Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik
der
Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 25. November 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [4] und [1] beziehen.

1.1 Einige Ergebnise aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i | \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Lemma 1.1 (Seite 2)**.** *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ *ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.*

   alle Ideale haben die form $(x - a)$ *mit* $, a \in \mathbb{C}$

2. *wenn* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* $\mathbb{C}[x]$ *(erzeugt von* x *ist), so ist*

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_{k} \mathbb{C}[X] \backslash \mathfrak{m}^k$$

   The ring $\mathbb{C}[[x]]$ *ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term* $\neq 0$ *ist invertierbar.*

   Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

   Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt $\mathfrak{m}$*-adische Fitration, ist die Filtrierung* $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

   und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ *ist ein Untering der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.*

   ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

Definition 1.2 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der *Kommutator von a und b* genannt.

1.2 Weiterführende Definitionen

Definition 1.3 (pull-back)**.** Der *pull-back* $\rho^+ M$ ist der Vektorraum $\rho^* M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$ mit der *pull-back Verknüpfung(connection)* $\rho^* \nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun N ein $\mathbb{C}((u))$-VR mit Verknüpfung

Definition 1.4 (push-forward)**.** Der *push-forward* $\rho_+ N$ ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$-VR $\rho_* N$ ist der $\mathbb{C}$-VR N mit der $\mathbb{C}((t))$ Struktur durch $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^- 1 \partial_u$

Satz 1.5. *es gilt dir Projektionsformel*

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ M) \cong \rho_+ N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \tag{1.1}$$

TEST für ref
1.5
TEST für eqref
(1.1)

1.3 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [4, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei f $\in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[\![x]\!]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.2}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.6 (Weyl Algebra)**.** Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra $\mathcal{D}$ von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} = \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[x]] < \partial_x >$) verwenden.

countinho's ansicht: Sei $K\{z_1, ..., z_{2n}\}$ eine freie Algebra in $2n$ variablen. Die Multiplikation von zwei Monomen ist als einfaches Nebeneinanderschreiben Definiert. Betrachte nun den folgenden Homomorphismus:

$$\varphi : K\{z_1, ..., z_{2n}\} \to A_n$$

mit $\varphi(z_i) = x_i$ und $\varphi(z_{i+n}) = \partial_i$ für $i \in \{1, .., n\}$.
Sei J das (two sided) Ideal von $K\{x_1, .., x_{2n}\}$ generiert durch:

- $[z_{i+n}, z_i] - 1$ für $i = 1, ..., n$
- $[z_i, z_j]$ für $j \neq i + n$ und $1 \leq i, j \leq 2n$

So dass φ einen homomorphismus

$$\varphi : K\{z_1, ..., z_{2n}\}/J \to A_n$$

induziert.

Bemerkung 1.7. $A_1(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Lemma 1.8. *Es gelten die Formeln*
$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$
$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$
$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i}$

Beweis. Zula Barbara □

Proposition 1.9. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [4, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exersice"

□

Definition 1.10. Sei $\deg P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$ bzgl. n minimal geschrieben, so ist $\deg P := n$ der *Grad von P*. So definiere $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ und erhalte die aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. mit isom: $[P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$

□

Proposition 1.11. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} \;:=\; \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} \;=\; \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \;\cong\; \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \;\cong\; \mathbb{C}\{x\}[\xi] \;=\; \bigoplus_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$$

$$\cong$$

Isom. von grad. Ringen

1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A < \partial_x >$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A < \partial_x)$ bezeichen werden. Sei P ein bzgl. 1.9 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k. So definiere den Grad $degP$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_k A < \partial_x > /F_{k-1} < \partial_x >$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.4 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$

1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$-Modules

1.6 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$-Modules

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [4]

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *Meromorpher zusammenhang* (Bzw. besser *Keim eines Meromorphen Zusammenhangs*) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vr
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation*. Wobei für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*
$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$
erfüllt sein soll.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften von Meromorphen Zusammenhängen.

Lemma 2.2. *Sei (M, ∂) ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M} \\ K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\partial\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) $\square$

Sind ∂_1 und ∂_2 zwei Meromorphe Zusammenhänge auf $\mathcal{M}_K \cong K^r$. So betrachte $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$:

$$\begin{aligned}(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)\end{aligned}$$

Lemma 2.3. *Da $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear und, wie eben gezeigt, $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ allgemein gilt: Die differenz zweier Meromorpher Zusammenhäge ist K-linear.*

Insbesondere ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.4 (Transformationsformel)**.** In der Situation

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\varphi", "\cong"'] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi"', "\cong"] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.5. $A \sim B$ differenziell Äquivalent $:\Leftrightarrow T \in GL(r, K)$ mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$
$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

3 Weiterführende Aussagen

Lemma 3.1. *$\rho : u \mapsto u^p$, $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$, für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt*

$$\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p = 1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[j^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \xi^\varphi})) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1}\varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e
\end{aligned}$$

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p)(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}
$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j]$$

denn:

$$
\begin{aligned}
u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1}) \\
&= (\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p})_{k\in\{0,..,p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\
u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\
u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\
u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\
u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)
\end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j]
\end{aligned}
$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$[3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$
\begin{aligned}
T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\
&= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j]
\end{aligned}
$$

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^{p-1})^j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \quad [4]$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht dann die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}$ aus?

$$\begin{tikzcd}
e_i \arrow[d, mapsto] & \rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, mapsto, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\overset{T}{\cong}"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbf{e} \arrow[d, mapsto] \\
\partial_u e_i & \rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\overset{T}{\cong}"'] \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} & \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j] \\
 & ? & (...,0,1,0,...) \arrow[l, mapsto] & (...,0,1,0,...) \arrow[r, mapsto] & (...,0,1,0,...) &
\end{tikzcd}$$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \ldots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \ldots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \ldots$$

$\psi_0(u^p)$

$u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)$ $\quad u\psi_1(u^p)$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \ldots \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \ldots \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^{p} + a_{-(p+2)}u^{2p} + \ldots
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[4] Claude Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.