Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik
der
Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 23. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Wobei offensichtlich $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ gilt.

Es bezeichnet der Hut (ˆ) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 1.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. *$\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.*

   alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. *wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist*

   $$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \backslash \mathfrak{m}^k$$

   The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt $\mathfrak{m}$*-adische Fitration, ist die Filtrierung* $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Definition 1.2 (Direkte Summe)**.** [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
 & & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.3 (Tensorprodukt)**.** [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

Definition 1.4 (Exacte Sequenz)**.** Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\mathrm{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 1.5 (Kurze exacte Sequenz)**.** Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 1.6 (Filtrierung)**.** [Sta12, Def 10.13.1.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_n A)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_k^F A := F_k A / F_{k-1} A$.

gr_k^F als was??

2 Der Ring $\mathcal{D}$

2.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[\![x]\!]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g\,.$$

Definition 2.1. Definiere nun den Ring $\mathcal{D}_k$ als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (2.1). Wir schreiben diesen Ring als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[\![x]\!]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) < \partial_x >$ falls $k = K \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\hat{K}} := \mathbb{C}(\!(x)\!) < \partial_x >$ falls $k = \hat{K} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Bemerkung 2.2. Es gilt $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Beispiele und Alternative Definition:
Sergey-Arkhipov-MAT1191_Lecture_Notes.pdf Chapter 2.1

Lemma 2.3. *Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, so definieren die Addition*

$$+ : A \times A \to A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \to A$$

eine Ringstruktur auf A.

Beweis. [AV09, Kapittel 2 Section 1] □

Definition 2.4 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 2.5.

1. *Es gilt*

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$$

und damit ist $\mathcal{D}_k$ insbesondere nicht kommutativ.

2. *Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, so gilt:*

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Denn für $g \in \mathbb{C}[x]$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. *Es gelten die Formeln*

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$
$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i}$$

Beweis. Siehe [AV09] □

Proposition 2.6. *[Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in $\mathcal{D}_k$ kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.*

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exersice"

□

Besser?:
erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 2.7. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 2.6, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von P.

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 2.8. *Es gilt:*

$$\underbrace{gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr^F_N\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr^F_N\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N}_{\substack{\cong\\ \textit{isomorph als grad. Ringe}}}$$

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$ *als graduierte Ringe.*

Beweis. TODO

Treffen?

□

2.2 (Links) $\mathcal{D}$-Moduln

Da $\mathcal{D}$ ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links unr rechts $\mathcal{D}$-Moduln unterschiden. Wenn ich im folgendem von $\mathcal{D}$-Moduln rede, werde ich mich immer, wie auch [Ara, Chapter 1.6.], auf links $\mathcal{D}$-Moduln beziehen.

Beispiel 2.9 (Einfachste links $\mathcal{D}$-Moduln)**.** Sei $X = \mathbb{A}^1$ und $\mathscr{O}_X = \mathbb{C}[t]$.

1. $\mathcal{D}$ ist ein links und rechts $\mathcal{D}$-Modul
2. $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X$ durch
   - $\partial(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}$ und $t\cdot f(t) = tf$
   - oder [Gin98, Exmp 3.1.2] $\mathscr{O}_X = \mathcal{D}\cdot 1 = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot\partial$.
3. $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X \exp(\lambda t)$ mit $\partial(f(t)\exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\exp(\lambda t) + f\lambda\exp(\lambda t)$
4. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ mit $t\cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$

3 Der Meromorphe Zusammenhang

- wofür sind die gut?
- wieso kommt man ursprünglich dazu

3.1 Lokalisierung eines (holonomen) $\mathcal{D}$-Moduls

Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul. Betrachte $\mathcal{M}$ als $\mathbb{C}\{x\}$-Modul und definiere darauf

$$M[x^{-1}] := M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von $\mathcal{M}$.

Proposition 3.1. *[Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ bekommt in natürlicher weiße eine $\mathcal{D}$-Modul Struktur.*

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

□

3.2 Meromorpher Zusammenhang (Definition)

Definition 3.2 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{3.1}$$

  erfüllen soll.

Bemerkung 3.3.
1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.
2. Wir betrachten hier Meromorphe Zusammenhänge an $x = 0$ als Singularität.

Definition 3.4. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}((u))$. Wir schreiben $\mathscr{E}^\varphi$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((u))$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u\varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Also

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^\varphi = \mathbb{C}((u)) &\overset{\partial_u}{\to} \mathbb{C}((u)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(u) \\ f(u) &\mapsto f'(u) + f(u)\varphi'(u) \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathscr{E}^\varphi \cong \mathscr{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$.

3.3 Eigenschaften

[Sab90, 4.2] Let $\mathcal{M}$ be a left $\mathcal{D}$-module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$-module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 3.6 (Lemma vom zyklischen Vektor)**.** *[Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$ eine K-Basis von $\mathcal{M}_K$ ist.*

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 3.7. *[Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein $\mathcal{D}_K$-Modul und andersherum.*

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 3.8. *[AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Bemerkung 3.9. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$$

Lemma 3.10. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}_K$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\ K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ\partial\circ\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 3.11. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Isomorphismus so ist $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ein zu $(\mathcal{M}_K, \partial)$ isomorpher Zusammenhang.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\ \mathcal{N} \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ\partial\circ\varphi"] & \mathcal{N} \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 3.12. *Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die differenz zweier Derivationen ist K-linear.*

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{M}_K$. Da ∂_1 und ∂_2 $\mathbb{C}$-linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ $\forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
&= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
&= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
&= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.13. *Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.*

Definition 3.14 (Transformationsformel)**.** In der Situation

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\varphi", "\cong"'] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"'] \arrow[ur, "\psi", "\cong"'] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T \cong"] \arrow[ul, "\psi"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 3.15 (Differenziell Äquivalent)**.** Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$
$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

3.4 Newton Polygon

Quelle: sabba?

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \Big((k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \Big) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Bei Sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe Hülle davon in $\mathbb{R}^2$

Definition 3.16. Das Randpolygon von $\mathrm{conv}(H(P))$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 3.17. Die Menge $\mathrm{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \mathrm{slopes}(P) = \{0\}$, sonst *irregulär singulär.*
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu $\mathcal{M}_K$ gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_K$ heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres P gibt, mit $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

Beispiel 3.18. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = t^1 \partial_t^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

$k = 2$ $\qquad\qquad$ $l = 1$

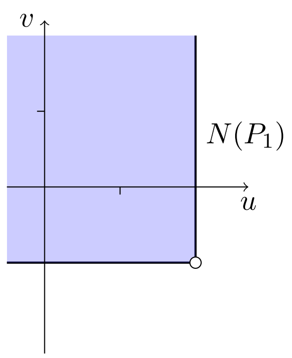
so dass

$$H(P_1) = \Big((2, 1 - 2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\}\,.$$

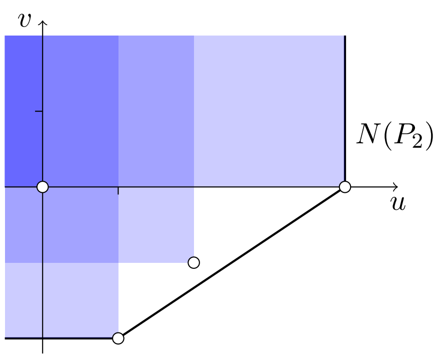
In Abbildung 3.2a ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\mathrm{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ so kann man daraus das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 3.2b visualisiert.

Abbildung 3.1: Zu Beispiel 3.18



(a) Newton Polygon zu P_1



(b) Newton Polygon zu P_2

Lemma 3.19. *[Sab90, 5.1]*

1. *$\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$*

2. *Wenn man eine exacte Sequenz $0 \to \mathcal{M}'_K \to \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}''_K \to 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.*

3.5 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definiere $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\mathbb{C}[\![x]\!]}[x^{-1}] = \hat{K} < \partial_x >=: \mathcal{D}_{\hat{K}}$ wobei $\hat{K} = \mathbb{C}[\![u]\!][x^{-1}]$.

bei ZulaBarbara ist $\hat{\mathcal{D}}_{\hat{K}} = \mathbb{C}(\!(u)\!) < \partial_u >$ hier $= \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Definition 3.20 (Formaler Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *formaler Meromorpher Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht, analog wie in Definition 3.2, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler $\hat{K}$-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\hat{K}} \to \mathcal{M}_{\hat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (3.1) erfüllen soll.

Bemerkung 3.21. Alle bisher getroffene Aussagen stimmen auch für formale Meromorphe Zusammenhänge. Im besonderen existiert für jedes $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein ein $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$ mit $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$.

3.6 pull-back und push-forward

[HTT07, 1.3]

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $(\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, u \mapsto t := \rho(u)) \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei $\mathcal{M}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 3.22 (pull-back)**.** [Sab07, 1.a] Der *pull-back (Inverses Bild)* $\rho^+\mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^*\mathcal{M} = \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch

$$\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m\,. \tag{3.2}$$

Lemma 3.23. *Es gilt* $\rho^*\mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} = \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(u)\!)}$ *mittels*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} &\xrightarrow{\quad\cong\quad} \mathcal{D}_{\mathbb{C}(\!(u)\!)} \\ f(u) \otimes m(t, \partial_t) &\longmapsto f(u) m(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u) \end{aligned}$$

Beweis. □

Bemerkung 3.24. Das soeben, in Lemma 3.23, definierte Φ erfüllt für $1 \otimes m$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\overset{\text{def}}{=} \rho'(u) \otimes \partial_t m \\ &\overset{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(u)\rho'(u)^{-1}}_{=1} \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u) \\ &= \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u) \end{aligned}$$

und somit (3.2) wie gewollt.

Lemma 3.25. *In der Situation*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes _ \cdot P(t, \partial_t)"] \arrow[d, "\cong"', "\Phi"] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[d, "\cong"', "\Phi"] \\
\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}
\end{tikzcd}$$

mit Φ *wie in Lemma 3.23 macht* $\alpha := \_ \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)$ *das Diagram kommutativ.*

Beweis. □

Lemma 3.26. *Sie* $Q \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \backslash \{0\}$. *Eine Abbildung der Form* $\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \xrightarrow{\_ \cdot Q} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$ *ist immer surjectiv.*

Beweis. GEGENBEISPIEL:
$Q := \partial_u$, $u \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$
suche ein y so dass $y\partial_u = u$

$$\begin{aligned}
_ \cdot Q(y) &= u \\
y\partial_u &= u \\
y\partial_u u &= uu && \text{[Sab90, Chap. 4.] links multiplikation mit } u \text{ ist nicht bijektiv} \\
y &= u^2
\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
u^2\partial_u &= u \cdot u \cdot \partial_u \\
&= u \cdot (\partial_u \cdot u - 1) \\
&= u \cdot (1 - 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.27. *In der Situation von Lemma 3.22, mit* $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P(t, \partial_t)$ *für ein* $P(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$*, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \Big/ \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)$$

also wird der Übergang beschrieben durch

$$\begin{aligned} t &\to \rho(t) \\ \partial_t &\to \rho'(t)^{-1}\partial_u \end{aligned}$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$ und $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P$. Es ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\_\cdot P"] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

exact und flach, da über Körper. Deshalb ist auch

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \_\cdot P"] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r] & \rho^* \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

exact. Also mit Φ wie in Lemma 3.23 und $Q(u, \partial_u) := \rho^+ P(t, \partial_t) := P(\rho(u), \rho'(u)^{-1}\partial_u)$ nach Lemma 3.25 ergibt sich

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \_\cdot P"] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \rho^* \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r, "\_\cdot Q"] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & & \end{tikzcd}$$

nun lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen (weil $\_\cdot Q$ surjectiv)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \_\cdot P"] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] & \rho^* \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r, "\_\cdot Q"] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \arrow[r] & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \Big/ \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und damit gilt dann

$$\begin{aligned}\rho^*\mathcal{M} &\cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}\cdot Q\\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}\Big/\mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}\cdot P(\rho(u),\rho'(u)^{-1}\partial_u)\,.\end{aligned}$$

- warum sind die zusammenhänge isomorph?

□

Bemerkung 3.28 (versuch 1). Wieso sieht die Wirkung auf dem pull-back Zusammenhang so aus?
Betrachte ein Element der Form $f(t)m = f(\rho(u))m$.

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m)\\ &= f'(\rho(u))\cdot\underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1}m + f(\rho(u))\underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t}m = (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u(f(u^p)m)\\ &= f'(u^p)m + f(u^p)\frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$ und somit ist die Wirkung von ∂_t gleich der Wirkung von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$.

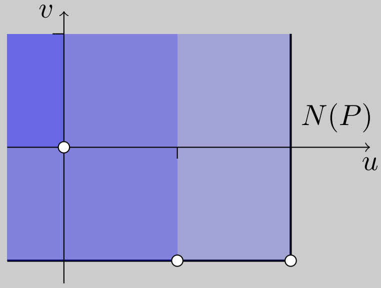
Lemma 3.29. *Ein pull-back mit $u \mapsto u^p$ multipliziert alle slopes mit p.*

Beweis. □

Beispiel 3.30 (pull-back)**.** Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$



und gehe von τ über zu t via $\tau \to \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ? Es gilt:

  $$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

  also:

  $$\partial_\tau = -t^2\partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2\partial_t)$?

  $$\begin{aligned}\partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t\partial_t - 1)t\partial_t \\ &= t(\partial_t t)\partial_t - t\partial_t \\ &= t(t\partial_t - 1)\partial_t - t\partial_t \\ &= t^2\partial_t^2 - 2t\partial_t\end{aligned}$$

- was passiert mit $\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

  $$\begin{aligned}\tilde{P} &= \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\ &\xrightarrow{\tau\to\frac{1}{t}} \frac{1}{t}(-t^2\partial_t)^2 + 2(-t^2\partial_t) - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} t^2(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\
&= t(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\
&= t(t^2\partial_t^2 - 2t\partial_t) - 2t^2\partial_t - 1 \\
&= t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1 =: P
\end{aligned}$$

Wir wollen $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot P$ bzgl. $P := t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte Es gilt slopes$(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 3.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back $\rho : t \to u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 3.27 anwenden können.

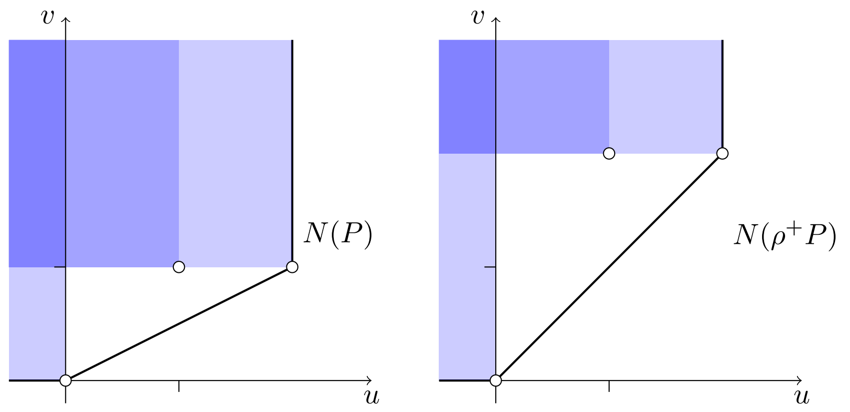
$$\begin{aligned}
\partial_t &\to \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\
\partial_t^2 &\to (\frac{1}{2u}\partial_u)^2 \\
&= \frac{1}{2u}\partial_u(\frac{1}{2u}\partial_u) \\
&= \frac{1}{2u}(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2) \\
&= \frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u
\end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
\rho^+ P &= u^6(\frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1
\end{aligned}$$

Also ist $\rho^+ P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$ mit slopes$(\rho^+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.3b) und somit $\rho^*\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot(\frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1)$.

Abbildung 3.2: Zu Beispiel 3.30



(a) Newton Polygon zu $P = t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$

(b) Newton Polygon zu $\rho^+ P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$

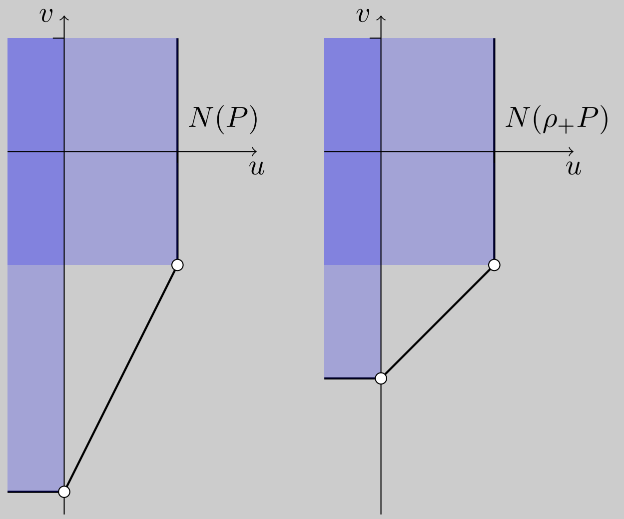
Sei $\mathcal{N}$ ein $\mathbb{C}((u))$-VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 3.31 (push-forward)**.** [Sab07, 1.a] Der *push-forward (Direktes Bild)* $\rho_+\mathcal{N}$ ist

- der $\mathbb{C}((t))$-VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist der $\mathbb{C}$-Vektor Raum $\mathcal{N}$ mit der $\mathbb{C}((t))$-Vektor Raum Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$

- mit der Wirkung ∂_t beschrieben durch $\rho'(u)^{-1}\partial_u$.

Abbildung 3.3: Zu Beispiel 3.32



(a) Newton Polygon zu P (b) Newton Polygon zu ρ_+P

Beispiel 3.32 (push-forward)**.** Für $\rho : t \to u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2})\\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=:P}\end{aligned}$$

mit slopes$(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 3.4a). Bilde nun das Direkte Bild über ρ, betrachte dazu

$$\begin{aligned}\partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4})\\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4})\\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})\end{aligned}$$

Also ist $\rho_+\mathscr{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und slopes$(\rho_+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.4b)

Satz 3.33. *[Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) \cong \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}\,. \tag{3.3}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}))\\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})\\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})\\ &= \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}\end{aligned}$$

□

Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned}\rho^+\mathscr{E}^{\varphi(t)} &= \mathscr{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathscr{E}^{\varphi(u^p)}\\ \rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta\in\mu_p} \mathscr{E}^{\varphi(\zeta\cdot u)}\end{aligned}$$

3.7 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.34 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho,\varphi,R) = \rho_+(\mathscr{E}^{\varphi} \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf isomorphismus hängt $El(\rho,\varphi,R)$ nur von $\varphi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$ ab.

Lemma 3.35. *[Sab07, Lem 2.2]*

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Quellen:
sabbah_cimpa90 seite 28 / 30

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindes 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 4.1. *Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$ *und* $N(P_2) \subset N_2$
- A *ist eine kante von ...*

4.1 Klassische Definition

Satz 4.2. *[Sab90, Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.*

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] □

Aussagen, die aus dem Beweis entstehen:
Wir erhalten die Exacte Sequenz

$$0 \to \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \to \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \to \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \to 0$$

Korollar 4.3. *[Sab90, Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$*

[Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$ als den Vektor Raum über $\hat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial \varphi}{\partial t}) \otimes m)\,.$$

Satz 4.4. *[Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Beispiel 4.5. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel **??**. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turrittin-Theorems Zerlegen.

4.2 Sabbah's Refined version

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 4.6. *[Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ gilt*

$$\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}\,.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t (\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi}})) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1} u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1} (ku^{k-1} e + u^k \varphi'(u) e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1} e + u^k \varphi'(u) e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1} e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u) e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u) e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0,..,p-1\}}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\ u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\ u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\ u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\ u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j]$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$[3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned} T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\ &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$ [4]

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Proposition 4.7. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^-1]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit grad $p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((u))$-Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.8 (Refined Turrittin-Levelt)**.** *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus El(\rho, \varphi, R) \underset{def}{=} \rho_+(\mathscr{E}^{\varphi}) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathscr{E}^{\varphi}$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathscr{E}^{\varphi}$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.
Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$\psi_0(u^p)$$

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + ... + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + ... + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + ...$$

$$u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \qquad u\psi_1(u^p)$$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + ... \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + ... \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^{p} + a_{-(p+2)}u^{2p} + ...
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[Ara] D. Arapura, *Notes on d-modules and connections with hodge theory*, Notizen?

[AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Ell10] C. Elliott, *D-modules*, unpublished notes available online, April 2010.

[Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d-modules*, Vorlesungsskript, 1998.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.

[MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

[Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.

[Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, December 2012.