

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 16. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| Einleitung | iv |
| I Theorie | 1 |
| 1 Mathematische Grundlagen | 2 |
| 1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra | 2 |
| 1.2 Weiterführende Definitionen | 3 |
| 1.3 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D} | 3 |
| 1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring | 6 |
| 1.4 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D} | 6 |
| 1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules | 6 |
| 1.6 Lokalisierung eines holonomen \mathcal{D} -Modules | 6 |
| 2 Der Meromorphe Zusammenhang | 7 |
| 2.1 Definition | 7 |
| 2.2 Eigenschaften | 7 |
| 2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge | 9 |
| 2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge | 9 |
| 3 Levelt-Turittin-Theorem | 10 |
| II Beispiele | 14 |
| 4 Beispiele/Anwendung | 15 |
| 4.1 Einfache Beispiele | 15 |
| 4.1.1 erstes | 15 |
| 4.1.2 zweites | 16 |

| | | |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.1.3 | drittes | 16 |
| 4.1.4 | viertes | 17 |
| 4.1.5 | fünftes - bsp e | 18 |
| 4.1.6 | Einfaches Beispiel | 21 |
| 4.2 | Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zuerfällt . . . | 22 |
| Anhang | | 22 |
| A Aufteilung von ... | | 23 |

Einleitung

Teil I

Theorie

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [5] und [1] beziehen.

1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$.

Lemma 1.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese Graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Firation, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ ist ein Unterring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.

ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

1.2 Weiterführende Definitionen

Definition 1.2 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der Kommutator von a und b genannt.

Definition 1.3 (pull-back). Der pull-back ρ^+M ist der Vektorraum $\rho^*M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$ mit dem pull-back Zusammenhang $\rho^*\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun N ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung

Definition 1.4 (push-forward). Der push-forward ρ_+N ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR ρ_*N ist der \mathbb{C} -VR N mit der $\mathbb{C}((t))$ Struktur durch $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$

Satz 1.5. es gilt dir Projektionsformel

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+M) \cong \rho_+N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \quad (1.1)$$

1.3 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [5, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$). Man hat die

folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.6 (Weyl Algebra). Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra \mathcal{D} von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] < \partial_x >$) verwenden.

Lemma 1.7. *Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition*

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

definieren auf A eine Ringstruktur $(A, +, \cdot)$.

Beweis. Zula Barbara: Kapittel 2 section 1 □

Bemerkung 1.8. $A_1(\mathbb{C})$, \mathcal{D} und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Lemma 1.9. *Es gelten die Formeln*

$$\begin{aligned} [\partial_x, x^k] &= kx^{k-1} \\ [\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1} \\ [\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \end{aligned}$$

Beweis. Zula Barbara □

Proposition 1.10. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [5, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Definition 1.11. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.12. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringen

1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A \langle \partial_x \rangle$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A \langle \partial_x \rangle)$ bezeichnen werden. Sei P ein bzgl. 1.10 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k . So definiere den Grad $\deg P$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle / F_{k-1} \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.4 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D} **1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules****1.6 Lokalisierung eines holonomen \mathcal{D} -Modules**

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [5]

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vr
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.2. Später wird man auf die angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M} als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

Lemma 2.3. *Sei (\mathcal{M}, ∂) ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M} , also in der Situation*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M} \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1}\partial\varphi} & K^r
 \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen)

□

Sind ∂_1 und ∂_2 zwei Meromorphe Zusammenhänge auf $\mathcal{M}_K \cong K^r$. So betrachte $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$:

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

Lemma 2.4. *Da $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear und, wie eben gezeigt, $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ allgemein gilt: Die differenz zweier Meromorpher Zusammenhänge ist K -linear.*

Insbesondere ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.5 (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 \uparrow & \searrow \varphi \cong & & & \uparrow \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 \uparrow \cong T & & \swarrow \psi \cong & & \uparrow T \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.6. $A \sim B$ differenziell Äquivalent $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$ mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$$

$$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$$

2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.7 (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *Formaler Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler \hat{K} -Vr
- eine *Derivation* ∂ , für die die *Leibnitzregel* (2.1), für alle $f \in \hat{K}$ und $u \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$, erfüllt sein soll.

Oder einfach ein Meromorpher Zshg. über anderes K also \hat{K}

2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.8 (Elementarer formaler Zusammenhang). Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E} \otimes R)$$

3 Levelt-Turittin-Theorem

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4 [4]

Lemma 3.1. $\rho : u \mapsto u^p$, $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$, für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ [2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$u\partial_u e_k = u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e)$$

$$^{[1]} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$$

$$^{[2]} P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \underbrace{\partial_t(u^k e)}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi}) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, \dots, u\partial_u e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{O}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$ [3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in GL_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned} T \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (u^p) D^j \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} [4] \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow[\cong]{} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$ ein Äquivalenter Memorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Teil II

Beispiele

4 Beispiele/Anwendung

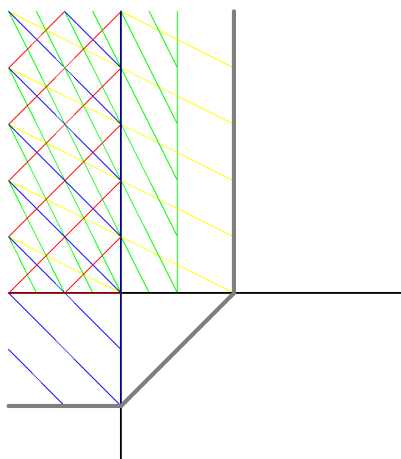
4.1 Einfache Beispiele

4.1.1 erstes

$$P_a = t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + (t^2 - n^2) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

Mit: $\alpha_{2,2} = 1$, $\alpha_{1,1} = 1$, $\alpha_{0,2} = t^2$ und $\alpha_{0,0} = n^2$

$$P_a = t^2 \partial_t^2 + t \partial_t + (t^2 - n^2) \Rightarrow \begin{cases} k=2, l=2 & \Rightarrow u \leq k=2, v \geq l-k=0 \\ k=1, l=1 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 0 \\ k=0, l=0 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \\ k=0, l=-2 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 2 \end{cases}$$

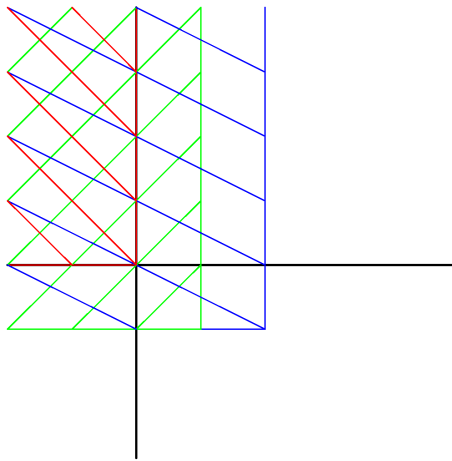


also $\text{slopes}(P_a) = \{1\}$

4.1.2 zweites

$$P_b = t\partial_t^2 + 2\partial_t - 1$$

$$P_b = t\partial_t^2 + 2\partial_t - 1 \Rightarrow \begin{cases} k=2, l=1 & \Rightarrow u \leq k=2, v \geq l-k=-1 \\ k=1, l=0 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq -1 \\ k=0, l=0 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \end{cases}$$



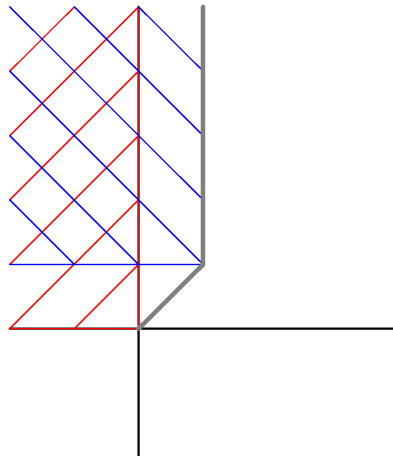
also $\text{slopes}(P_b) = \{0\}$ also ist P_b regulär singular

4.1.3 drittes

zula Barbara Seite 46

$$P_c = t^2\partial_t + 1$$

$$P_c = t^2\partial_t + 1 \Rightarrow \begin{cases} k=1, l=2 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 1 \\ k=0, l=1 & \Rightarrow u \leq 0, v \geq 0 \end{cases}$$



also $\text{slopes}(P_c) = \{1\}$.

4.1.4 viertes

zula Barbara Seite 46

Original aus der Zula:

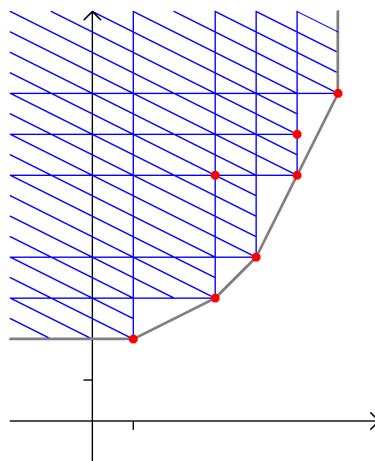
$$P_d = -3t^{14}\partial_t^6 + t^{11}(t+3)\partial_t^5 + 2t^8\partial_t^4 - t^6(t^3+1)\partial_t^3 + t^4\partial_t$$

$$P_d \Rightarrow \begin{cases} k=6, l=14 & \Rightarrow u \leq k=6, v \geq l-k=8 \\ k=5, l=12 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 7 \\ k=5, l=11 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 6 \\ k=4, l=8 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 4 \\ k=3, l=9 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 6 \\ k=3, l=6 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 3 \\ k=1, l=4 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 3 \end{cases}$$

also ist Abbildung 5.8 auf seite 53 der zula falsch?

$$P_d = -3t^{14}\partial_t^6 + t^{11}(t+3)\partial_t^5 + 2t^8\partial_t^4 - t^6(t^3+1)\partial_t^3 + t^3\partial_t$$

$$P_d \Rightarrow \begin{cases} k=6, l=14 & \Rightarrow u \leq 6, v \geq l-k=8 \\ k=5, l=12 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 7 \\ k=5, l=11 & \Rightarrow u \leq 5, v \geq 6 \\ k=4, l=8 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 4 \\ k=3, l=9 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 6 \\ k=3, l=6 & \Rightarrow u \leq 3, v \geq 3 \\ k=1, l=3 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq 2 \end{cases}$$



also $\text{slopes}(P_b) = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ also ist P_d irregulär singulär.

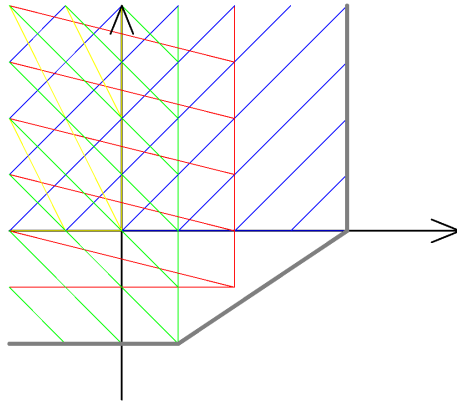
Offenbar ist der Hauptnenner der Steigungen gleich 2.

Betrachte also $\rho : t \mapsto u^2$

und erhalte: ???

4.1.5 fünftes - bsp e

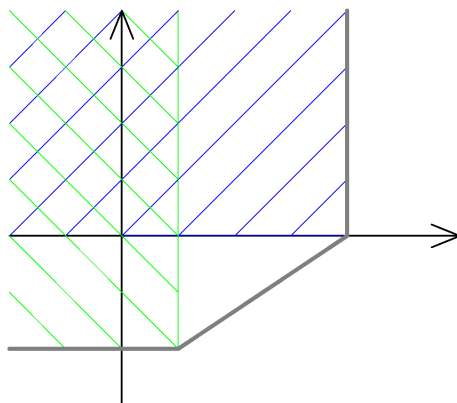
Für $P_e = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ sieht das Newton-Polygon wie folgt aus:



also sind die Slopes $\text{slopes}(P_e) = \{0, \frac{2}{3}\}$.

Dies gilt Analog für das *einfachere*:

$$\bar{P}_e = t^4 \partial_t^4 + \frac{1}{t} \partial_t$$



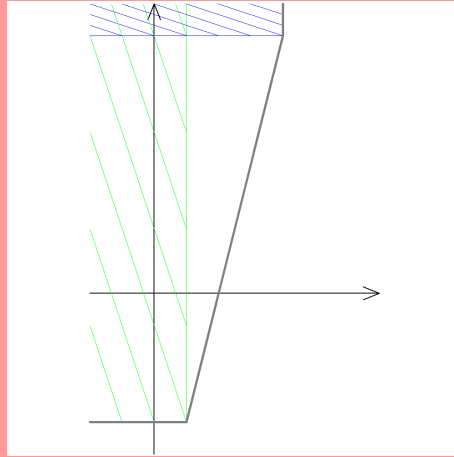
Also offensichtlich gilt $\text{slopes}(\bar{P}_e) = \{0, \frac{2}{3}\}$, also haben die Slopes den Hauptnenner 3, deshalb mache einen Pullback mit $\rho : t \mapsto u^3$

Versuch:

$$\rho^+ \bar{P}_e = u^{12} \partial_u^4 + \frac{1}{u^3} \partial_u$$

FALSCH: $\partial_t \not\mapsto \partial_u$

$$\rho^+ \bar{P}_e \Rightarrow \begin{cases} k=4, l=12 & \Rightarrow u \leq 4, v \geq 8 \\ k=1, l=-3 & \Rightarrow u \leq 1, v \geq -4 \end{cases}$$

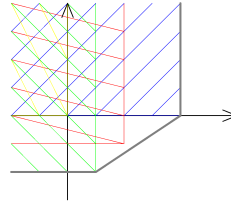


zu steil

4.1.6 Einfaches Beispiel

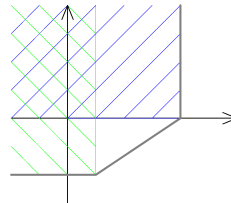
Neuer start (der Weg zu einem leichten Beispiel): Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



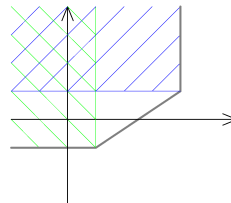
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit t und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [5, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$



und es gilt $\text{slopes}(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$. Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich $\rho : t \mapsto u^3$ für den Pullback an.

Dieser Pullback Multipliziert (indirekt) die Slopes mit 3, **Quelle?**
aber wie wendet man ihn (explizit) an?

$$\rho^+P = ???$$

welches die Slopes $\text{slopes}(\rho^+P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$ hat. Schreibe nun dieses $\rho^+P = Q \cdot R$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[[u]]$ wobei gilt $\text{slopes}(Q) = \{0\}$ und $\text{slopes}(R) = \{2\}$.

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zueffällt

Quellen??

$$\sum n! x^n$$

Weiteres Beispiel:

$$Sabbah_Fourier - local.pdf \rightarrow 5.b.$$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-(i-1)}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$\begin{array}{c}
 u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots \\
 \begin{array}{c}
 \text{---} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \text{---} u\psi_1(u^p) \text{---} \psi_0(u^p) \text{---} \\
 \text{---} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \text{---} u\psi_1(u^p) \text{---} \psi_0(u^p) \text{---}
 \end{array}
 \end{array}$$

also:

$$\psi_0(u^p) = a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots$$

$$\psi_1(u^p) = a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots$$

\vdots

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$

Literaturverzeichnis

- [1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [4] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal fourier-laplace transform. Paper.
- [5] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.
- [6] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform. *ArXiv e-prints*, June 2007.