Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik
der
Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

1.1 Einige Ergebnise aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Definition 1.1 (Direkte Summe)**.** [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
 & & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.2 (Tensorprodukt)**.** [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\ & T \end{tikzcd}$$

1.2 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[\![x]\!]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.3 (Weyl Algebra)**.** Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra $\mathcal{D}$ von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$) verwenden.

Lemma 1.4. *Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, so definieren die Addition*

$$+ : A \times A \to A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \to A$$

eine Ringstruktur auf A.

Beweis. [AV09, Kapittel 2 Section 1] □

Bemerkung 1.5. $A_1(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Definition 1.6 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

der *Kommutator von a und b* genannt.

Proposition 1.7. *1. Es gilt*

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$$

2. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, so gilt:

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Denn für $g \in \mathbb{C}[x]$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned} [\partial_x, x^k] &= kx^{k-1} \\ [\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1} \\ [\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i} \end{aligned}$$

Beweis. [AV09] □

Proposition 1.8. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [Sab90, Proposition 1.2.3] □

Definition 1.9. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.10. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} \underbrace{:= \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr^F_N\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr^F_N\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] =}_{\substack{\text{isomorph als grad. Ringe} \\ \cong}} \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N$$

also

$$gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N\,.$$

Beweis. TODO

2 Links $\mathcal{D}$-Moduln

Beispiel 2.1 (Einfachste links $\mathcal{D}$-Moduln)**.** Sei $X = \mathbb{A}^1$ und $\mathscr{O}_X = \mathbb{C}[t]$.

1. $\mathcal{D}$ ist ein $\mathcal{D}$-Modul
2. $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X$ mit $\partial(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}$ und $t \cdot f(t) = tf$.
3. $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X \exp(\lambda t)$ mit $\partial(f(t)\exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\exp(\lambda t) + f\lambda\exp(\lambda t)$
4. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ mit $t \cdot t^m = t^{m+1}$ und $\partial(t^m) = mt^{m-1}$

3 Der Meromorpher Zusammenhang

3.1 Definition

Definition 3.1 (Meromorpher Zusammenhang über k)**.** Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang über* k $(\mathcal{M}_k, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_k$, ein endlich dimensionaler k-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_k$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in k$ und $u \in \mathcal{M}_k$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{3.1}$$

  erfüllen soll.

Falls $k = K = \mathbb{C}(\{x\})$ reden wir von einem *(konvergentem) Meromorphen Zusammenhang* und falls $k = \hat{K} = \mathbb{C}(\!(u)\!)$ reden wir von einem *formalen Meromorphen Zusammenhang.*

Bemerkung 3.2. Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorphen Zusammenhang, so erhalte einen formalen Meromorphen Zusammenhang durch

$$\mathcal{M}_K \otimes_K \hat{K} =: \mathcal{M}_{\hat{K}}\,.$$

Bemerkung 3.3.

1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.
2. Wir betrachten hier Meromorphe Zusammenhänge an $x = 0$ als Singularität.

Definition 3.4. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$. Wir schreiben $\mathscr{E}^{\varphi}$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u\varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Bemerkung 3.5. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathscr{E}^{\varphi} \cong \mathscr{E}^{\psi}$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$.

3.2 Eigenschaften

Lemma 3.6 (Lemma vom zyklischen Vektor)**.** *[Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$ eine K-Basis von $\mathcal{M}_K$ ist.*

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 3.7. *[Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein $\mathcal{D}$-Modul und andersherum.*

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 3.8. *[AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Lemma 3.9. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}_K$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\
K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\partial\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"']
\end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 3.10. *Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die differenz zweier Derivationen ist K-linear.*

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{M}_K$. Da ∂_1 und ∂_2 $\mathbb{C}$-linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)\ \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
&= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
&= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
&= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.11. *Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.*

Definition 3.12 (Transformationsformel)**.** In der Situation

$$
\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz} + A"] \arrow[dr, "\varphi", "\cong"'] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi", "\cong"'] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz} + B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi"', "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 3.13 (Differenziell Äquivalent)**.** Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

3.3 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$P = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben und betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \Big((k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \Big) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Definition 3.14. Das Randpolygon von $\operatorname{conv}(H(P))$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 3.15. Die Menge $\operatorname{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* :⇔ slopes$(P) = \{0\}$, sonst *irregulär singulär*.
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu $\mathcal{M}_K$ gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_K$ heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres P gibt, mit $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

Beispiel 3.16. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = t^1 \partial_t^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$k = 2 \qquad\qquad l = 1$$

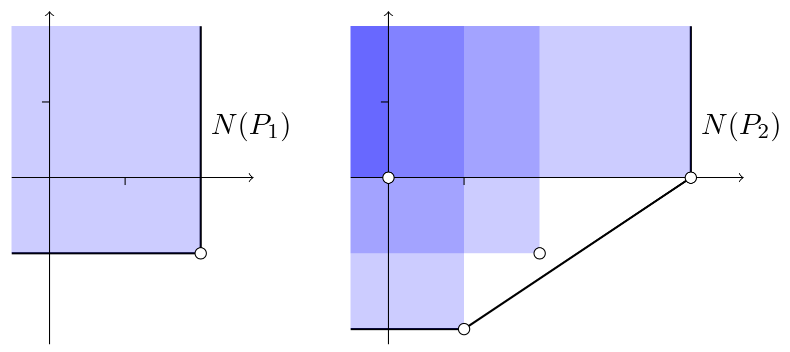
so dass

$$H(P_1) = \left((2, 1-2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\right) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\right\}.$$

In Abbildung 3.2a ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist slopes$(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$ so kann man daraus das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 3.2b visualisiert.

Abbildung 3.1: Zu Beispiel 3.16



(a) Newton Polygon zu P_1 (b) Newton Polygon zu P_2

Lemma 3.17. *[Sab90, 5.1]*

1. *$\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$*
2. *Wenn man eine exacte Sequenz $0 \to \mathcal{M}'_K \to \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}''_K \to 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.*

3.4 pull-back und push-forward

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei $\mathcal{M}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 3.18 (pull-back)**.** [Sab07, 1.a] Der *pull-back (Inverses Bild)* $\rho^{+}\mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^{*}\mathcal{M} = \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^{*}\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$.

Beispiel 3.19 (pull-back)**.** Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ bzgl. $P = t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte Es gilt slopes$(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 3.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back $\rho : t \to u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen:

$$
\begin{aligned}
\partial_t &= \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\
\partial_t^2 &= (\frac{1}{2u}\partial_u)^2 \\
&= \frac{1}{2u}(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2) \\
&= \frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u
\end{aligned}
$$

also ergibt einsetzen

$$
\begin{aligned}
\rho^{+}P &= u^6(\frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1
\end{aligned}
$$

Also ist$\rho^{+}P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$ mit slopes$(\rho^{+}P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.3b).

Sei $\mathcal{N}$ ein $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

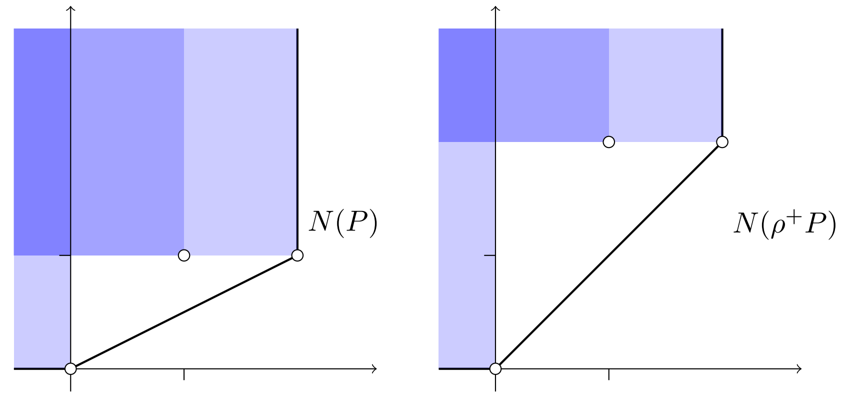
Definition 3.20 (push-forward)**.** [Sab07, 1.a] Der *push-forward (Direktes Bild)* $\rho_{+}\mathcal{N}$ ist

- der $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-VR $\rho_{*}\mathcal{N}$ ist der $\mathbb{C}$-Vektor Raum $\mathcal{N}$ mit der $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Vektor Raum Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_t beschrieben durch $\rho'(u)^{-1}\partial_u$.

Bemerkung 3.21. Wieso sieht die Wirkung auf dem push-forward Zusammenhang so aus? Betrachte ein Element der Form $f(t)m = f(\rho(u))m \in \rho_{+}\mathcal{N}$.

$$
\partial_t(f(t)m) = \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m)
$$

Abbildung 3.2: Zu Beispiel 3.19



(a) Newton Polygon zu $P = t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$

(b) Newton Polygon zu $\rho^+P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$

$$= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u))\underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t} m = (\star)$$

$$\begin{aligned} \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u(f(u^p)m) \\ &= f'(u^p)m + f(u^p)\frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u m = (\star) \end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$ und somit ist die Wirkung von ∂_t gleich der Wirkung von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$.

Beispiel 3.22 (push-forward)**.** Für $\rho : t \to u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_t \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=:P} \end{aligned}$$

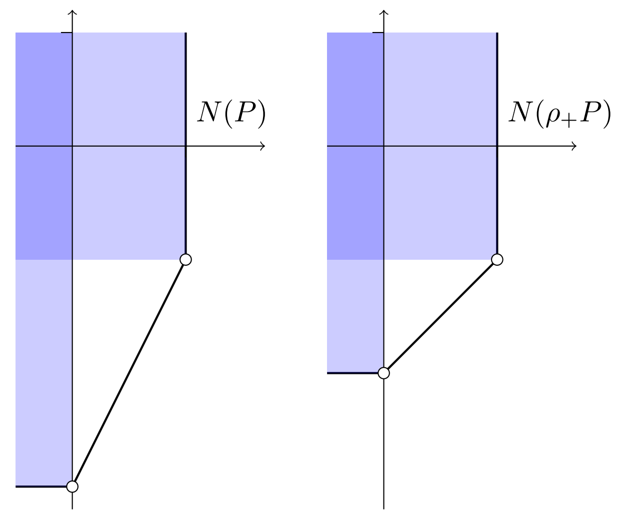
mit slopes$(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 3.4a). Bilde nun das Direkte Bild über ρ, betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \end{aligned}$$

$$= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

Also ist $\rho_+\mathscr{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+ P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.4b)

Abbildung 3.3: Zu Beispiel 3.22



(a) Newton Polygon zu P (b) Newton Polygon zu $\rho_+ P$

Satz 3.23. *[Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) \cong \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}\,. \tag{3.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) \\
&\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\
&\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\
&= \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}
\end{aligned}$$

□

3.5 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.24 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$, $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E}^{\varphi} \otimes R)$$

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten. Alle bisher getroffenen Aussagen gelten für diese aber analog.

4.1 Klassische Definition

Satz 4.1. *[Sab90, Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \ldots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es exisitiert eine (bis auf Permutation) eindutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.*

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] □

Satz 4.2. *[Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl q so dass der Zusammenhang $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Beispiel 4.3. Sei hier $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$, wie in Beispiel **??**. Wir wollen $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mittels des Levelt-Turrittin-Theorems Zerlegen.

4.2 Sabbah's Refined version

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 4.4. *[Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ gilt*

$$\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}\,.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathscr{E}^\varphi})) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k\varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1}\varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p)(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j]$$

denn:

$$u\partial_u \mathbf{e} = (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1})$$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k\in\{0,..,p-1\}}$$

$$= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\ u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\ u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\ u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\ u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j]$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$[3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned} T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\ &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j\,(\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$ [4]

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Proposition 4.5. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit grad $p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((u))$-Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.6 (Refined Turrittin-Levelt)**.** *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus El(\rho, \varphi, R) \underset{def}{=} \rho_+(\mathscr{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + ... + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + ... + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + ...$$

$$\psi_0(u^p) \qquad u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \qquad u\psi_1(u^p)$$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + ... \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + ... \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^{p} + a_{-(p+2)}u^{2p} + ...
\end{aligned}$$

B Wie ich Newton Polygone zeichne

Ich benutze tikz

```
\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{matrix,arrows,decorations.pathmorphing}
```

und ein eigenes Kommando

```
\newcommand{\myNewtonPlot}[6]{
  \draw[color=black,thick] #2;
  \foreach \pos in #1 { \fill[blue,opacity=.2] (-.5,#5)
     rectangle \pos; }
  \draw[->] (-.5,0) -- (#3+.7,0);
  \draw[->] (0,#4-.2) -- (0,#5+.2);
  \draw (1,0) -- (1,-.1);
  \draw (0,1) -- (-.1,1);
  \foreach \pos in #1 { \node[draw,circle,inner sep=1.5pt,
     fill=white] at \pos {}; }
  \node [below right] at (#3,#5/2) {#6};
}
```

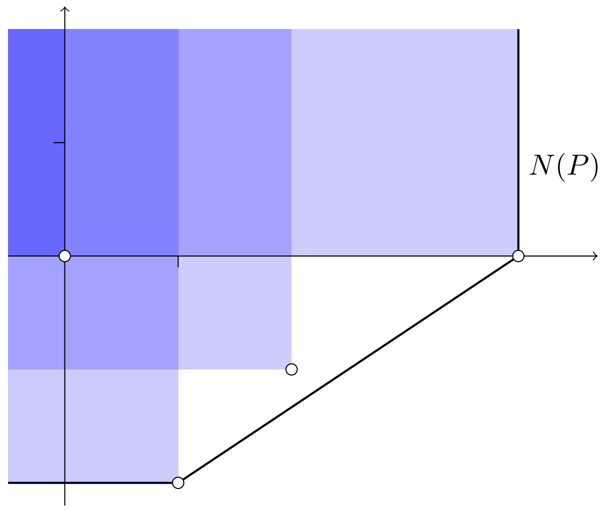
welche 6 Parameter verlangt:

1. ein array der Punkte
2. einen Pfad, der das Newton Polygon beschreibt
3. den maximalen x Wert
4. den minimalen y Wert
5. den maximalen y Wert

Ein Aufruf

```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\def\myPoints{{(0,0)}, {(1,-2)}, {(2,-1)}, {(4,0)}}
\def\myPath{(-.5,-2) -- (1,-2) -- (4,0) -- (4,2)}
\myNewtonPlot{\myPoints}{\myPath}{4}{-2}{2}{$N(P)$}
\end{tikzpicture}
```

ergibt dann


$N(P)$

Literaturverzeichnis

[AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.

[MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

[Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.

[Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, December 2012.