial_t \right)^q}_{\substack{=1}} \underbrace{\left(-(q + 1)t^{q+1} \frac{-1}{(q + 1)^2 t^q} \partial_t - 1 \right)}_{\substack{=1}} + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{(q + 1)^2}{(q + 1)^2} t^{2(q+1)-q} \partial_t \right)^q}_{\substack{=1}} \underbrace{\left(\frac{1}{q + 1} t \partial_t - 1 \right)}_{\substack{=1}} + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left((t^{q+2} \partial_t)^q \left(\frac{1}{q + 1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q + 1)) + (q + 1)qa \right) \end{aligned}$$

□

Definiere mittels $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$ und berechne die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$.

Kommentar: Schon gezeigt, dass $\text{ord}_\ell = 0$?

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^*P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ell(i,i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\ &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i\end{aligned}$$

Da $\widehat{L}[\xi]$ kommutativ ist gilt hier, dass $(t^j \xi^i)^k = t^{jk} \xi^{ik}$ ist. Setze $\theta = t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^{q+1} \xi$ so können wir

$$\sigma_L(\rho^*P_\varphi) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^*P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta \text{ Nullstelle}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$ eine Konstante ist. Sei β eine der Nullstellen. Da $\text{ord}_\ell(\rho^*P_\varphi) = 0$ und der einzige Slope von ρ^*P_φ nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass $\alpha_0 \neq 0$. Also ist 0 keine Nullstelle von $\sigma_L(\rho^*P_\varphi)$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = (\beta/q)t^{-q}$ und betrachte

$$\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^*P_\varphi) \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi.$$

Kommentar:

Lemma 4.5. Sei e ein zyklischer Vektor zu $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$, so ist $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{L}} \in \mathcal{N}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi$.

Beweis. Es sei e ein zyklischer Vektor von $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$. Da der Grad von ρ^*P_φ gleich $q+1$ ist, ist auch die Dimension von $\rho^+ \mathcal{M}$ gleich $q+1$. Damit ist auch $\dim_K \mathcal{N} = q+1$, also reicht zu zeigen, dass $e \otimes 1, \partial_t(e \otimes 1), \partial_t^2(e \otimes 1), \dots, \partial_t^q(e \otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_t(e \otimes 1) &= (\partial_t e) \otimes 1 + t \otimes \partial_t 1 \\ &= (\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t) \\ &= (\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)(e \otimes 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t((\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)(e \otimes 1)) \\
 &= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + (\partial_t e) \otimes \psi'(t) + \psi''(t)(e \otimes 1) + \psi'(t)((\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)) \\
 &= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + \psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi''(t)(e \otimes 1) + \psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)^2(e \otimes 1) \\
 &= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)(e \otimes 1) \\
 &\vdots \\
 \partial_t^q(e \otimes 1) &= (\partial_t^q e) \otimes 1 + \lambda_{q-1}(\partial_t^{q-1} e) \otimes 1 + \cdots + \lambda_1(\partial_t e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1)
 \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_t(e \otimes 1) \\ \partial_t^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_t^{q-1}(e \otimes 1) \\ \partial_t^q(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \psi'(t) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{q-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_t e) \otimes 1 \\ (\partial_t^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_t^{q-1} e) \otimes 1 \\ (\partial_t^q e) \otimes 1 \end{pmatrix}$$

Da bekanntlich $e \otimes 1, (\partial_t e) \otimes 1, (\partial_t^2 e) \otimes 1, \dots, (\partial_t^q e) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $e \otimes 1, \partial_t(e \otimes 1), \partial_t^2(e \otimes 1), \dots, \partial_t^q(e \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Kommentar:

Lemma 4.6. [Hei10, Seite 44] Wenn $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t))$ gilt, so ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &\stackrel{\text{def}}{=} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}_L^\psi = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}})) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (t^{q+2}(\partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}))^q (t(\partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}) - (q+1)) + (q+1)qa
 \end{aligned}$$

Zerlege nun wie in Satz 2.31 den meromorphen Zusammenhang \mathcal{N} in $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$ wobei \mathcal{N}_i meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. Twiste die \mathcal{N}_i jeweils mit $\mathcal{E}_L^{-\psi}$ und somit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_L^{-\psi}.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun, falls dieser nicht schon ein elementarer meromorpher Zusammenhang ist, Induktion anwenden.

4.2 Level-Turrittin-Zerlegung für \mathcal{M}_φ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Als konkreten Fall betrachten wir nun \mathcal{M}_φ bezüglich $\varphi_1 := \frac{a}{x}$. Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\
 &= -x^2 \underbrace{\partial_x x \partial_x}_{=0} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^2 \underbrace{(x \partial_x + 1) \partial_x}_{=0} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 - \underbrace{x^2 \partial_x + x^2 \partial_x}_{=0} + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 + a
 \end{aligned}$$

Erhalte daraus das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$.

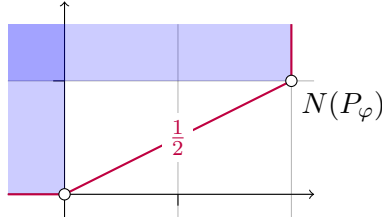
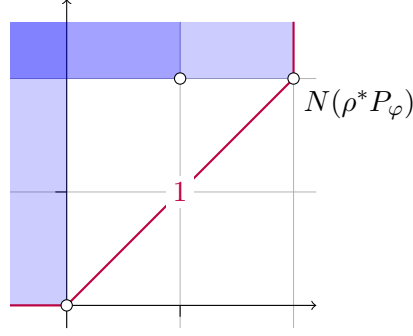


Abbildung 4.2: Newton Polygon zu P_φ

Berechne nun zu $\rho : t \mapsto x := -2t^2$ ein Minimalpolynom $\rho^* P_\varphi$ zu $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
 \rho^* P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t \partial_t - 2) + 2a \\
 &= t^3 \underbrace{\partial_t t \partial_t}_{=0} - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^3 (t \partial_t + 1) \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 + \underbrace{t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t}_{=0} + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 - t^3 \partial_t + 2a
 \end{aligned}$$

und erhalte einen meromorphen Zusammenhang $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_\varphi$ mit genau dem Slope $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$.


 Abbildung 4.3: Newton Polygon zu $\rho^* P_\varphi$

Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$. Berechne nun die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ von $\rho^* P_\varphi$.

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) | 2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= t^4 \xi^2 + 2a \end{aligned}$$

Setze $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$ so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \theta^2 + 2a,$$

mit den Nullstellen $i\sqrt{2a} =: \beta$ und $-i\sqrt{2a}$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$ und betrachte den Twist $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}^\psi$ von $\rho^+ \mathcal{M}$. Es ist $\mathbf{e} \otimes 1$ ein zyklischer Vektor, wobei \mathbf{e} ein zyklischer Vektor von $\rho^+ \mathcal{M}$ ist. Mit dem Lemma vom Zyklischem Vektor wollen wir nun ein Minimalpolynom zu \mathcal{N} berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_t^2(\mathbf{e} \otimes 1) &= \partial_t(\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \partial_t((\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(t)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \underbrace{(\partial_t^2 \mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{(\partial_t \mathbf{e}) \otimes \psi'(t) + (\partial_t \mathbf{e}) \otimes \psi'(t)}_{\in K} + \underbrace{\mathbf{e} \otimes (\psi''(t) + \psi'(t)^2)}_{\in K} \\ &= \underbrace{((t^{-1} \partial_t - 2at^{-4})\mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{(\psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1}_{\in K} \\ &= \underbrace{(t^{-1} \partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 - 2at^{-4} \mathbf{e} \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{\psi''(t)\mathbf{e} \otimes 1 + \psi'(t)^2 \mathbf{e} \otimes 1}_{\in K} \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &\stackrel{(2.3)}{=} (t^{-1} + 2\psi'(t))(\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - \mathbf{e} \otimes \psi'(t)) + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= \left((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2 \right) \mathbf{e} \otimes 1
 \end{aligned}$$

also

$$0 = \underbrace{\left(\partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right)}_{=:P'} \mathbf{e} \otimes 1$$

und mit $\psi(t) = i\sqrt{2at^{-1}}$ ist $\psi'(t) = -i\sqrt{2at^{-2}}$ und $\psi''(t) = 2i\sqrt{2at^{-3}}$. Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at^{-2}})\partial_t - i\sqrt{2at^{-3}} + 2at^{-4} - 2i\sqrt{2at^{-3}} + \underbrace{(-i\sqrt{2at^{-2}})^2}_{=0} \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at^{-2}})\partial_t - 3i\sqrt{2at^{-3}} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at^{-2}})\partial_t - 3i\sqrt{2at^{-3}}
 \end{aligned}$$

mit, wie gewünscht, einem regulärem Anteil.

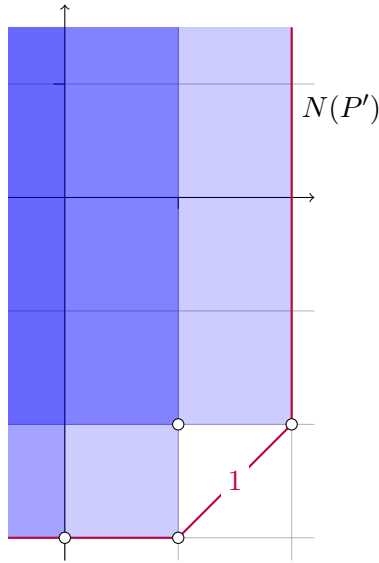


Abbildung 4.4: Newton Polygon zu \mathcal{N}

Kommentar:

Bemerkung 4.7. Alternativ ließe sich ein Minimalpolynom von \mathcal{N} mit der Formel aus Lemma

3.18 berechnen. Denn mit $\rho^*P(t, \partial_t) = t^4\partial_t^2 - t^3\partial_t + 2a$, ist

$$\begin{aligned}
 \rho^*P(t, \partial_t - \frac{\partial\psi}{\partial t}) &= \rho^*P(t, \partial_t - \frac{-i\sqrt{2a}}{t^2}) \\
 &= t^4(\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2})^2 - t^3(\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2}) + 2a \\
 &= t^4 \underbrace{(\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2})(\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2})}_{\substack{(\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^{-2}\partial_t + \partial_t i\sqrt{2a}t^{-2} + (i\sqrt{2a}t^{-2})^2)} - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4(\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^{-2}\partial_t + \partial_t i\sqrt{2a}t^{-2} + \underbrace{(i\sqrt{2a}t^{-2})^2}_{-2at^{-4}}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^4 \underbrace{\partial_t t^{-2} - 2at^{-4}}_{t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}} t^4 - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^4(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^2\partial_t - 2i\sqrt{2a}t - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 - (t^3 - 2i\sqrt{2a}t^2)\partial_t - 3i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4P'(t, \partial_t)
 \end{aligned}$$

Nachdem wir jetzt ein Minimalpolynom gefunden haben ist unser nächstes Ziel, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ in zwei meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt $P'(t, \partial_t) = Q_1(t, \partial_t) \cdot Q_2(t, \partial_t)$.

Da der ∂_t -Grad von P' genau 2 ist, müssen die Q_i jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen. Allgemein haben die Q_i also die Form

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 := \bar{u}(t)\partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), \bar{u}(t), u(t) \in \widehat{L}.$$

Beobachtung 4.8. Ist Q_1 und Q_2 so ein solches Paar, dann ist für $\sigma \in \widehat{L}$ das Paar $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$ und $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$ ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{=1} \cdot Q_2 = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2.$$

Mit der Beobachtung 4.8 ist klar, dass wir den Faktor vor ∂_t in Q_2 frei wählen können. Setze $\bar{u}(t) := 1$ und erhalte

$$Q_1 = \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 = \partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \widehat{L}$$

und somit ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Damit ist ebenfalls $\bar{v}(t) = 1$.

Durch das Wissen über die Slopes der Q_i erhalten wir noch Informationen über die Reihen $v(t) := \sum_n v_n t^n$ und $u(t) := \sum_n u_n t^n$. Die beiden Polynome Q_1 und Q_2 enthalten ∂_t als einziges Monom vom ∂_t -Grad 1, deshalb ist $(1, -1)$ in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da Q_1 nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.5 aussenen und somit wissen wir, dass $v_n = 0$ für alle $n < -1$. Da Q_2 genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 4.6. Damit ist $u_n = 0$ für alle $n < -2$ und $u_{-2} \neq 0$.

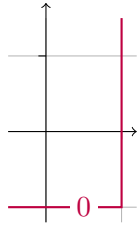


Abbildung 4.5: Newton-Polygon zu Q_1

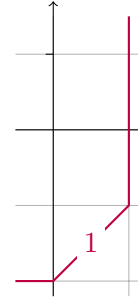


Abbildung 4.6: Newton-Polygon zu Q_2

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (4.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (4.2)$$

und mit denn Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + [\partial_t, u_n t^n]) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + n u_n t^{n-1}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis nun in (4.2) einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}}_{\sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \\ &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Betrachte nun das Letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\text{Indexshift}} \\
 & \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \xrightarrow{\downarrow} t^{-3} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n \right)} \\
 & \boxed{\text{Cauchy Produkt}} \\
 & \xrightarrow{\downarrow} t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)} \right) \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3} \right) \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} \right)} t^{n-3} \\
 & \boxed{\text{Indexshift}} \\
 & \xrightarrow{\downarrow} \sum_{n=-3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n
 \end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (4.3) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \sum_{n=-3}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right)} t^n \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left((n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}
 \end{aligned}$$

Nun haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit der gewünschten Formel vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2a}t^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \quad (4.4)$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left((n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \quad (4.5)$$

Nun können wir mit (4.4) und (4.5) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich machen und erhalten zunächst aus (4.4), dass

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \quad (4.6)$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \quad (4.7)$$

$$0 = u_n + v_n \quad \forall n \geq 0 \quad (4.8)$$

Als nächstes wollen wir dieses Ergebnis mit (4.5) kombinieren. Betrachte zunächst die Vorfaktoren vor t^{-3} :

$$\begin{aligned} -3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-3-k+1} \\ &= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\ \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} \\ &= u_{-1} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinen Koeffizienten vor t^n mit $n > -3$:

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)u_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + (\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + (\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}) + \overbrace{v_{n+2}} \overbrace{u_{-2}}}}}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + (\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}) + \overbrace{v_{n+2}} \overbrace{u_{-2}}}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + \overbrace{v_{n+2}} \overbrace{u_{-2}} \\ \Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= - \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) \\ \stackrel{u_{-2} \neq 0}{\Rightarrow} v_{n+2} &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) \end{aligned}$$

und nach passendem Indexshift folgt

Kommentar: $n+2 \rightarrow n$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\
 &\stackrel{(4.6)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\
 &= \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right)
 \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ mit $\mathcal{N}_1 = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n)$ und $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n)$

Zusammen mit $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, $u_{-1} = -\frac{3}{2}$ und $v_{-1} = \frac{1}{2}$ sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (4.9)$$

die Koeffizienten von $v(t)$ und $u(t)$ vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit $\mathcal{E}^{-\psi(t)}$ zurücktwisten und erhalte damit die Zerlegung

$$\begin{aligned}
 \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} &\stackrel{3.19}{=} \underbrace{\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)}}_{(\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\
 &= \underbrace{\mathcal{N}_1}_{\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \oplus \underbrace{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \\
 &= \underbrace{(\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)})}_{\text{regulär}} \oplus \underbrace{(\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)})}_{\text{regulär}}
 \end{aligned}$$

wobei Q_1 bereits regulär. Betrachte also noch $\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} &\stackrel{3.18}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2}) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{(\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2} + u(t))}_{\text{regulär}} \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2} + \underbrace{\sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n}_{\text{regulär}}) \\
 &\stackrel{3.18}{=} \underbrace{\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n)}_{\text{regulär}} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)}
 \end{aligned}$$

Kommentar: Damit ist der zweite Summand also auch ein elementarer meromorpher Zusammenhang.

Also zerlegt sich \mathcal{M} , nach einem pull-back mit $\rho : t \mapsto x = -2t^2$, in

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \underbrace{\left(\mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_1} \oplus \underbrace{\left(\mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_2}.$$

Nach zerlegen von \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 in eine direkte Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen, wie in Satz 3.4, ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

4.2.1 Konvergenz der Summanden

Kommentar: TODO: text

Es ist klar, dass die Potenzreihen nicht konvergent sein dürfen, trotzdem wollen wir die Potenzreihen auf Konvergenz untersuchen

Für $n > 0$ gilt $v_{n-1} \stackrel{(4.8)}{=} -u_{n-1}$ und damit wollen wir die Formel (4.9) noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt. Aus (4.9) ergeben sich zunächst für $n = 0$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{u_{-2}}((-1)u_{-1} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-k-1}) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{3i}{8\sqrt{2a}} = -u_0 \end{aligned}$$

Kommentar: Somit ergeben sich für $n = 1$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{u_{-2}}((1-1)u_{1-1} + \sum_{k=0}^1 v_{k-1}u_{1-k-1}) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}}(v_{-1}u_0 + v_0u_{-1}) \\ &= -\frac{v_0}{u_{-2}}(-v_{-1} + u_{-1}) \\ &= \frac{3}{u_{-2} \cdot 4u_{-2}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4u_{-2}^2}(-2)$$

$$= -\frac{3}{2u_{-2}^2}$$

$$= \frac{3}{16a} = -u_1$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8} \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

und für $n = 2$ ist

$$v_2 = -\frac{1}{u_{-2}}((2-1)u_{2-1} + \sum_{k=0}^2 v_{k-1}u_{2-k-1})$$

$$= -\frac{1}{u_{-2}}(u_1 + v_{-1}u_1 + v_0u_0 + v_1u_{-1})$$

$$= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{-3}{4u_{-2}}\frac{3}{4u_{-2}} + \frac{-3}{2u_{-2}^2}\frac{-3}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{u_{-2}^3}\left(\frac{24}{16} + \frac{12}{16} - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right)$$

$$= -\frac{63}{16u_{-2}^3}$$

$$= -\frac{63}{16(2i\sqrt{2a})^3}$$

$$= -\frac{63}{256ia\sqrt{2a}}$$

$$= -\frac{63}{256a\sqrt{2a}} = -u_2$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8} \\ &\approx -3.9375i \end{aligned}$$

und für $n = 3$ ist

$$v_3 = -\frac{1}{u_{-2}}((3-1)u_{3-1} + \sum_{k=0}^3 v_{k-1}u_{3-k-1})$$

$$\approx -u_{-2}^{-4}\left(-\frac{63}{8} - \frac{1}{2}v_2 - v_0v_1 - v_1v_0 - \frac{3}{2}v_2\right)$$

$$= -u_{-2}^{-4}\left(\underbrace{\frac{(4-1)63}{32}}_{-4.725} - 2\frac{-3}{4}\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\frac{-63}{16}\right)$$

$$= -\frac{-(4-1)63 - 8 \cdot 9 + 3 \cdot 63}{32u_{-2}^4}$$

$$= -\frac{-8 \cdot 9}{8 \cdot 4u_{-2}^4}$$

$$= \frac{9}{4u_{-2}^4}$$

Die letzten zwei Paare sind für die Berechnung nicht von bedeutung und dienen nur dazu, das Programm zu prüfen.

$$\begin{aligned}
v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n-1)u_{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}}_{\substack{= (n-1)v_{n-1} + v_{-1}u_{n-1} \\ + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}u_{n-k-1}}} \right) \\
&= -\frac{1}{u_{-2}} \left(\underbrace{(n-1)u_{n-1}}_{= -(n-1)v_{n-1}} + v_{-1} \underbrace{u_{n-1}}_{= -v_{n-1}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{u_{n-k-1}}_{= -v_{n-k-1}} \right) + v_{n-1}u_{-1} \right) \\
&\stackrel{(4.8)}{=} -\frac{1}{u_{-2}} \left(\underbrace{-(n-1)v_{n-1}}_{= -(n-1)v_{n-1}} + v_{-1} \underbrace{(-v_{n-1})}_{= -\frac{1}{2}v_{n-1}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{(-v_{n-k-1})}_{= -\frac{3}{2}v_{n-k-1}} \right) + v_{n-1}u_{-1} \right) \\
&= -\frac{1}{u_{-2}} \left(-(n-1)v_{n-1} - \frac{1}{2}v_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} - \frac{3}{2}v_{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{u_{-2}} \left(\left(n-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \\
&= \frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} v_{-1} &= \frac{1}{2} & u_{-1} &= -\frac{3}{2} \\ v_0 = -u_0 &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\ v_n = -u_n &= \frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) & \forall n > 0 \end{aligned}$$

Listing 4.1: Koeffs.hs

-66-

```

7  import ComplRat
8  import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
9
10 -- returns array with the coefficients of v(t)
11 -- first element in array is koefficient from t^{-1}
12 vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
13 vKoeffs uMin2 = 1/2+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
14   where koeff :: Int -> ComplRat
15         koeff = memo koeff'
16         koeff' :: Int -> ComplRat
17         koeff' n | n > 0 = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
18                   | n == 0 = -3/(uMin2*4)
19                   | n == -1 = 1/2
20                   | otherwise = 0
21         where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
22
23 -- returns array with the coefficients of u(t)
24 -- first element in array is koefficient from t^{-2}
25 uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
26 uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2+:0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))

```

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von u_{-2} eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `ComplRat`, welcher die Menge $\mathbb{Q}(i)$ implementiert. Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a+ib$ entspricht. `ComplRat` ermöglicht es, dass die Berechnung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

In folgender Abbildung sind die Beträge der Koeffizienten von $v(t)$ in Abhängigkeit von n für verschiedene u_{-2} angetragen.

Nun zum Konvergenzverhalten. Es ist klar, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \hat{L} \setminus L \quad \text{bzw.} \quad (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$$

Deshalb wollen wir die Potenzreihen v und u und im besonderen deren konvergenzverhalten, noch genauer betrachten. Außerdem gilt, dass $v(t) \in \hat{L} \setminus L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$. Wir betrachten wir den folgenden zwei klassischen Konvergenzkriterien.

Satz 4.9 (Wurzlriterium nach Cauchy). *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

Beweis. siehe [Kno64, §18, Satz 94]. □

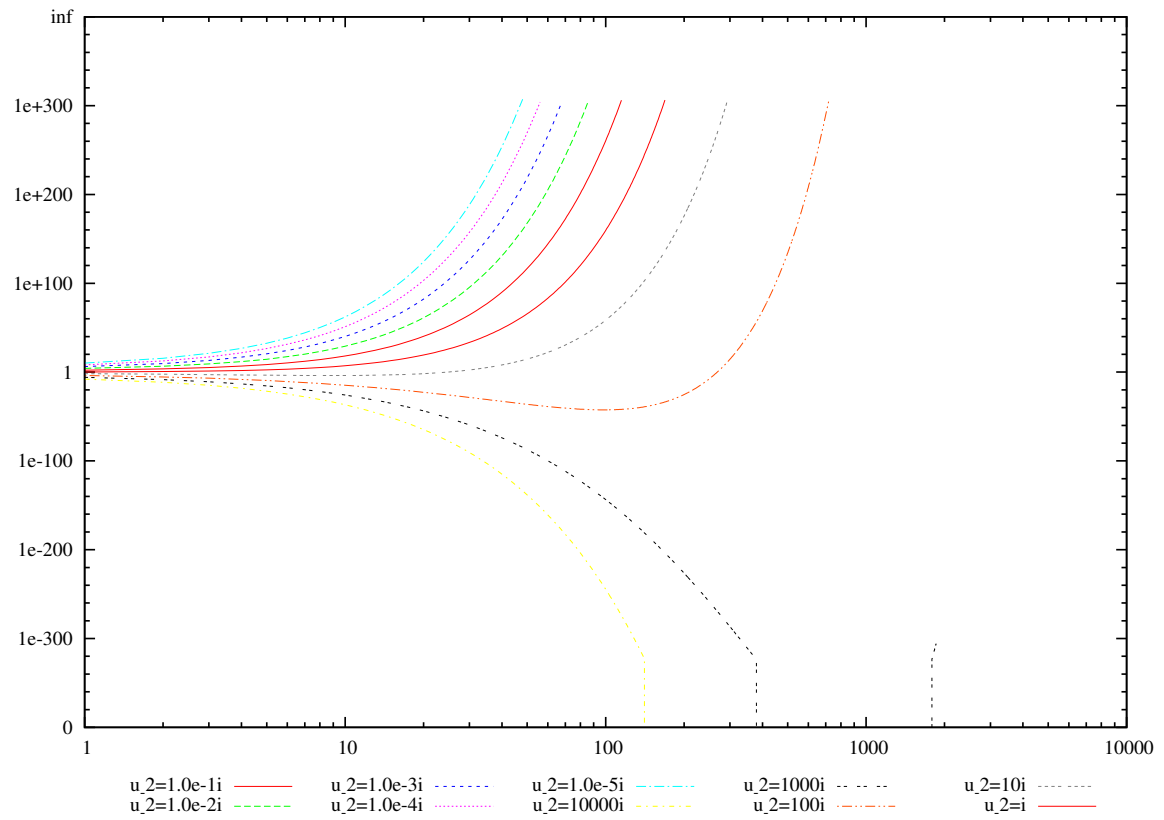


Abbildung 4.7: Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2} .

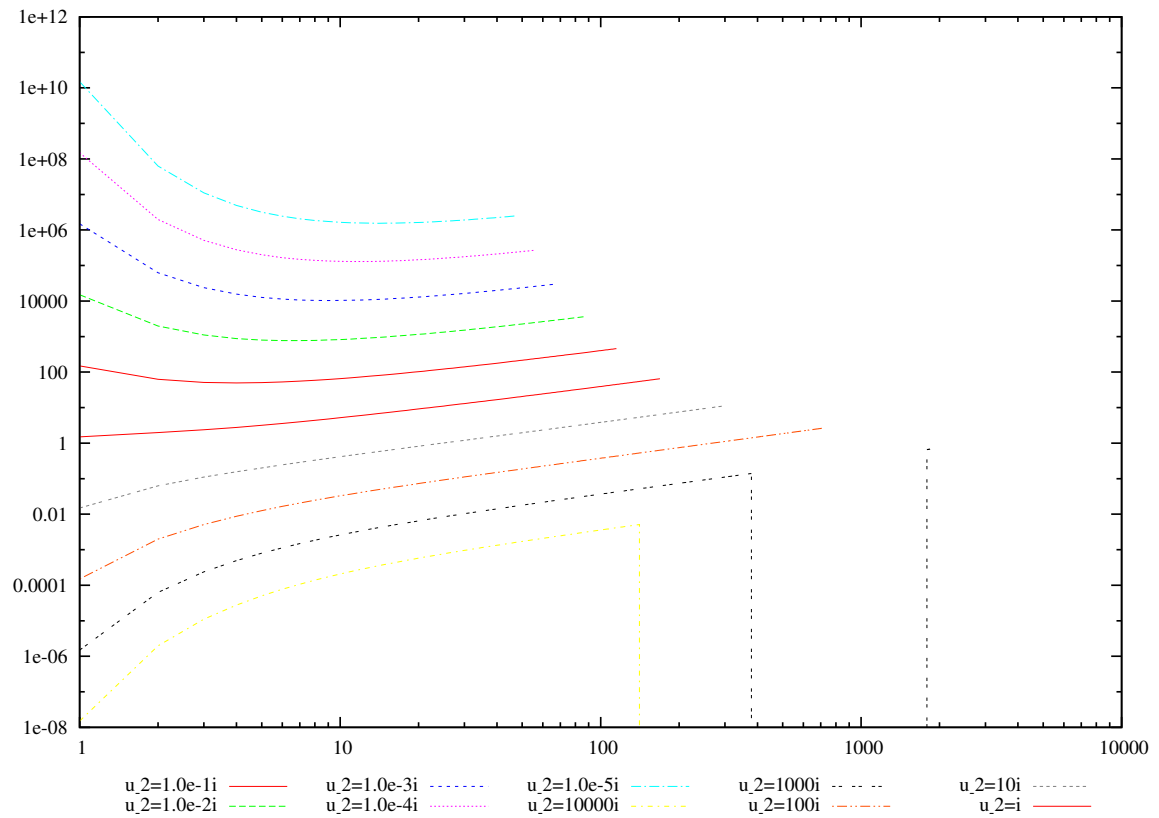


Abbildung 4.8: Wurzkriterium angewendet auf die Koeffizienten

Satz 4.10 (Quotientenkriterium). Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

Beweis. Es gilt, dass $\sum_n a_n x^n$ für ein $x \in \mathbb{C}$ konvergent ist, falls

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \leq \eta < 1$$

und das ist äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1.$$

Also konvergiert die Reihe für alle x mit $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. □

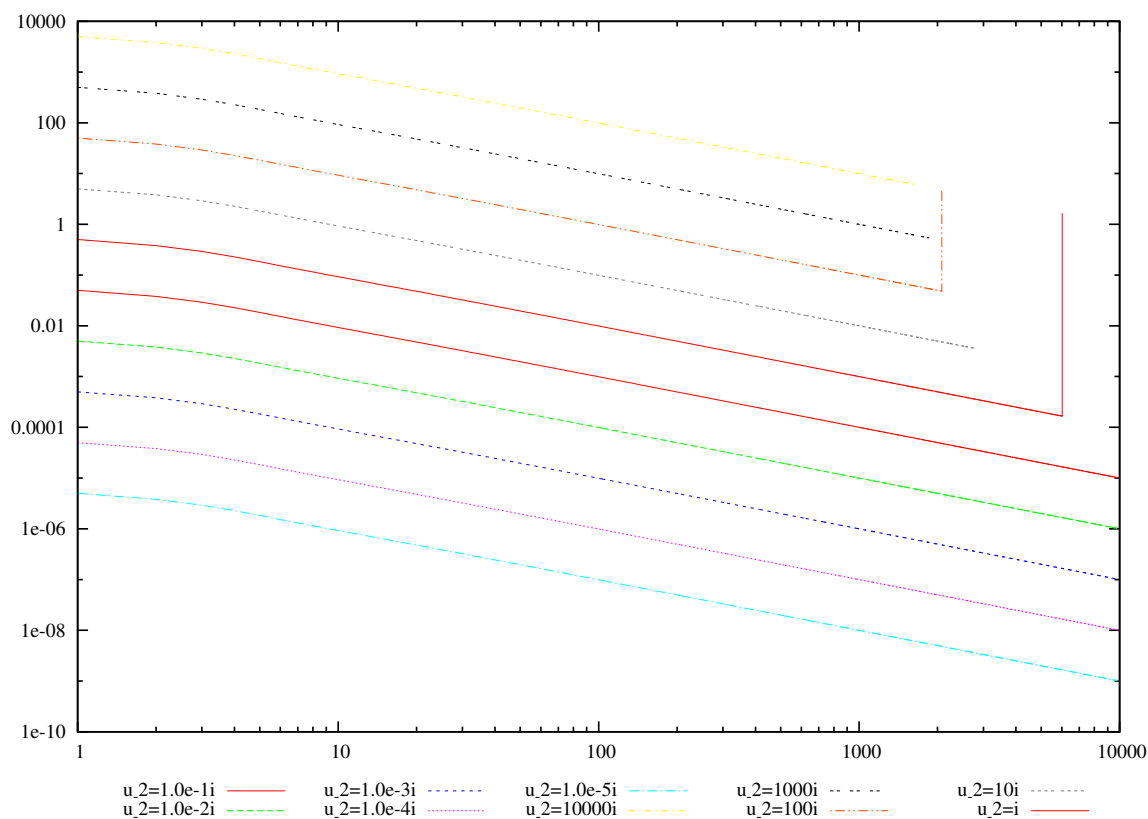


Abbildung 4.9: Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten

B Genaueres zu $(x^2 \partial_x)^k$

Nun wollen wir noch $(x^2 \partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$\begin{aligned}
 (x^2 \partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2}_{=2x+x^2 \partial_x} \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= x^2 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2}_{=2x+x^2 \partial_x} \partial_x + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2}_{=2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2} \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x + x^4 (2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2) \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (4x^4 \partial_x + 2x^5 \partial_x^2 + 2x^5 \partial_x^2 + x^4 \partial_x + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
 \end{aligned}$$

Kommentar: Stirlingzahlen

also gilt für spezielle k

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \text{allgemein} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

C Numerische berechnung der Koeffizienten

Hier nun ein Haskell Programm, dass in der Funktion **main** die Koeffizienten von v und u für Abschnitt 4.2.1 numerisch berechnet. Für die beispielhaften Berechnungen hier, wählen wir $a = \frac{1}{8}$, dadurch gilt $u_{-2} = i$.

Listing C.1: Main.hs

```
1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4
5  -- parallel
6  import qualified Control.Monad.Parallel as P
7
8  -- for writing to file
9  import System.Environment
10 import System.IO
11 import Data.Time
12
13 genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
14 genLine (i,v1,v2) = concat [ show i           , "\t"
15                               , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
16                               , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
17                               , genItemQuot (i,v1,v2)   , "\n" ]
18
19 where
20   genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
21   genItemBetrag (_,v,_) = show $ fromRational $ magnitude v
22
23   genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
24   genItemCauchy (i,v,_) = show $ genItemCauchy'**(1 / (fromIntegral i))
25   where genItemCauchy' = fromRational $ magnitude v
26
27   genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
28   genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
29   where genItemQuot' = magnitudeSq v2 / magnitudeSq v1
30
31 -- #####
32
33 printData :: Int -> ComplRat -> IO()
34 printData end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip3 [0..] (tail vals) vals
35   where vals          = vKoeffs uMin2
```

```

35     addLine a = putStr $ genLine a
36
37 printAsFrac :: Int -> ComplRat -> IO()
38 printAsFrac end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip [0..] $ vKoeffs uMin2
39   where addLine (i,a) = putStr $ show i ++ "\t" ++ show a ++ "\n"
40
41 saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
42 saveData end (fn, uMin2) =
43   do start <- getCurrentTime
44     withFile fn WriteMode (\handle -> do
45       hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
46       stop <- getCurrentTime
47       putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
48     where vals      = vKoeffs uMin2
49           triples = zip3 [0..] (tail vals) vals
50
51 main :: IO()
52 main = do x <- getArgs
53         P.sequence_ (main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
54   where main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"      , (0:+:1))
55                                     {-, ("./data/u_-2=10000i" , (0:+:10000))-}
56                                     {-, ("./data/u_-2=1000i"   , (0:+:1000))-}
57                                     {-, ("./data/u_-2=100i"    , (0:+:100))-}
58                                     {-, ("./data/u_-2=10i"     , (0:+:10))-}
59                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-1i"  , (0:+:1.0e-1))-}
60                                     , ("./data/u_-2=1.0e-2i"  , (0:+:1.0e-2))
61                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-3i"  , (0:+:1.0e-3))-}
62                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-4i"  , (0:+:1.0e-4))-}
63                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-5i"  , (0:+:1.0e-5))-}
64                                     ]

```

Listing C.2: ComplRat.hs

```

1  -- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
2  -- Zahlen, also den Elementen von  $\mathbb{Q}(i)$ , bereit.
3  module ComplRat
4  ( ComplRat(..)
5    , realPart
6    , imagPart
7    , magnitude
8    , magnitudeSq
9    , showLaTeX
10   ) where
11  import Data.Ratio
12
13  -- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
14  -- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
15  data ComplRat = !Rational :+: !Rational
16    deriving (Eq)
17
18  -- -----

```

```

19 -- Funktionen
20
21 -- | Gibt den reellen Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
22 realPart :: ComplRat -> Rational
23 realPart (x :+: _) = x
24
25 -- | Gibt den imaginären Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
26 imagPart :: ComplRat -> Rational
27 imagPart (_ :+: y) = y
28
29 -- | Der nichtnegative Betrag einer complexen Zahl
30 -- nur für rein reele oder komplexe Zahlen, da es sonst, aufgrund der fehlenden
31 -- Wurzel, zu problemen kommt
32 magnitude :: ComplRat -> Rational
33 magnitude (x :+: 0) = abs x
34 magnitude (0 :+: y) = abs y
35 magnitude (_ :+: _) = error "Oops! Use magnitudeSq instead."
36 {-magnitude (x :+: y) = P.sqrt ( sqr x P.+ (sqr y) )-}
37 {-where sqr z = z P.* z-}
38
39 -- | Das quadrat des Betrags einer complexen Zahl
40 -- ist für alle complexen zahlen geeignet
41 magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
42 magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y
43
44 -- | Gibt zu einem Element in ComplRat die entsprechende LaTeX Notation zurück
45 showLaTeX :: ComplRat -> String
46 showLaTeX (0 :+: 0) = "0"
47 showLaTeX (x :+: 0) = "\\frac{" ++ (show $ numerator x) ++ "{\\"
48                               ++ (show $ denominator x) ++ "}"
49 showLaTeX (0 :+: y) = showLaTeX (y :+: 0) ++ "i"
50 showLaTeX (x :+: y) = showLaTeX (x :+: 0) ++ "+" ++ showLaTeX (y :+: 0) ++ "i"
51
52 -- -----
53 -- Instanzen von ComplRat
54
55 instance Show ComplRat where
56     show (x :+: y) | y == 0    = show x
57                       | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"
58
59 instance Num ComplRat where
60     (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
61     (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
62     negate (x :+: y)        = negate x :+: negate y
63     fromInteger i           = fromInteger i :+: 0
64     abs z                   = magnitude z :+: 0
65     signum (0 :+: 0)        = 0
66     {-signum z@(x :+: y)    = x P./ r :+: y P./ r where r = magnitude z-}
67
68 instance Fractional ComplRat where
69     fromRational r          = fromRational r :+: 0

```



```

70 (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/(n) :+: ((b*c - (a*d))/(n)
71   where n = c*c + d*d

```

Ist der Code in einer Datei `/Pfad/zu/koeff.hs` gespeichert, so lässt er sich in Unix-Ärtigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen. Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von v und u bis zum Index 15 sowie einzelne Werte an 20, 30, 40, 50, 100 und 150 und produziert einen Ausgang, der wie folgt aussieht

```

1  n      | v_n      u_n
2  -----+-----
3 -2      | 0.0 :+: 0.0      0.0 :+: 1.0
4 -1      | 0.5 :+: 0.0      (-1.5) :+: (-0.0)
5  0      | (-0.0) :+: 0.75    0.0 :+: (-0.75)
6  1      | 1.5 :+: 0.0      (-1.5) :+: (-0.0)
7  2      | 0.0 :+: (-3.9375)   (-0.0) :+: 3.9375
8  3      | (-13.5) :+: (-0.0)  13.5 :+: 0.0
9  4      | 0.0 :+: 59.34375    (-0.0) :+: (-59.34375)
10 5      | 324.0 :+: 0.0      (-324.0) :+: (-0.0)
11 6      | 0.0 :+: (-2122.98046875) (-0.0) :+: 2122.98046875
12 7      | (-16213.5) :+: (-0.0)  16213.5 :+: 0.0
13 8      | 0.0 :+: 141115.447265625 (-0.0) :+: (-141115.447265625)
14 9      | 1376311.5 :+: 0.0      (-1376311.5) :+: (-0.0)
15 10     | 0.0 :+: (-1.4850124677246094e7) (-0.0) :+: 1.4850124677246094e7
16 11     | (-1.75490226e8) :+: (-0.0)  1.75490226e8 :+: 0.0
17 12     | 0.0 :+: 2.2530628205925293e9 (-0.0) :+: (-2.2530628205925293e9)
18 13     | 3.1217145174e10 :+: 0.0      (-3.1217145174e10) :+: (-0.0)
19 14     | 0.0 :+: (-4.641652455250599e11) (-0.0) :+: 4.641652455250599e11
20 15     | (-7.3709524476135e12) :+: (-0.0)  7.3709524476135e12 :+: 0.0
21 20     | 0.0 :+: 1.753906248830001e19 (-0.0) :+: (-1.753906248830001e19)
22 30     | 0.0 :+: (-2.7520294973343126e33) (-0.0) :+: 2.7520294973343126e33
23 40     | 0.0 :+: 1.1055855646065139e49 (-0.0) :+: (-1.1055855646065139e49)
24 50     | 0.0 :+: (-5.0878905001062135e65) (-0.0) :+: 5.0878905001062135e65
25 100    | 0.0 :+: 3.045728894141079e159 (-0.0) :+: (-3.045728894141079e159)
26 150    | 0.0 :+: (-2.7737283214890534e264) (-0.0) :+: 2.7737283214890534e264

```

In Haskell ist das `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse **Data.Complex**. So erzeugt ein Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a + ib$ entspricht.

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise sieht das Ergebnis also wie folgt aus:

n	v_n	u_n
-2	0	i
-1	0,5	-1,5
0	$0,75i$	-0,75 <i>i</i>
1	1,5	-1,5
2	-3,9375 <i>i</i>	3,9375 <i>i</i>
3	-13,5	13,5
4	59,34375 <i>i</i>	-59,34375 <i>i</i>
5	324,0	-324,0
6	-2122,98046875 <i>i</i>	2122,98046875 <i>i</i>
7	-16213,5	16213,5
8	141115,447265625 <i>i</i>	-141115,447265625 <i>i</i>
9	1376311,5	-1376311,5
10	$-1,4850124677246094 \cdot 10^7 i$	$1,4850124677246094 \cdot 10^7 i$
11	$-1,75490226 \cdot 10^8$	$1,75490226 \cdot 10^8$
12	$2,2530628205925293 \cdot 10^9 i$	$-2,2530628205925293 \cdot 10^9 i$
13	$3,1217145174 \cdot 10^{10}$	$-3,1217145174 \cdot 10^{10}$
14	$-4,641652455250599 \cdot 10^{11} i$	$4,641652455250599 \cdot 10^{11} i$
15	$-7,3709524476135 \cdot 10^{12}$	$7,3709524476135 \cdot 10^{12}$
\vdots	\vdots	\vdots
20	$1.753906248830001 \cdot 10^{19} i$	$-1.753906248830001 \cdot 10^{19} i$
\vdots	\vdots	\vdots
30	$-2.7520294973343126 \cdot 10^{33} i$	$2.7520294973343126 \cdot 10^{33} i$
\vdots	\vdots	\vdots
40	$1.1055855646065139 \cdot 10^{49} i$	$-1.1055855646065139 \cdot 10^{49} i$
\vdots	\vdots	\vdots
50	$-5.0878905001062135 \cdot 10^{65} i$	$5.0878905001062135 \cdot 10^{65} i$
\vdots	\vdots	\vdots
100	$3.045728894141079 \cdot 10^{159} i$	$-3.045728894141079 \cdot 10^{159} i$
\vdots	\vdots	\vdots
150	$-2.7737283214890534 \cdot 10^{264} i$	$2.7737283214890534 \cdot 10^{264} i$
\vdots	\vdots	\vdots

Tabelle C.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von $u(t)$ und $v(t)$ für $a = \frac{1}{8}$

D Quelltexte

D.1 ComplRat.hs

Das Modul ComplRat implementiert die Zahlen $\mathbb{Q}(i)$.

Listing D.1: ComplRat.hs

```
1  -- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
2  -- Zahlen, also den Elementen von  $\mathbb{Q}(i)$ , bereit.
3  module ComplRat
4      ( ComplRat(..)
5        , realPart
6        , imagPart
7        , magnitude
8        , magnitudeSq
9        , showLaTeX
10     ) where
11  import Data.Ratio
12
13  -- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
14  -- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
15  data ComplRat = !Rational :+: !Rational
16      deriving (Eq)
17
18  -- -----
19  -- Funktionen
20
21  -- | Gibt den reellen Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
22  realPart :: ComplRat -> Rational
23  realPart (x :+: _) = x
24
25  -- | Gibt den imaginären Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
26  imagPart :: ComplRat -> Rational
27  imagPart (_ :+: y) = y
28
29  -- | Der nichtnegative Betrag einer complexen Zahl
30  -- nur für rein reelle oder complexe Zahlen, da es sonst, aufgrund der fehlenden
31  -- Wurzel, zu problemen kommt
32  magnitude :: ComplRat -> Rational
33  magnitude (x :+: 0) = abs x
```

```
34 magnitude (0 :+: y) = abs y
35 magnitude (_ :+: _) = error "Oops! Use magnitudeSq instead."
36 {-magnitude (x :+: y) = P.sqrt ( sqr x P.+ (sqr y) )-}
37 {-where sqr z = z P.* z-}
38
39 -- | Das Quadrat des Betrags einer complexen Zahl
40 -- ist für alle complexen zahlen geeignet
41 magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
42 magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y
43
44 -- | Gibt zu einem Element in ComplRat die entsprechende LaTeX Notation zurück
45 showLaTeX :: ComplRat -> String
46 showLaTeX (0 :+: 0) = "0"
47 showLaTeX (x :+: 0) = "\\frac{" ++ (show $ numerator x) ++ "{ "
48                      ++ (show $ denominator x) ++ "}"
49 showLaTeX (0 :+: y) = showLaTeX (y :+: 0) ++ "i"
50 showLaTeX (x :+: y) = showLaTeX (x :+: 0) ++ "+" ++ showLaTeX (y :+: 0) ++ "i"
51
52 -----
53 -- Instanzen von ComplRat
54
55 instance Show ComplRat where
56     show (x :+: y) | y == 0      = show x
57                       | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"
58
59 instance Num ComplRat where
60     (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
61     (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
62     negate (x :+: y)        = negate x :+: negate y
63     fromInteger i           = fromInteger i :+: 0
64     abs z                   = magnitude z :+: 0
65     signum (0 :+: 0)        = 0
66     {-signum z@(x :+: y)    = x P./ r :+: y P./ r where r = magnitude z-}
67
68 instance Fractional ComplRat where
69     fromRational r          = fromRational r :+: 0
70     (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/n) :+: ((b*c - (a*d))/n)
71     where n = c*c + d*d
```

Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a + ib$ entspricht.

D.2 Koeffs.hs

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von u_{-2} eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in

der Liste sind vom Typ `ComplRat`. `ComplRat` ermöglicht es, dass die Berechnung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

Listing D.2: Koeffs.hs

```

1  -- | Dieses Modul stellt Funktionen bereit, welche die zu einem Startwert
2  --   gehörigen Koeffizienten von  $v(t)$  und  $u(t)$  generieren
3  module Koeffs
4  ( vKoeffs
5    , uKoeffs
6    ) where
7  import ComplRat
8  import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
9
10 -- returns array with the coefficients of  $v(t)$ 
11 -- first element in array is koefficient from  $t^{-1}$ 
12 vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
13 vKoeffs uMin2 = 1/2+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
14   where koeff :: Int -> ComplRat
15         koeff = memo koeff'
16         koeff' :: Int -> ComplRat
17         koeff' n | n > 0  = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
18                   | n == 0  = -3/(uMin2*4)
19                   | n == -1 = 1/2
20                   | otherwise = 0
21         where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
22
23 -- returns array with the coefficients of  $u(t)$ 
24 -- first element in array is koefficient from  $t^{-2}$ 
25 uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
26 uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2+:0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))

```

Beispielhaft kann man mit dem folgendem Programm die Koeffizienten von $v(t)$, zu $u_{-2} = i$, erzeugen lassen.

Listing D.3: testKoeffs.hs

```

1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4  import System.Environment
5
6  uMin2=(0+:1)
7
8  main :: IO()
9  main = do x <- getArgs
10
11         putStrLn $ "n \t| v_n\n-----"++(replicate 70 ' ')
12         main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x
13   where main' :: Int -> IO()
14         main' end = mapM_ addLine $ zip [-1..end] $ vKoeffs uMin2
15         where addLine (i,a) = putStrLn $ show i ++ "\t| " ++ show a

```

```

15
16 test :: Int -> IO()
17 test end = mapM_ addLine $ zip [-1..end] $ vKoeffs uMin2
18   where addLine (i,a) = putStrLn $ "\\\\" ++ show i ++ " & $" ++ showLaTeX a ++ "$"

```

Ist der Code in einer Datei `/Pfad/zu/testKoeffs.hs` gespeichert, so lässt er sich in Unix-Artigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen.

```

1 $ ghc --make /Pfad/zu/testKoeffs.hs
2 $ /Pfad/zu/testKoeffs 15

```

Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von v bis zum Index 15 und gibt in der Konsole das folgende aus

```

1  n      | v_n
2  -----+-----
3 -1      | 1 % 2
4  0      | (0 % 1+i3 % 4)
5  1      | 3 % 2
6  2      | (0 % 1+i(-63) % 16)
7  3      | (-27) % 2
8  4      | (0 % 1+i1899 % 32)
9  5      | 324 % 1
10 6      | (0 % 1+i(-543483) % 256)
11 7      | (-32427) % 2
12 8      | (0 % 1+i72251109 % 512)
13 9      | 2752623 % 2
14 10     | (0 % 1+i(-30413055339) % 2048)
15 11     | (-175490226) % 1
16 12     | (0 % 1+i9228545313147 % 4096)
17 13     | 31217145174 % 1
18 14     | (0 % 1+i(-30419533530730323) % 65536)
19 15     | (-14741904895227) % 2

```

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise ergibt sich daraus die folgende Tabelle:

n	v_n
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{4}i$
1	$\frac{3}{2}$
2	$-\frac{63}{16}i$
3	$-\frac{27}{2}$
4	$\frac{1899}{32}i$
5	$\frac{342}{1}$
6	$-\frac{543483}{256}i$
7	$-\frac{32427}{2}$
8	$\frac{72251109}{512}i$
9	$\frac{2752623}{2}$
10	$-\frac{30413055339}{2048}i$
11	$-\frac{175490226}{1}$
12	$\frac{9228545313147}{4096}i$
13	$\frac{31217145174}{1}$
14	$-\frac{30419533530730323}{65536}i$
15	$-\frac{14741904895227}{2}$

Tabelle D.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von $v(t)$ für $u_{-2} = i$ bzw. $a = \frac{1}{8}$

D.3 GenDataToFile.hs

Listing D.4: Main.hs

```

1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4
5  -- parallel
6  import qualified Control.Monad.Parallel as P
7
8  -- for writing to file
9  import System.Environment
10 import System.IO
11 import Data.Time
12
13 genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
14 genLine (i,v1,v2) = concat [ show i                      , "\t"

```

```

15             , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
16             , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
17             , genItemQuot (i,v1,v2) , "\n" ]
18   where
19     genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
20     genItemBetrag (_,v,_) = show $ fromRational $ magnitude v
21
22     genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
23     genItemCauchy (i,v,_) = show $ genItemCauchy'**(1 / (fromIntegral i))
24     where genItemCauchy' = fromRational $ magnitude v
25
26     genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
27     genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
28     where genItemQuot' = magnitudeSq v2 / magnitudeSq v1
29
30   -- #####
31
32   printData :: Int -> ComplRat -> IO()
33   printData end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip3 [0..] (tail vals) vals
34   where vals          = vKoeffs uMin2
35         addLine a     = putStr $ genLine a
36
37   printAsFrac :: Int -> ComplRat -> IO()
38   printAsFrac end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip [0..] $ vKoeffs uMin2
39   where addLine (i,a) = putStr $ show i ++ "\t" ++ show a ++ "\n"
40
41   saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
42   saveData end (fn, uMin2) =
43     do start <- getCurrentTime
44        withFile fn WriteMode (\handle -> do
45          hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
46          stop <- getCurrentTime
47          putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
48        where vals          = vKoeffs uMin2
49              triples = zip3 [0..] (tail vals) vals
50
51   main :: IO()
52   main = do x <- getArgs
53           P.sequence_ (main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
54   where main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"          , (0+:1))
55                                     {-, ("./data/u_-2=10000i"   , (0+:10000))-}
56                                     {-, ("./data/u_-2=1000i"    , (0+:1000))-}
57                                     {-, ("./data/u_-2=100i"     , (0+:100))-}
58                                     {-, ("./data/u_-2=10i"      , (0+:10))-}
59                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-1i"   , (0+:1.0e-1))-}
60                                     , ("./data/u_-2=1.0e-2i"    , (0+:1.0e-2))
61                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-3i"   , (0+:1.0e-3))-}
62                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-4i"   , (0+:1.0e-4))-}
63                                     {-, ("./data/u_-2=1.0e-5i"   , (0+:1.0e-5))-}
64                                     ]

```


Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov, *D -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for d -modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer D -Moduln und Fouriertransformation*, 2010.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Hut07] Graham Hutton, *Programming in Haskell*, Cambridge University Press, January 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara, *D -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

- [Kno64] Konrad Knopp, *Theorie und anwendung der unendlichen reihen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1964.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.

Kommentar: TODO: Erklärung das das wirklich selbstgemacht ist