Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik
der
Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 14. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Teil I

Theorie

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [5] und [1] beziehen.

1.1 Einige Ergebnise aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Lemma 1.1 (Seite 2)**.** *ein paar eigenschaften*

1. *$\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.*

   alle Ideale haben die form $(x-a)$ mit $, a \in \mathbb{C}$

2. *wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist*

   $$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_{k} \mathbb{C}[X] \backslash \mathfrak{m}^k$$

   The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt $\mathfrak{m}$*-adische Fitration, ist die Filtrierung* $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ *ist ein Untering der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.*

   ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

1.2 Weiterführende Definitionen

Definition 1.2 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der *Kommutator von* a *und* b genannt.

Definition 1.3 (pull-back)**.** Der *pull-back* $\rho^+ M$ ist der Vektorraum $\rho^* M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun N ein $\mathbb{C}((u))$-VR mit Verknüpfung

Definition 1.4 (push-forward)**.** Der *push-forward* $\rho_+ N$ ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$-VR $\rho_* N$ ist der $\mathbb{C}$-VR N mit der $\mathbb{C}((t))$ Struktur durch $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^- 1 \partial_u$

Satz 1.5. *es gilt dir Projektionsformel*

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ M) \cong \rho_+ N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \tag{1.1}$$

1.3 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [5, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[\![x]\!]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.2}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.6 (Weyl Algebra)**.** Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra $\mathcal{D}$ von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$) verwenden.

Lemma 1.7. *Sei A einder der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition*

$$+ : A \times A \to A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \to A$$

definieren auf A eine Ringstruktur $(A, +, \cdot)$.

Beweis. Zula Barbara: Kapittel 2 section 1 □

Bemerkung 1.8. $A_1(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Lemma 1.9. *Es gelten die Formeln*

$$\begin{aligned} [\partial_x, x^k] &= kx^{k-1} \\ [\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1} \\ [\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i} \end{aligned}$$

Beweis. Zula Barbara □

Proposition 1.10. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [5, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exersice"

□

Definition 1.11. Sei $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.12. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$
isomorph als grad. Ringen

1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A < \partial_x >$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A < \partial_x)$ bezeichen werden. Sei P ein bzgl. 1.10 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k. So definiere den Grad $degP$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_k A < \partial_x > /F_{k-1} < \partial_x >$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.4 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$

1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$-Modules

1.6 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$-Modules

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [5]

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vr
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*
$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$
erfüllen soll.

Bemerkung 2.2. Später wird man auf die angabe von ∂ verichten und einfach $\mathcal{M}$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

Lemma 2.3. *Sei* $(\mathcal{M}, \partial)$ *ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und* φ *ein Basisisomorphismus von* K^r *nach* $\mathcal{M}$*, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M} \\
K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\partial\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"']
\end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ *ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.*

Beweis. TODO, (3. Treffen) $\square$

Sind ∂_1 und ∂_2 zwei Meromorphe Zusammenhänge auf $\mathcal{M}_K \cong K^r$. So betrachte $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$:

$$\begin{aligned}
(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
&= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
&= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
\end{aligned}$$

Lemma 2.4. *Da* $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$*-linear und, wie eben gezeigt,* $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ *allgemein gilt: Die differenz zweier Meromorpher Zusammenhäge ist* K*-linear.*

Insbesondere ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.5 (Transformationsformel)**.** In der Situation

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\varphi"', "\cong"] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi", "\cong"'] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi", "\cong"'] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.6. $A \sim B$ differenziell Äquivalent $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r,K)$ mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$
$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.7 (Formaler Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *Formaler Meromorpher zusammenhang* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler $\hat{K}$-Vr
- eine *Derivation* ∂, für die die *Leibnitzregel* (2.1), für alle $f \in \hat{K}$ und $u \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$, erfüllt sein soll.

Oder einfach ein Meromorpher Zshg. über anderes K also $\hat{K}$

2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.8 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E} \otimes R)$$

3 Levelt-Turittin-Theorem

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4 [4]

Lemma 3.1. *$\rho : u \mapsto u^p$, $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$, für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt*

$$\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$u\partial_u e_k = u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e)$$

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathscr{E}^\varphi}))\\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e)\\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e)\\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k\varphi'(u)e\\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1}\varphi'(u)e\\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in\mathbb{C}((t))} e\\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e)\\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}
\end{aligned}
$$

so dass gilt:

$$u\partial_u\mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j P^j]$$

denn:

$$
\begin{aligned}
u\partial_u\mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1})\\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}\right)_{k\in\{0,..,p-1\}}\\
&= \mathbf{e}\begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p)\\
u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p)\\
u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p)\\
u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\
u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)
\end{pmatrix}\\
&= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p)P^j]
\end{aligned}
$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$[3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned} T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\ &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \text{[4]} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

[3]Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

$\square$

Teil II

Beispiele

4 Beispiele/Anwendung

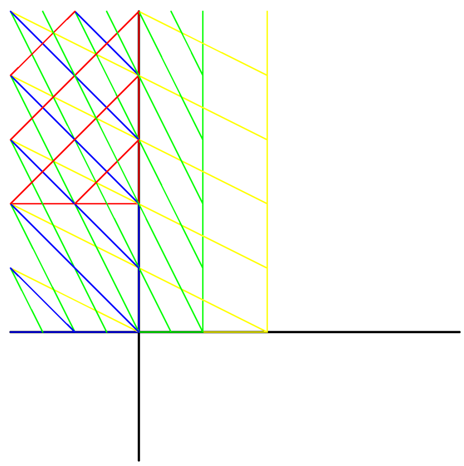
4.1 Einfache Beispiele

4.1.1 erstes

$$P_a = t^2\partial_t^2 + t\partial_t + (t^2 - n^2) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2}\alpha_{kl}t^l\partial_t^k$$

Mit: $\alpha_{2,2} = 1$, $\alpha_{1,1} = 1$, $\alpha_{0,2} = t^2$ und $\alpha_{0,0} = n^2$

$$P_a = t^2\partial_t^2 + t\partial_t + (t^2 - n^2) \Rightarrow \begin{cases} k = 2, l = 2 & \Rightarrow u \leq k = 2, v \geq l - k = 0 \\ k = 1, l = 1 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 0 \\ k = 0, l = 0 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \\ k = 0, l = 2 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 2 \end{cases}$$

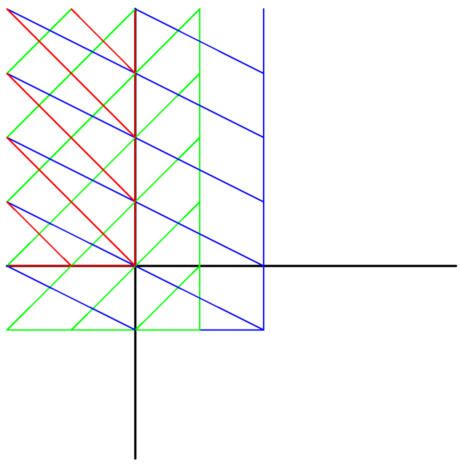


also $\text{slopes}(P_a) = \{0\}$ also ist P_a regulär singulär

4.1.2 zweites

$$P_b = t\partial_t^2 + 2\partial_t - 1$$

$$P_b = t\partial_t^2 + 2\partial_t - 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 2, l = 1 & \Rightarrow u \leq k = 2, v \geq l - k = -1 \\ k = 1, l = 0 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq -1 \\ k = 0, l = 0 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \end{cases}$$



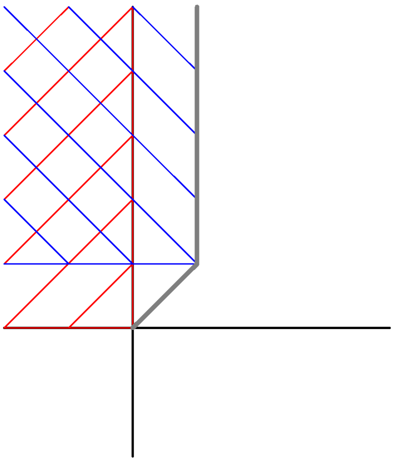
also slopes$(P_b) = \{0\}$ also ist P_b regulär singulär

4.1.3 drittes

zula Barbara Seite 46

$$P_c = t^2\partial_t + 1$$

$$P_c = t^2\partial_t + 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 1, l = 2 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 1 \\ k = 0, l = 1 & \Rightarrow u \leq 0 v \geq 0 \end{cases}$$



also slopes(P_c) = {1} also ist P_c **irregulär** singulär.

Hauptnenner aller Slopes ist 1, also wieder einfach/trivial.

4.1.4 viertes

zula Barbara Seite 46

Original aus der Zula:

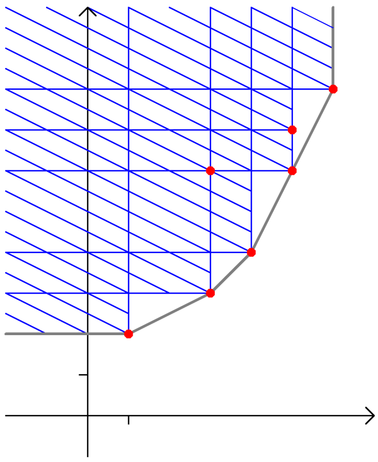
$$P_d = -3t^{14}\partial_t^6 + t^{11}(t+3)\partial_t^5 + 2t^8\partial_t^4 - t^6(t^3+1)\partial_t^3 + t^4\partial_t$$

$$P_d \Rightarrow \begin{cases} k=6, l=14 & \Rightarrow u \leq k = 6, v \geq l-k = 8 \\ k=5, l=12 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 7 \\ k=5, l=11 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 6 \\ k=4, l=8 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 4 \\ k=3, l=9 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 6 \\ k=3, l=6 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 3 \\ k=1, l=4 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 3 \end{cases}$$

also ist Abbildung 5.8 auf seite 53 der zula falsch?

$$P_d = -3t^{14}\partial_t^6 + t^{11}(t+3)\partial_t^5 + 2t^8\partial_t^4 - t^6(t^3+1)\partial_t^3 + t^3\partial_t$$

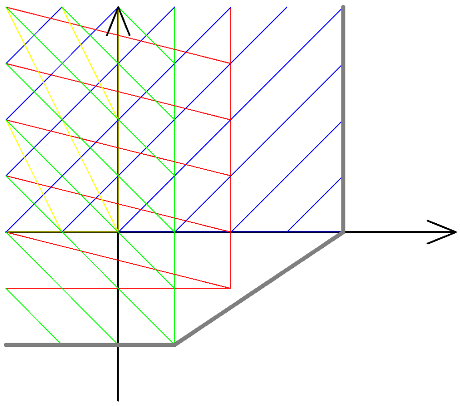
$$P_d \Rightarrow \begin{cases} k=6, l=14 & \Rightarrow u \leq k=6, v \geq l-k=8 \\ k=5, l=12 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 7 \\ k=5, l=11 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 6 \\ k=4, l=8 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 4 \\ k=3, l=9 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 6 \\ k=3, l=6 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 3 \\ k=1, l=3 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 2 \end{cases}$$



also slopes$(P_b) = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ also ist P_d irregulär singulär.
Offenbar ist der Hauptnenner der Steigugnen gleich 2.
Betrachte also $\rho : t \mapsto u^2$
und erhalte: ???

4.1.5 fünftes - bsp e

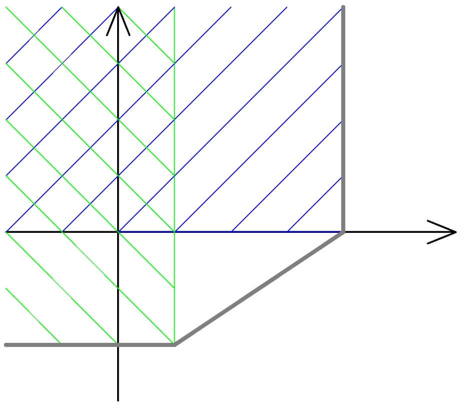
Für $P_e = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ sieht das Newton-Polygon wie folgt aus:



also sind die Slopes $\mathrm{slopes}(P_e) = \{0, \frac{2}{3}\}$.

Dies gilt Analog für das *einfachere*:

$$\bar{P}_e = t^4 \partial_t^4 + \frac{1}{t} \partial_t$$



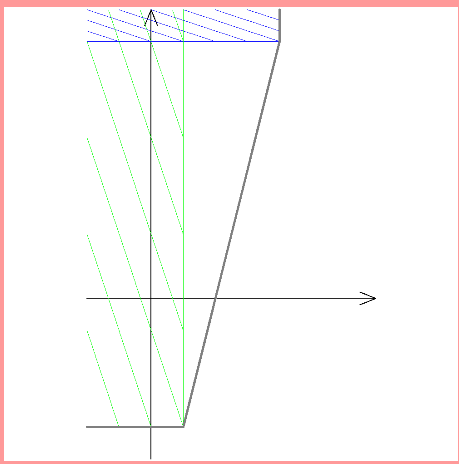
Also offensichtlich gilt $\mathrm{slopes}(\bar{P}_e) = \{0, \frac{2}{3}\}$, also haben die Slopes den Hauptnenner 3, deshalb mache einen Pullback mit $\rho : t \mapsto u^3$

Versuch:

$$\rho^+ \bar{P}_e = u^{12} \partial_u^4 + \frac{1}{u^3} \partial_u$$

FALSCH: $\partial_t \not\mapsto \partial_u$

$$\rho^+ \bar{P}_e \Rightarrow \begin{cases} k = 4, l = 12 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 8 \\ k = 1, l = -3 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq -4 \end{cases}$$



zu steil

$$Sabbah\_Fourier - local.pdf \rightarrow 5.b.$$

4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zuerfällt

Quellen??

$$\sum n!x^n$$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.
Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$\psi_0(u^p)$$

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \ldots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \ldots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \ldots$$

$$u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \qquad u\psi_1(u^p)$$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \ldots \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \ldots \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^{p} + a_{-(p+2)}u^{2p} + \ldots
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[4] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal fourier-laplace transform. Paper.

[5] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.

[6] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform. *ArXiv e-prints*, June 2007.