

Bachelorarbeit

---

# Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

---

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik  
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iv</b>
<b>0 Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1 Moduln über <math>\mathcal{D}_k</math></b>	<b>3</b>
1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$ . . . . .	4
1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise . . . . .	5
1.2 (Links) $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	6
1.2.1 Holonome $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	6
1.3 Lokalisierung eines $\mathcal{D}$ -Moduls . . . . .	7
<b>2 Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>8</b>
2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	8
2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	8
2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	10
2.3 Newton Polygon . . . . .	12
2.3.1 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $\ell$ -Symbol . . . . .	14
2.4 Operationen auf Meromorphen Zusammenhängen . . . . .	16
2.4.1 Tensorprodukt . . . . .	16
2.4.2 pull-back und push-forward . . . . .	16
2.4.3 Fouriertransformation . . . . .	21
<b>3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>23</b>
3.1 Twisten von Meromorphen Zusammenhängen . . . . .	27
<b>4 Levelt-Turrittin-Theorem</b>	<b>28</b>
4.1 Klassische Version . . . . .	28
<b>5 DIE Klasse der Fourier-Transformationen</b>	<b>30</b>
5.1 Rezept für allgemeine $\varphi$ . . . . .	30
5.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . . . . .	35
5.2.1 Konvergenz der Summanden . . . . .	42
<b>Anhang</b>	<b>43</b>
<b>A Aufteilung von <math>t\varphi'(t)</math></b>	<b>47</b>
<b>B Genaueres zu <math>(x^2\partial_x)^k</math></b>	<b>48</b>
<b>C Numerische berechnung der Koeffizienten</b>	<b>49</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$ . . . . .	13
2.2	Newton-Polygon zu $P_2$ . . . . .	13
2.3	Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$ . . . . .	21
2.4	Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$ . . . . .	21
2.5	Newton-Polygon zu $P$ . . . . .	22
2.6	Newton-Polygon zu $\mathcal{F}_P$ . . . . .	22
5.1	Newton-Polygon zu $P_\varphi$ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$ . . . . .	33
5.2	Newton Polygon zu $P_\varphi$ . . . . .	36
5.3	Newton Polygon zu $\rho^*P_\varphi$ . . . . .	36
5.4	Newton Polygon zu $\mathcal{N}$ . . . . .	38
5.5	Newton-Polygon zu $Q_1$ . . . . .	39
5.6	Newton-Polygon zu $Q_2$ . . . . .	39
5.7	Koeffizienten in abhängigkeit von $a$ . . . . .	44

# Tabellenverzeichnis

C.1	Numerisch berechnete Koeffizienten von $u(t)$ und $v(t)$ für $a = \frac{1}{8}$ . . . . .	52
-----	--	----

# Einleitung

# 0 Mathematische Grundlagen

Wir betrachten  $\mathbb{C}$  hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$  die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$  ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$  die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$  der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$  als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit  $\tilde{K}$  bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen  $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$  und  $K \subsetneq \widehat{K}$  gelten.

Es bezeichnet der Hut ( $\hat{\phantom{x}}$ ) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

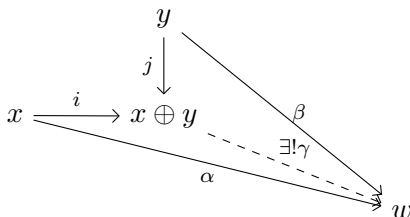
Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet  $M(n \times m, k)$  die Menge der  $n$  mal  $m$  Dimensionalen Matrizen mit Einträgen in  $k$ .

Sei  $R$  ein Ring, dann bezeichnet  $R^\times$  die Einheitengruppe von  $R$ .

**Definition 0.1** (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien  $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von  $x$  und  $y$  ist ein Objekt  $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  zusammen mit Morphismen  $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$  und  $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$  so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes  $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Morphismen  $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$  und  $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$  existiert ein eindeutiges  $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$  so dass das Diagramm



kommutiert.

**Definition 0.2** (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

Für eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  definiere das Tensorprodukt davon über  $R$  mit  $N$  als

$$\begin{aligned} \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

*Bemerkung 0.3.* Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

**Definition 0.4** (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle  $i$  gilt, dass  $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$ .

**Definition 0.5** (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

**Definition 0.6** (Kokern). Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so ist der *Kokern* von  $f$  definiert als  $\text{coker}(f) = M / \text{im}(f)$ .

**Proposition 0.7.** Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow M' &\xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} M / f(M') \longrightarrow 0 \\ m &\longmapsto m \bmod f(M') \end{aligned}$$

eine kurze exacte Sequenz und  $M / f(M') = \text{coker}(f)$  ist der Kokern von  $f$ .

*Beweis.*

□

# 1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als Körper  $k$  immer ein Element aus  $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$  betrachten.

**Definition 1.1** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von  $a$  und  $b$*  definiert.

**Proposition 1.2.** Sei  $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$ . Sei  $\partial_x : k \rightarrow k$  der gewohnte Ableitungsoperator nach  $x$ , so gilt

1.  $[\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$
2. für  $f \in k$  ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \tag{1.1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \tag{1.2}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \tag{1.3}$$

*Beweis.* 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt  $g \in k$  ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g.$$

3. Siehe [Sab90, 1.2.4.]

□

## 1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in k$ . Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator*  $f$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.4)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

**Definition 1.3.** Definiere nun den Ring  $\mathcal{D}_k$  als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in  $k$  zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.4). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[x]$ , und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  <sup>[1]</sup>.

*Bemerkung 1.4.* • Es gilt  $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$  und  $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

- Offensichtlich erhält  $\mathcal{D}_k$  in kanonischer weiße eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- $\mathcal{D}_k$  ist nichtkommutativ.

**Proposition 1.5.** [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in  $\mathcal{D}_k$  kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in k$ , geschrieben werden.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

**Definition 1.6.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* (oder den  $\partial_x$ -Grad) von  $P$ .

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung  $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$  mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

---

<sup>[1]</sup>Wird mit  $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$  bezeichnet, in [AV09].



*Beweis.* Sei  $P \in F_N \mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.7.** *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \text{gr}^F \mathcal{D} &:= \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} \text{gr}_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \text{gr}_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{isomorph als grad. Ringe}} \end{aligned}$$

also  $\text{gr}^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$  als graduierte Ringe.

*Beweis.* TODO

□

### 1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

[Kas03, Chap 1.1.] Sei  $X$  eine 1-Dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X$ . Ein (*holomorpher*) *differenzial Operator* auf  $X$  ist ein Garben-Morphismus  $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ , lokal in der Koordinate  $x$  und mit holomorphen Funktionen  $a_n(x)$  als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für  $u \in \mathcal{O}_X$ ). Zusätzlich nehmen wir an, dass  $a_n(x) \equiv 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir setzen  $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$ . Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung  $m$ , falls  $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$ .

**Definition 1.8.** Mit  $\mathcal{D}_X$  bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf  $X$ .

Die Garbe  $\mathcal{D}_X$  hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und  $\mathcal{O}_X$  ist ein Unterring von  $\mathcal{D}_X$ . Sei  $\Theta_X$  die Garbe der Vektorfelder über  $X$ . Es gilt, dass  $\Theta_X$  in  $\mathcal{D}_X$  enthalten ist. Bemerke auch, dass  $\Theta_X$  ein links  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule, aber kein rechts  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule ist.

**Proposition 1.9.** [Ark12, Exmp 1.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$  und  $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$ . Wobei  $\partial_x$  als  $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$  wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

## 1.2 (Links) $\mathcal{D}$ -Moduln

Da  $\mathcal{D}$  ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts  $\mathcal{D}$ -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von  $\mathcal{D}$ -Moduln rede, werde ich mich immer auf links  $\mathcal{D}$ -Moduln beziehen.

**Beispiel 1.10** (links  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1.  $\mathcal{D}$  ist ein links und rechts  $\mathcal{D}$ -Modul
2.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$  oder  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  jeweils durch  $x \cdot x^m = x^{m+1}$  und  $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol  $\exp(\lambda x)$  ein, mit  $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$ . So ist  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda x)$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol  $\log(x)$  mit den Eigenschaften  $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$  ein. Erhalte nun das  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Dieses Modul ist über  $\mathcal{D}$  erzeugt durch  $\log(x)$  und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

### 1.2.1 Holonome $\mathcal{D}$ -Moduln

**Definition 1.11.** [Sab90, Def 3.3.1.] Sei  $\mathcal{M}$  lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt,  $\mathcal{M}$  ist holonom, falls  $\mathcal{M} = 0$  oder falls  $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$ .

**Lemma 1.12.** [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein  $\mathcal{D}$ -Modul ist holonom genau dann, wenn  $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$ .

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

### Alternative Definition A

**Definition 1.13** (Holonome  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich generierter  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathcal{M}$  ist *holonom*, falls  $\mathcal{M} = 0$  gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

*Bemerkung 1.14.* [Cou95, Chap 10 §1] Sei  $\mathfrak{a} \neq 0$  ein Links-Ideal von  $\mathcal{D}$ . Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass  $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$ . Falls  $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$ , dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass  $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$ . Somit ist  $\mathcal{D}/\mathfrak{a}$  ein holonomes  $\mathcal{D}$ -Modul.

*Bemerkung 1.15.* [Cou95, Prop 10.1.1]

- Submoduln und Quotienten von holonomen  $\mathcal{D}$ -Moduln sind holonom.
- Endliche Summen von holonomen  $\mathcal{D}$ -Moduln sind holonom.

## Alternative Definition B

**Definition 1.16.** Ein lokalisiertes  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathcal{M}$  heißt *holonom*, falls es ein  $\mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}$  gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{D}/\mathfrak{a}.$$

*Bemerkung 1.17.* In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die Charakteristische Varietät.

## 1.3 Lokalisierung eines $\mathcal{D}$ -Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul. Betrachte  $\mathcal{M}$  als  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 1.18.** [Sab90, Prop 4.2.1.]  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  erhält in natürlicher Weise eine  $\mathcal{D}$ -Modul Struktur.

*Beweis.* [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

□

**Korollar 1.19.** [Sab90, Cor 4.2.8.] Sei  $\mathcal{M}$  ein holonomes Modul. Dann ist die Lokalisierung von  $\mathcal{M}$  isomorph zu  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  für ein  $P \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$

## 2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei  $\mathcal{M}$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit  $x$  bijektiv ist, so nennen wir  $\mathcal{M}$  einen Meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

### 2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$  betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$  ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um  $x = 0 \in \mathbb{C}$  betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an  $x = 0$  (geschrieben als  $\tilde{\mathcal{O}}$ ). Wir sagen  $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$  ist eine Lösung von (2.1), falls  $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $v$  die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

#### Alternativer Zugang

[Sab90, 3.1.1] Sei  $\mathcal{F}$  ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren  $\mathcal{D}$  wirken. Ein Element  $u \in \mathcal{F}$  ist Lösung von  $P \in \mathcal{D}$  falls  $P \cdot u = 0$  gilt.

Falls  $u$  ein Lösung von  $P$  ist, so ist  $u$  auch Lösung von  $Q \cdot P$  mit  $Q \in \mathcal{D}$ . Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal  $\mathcal{D} \cdot P \triangleleft \mathcal{D}$  ab.

#### 2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses Klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei  $x = 0$ ) ist ein Tupel  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum

- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

**Bemerkung 2.2** (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Analog definiert man einen *formalen Meromorphen Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$  bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , ein endlich dimensionaler  $\widehat{K}$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Derivation  $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

**Definition 2.3.** Seien  $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$  zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist ein Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie  $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$  erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch  $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ .

**Bemerkung 2.4.** 1. Später wird man auf die Angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}_K$  als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von  $K$  verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle  $f \in \tilde{\mathcal{O}}$  und für alle  $u \in \mathcal{M}_K$  erfüllt sein muss, äquivalent.

**Definition 2.5** (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$ . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis*  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  die Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M(n \times n, K)$  definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , die Wirkung von  $\partial$  auf  $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$  beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x) e_i\right) \stackrel{\boxed{??}}{\downarrow} \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j(x)\right) e_i.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung  $\partial u(x) = 0$ , für  $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$ , äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$ . Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammenhang  $(\mathcal{M}, \partial)$  ausgestattet mit einer  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$  zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))$  den assoziierten Meromorphen Zusammenhang  $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$  angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

## 2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln

**Lemma 2.6** (Lemma vom zyklischen Vektor). *[Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element  $m \in \mathcal{M}_K$  und eine ganze Zahl  $d$  so dass  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  eine  $K$ -Basis von  $\mathcal{M}_K$  ist.*

*Beweis.* [AV09, Satz 4.8] □

**Satz 2.7.** *[Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes  $\mathcal{D}_K$ -Modul und andersherum.*

*Beweis.* [Sab90, Thm 4.3.2] □

**Lemma/Definition 2.8.** *[AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein  $P \in \mathcal{D}_K$  so dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ . So ein  $P$  heißt dann Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_K$ .*

*Beweis.* [AV09, Satz 4.12] □

**Satz 2.9.** *[AV09, Seite 64] Ist  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

*Beweis.* [AV09, Seite 57-64] □

**Korollar 2.10.** *Sei  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  wie in Satz 2.9 so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

*Beweis.* Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.11.** *Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}_K$ , also in der Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt:  $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

*Beweis.* TODO, (3. Treffen) □

**Lemma 2.12.** Sei  $\mathcal{M}_K$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum mit  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist  $K$ -linear.

*Beweis.* Seien  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Derivationen auf  $\mathcal{M}_K$ . Da  $\partial_1$  und  $\partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, ist  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.13.** Für  $(K^r, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang existiert ein  $A \in M(r \times r, K)$ , so dass  $\partial = \frac{d}{dx} - A$ .

*Beweis.* Es sei  $(K^r, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang. So ist  $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also lässt sich durch eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  darstellen, also ist, wie behauptet,  $\partial = \frac{d}{dx} - A$ . □

**Proposition 2.14** (Transformationsformel). [[HTT07](#), Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc} K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r & \\ & \searrow \cong \varphi & & \nwarrow \cong \varphi & \\ & & M \xrightarrow{\partial} M & & \\ & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \psi & \\ K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r & \\ & \uparrow \cong T & & \uparrow \cong T & \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$  und  $(\frac{d}{dx} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:  
Der Meromorphe Zusammenhang.  $\frac{d}{dx} + A$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

**Definition 2.15** (Differenziell Äquivalent). Man nennt  $A$  und  $B$  *differenziell Äquivalent* ( $A \sim B$ ) genau dann, wenn es ein  $T \in GL(r, K)$  gibt, mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$ .

[Sab90, Chap 5.2]

**Lemma 2.16.** [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die  $x\partial_x$  beschreibt, nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.

*Beweis.* Wähle einen zyklischen Vektor  $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und betrachte die Basis  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  (siehe Lemma 2.6). Schreibe  $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$  in Basisdarstellung mit Koeffizienten  $b_i \in \widehat{K}$ . Also erfüllt  $m$  die Gleichung  $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$ .

Tatsächlich kann man  $b_i(x) = x^i b'_i(x)$  mit  $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$  schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass  $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$  ebenfalls eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist.

Die Matrix von  $x\partial_x$  zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$ . □

**Lemma 2.17.** [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  so dass die Matrix zu  $x\partial_x$  konstant ist.

*Beweis.* TODO □

## 2.3 Newton Polygon

Jedes  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , also insbesondere auch jedes  $P \in \mathcal{D}_K$ , lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit  $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$  schreiben. Betrachte das zu  $P$  dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) &:= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left( (m, l-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2 \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Definition 2.18.** Das Randpolygon der konvexen Hülle  $\text{conv}(H(P))$  von  $H(P)$  heißt das *Newton Polygon* von  $P$  und wird als  $N(P)$  geschrieben.

*Bemerkung 2.19.* Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x) (x\partial_x)^k$$

mit  $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexe Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$



**Definition 2.20.** Die Menge  $\text{slopes}(P)$  sind die nicht-vertikalen Steigungen von  $N(P)$ , die sich echt rechts von  $\{0\} \times \mathbb{R}$  befinden.

- Schreibe  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  für die Menge der zu  $\mathcal{M}$  gehörigen slopes.
- $P$  heißt *regulär* oder *regulär singulär*  $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$  oder  $\deg P = 0$ , sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $\mathcal{M}_K$ ) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $P \in \mathcal{D}_K$ ) gibt, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  (bzw.  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$ ).

**Beispiel 2.21.** 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist  $P_1 = x^{\mathbf{1} \mathbf{2}}$ . Es ist leicht abzulesen, dass

$$m = 2$$

$$l = 1$$

so dass

$$H(P_1) = \left( (\mathbf{2}, \mathbf{1} - \mathbf{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.1 ist  $H(P_1)$  (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist  $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$  und damit ist  $P_1$  regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei  $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$  so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass  $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$  ist.

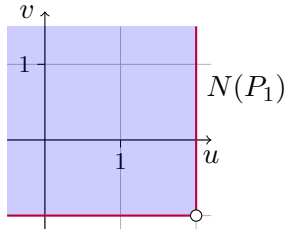


Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu  $P_1 = x\partial_x^2$

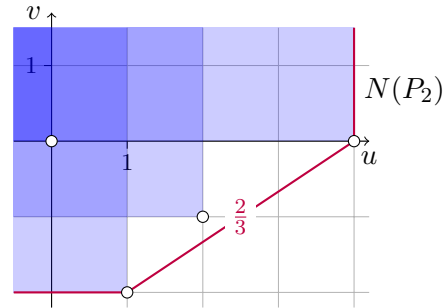


Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu  $P_2$

**Bemerkung 2.22.** [AV09, Bem 5.4] Für alle  $f \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}^\times$  gilt allgemein, dass das zu  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von  $f \cdot P$  übereinstimmt.

*Beweis.* TODO

□

**Definition 2.23.** In einem Polynom  $P = \varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$ , mit  $\varepsilon, \alpha_{kl} \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$  sind die restlichen Monome *Therme im Quadranten* von  $\varepsilon x^p \partial_x^q$ , falls für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $l \in \mathbb{Z}_{\geq -N}$  mit  $\alpha_{kl} \neq 0$  gilt:  $k \leq q$  und  $l - k \geq p - q$ .

*Bemerkung 2.24.* • Anschaulich bedeutet das, dass

$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \left( (q, p - q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \supset \left( (k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = H(\alpha_{kl} x^l \partial_x^k),$$

für alle relevanten  $k$  und  $l$ .

- Sei  $P$  ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von  $\varepsilon x^p \partial_x^q$  sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} H(P) &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \mathbf{T.i.Q. \ von \ } x^p \partial_x^q) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q) \\ \Rightarrow N(P) &= N(\varepsilon x^p \partial_x^q). \end{aligned}$$

Also können Terme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Terms befinden und nicht der Term selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das **T.i.Q.** ist eine hier Abkürzung für Terme im Quadranten.

**Lemma 2.25.** [Sab90, Seite 26] Das Newton-Polygon hängt, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten Meromorphen Zusammenhang ab.

**Lemma 2.26.** [Sab90, 5.1]

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$  ist nicht Leer, wenn  $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$  hat, so gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$ .

**Satz 2.27.** [Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale Meromorphe Zusammenhänge mit  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$ .

*Beweis.* [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

*Bemerkung 2.28.* In Satz 2.27 ist es wirklich notwendig formale Meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente Meromorphe Zusammenhänge.

### 2.3.1 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $\ell$ -Symbol

Sei  $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$  vollständig gekürzt, also mit  $\lambda_0$  und  $\lambda_1$  in  $\mathbb{N}$  relativ prim. Definiere die Linearform  $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  in zwei Variablen, Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . Falls  $P = x^a \partial_x^b$  mit  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \ell(b, b - a)$$

und falls  $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$  mit  $b_i \in \widehat{K}$  setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)).$$

**Definition 2.29** (Die Filtrierung  ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration  ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , welche mit  $\mathbb{Z}$  indiziert ist, durch

$${}^\ell V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_\ell(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

*Bemerkung 2.30.* Man hat  $\text{ord}_\ell(PQ) = \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q)$  und falls  $\lambda_0 \neq 0$  hat man auch, dass  $\text{ord}_\ell([P, Q]) \leq \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q) - 1$ .

**Definition 2.31** ( $\ell$ -Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls  $\lambda_0 \neq 0$  ist der graduierte Ring  $gr {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_\lambda {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von  $\partial_x$  in dem Ring durch  $\xi$ , dann ist der Ring isomorph zu  $\widehat{K}[\xi]$ . Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , so ist  $\sigma_\ell(P)$  definiert als die Klasse von  $P$  in  $gr_{\text{ord}_\ell(P)} {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ .  $\sigma_\ell$  wir hierbei als das  $\ell$ -Symbol bezeichnet.

Zum Beispiel ist  $\sigma_\ell(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$ .

*Bemerkung 2.32.* Bei [Sab90] wird der Buchstabe  $L$  anstatt  $\ell$  für Linearformen verwendet, dieser ist hier aber bereits für  $\mathbb{C}\{t\}$  reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als  ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und das  $\ell$ -Symbol als  $L$ -Symbol zu finden.

*Bemerkung 2.33.* Ist  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  geschrieben als  $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$ . So erhält man  $\sigma_\ell(P)$  durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) | \ell(i, i-j) = \text{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

*Beweis.*

□

**Definition 2.34** (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zu dieser Ordnung verwendet.

*Bemerkung 2.35.* Wenn  $\ell(x_0, s_1)$  wie oben aus  $\Lambda$  entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_\ell(P).$$

## 2.4 Operationen auf Meromorphen Zusammenhängen

### 2.4.1 Tensorprodukt

**Proposition 2.36.** [[Sch](#), Prop 4.1.1] Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  Meromorphe Zusammenhänge. Sei  $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ . Durch setzen von

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \quad (2.3)$$

als die Wirkung von  $\partial$  auf das  $K$ -Modul  $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ , wird  $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$  zu einem Meromorphen Zusammenhang.

*Beweis.* Klar □

**Lemma 2.37.** [[Sab90](#), Ex 5.3.7] Falls  $\mathcal{N}$  regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  genau die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}$ .

*Beweis.* TODO □

### 2.4.2 pull-back und push-forward

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \quad \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine Polynomielle Abbildung mit Bewertung  $p \geq 1$ . Hier werden wir meistens  $\rho(t) = t^p$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho$$

analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho$$

wobei  $L$  (bzw.  $\widehat{L}$ ) eine endliche Körpererweiterung von  $K$  (bzw.  $\widehat{K}$ ) ist. Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}((t))$  Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang  $\nabla$ .

**Definition 2.38** (pull-back). [[Sab07](#), 1.a] und [[Sab90](#), Page 34] Der *pull-back* oder das *Inverses Bild*  $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  von  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$  ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang*  $\rho^* \nabla$  definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.4)$$

Für ein allgemeines  $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (2.5)$$

**Satz 2.39.** *In der Situation von Lemma 2.38, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$  für ein  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , gilt*

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t).$$

Für  $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  werden wir auch  $\rho^* P$  schreiben.

Für den Beweis von Satz 2.39 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

**Lemma 2.40.** *Es gilt  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  als  $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ -Moduln, mittels*

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

*Beweis.* Prüfe zunächst die Injektivität. Sei  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \ker(\Phi)$  so, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(f(t) \otimes Q(x, \partial_x)) \\ &= f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

und, da hier alles Nullteilerfrei ist, ist die Bedingung äquivalent zur folgenden

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 0 &= f(t) \quad \text{oder} \quad 0 = m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ \Leftrightarrow \dots \end{aligned}$$

Nun zur Surjektivität. Sei  $g(t, \partial_t) = \sum_k a_k(t) \partial_t^k \in \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  so gilt

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k a_k(t) \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \underbrace{\rho'(t) \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t^k \\ &= \rho'(t) \sum_k a_k(t) \rho'(t)^{-1} \partial_t^k \\ &= \dots \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.41.** *Das in Lemma 2.40 definierte  $\Phi$  ist sogar ein Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  als Meromorphe Zusammenhänge.*

*Beweis.* Wir wollen noch zeigen, dass  $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_\otimes$  gilt, also dass  $\Phi$  ein Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\partial_\otimes} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\hat{L}} \end{array}$$

und für eine Elementartensor  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$  folgt dann

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_\otimes} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\ & & \uparrow \\ f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm. □

**Lemma 2.42.** Sei  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$ . In der Situation

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(x, \partial_x)} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\hat{L}} \end{array}$$

mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.40 macht  $\alpha := \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  das Diagramm kommutativ.

*Beweis.* Betrachte ein  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$ . So gilt

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\ & & \downarrow \Phi \\ & & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\
 \downarrow \Phi & & \\
 f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) & \xrightarrow{-\cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)} & f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagram mit  $\alpha = -\cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ .  $\square$

*Beweis zu Satz 2.39.* Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für  $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{-\cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & u \longmapsto & u \cdot P & & & \\
 & & & & u \longmapsto & u \bmod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P & 
 \end{array}$$

ist exact, weil  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(\_ \cdot P)$ . Weil  $\widehat{K}$  flach ist, da Körper, ist auch, nach anwenden des Funktors  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \_$ , die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}
 \end{array}$$

exact. Also mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.40 und  $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  nach Lemma 2.42 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{-\cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & & 
 \end{array}$$

als kommutatives Diagram. Nun, weil  $\_ \cdot Q$  injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0
 \end{array}$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Cokerne, die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.43.** [Sab90, 5.4.3] Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , dann gilt für  $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$ , dass  $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  mit  $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$ , dann ist  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$  mit

$$\begin{aligned}
 P'(t, \partial_t) &= P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \sum a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i \\
 &= \sum a_i(t^p) ((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i
 \end{aligned}$$

$\square$

**Beispiel 2.44** (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  bzgl.  $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$  betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt  $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$  (siehe Abbildung 2.3) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back mit  $\rho : t \rightarrow x := t^2$  an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 2.39 einfacher anwenden können.

$$\begin{aligned}
 \partial_x &\rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)} \partial_t = \frac{1}{2t} \partial_t \\
 \partial_x^2 &\rightsquigarrow \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t} \partial_t \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right) = \frac{1}{2t} \left(-\frac{1}{2t^2} \partial_t + \frac{1}{2t} \partial_t^2\right) = \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t
 \end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^* P &= (t^2)^3 \left(\frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t\right) - 4(t^2)^2 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \underbrace{t^3 \frac{1}{4} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t}_{- \frac{1}{2} t^3 \partial_t} - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1
 \end{aligned}$$

Also ist  $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$  mit  $\text{slopes}(\rho^* P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.4) und somit  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1)$ .

Sei  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ein endlich dimensionaler  $\widehat{L}$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

**Definition 2.45** (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *Direktes Bild*  $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$  von  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ist



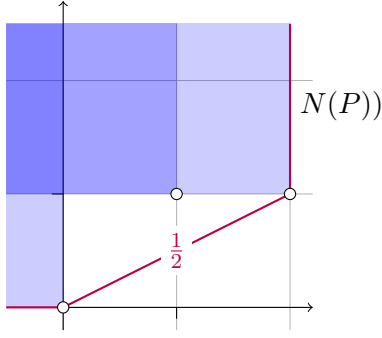


Abbildung 2.3: Newton Polygon zu  
 $P = x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$

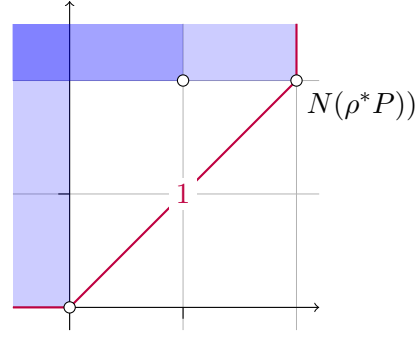


Abbildung 2.4: Newton Polygon zu  
 $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$

- der  $\widehat{K}$ -VR  $\rho_* \mathcal{N}$  ist definiert als der  $\mathbb{C}$ -Vektor Raum  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  mit der  $\widehat{K}$ -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation  $\cdot: \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$  und  
 $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung  $\partial_x$  beschrieben durch  $\rho'(t)^{-1} \partial_t$ .

**Satz 2.46.** [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.6)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}} \text{)} \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?) \end{aligned}$$

□

### 2.4.3 Fouriertransformation

**Definition 2.47** (Fouriertransformation). [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1] Sei  $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$ . Dann ist die *Fouriertransformierte* von  $P$  gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i$$

**Definition 2.48** (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$  so ist die Fouriertransformierte davon  $\mathcal{F} \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_P &= \partial_z^3(-z)^4 + \partial_z^2(-z)^2 + \partial_z \\
&= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{\text{I}} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{\text{II}} + \partial_z \\
&= \underbrace{z^4 \partial_z^3}_{\text{I}} + \underbrace{[\partial_z^3, z^4]}_{\text{II}} + \underbrace{z^2 \partial_z^2}_{\text{I}} + \underbrace{[\partial_z^2, z^2]}_{\text{II}} + \partial_z \\
&= \underbrace{z^4 \partial_z^3 + \sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i}}_{\text{I}} + \underbrace{z^2 \partial_z^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i}}_{\text{II}} + \partial_z \\
&= \underbrace{z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z + z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2}}_{\text{I}} + \underbrace{2}_{\text{II}} \\
&= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2
\end{aligned}$$

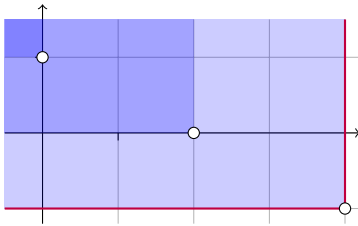


Abbildung 2.5: Newton-Polygon zu  $P$

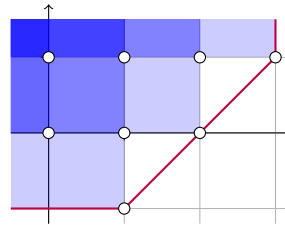


Abbildung 2.6: Newton-Polygon zu  $\mathcal{F}_P$

### 3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 3.1.** [Sab07, 1.a] Sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^{\varphi}$  für den (formalen) Rang 1 Vektorraum  $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$  ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$ , im speziellen also  $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$ .

- Bemerkung 3.2.*
1. Es für ein allgemeines  $f(x) \in \mathcal{E}_{\widehat{K}}^{\varphi}$  gilt  $\partial_x f(x) = f'(x) + f(x)\varphi'(x)$ .
  2. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird im folgendem meist verzichtet.
  3. Offensichtlich ist  $\mathcal{E}^{\varphi} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$ , weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass  $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$ .

*Bemerkung 3.3.* [Sab07, 1.a] Es gilt  $\mathcal{E}^{\varphi} \cong \mathcal{E}^{\psi}$  genau dann wenn  $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$ .

Sei  $\rho : t \mapsto x := t^p$  und  $\mu_{\xi} : t \mapsto \xi t$ .

**Lemma 3.4.** [Sab07, Lem 2.4] Für alle  $\varphi \in \widehat{L}$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi} = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi}}.$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagram, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi}} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi}} \end{array}$$

Es sei oBdA  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , dies ist nach Bemerkung 3.3 berechtigt. Wir wählen eine  $\widehat{L}$  Basis  $\mathbf{e}$  des Rang 1  $\widehat{L}$ -Vektorraum  $\mathcal{E}^{\varphi}$  und damit erhält man die Familie  $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$  als  $\widehat{K}$ -Basis von  $\rho_+ \mathcal{E}^{\varphi}$ . Es gilt

$$\partial_x t^k \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k}_{\text{}} \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \overbrace{(t^k \partial_t + k t^{k-1})}^{\text{}} \mathbf{e}. \quad (3.1)$$

Durch die Setzung  $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$  wird die Familie  $\mathbf{e} := (e_0, \dots, e_{p-1})$  eine  $\widehat{L}$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Zerlege nun

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2} \mathbb{C}[t^{-1}] \quad (3.2)$$

mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in x^{-1} \mathbb{C}[x^{-1}]$  (siehe: Anhang A). Damit gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e}_k &= t \partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} t \left( -kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{\partial_x(t^k \mathbf{e})}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi} \right) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{(pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi} \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e}) \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \underbrace{t\varphi'(t)}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi} \mathbf{e} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p} \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass  $\mathbf{e} \cdot V = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  gilt. Es gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
 t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t e_0, \dots, t\partial_t e_{p-1}) \\
 &= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
 &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]
 \end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_t$  auf die Basis  $\mathbf{e}$  von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$  ist also Beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da  $V$  das Minimalpolynom  $\chi_V(X) = X^p - 1$  hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit  $T$  auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit  $\xi^p = 1$ , bringen. Sei so ein  $\xi$  ab jetzt Fixiert. So dass gilt:

$$\begin{aligned}
 T \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\
 &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}t)\xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1}\xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1}t)^{p-1}\xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da  $\varphi'(t) = pt^{p-1}$ . Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & & 
 \end{array}$$

k-te Stelle

der mit  $(\star)$  bezeichnete Teil kommutiert, wobei  $\Phi : (0, \dots, 0, \frac{1}{t}, 0, \dots, 0) \mapsto e_k$  der kanonische Basisisomorphismus und  $e_k$  basis von  $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$ . Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi(\Phi^{-1}(v) \cdot \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right]) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente  $e_k$  gilt. Nach Definition 3.1 gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_t e_k &= \underbrace{(\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t)}_{\text{Kettenregel}} e_k \\
 &\downarrow \\
 &= \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})}_{\text{Kettenregel}} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{Kettenregel}} e_k \\
 &= (\xi^{k-1})^p \cdot (pt^{p-1}) e_k \\
 &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k
 \end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\
 \downarrow & & \\
 \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\
 \downarrow & & \\
 (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t)\xi^{k-1}e_k
 \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt.  $\square$

**Definition 3.5.** Ein *Elementarer Meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang  $\mathcal{M}$ , für den es  $\psi \in \mathbb{C}((x))$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $p \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit  $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$ , ist.

**Lemma 3.6.**  $\mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p$

*Beweis.* Siehe [Hei10, Lem 5.12]  $\square$

### 3.1 Twisten von Meromorphen Zusammenhängen

**Lemma 3.7.** [Hei10, Seite 44] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot P(x, \partial_x)$  und sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit  $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x})$ .

*Beweis.* TODO  $\square$

## 4 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, Meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

### 4.1 Klassische Version

**Satz 4.1.** [[Sab90](#), Thm 5.4.7] *Sie  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl  $p$  so dass der Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , mit  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [[Sab90](#), Seite 35].

*Beweis.* Zum Beweis wird Induktion auf die Lexicographisch geordnetem Paare  $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$  angewendet. Wobei  $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  dem größtem Slope von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ . Es wird  $\kappa = \infty$  gesetzt, falls der größte Slope nicht Ganzzahlig ist.

Wir nehmen oBdA an, dass  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  genau einen Slope  $\Lambda$  hat, sonst Teile  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  mittels Satz 2.27 in Meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit  $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  (vollständig gekürzt) Definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform  $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ . Wir nennen  $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$  die *Determinanten Gleichung* von  $P$ . Da  $L$  zu einem Slope von  $P$  gehört, besteht  $\sigma_L(P)$  aus zumindest zwei Monomen. Schreibe

$$\begin{aligned} \sigma_L(P) &= \sum_{L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i, i-j) = 0} \alpha_{ij} x^j \xi^i. \end{aligned}$$

Sei  $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x i^{\lambda_1}$  so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei  $\alpha_0 \neq 0$  ist.



**Erster Fall:**  $\lambda_1 = 1$ . Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_{\beta}}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  eine Konstante ist. Sei  $\beta_0$  eine der Nullstellen. So setze  $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0+1))z^{\lambda_0+1}$  und betrachte  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$ . Falls  $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$  gilt

$$P\left(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\right) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial(\frac{\beta_0}{\lambda_0+1}x^{-(\lambda_0+1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 x^{-(\lambda_0+2)}. \end{aligned}$$

Schreibe  $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0+2)})$ .

**Lemma 4.2.** *Es gilt, dass  $P'$  Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.*

*Beweis.* TODO □

Des weiteren ist  $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$ . Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinanten Gleichung  $\sigma_L(P)$  hat nur eine Nullstelle.**
2. **Die Determinanten Gleichung  $\sigma_L(P)$  hat mehrere Nullstellen.**

**Zweiter Fall:**  $\lambda_1 \neq 1$ . In diesem Fall ist einzige Slope  $\Lambda$  nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit  $\lambda_1$ . Sei  $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$  und erhalte  $P'$  so dass  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ . Nach Lemma 2.43 hat  $P'$  den einen Slope  $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$ . Damit können wir nun die zugehörige Linearform  $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$  definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \dots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an. □

## 5 DIE Klasse der Fourier-Transformationen

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von  $\mathcal{D}$ -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu einem Beispiel unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem  $\varphi$  D-Moduln ergibt. Im Laufe des Kapitels werden immer speziellere  $\varphi$  betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

### 5.1 Rezept für allgemeine $\varphi$

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein  $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$  aus
2. und beginne mit  $\mathcal{E}^\varphi$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left( \text{Hauptnenner von } \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\widehat{L}}^*} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left( t^{\max(I)+1} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \right)}_{=: Q(t, \partial_t)} \end{aligned}$$

3. Fouriertransformiere  $\mathcal{E}^\varphi$  und erhalte

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle} \end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang  $x \rightsquigarrow z^{-1}$  an. Was passiert mit der Ableitung  $\partial_x$ ? Es gilt

$$\partial_x \left( f \left( \frac{1}{x} \right) \right) = \partial_z(f) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also  $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$ .

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom  $P_\varphi$  assoziierten formalen Meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$  betrachten.

**Lemma 5.1.** *Zu einem  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \in \varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} | I \subset \mathbb{N}$  endlich,  $a_k \in \mathbb{C}$  ist das Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_\varphi$  explizit gegeben durch*

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] < \partial_x >$$

*Beweis.* Sei  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$ , so ist

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \underbrace{\left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t][t^{-1}] < \partial_t >} \\ &= t^{\max(I)+1} \underbrace{\left( \partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \right)}_{\in \mathbb{C}[t][t^{-1}] < \partial_t >} \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k \underbrace{\frac{a_k}{t^{k-\max(I)}}}_{\in \mathbb{C}[t] < \partial_t >} \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[t] < \partial_t > \\ \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k} \end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= -\underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1}}_{\in \mathbb{C}[x] < \partial_x >} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= \underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}_{\in \mathbb{C}[x] < \partial_x >} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \underbrace{x^2 (x^{-1} \partial_x - x^{-2})}_{\in \mathbb{C}[x] < \partial_x >} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] < \partial_x > \end{aligned}$$

□

Im Anhang B wird das  $(x^2 \partial_x)^k$  genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

**Lemma 5.2.** *Es gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$ .*

*Beweis.* [Sab07, 5.b.] Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir  $P_\varphi$  um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von Bedeutung sind und vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die Konvexen Hüllen, die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert werden. Sei  $q := \max(I)$ .

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(\underbrace{(-x^2 \partial_x)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}}(x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{(-1)^q (x^{2q} \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^{2q} \partial_x^q)}^{\text{liefere keinen Beitrag}}(x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \underbrace{x^{2q} \partial_x^q (x \partial_x - 1)}_{\text{liefert keinen Beitrag}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q}^{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q} \overbrace{(x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1})}^{x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1}} \partial_x - x^{2q} \partial_x^q + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q} \partial_x^q - x^{2q} \partial_x^q}_{\substack{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \\ \text{sind also vernachlässigbar}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe auch vernachlässigt werden kann.

**Behauptung:** Es gilt

$$H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \subset H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)$$

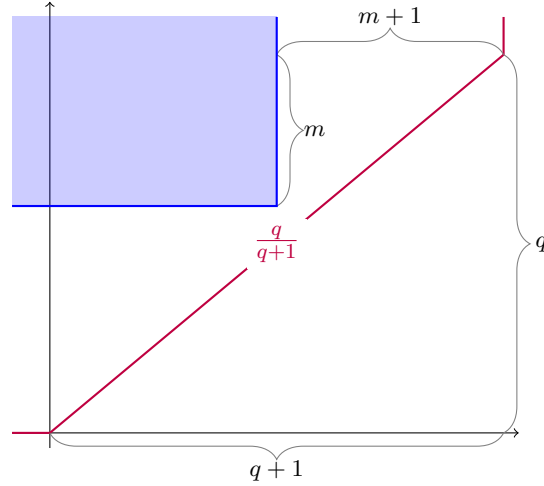
**Denn:** Betrachte zu einem  $m \in I \setminus \{q\}$ , einen Summanden  $m a_m (-x^2 \partial_x)^{q-m}$  aus der Summe:

$$\begin{aligned}
 H(m a_m (-x^2 \partial_x)^{q-m}) &= H(m a_m (-1)^q (x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m} + \text{T.i.Q. von } x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})) \\
 &= H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m}) \\
 &= (q - m, q - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

In Abbildung 5.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten dargestellt, mit  $N(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q)$  in der gewohnten Farbe und in Blau ist  $H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})$  eingezeichnet. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh.  $\square$

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &\stackrel{\text{Beh.}}{=} H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)
 \end{aligned}$$


 Abbildung 5.1: Newton-Polygon zu  $P_\varphi$  mit  $H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})$ 

Also ist

$$N(P_\varphi(x, \partial_x)) = N(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + qa_q).$$

womit die Behauptung folgt und das Newton-Polygon wie in Abbildung 5.1 aussieht.  $\square$

Also ist, nach Lemma 2.43, ein pull-back mit Grad  $q+1$  hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Wir wissen, dass nach Anwenden eines solchem pull-backs die Slopes mit  $q+1$  multipliziert werden, also gilt  $\mathcal{P}(\rho^+ \mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$ .

**Lemma 5.3.** Im Fall  $\varphi = \frac{a}{t^q}$  ist mit  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$  der pull-back gegeben durch

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa).$$

*Beweis.* Sei  $\varphi = \frac{a}{t^q}$ , so ist  $P$  gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^q (x \partial_x - 1) + qa,$$

Sei  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$  so ist

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \rho^+ (\mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(-(q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \underbrace{((-(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t)^q}_{\text{Slope } q} \underbrace{(-(q+1)t^{q+1} \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t - 1 + qa)}_{\text{Slope } 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \underbrace{\left( \left( -\frac{(q+1)^2}{(q+1)^2} t^{2(q+1)-q} \partial_t \right)^q \right)}_{=1} \overbrace{\left( \frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa} \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left( (t^{q+2} \partial_t)^q \left( \frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \left( (t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa \right)
 \end{aligned}$$

□

Definiere mittels  $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe  $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$  und berechne die *Determinanten Gleichung*  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ .

$$\begin{aligned}
 \sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ell(i, i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\
 &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i
 \end{aligned}$$

Da  $\widehat{L}[\xi]$  kommutativ ist gilt hier, dass  $(t^j \xi^i)^k = t^{jk} \xi^{ik}$  ist. Setze  $\theta = t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^{q+1} \xi$  so können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta \text{ Nullstelle}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$  eine Konstante ist. Sei  $\beta$  eine der Nullstellen. Da  $\text{ord}_\ell(\rho^* P_\varphi) = 0$  und der einzige Slope von  $\rho^* P_\varphi$  nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass  $\alpha_0 \neq 0$ . Also ist 0 keine Nullstelle von  $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$ . Setze  $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = (\beta/q)t^{-q}$  und betrachte

$$\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi) \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi.$$

**Lemma 5.4.** *Sei  $e$  ein zyklischer Vektor zu  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$ , so ist  $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{L}} \in \mathcal{N}$  ein zyklischer Vektor*

*für  $\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi$ .*

*Beweis.* Es sei  $e$  ein zyklischer Vektor von  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$ . Da der Grad von  $\rho^* P_\varphi$  gleich  $q+1$  ist, ist auch die Dimension von  $\rho^+ \mathcal{M}$  gleich  $q+1$ . Damit ist auch  $\dim_K \mathcal{N} = q+1$ , also reicht zu zeigen, dass  $e \otimes 1, \partial_t(e \otimes 1), \partial_t^2(e \otimes 1), \dots, \partial_t^q(e \otimes 1)$  ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\partial_t(e \otimes 1) = (\partial_t e) \otimes 1 + t \otimes \partial_t 1$$

$$\begin{aligned}
 &= (\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(t) \\
 &= (\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(t)(\mathbf{e} \otimes 1) \\
 \partial_t^2(\mathbf{e} \otimes 1) &= \partial_t((\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(t)(\mathbf{e} \otimes 1)) \\
 &= (\partial_t^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + (\partial_t \mathbf{e}) \otimes \psi'(t) + \psi''(t)(\mathbf{e} \otimes 1) + \psi'(t)((\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(t)) \\
 &= (\partial_t^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi''(t)(\mathbf{e} \otimes 1) + \psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(t)^2(\mathbf{e} \otimes 1) \\
 &= (\partial_t^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)(\mathbf{e} \otimes 1) \\
 &\vdots \\
 \partial_t^q(\mathbf{e} \otimes 1) &= (\partial_t^q \mathbf{e}) \otimes 1 + \lambda_{q-1}(\partial_t^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1 + \cdots + \lambda_1(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \lambda_0(\mathbf{e} \otimes 1)
 \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \otimes 1 \\ \partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_t^2(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_t^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_t^q(\mathbf{e} \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \psi'(t) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{q-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \otimes 1 \\ (\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 \\ (\partial_t^2 \mathbf{e}) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_t^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1 \\ (\partial_t^q \mathbf{e}) \otimes 1 \end{pmatrix}$$

Da bekanntlich  $\mathbf{e} \otimes 1, (\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1, (\partial_t^2 \mathbf{e}) \otimes 1, \dots, (\partial_t^q \mathbf{e}) \otimes 1$  linear unabhängig sind, gilt dies auch für  $\mathbf{e} \otimes 1, \partial_t(\mathbf{e} \otimes 1), \partial_t^2(\mathbf{e} \otimes 1), \dots, \partial_t^q(\mathbf{e} \otimes 1)$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Zerlege nun wie in Satz 2.27 den Meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$  wobei  $\mathcal{N}_i$  Meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. Twiste die  $\mathcal{N}_i$  jeweils mit  $\mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$  und somit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun Induktion anwenden.

## 5.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Als konkreten Fall betrachten wir nun  $\mathcal{M}_\varphi$  bezüglich  $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\
 &= -x^2 \underbrace{\partial_x x \partial_x}_{\partial_x^2} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^2 \underbrace{(x \partial_x + 1) \partial_x}_{\partial_x^3} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 - x^2 \partial_x + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 + a
 \end{aligned}$$

Erhalte daraus das Newton-Polygon mit den Slopes  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$ .

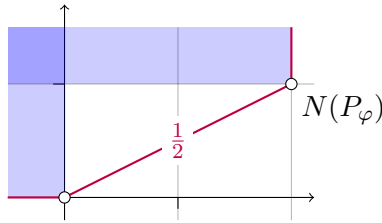


Abbildung 5.2: Newton Polygon zu  $P_\varphi$

Berechne nun zu  $\rho : t \mapsto x := -2t^2$  ein Minimalpolynom  $\rho^*P_\varphi$  zu  $\rho^+\mathcal{M}_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \rho^*P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t \partial_t - 2) + 2a \\ &= t^3 \partial_t t \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\ &= t^3 \overbrace{(t \partial_t + 1)} \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\ &= t^4 \partial_t^2 + t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\ &= t^4 \partial_t^2 - t^3 \partial_t + 2a \end{aligned}$$

und erhalte einen Meromorphen Zusammenhang  $\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^*P_\varphi$  mit genau dem Slope  $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ .

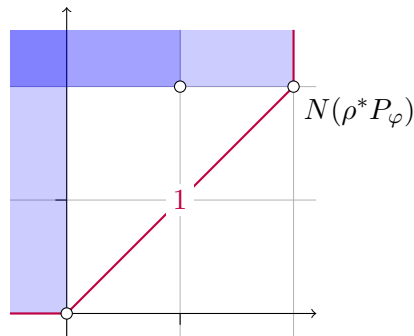


Abbildung 5.3: Newton Polygon zu  $\rho^*P_\varphi$

Definiere die Linearform  $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$ . Berechne nun die *Determinanten Gleichung*  $\sigma_\ell(\rho^*P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$  von  $\rho^*P_\varphi$ .

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(\rho^*P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j)|2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= t^4 \xi^2 + 2a \end{aligned}$$

Setze  $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$  so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^*P_\varphi) = \theta^2 + 2a$$



schreiben, welches wir als nächstes faktorisieren

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \theta^2 + 2a \\ &= (\theta - \underbrace{i\sqrt{2a}}_{=: \beta})(\theta + i\sqrt{2a})\end{aligned}$$

Setze  $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$  und betrachte den Twist  $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}^\psi$  von  $\rho^+ \mathcal{M}$ . Es ist  $\mathbf{e} \otimes 1$  ein zyklischer Vektor, wobei  $\mathbf{e}$  ein zyklischer Vektor von  $\rho^+ \mathcal{M}$  ist. Es ist

$$\begin{aligned}\partial_t^2(\mathbf{e} \otimes 1) &= \partial_t(\underbrace{\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1)}) \\ &= \partial_t((\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(t)) \\ &= (\underbrace{\partial_t^2 \mathbf{e}}_{\in K}) \otimes 1 + \underbrace{(\partial_t \mathbf{e}) \otimes \psi'(t) + (\partial_t \mathbf{e}) \otimes \psi'(t)}_{\in K} + \mathbf{e} \otimes \underbrace{((\frac{\partial}{\partial t} + \psi'(t))\psi'(t))}_{\in K} \\ &= (\underbrace{(t^{-1}\partial_t - 2at^{-4})\mathbf{e}}_{\in K}) \otimes 1 + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{(\psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1}_{\in K} \\ &= \underbrace{(t^{-1}\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1 - 2at^{-4}\mathbf{e} \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{(\psi''(t)\mathbf{e} \otimes 1 + \psi'(t)^2\mathbf{e} \otimes 1)}_{\in K} \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t)) \underbrace{(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1}_{\in K} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t)) \underbrace{(\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - \mathbf{e} \otimes \psi'(t))}_{\in K} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &= ((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1 \\ &= ((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2)\mathbf{e} \otimes 1\end{aligned}$$

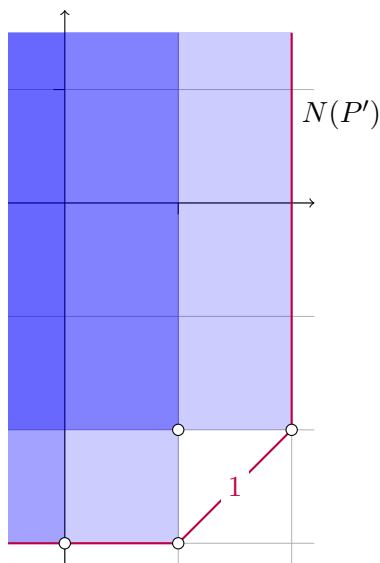
also

$$0 = \underbrace{\left( \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right)}_{=: P'} \mathbf{e} \otimes 1$$

und somit mit  $\psi(t) = i\sqrt{2a}t^{-1}$  ist  $\psi'(t) = -i\sqrt{2a}t^{-2}$  und  $\psi''(t) = 2i\sqrt{2a}t^{-3}$ . Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2a - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-3} + 2a - 2i\sqrt{2a}t^{-3} + \underbrace{(-i\sqrt{2a}t^{-2})^2}_{\in K} \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}\end{aligned}$$

mit, wie gewünscht, mehr als einem Slope.


 Abbildung 5.4: Newton Polygon zu  $\mathcal{N}$ 

Unser nächstes Ziel ist es,  $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P'$  in zwei Meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt  $P'(t, \partial_t) = Q_1(t, \partial_t) \cdot Q_2(t, \partial_t)$ .

Da der  $\partial_t$ -Grad von  $P'$  genau 2 ist, müssen die  $Q_i$  jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen.

*Beobachtung 5.5.* Ist  $Q_1$  und  $Q_2$  so ein solches Paar, dann ist für  $\sigma \in \widehat{K}$  das Paar  $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$  und  $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$  ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = \underbrace{Q_1 \cdot \sigma}_{\in \mathcal{D}_{\widehat{L}}} \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot Q_2}_{\in \mathcal{D}_{\widehat{L}}} = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2.$$

Mit der Beobachtung 5.5 ist klar, dass wir den Faktor vor den  $\partial_t$  in  $Q_2$  frei wählen können. Setze diesen also allgemein auf 1 und erhalte

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 := \partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \mathbb{C}[[t]]$$

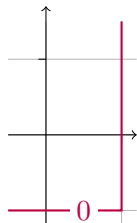
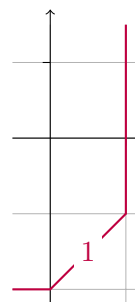
und somit ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2}at^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2}at^{-3} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Damit ist ebenfalls  $\bar{v}(t) = 1$ .

Durch das Wissen über die Slopes der  $Q_i$  erhalten wir noch Informationen über die Reihen  $v(t) := \sum_n v_n t^n$  bzw.  $u(t) := \sum_n u_n t^n$ . Die beiden Polynome  $Q_1$  und  $Q_2$  enthalten  $\partial_t$  als einziges Monom vom  $\partial_t$ -Grad 1, deshalb ist  $(1, -1)$  in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da  $Q_1$  nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 5.5 aussenen

und somit wissen wir, dass  $v_n = 0$  für alle  $n < -1$ . Da  $Q_2$  genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 5.6. Damit ist  $u_n = 0$  für alle  $n < -2$  und  $u_{-2} \neq 0$ .


 Abbildung 5.5: Newton-Polygon zu  $Q_1$ 

 Abbildung 5.6: Newton-Polygon zu  $Q_2$ 

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (5.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (5.2)$$

und mit den Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + [\partial_t, u_n t^n]) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + n u_n t^{n-1}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis nun in (5.2) einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \\ &= \partial_t^2 + \underbrace{\left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right)}_{\sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n} \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}}_{\sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n} + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (5.3) \\ &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \end{aligned}$$

Betrachte nun das Letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) = t^{-3} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} \right) t^{n-3} \\
 &= \sum_{n=-3}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n
 \end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (5.3) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \sum_{n=-3}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n}_{\text{}} \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left( (n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nun haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit der gewünschten Formel vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2a}t^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \tag{5.5}$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left( (n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \tag{5.6}$$

Nun können wir mit (5.5) und (5.6) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich machen und erhalten zunächst aus (5.5), dass

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \tag{5.7}$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \tag{5.8}$$

$$0 = u_n + v_n \quad \forall n \geq 0 \tag{5.9}$$

Als nächstes wollen wir dieses Ergebnis mit (5.6) kombinieren. Betrachte zunächst den Vorfaktor vor  $t^{-3}$ :

$$\begin{aligned}
 -3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1} u_{-3-k+1} \\
 &= -2u_{-2} + v_{-1} u_{-2} \\
 &\stackrel{(5.7)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1} 2i\sqrt{2a} \\
 \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned} \stackrel{(5.8)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} \\ &= u_{-1} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinem Koeffizienten vor  $t^n$  mit  $n > -3$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left( \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + v_{n+3-1} \underbrace{u_{n-(n+3)+1}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left( \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + v_{n+2} \overline{u_{-2}} \\ \Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= - \left( (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) \\ \Rightarrow v_{n+2} &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) \end{aligned}$$

und nach passendem Indexshift  $n+2 \rightarrow n$  folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\ &\stackrel{(5.7)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \end{aligned}$$

Zusammen mit  $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$ ,  $u_{-1} = -\frac{3}{2}$  und  $v_{-1} = \frac{1}{2}$  sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (5.10)$$

die Koeffizienten von  $v$  und  $u$  vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit  $\mathcal{E}^{-\psi(t)}$  zurücktwisten und erhalte damit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \oplus \mathcal{N}_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\ &= (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \oplus (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \end{aligned}$$

und, da  $Q_1$  regulär, ist  $\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$  bereits ein Elementarer Meromorpher Zusammenhang. Betrachte also noch  $\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2at}^{-2}) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t - i\sqrt{2at}^{-2} + u(t)) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + i\sqrt{2at}^{-2} + \underbrace{\sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n}_{\text{regulär}}) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \underbrace{\sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n}_{\text{regulär}}) \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \end{aligned}$$

Damit ist der Zweite Summand also auch ein Elementarer Meromorpher Zusammenhang. Also zerlegt sich  $\mathcal{M}$ , nach einem pull-back mit  $\rho : t \mapsto x = -2t^2$ , in

$$\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} = \left( \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \right) \oplus \left( \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \right).$$

Damit ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

### 5.2.1 Konvergenz der Summanden

Nun wollen wir noch prüfen, ob bei dieser Berechnung die Formalen Potenzreihen notwendig waren. Es ist klar, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \hat{L} \setminus L \quad \text{bzw.} \quad (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$$

Deshalb wollen wir die Potenzreihen  $v$  und  $u$  noch genauer betrachten, im besonderen deren konvergenzverhalten. Als Konvergenzkriterium betrachten wir den folgenden Satz

**Satz 5.6** (Wurzkriterium nach Cauchy). *Sei  $\sum_n a_n x^n$  eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

*Beweis.* siehe [Kno64, §18, Satz 94]. □

**Satz 5.7** (Quotientenkriterium). *Sei  $\sum_n a_n x^n$  eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends Konvergent.}$$

*Beweis.* TODO □

Aus (5.10) ergeben sich für  $n = 0$  die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 v_0 &= -\frac{1}{u_{-2}}((-1)u_{-1} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-k-1}) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \\
 &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\
 &\stackrel{(5.7)}{=} \frac{3i}{8\sqrt{2a}} = -u_0
 \end{aligned}$$

Für  $n > 0$  gilt  $v_{n-1} \stackrel{(5.9)}{=} -u_{n-1}$  und damit wollen wir die Formel noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt.

$$\begin{aligned}
 v_n &= -\frac{1}{u_{-2}}\left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\underbrace{(n-1)u_{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + v_{-1} \underbrace{u_{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{u_{n-k-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}}\right)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + v_{n-1}u_{-1}\right) \\
 &\stackrel{(5.9)}{=} -\frac{1}{u_{-2}}\left(\underbrace{-(n-1)v_{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + v_{-1} \underbrace{(-v_{n-1})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{(-v_{n-k-1})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}}\right)}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + \underbrace{v_{n-1}u_{-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}}\right) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\underbrace{-(n-1)v_{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} - \underbrace{\frac{1}{2}v_{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} - \underbrace{\frac{3}{2}v_{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}}\right) \\
 &= \frac{1}{u_{-2}}\left(\left(n-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1}\right) \\
 &= \frac{1}{u_{-2}}\left((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1}\right)
 \end{aligned}$$

Also, zu gegebenem  $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$ , sind die Koeffizienten gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 v_{-1} &= \frac{1}{2} & u_{-1} &= -\frac{3}{2} \\
 v_0 &= -u_0 = -\frac{3}{4u_{-2}} \\
 v_n &= -u_n = \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) & \forall n > 0
 \end{aligned}$$

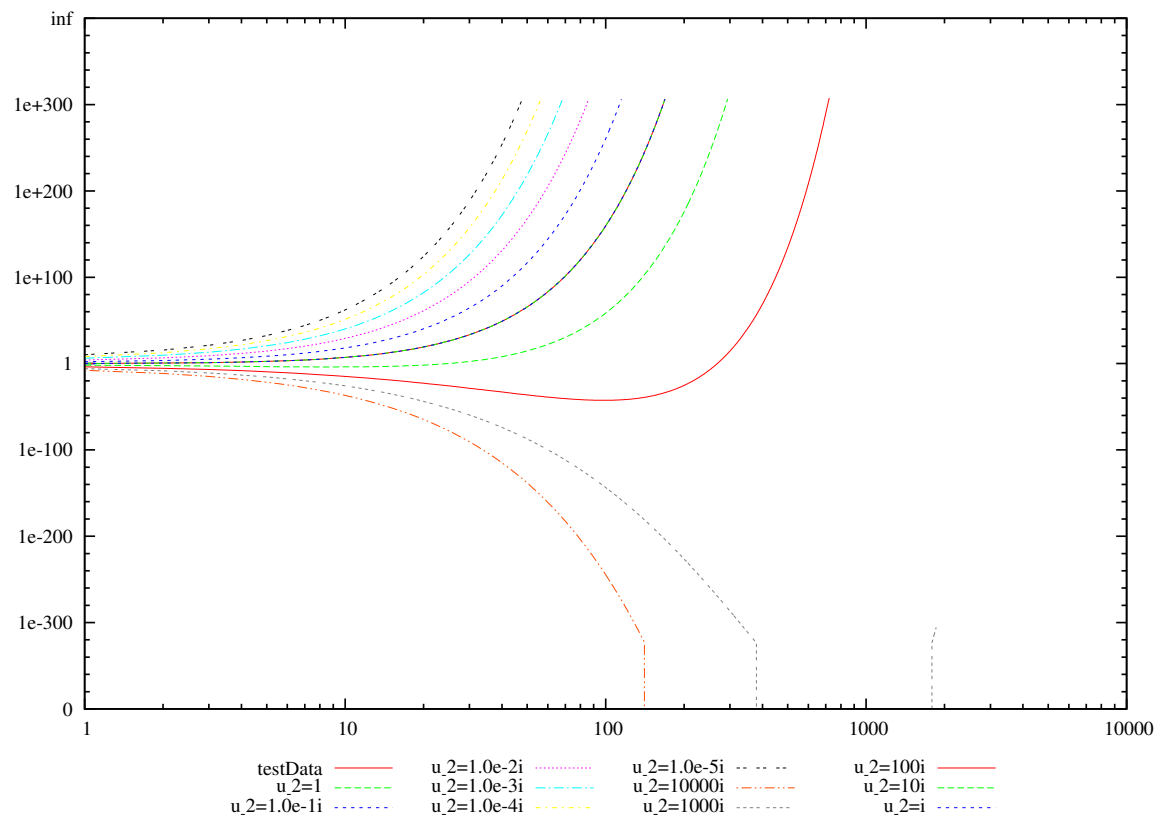
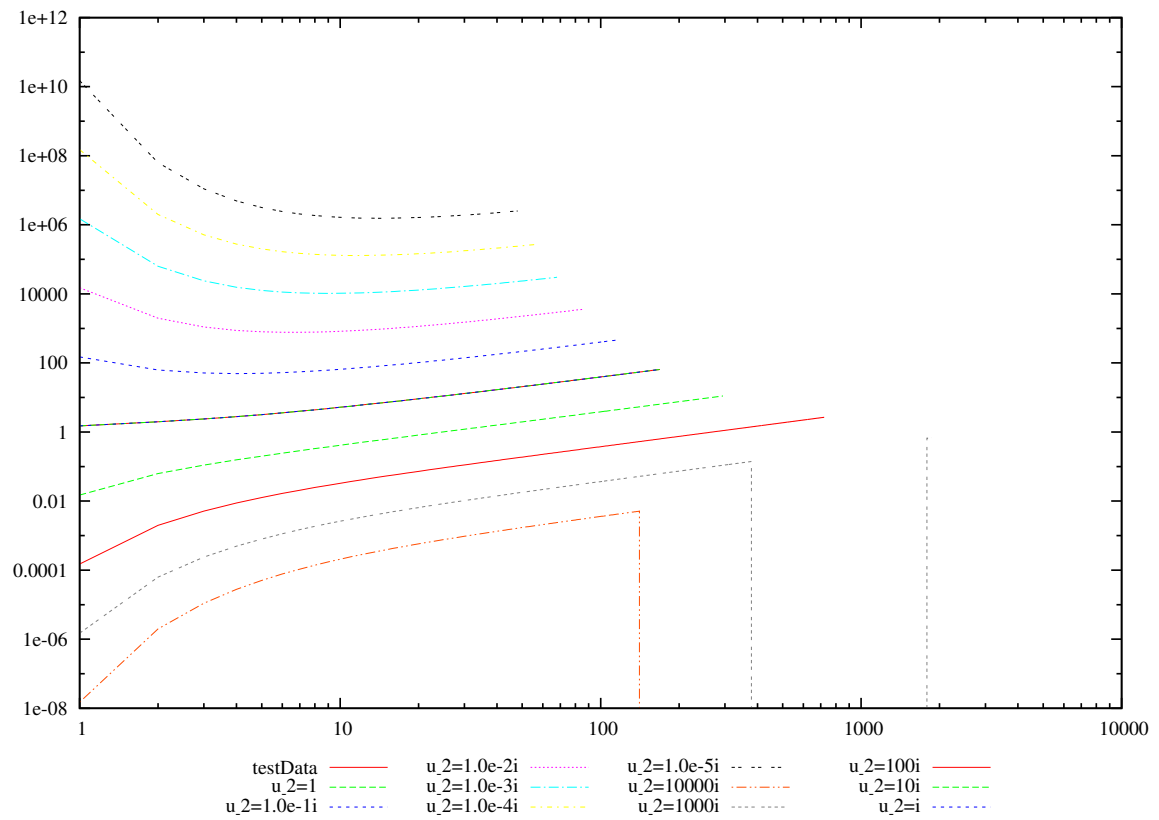
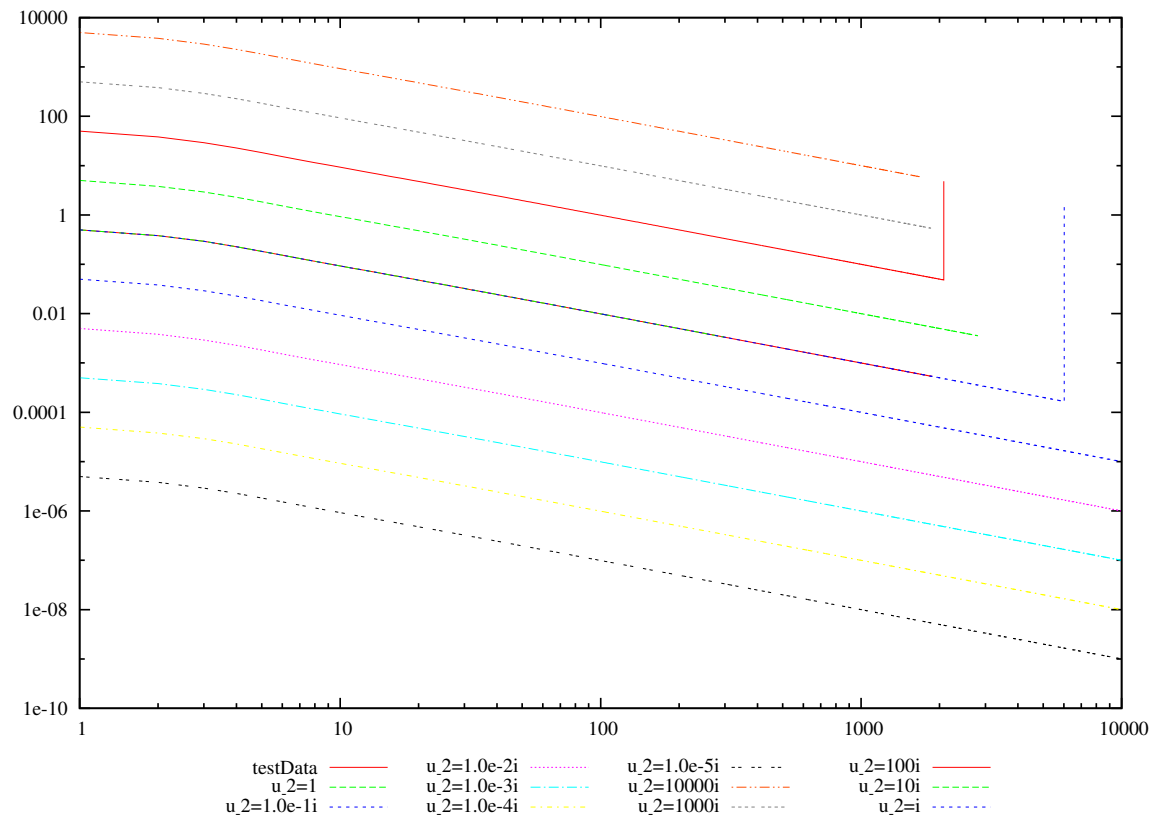


Abbildung 5.7: Die Beträge der Koeffizienten für unterschiedliche  $a$







## A Aufteilung von $t\varphi'(t)$

Sei  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , so ist  $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}t^{-i} \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$  also  $u\varphi'(t) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1}t^{-i} \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , welches wir zerlegen wollen. Zerlege also  $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p)$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \psi_0(t^p) & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 t\varphi'(t) = & a_{-2}t^{-1} & + \dots + & a_{-p}t^{-(p-1)} & + & a_{-(p+1)}t^{-p} & + & a_{-(p+2)}t^{-(p+1)} & + \dots + & a_{-(2p+1)}t^{-2p} & + & a_{-(2p+3)}t^{-(2p+1)} & + \dots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & \cdots & t\psi_1(t^p) & & & & & & 
 \end{array}$$

also:

$$\begin{aligned}
 \psi_0(t^p) &= a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + \dots \\
 \psi_1(t^p) &= a_{-p}t^{-p} + a_{-2p}t^{2p} + \dots \\
 &\vdots \\
 \psi_{p-1}(t^p) &= a_{-2}t^p + a_{-(p+2)}t^{2p} + \dots
 \end{aligned}$$

## B Genaueres zu $(x^2\partial_x)^k$

Nun wollen wir noch  $(x^2\partial_x)^{k+1}$  besser verstehen.

$$\begin{aligned}
(x^2\partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(2x + x^2\partial_x)} (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= x^2 (2x + x^2\partial_x) \partial_x (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2) (x^2\partial_x)^{k-1} \\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2) (x^2\partial_x) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(2x + x^2\partial_x)} + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2 \partial_x}_{(2x\partial_x + 1 + x^2\partial_x^2)}) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (2x^3 (2x + x^2\partial_x) \partial_x + x^4 (2x\partial_x + 1 + x^2\partial_x^2) \partial_x) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (4x^4\partial_x + 2x^5\partial_x^2 + 2x^5\partial_x^2 + x^4\partial_x + x^6\partial_x^3) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= (5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3) (x^2\partial_x)^{k-2} \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
\end{aligned}$$

also gilt für spezielle  $k$

$$(x^2\partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

## C Numerische berechnung der Koeffizienten

Hier nun ein Haskell Programm, dass in der Funktion **main** die Koeffizienten von  $v$  und  $u$  für Abschnitt 5.2.1 numerisch berechnet. Für die beispielhaften Berechnungen hier, wählen wir  $a = \frac{1}{8}$ , dadurch gilt  $u_{-2} = i$ .

```
1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
4
5  -- parallel
6  import qualified Control.Monad.Parallel as P
7
8  -- for writing to file
9  import System.Environment
10 import System.IO
11 import Data.Time
12
13 -- returns array with the coefficients of v(t)
14 -- first element in array is koefficient from t^{-1}
15 vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
16 vKoeffs uMin2 = 1/2:+:0 : [vKoeff i|i <- [0..]]
17   where
18     -- returns n-th coefficient of v(t)
19     vKoeff :: Int -> ComplRat
20     vKoeff = memo vKoeff'
21     vKoeff' :: Int -> ComplRat
22     vKoeff' n | n > 0 = (vKoeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
23                | n == 0 = -3/(uMin2*4)
24                | n == -1 = 1/2
25                | otherwise = 0
26                where summe = sum [vKoeff (k-1)*(vKoeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
27
28     -- returns n-th coefficient of u(t)
29     uKoeff :: Int -> ComplRat
30     uKoeff n | n == -2 = uMin2
31                | n == -1 = -3/2
32                | otherwise = -(vKoeff n)
33
34 -- returns array with the coefficients of u(t)
35 -- first element in array is koefficient from t^{-2}
36 uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
37 uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2:+:0 : (tail $ vKoeffs uMin2)
38
39 printData :: Int -> ComplRat -> IO()
40 printData end uMin2 = mapM_ addLine $ take end $ zip3 [0..] (tail vals) vals
41   where vals = vKoeffs uMin2
42         addLine a = putStr $ genLine a
43
44 genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
45 genLine (i,v1,v2) = concat [ show i , "\t"
46                             , show $ betrag (i,v1,v2) , "\t"
47                             , show $ (cauchy (i,v1,v2)) , "\t"
48                             , show $ quot (i,v1,v2) , "\n" ]
49   where toDbl x = fromRational x :: Double
50         betrag (_,v,_) = fromRational $ magnitude v
```

```

51     cauchy (i,v,_) = (fromRational $ magnitude v)**(1/(fromIntegral i))
52     quot (_,v1,v2) = sqrt $ toDb1 $ (magnitudeSq v2) / (magnitudeSq v1)
53
54 -- #####
55
56 main :: IO()
57 main = do x <- getArgs
58         P.sequence_ (funcs $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
59     where funcs x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"      , (0:+:1))
60                                       {-, ("./data/u_-2=-i"   , (0:+:(-1))) -}
61                                       {-, ("./data/u_-2=1"     , (1:+:0)) -}
62                                       {-, ("./data/u_-2=-1"   , (-1:+:0)) -}
63                                       {-, ("./data/u_-2=10000i"  , (0:+:10000)) -}
64                                       {-, ("./data/u_-2=1000i"   , (0:+:1000)) -}
65                                       {-, ("./data/u_-2=100i"    , (0:+:100)) -}
66                                       {-, ("./data/u_-2=10i"     , (0:+:10)) -}
67                                       , ("./data/u_-2=1.0e-1i" , (0:+:1.0e-1))
68                                       , ("./data/u_-2=1.0e-2i" , (0:+:1.0e-2))
69                                       , ("./data/u_-2=1.0e-3i" , (0:+:1.0e-3))
70                                       , ("./data/u_-2=1.0e-4i" , (0:+:1.0e-4))
71                                       , ("./data/u_-2=1.0e-5i" , (0:+:1.0e-5))
72                                       ]
73
74 testPrintData = printData 100 (0:+:1)
75 testSaveData  = saveData 100 ("./data/u_-2=i", (0:+:1))
76
77 saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
78 saveData end (fn, uMin2) =
79     do start <- getCurrentTime
80         withFile fn WriteMode (\handle -> do
81             hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
82         stop <- getCurrentTime
83         putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
84     where vals      = vKoeffs uMin2
85           triples   = zip3 [0..] (tail vals) vals

```

Ist der Code in einer Datei **/Pfad/zu/koeff.hs** gespeichert, so lässt er sich in Unix-Artigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen.

```

1  #!/bin/sh
2  max=$1
3
4  if false; then
5      ghc --make -threaded ./koeff.hs
6      mkdir -p ./data
7      ./koeff $max +RTS -N3
8  fi
9
10 if true; then
11     art[2]="betrag"; art[3]="cauchy"; art[4]="quot";
12     for i in 2 3 4; do
13         name="${art[i]}"
14         gnuplot << EOF
15     set samples 1001
16     set key below
17
18     set term push
19     set term post enh color lw 1 12 "Times-Roman"
20     set output "${name}.eps"
21
22     set log xy
23     plot for [fn in `system("ls data/*")`] fn every ::0::${max} using 1:${i} with lines title
24         system("basename ".fn)
25 EOF
26     epstopdf "${name}.eps" --outfile "../img/${name}.pdf"

```

```

26     rm "${name}.eps"
27     done
28 fi

```

Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von  $v$  und  $u$  bis zum Index 15 sowie einzelne Werte an 20, 30, 40, 50, 100 und 150 und produziert einen Ausgang, der wie folgt aussieht

```

1  n      | v_n      u_n
2  -----+-----
3 -2      | 0.0 :+ 0.0      0.0 :+ 1.0
4 -1      | 0.5 :+ 0.0      (-1.5) :+ (-0.0)
5 0       | (-0.0) :+ 0.75   0.0 :+ (-0.75)
6 1       | 1.5 :+ 0.0      (-1.5) :+ (-0.0)
7 2       | 0.0 :+ (-3.9375) (-0.0) :+ 3.9375
8 3       | (-13.5) :+ (-0.0) 13.5 :+ 0.0
9 4       | 0.0 :+ 59.34375   (-0.0) :+ (-59.34375)
10 5      | 324.0 :+ 0.0      (-324.0) :+ (-0.0)
11 6      | 0.0 :+ (-2122.98046875) (-0.0) :+ 2122.98046875
12 7      | (-16213.5) :+ (-0.0) 16213.5 :+ 0.0
13 8      | 0.0 :+ 141115.447265625 (-0.0) :+ (-141115.447265625)
14 9      | 1376311.5 :+ 0.0      (-1376311.5) :+ (-0.0)
15 10     | 0.0 :+ (-1.4850124677246094e7) (-0.0) :+ 1.4850124677246094e7
16 11     | (-1.75490226e8) :+ (-0.0) 1.75490226e8 :+ 0.0
17 12     | 0.0 :+ 2.2530628205925293e9 (-0.0) :+ (-2.2530628205925293e9)
18 13     | 3.1217145174e10 :+ 0.0      (-3.1217145174e10) :+ (-0.0)
19 14     | 0.0 :+ (-4.641652455250599e11) (-0.0) :+ 4.641652455250599e11
20 15     | (-7.3709524476135e12) :+ (-0.0) 7.3709524476135e12 :+ 0.0
21 20     | 0.0 :+ 1.753906248830001e19 (-0.0) :+ (-1.753906248830001e19)
22 30     | 0.0 :+ (-2.7520294973343126e33) (-0.0) :+ 2.7520294973343126e33
23 40     | 0.0 :+ 1.1055855646065139e49 (-0.0) :+ (-1.1055855646065139e49)
24 50     | 0.0 :+ (-5.0878905001062135e65) (-0.0) :+ 5.0878905001062135e65
25 100    | 0.0 :+ 3.045728894141079e159 (-0.0) :+ (-3.045728894141079e159)
26 150    | 0.0 :+ (-2.7737283214890534e264) (-0.0) :+ 2.7737283214890534e264

```

In Haskell ist das `:+` ein Infix-Konstruktor der Klasse **Data.Complex**. So erzeugt ein Aufruf der Form `a :+ b` eine Imaginärzahl, die  $a + ib$  entspricht.

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise sieht das Ergebnis also wie folgt aus:

n	$v_n$	$u_n$
-2	0	$i$
-1	0,5	-1,5
0	0,75 <i>i</i>	-0,75 <i>i</i>
1	1,5	-1,5
2	-3,9375 <i>i</i>	3,9375 <i>i</i>
3	-13,5	13,5
4	59,34375 <i>i</i>	-59,34375 <i>i</i>
5	324,0	-324,0
6	-2122,98046875 <i>i</i>	2122,98046875 <i>i</i>
7	-16213,5	16213,5
8	141115,447265625 <i>i</i>	-141115,447265625 <i>i</i>
9	1376311,5	-1376311,5
10	-1,4850124677246094 · 10 <sup>7</sup> <i>i</i>	1,4850124677246094 · 10 <sup>7</sup> <i>i</i>
11	-1,75490226 · 10 <sup>8</sup>	1,75490226 · 10 <sup>8</sup>
12	2,2530628205925293 · 10 <sup>9</sup> <i>i</i>	-2,2530628205925293 · 10 <sup>9</sup> <i>i</i>
13	3,1217145174 · 10 <sup>10</sup>	-3,1217145174 · 10 <sup>10</sup>
14	-4,641652455250599 · 10 <sup>11</sup> <i>i</i>	4,641652455250599 · 10 <sup>11</sup> <i>i</i>
15	-7,3709524476135 · 10 <sup>12</sup>	7,3709524476135 · 10 <sup>12</sup>
⋮	⋮	⋮
20	1.753906248830001 · 10 <sup>19</sup> <i>i</i>	-1.753906248830001 · 10 <sup>19</sup> <i>i</i>
⋮	⋮	⋮
30	-2.7520294973343126 · 10 <sup>33</sup> <i>i</i>	2.7520294973343126 · 10 <sup>33</sup> <i>i</i>
⋮	⋮	⋮
40	1.1055855646065139 · 10 <sup>49</sup> <i>i</i>	-1.1055855646065139 · 10 <sup>49</sup> <i>i</i>
⋮	⋮	⋮
50	-5.0878905001062135 · 10 <sup>65</sup> <i>i</i>	5.0878905001062135 · 10 <sup>65</sup> <i>i</i>
⋮	⋮	⋮
100	3.045728894141079 · 10 <sup>159</sup> <i>i</i>	-3.045728894141079 · 10 <sup>159</sup> <i>i</i>
⋮	⋮	⋮
150	-2.7737283214890534 · 10 <sup>264</sup> <i>i</i>	2.7737283214890534 · 10 <sup>264</sup> <i>i</i>
⋮	⋮	⋮

Tabelle C.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von  $u(t)$  und  $v(t)$  für  $a = \frac{1}{8}$



# Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on  $d$ -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov,  *$D$ -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for  $d$ -modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic  $d$ -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott,  *$D$ -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer  $D$ -Moduln und Fouriertransformation*, 2010.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki,  *$D$ -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Hut07] Graham Hutton, *Programming in Haskell*, Cambridge University Press, January 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara,  *$D$ -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [Kno64] Konrad Knopp, *Theorie und anwendung der unendlichen reihen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1964.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to  $d$ -modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.