

# Bachelorarbeit

---

## mein thema

---

vorgelegt von

**Maximilian Huber**

am

**Institut für Mathematik**

der

**Universität Augsburg**

betreut durch

**Prof. Dr. Marco Hien**

abgegeben am

**noch nicht**

stand: 1. Februar 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Moduln über <math>\mathcal{D}_k</math></b>	<b>6</b>
1.1	Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$ . . . . .	6
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise . . . . .	8
1.2	(Links) $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	9
1.2.1	Holonome $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	10
1.3	Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln . . . . .	11
1.4	Lokalisierung eines (holonomen) $\mathcal{D}$ -Moduls . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Der Meromorphe Zusammenhang</b>	<b>12</b>
2.1	Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	12
2.2	Alternativer Zugang . . . . .	14
2.3	Eigenschaften . . . . .	14
2.4	Newton Polygon . . . . .	17
2.5	Formale Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	19
2.6	Formale Struktur regulärer Zusammenhänge . . . . .	20
2.7	pull-back und push-forward . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Elementare Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>Levelt-Turrittin-Theorem</b>	<b>36</b>
4.1	Klassische Definition . . . . .	37
4.2	Sabbah's Refined version . . . . .	37

<b>5</b>	<b>Beispiel</b>	<b>39</b>
5.1	Allgemein . . . . .	39
5.2	Explizit . . . . .	39
<b>Anhang</b>		<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Aufteilung von ...</b>	<b>41</b>

# 0 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [\[Sab90\]](#) und [\[Cou95\]](#) beziehen.

Wir betrachten  $\mathbb{C}$  hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$  die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\} = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_0$  die formalen Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius ([\[HTT07, Chap 5.1.1\]](#))
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$  die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$  der Ring der Laurent Reihen.
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$  als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [\[HTT07\]](#) mit  $\tilde{K}$  bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen  $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$  und  $K \subsetneq \hat{K}$  gelten.

Es bezeichnet der Hut ( $\hat{\phantom{x}}$ ) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

**Lemma 0.1** (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1.  $\mathbb{C}[x]$  ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese Graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die Form  $(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{C}$

2. wenn  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $\mathbb{C}[x]$  (erzeugt von  $x$  ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring  $\mathbb{C}[[x]]$  ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem Term  $\neq 0$  ist invertierbar.

Der Ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach Grad des Maximalen Ideals, genannt  $\mathfrak{m}$ -adische Filtration, ist die Filtrierung  $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] \mid v(f) \geq k\}$

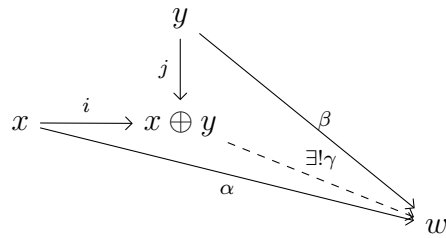
und es gilt  $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet  $M(n \times m, k)$  die Menge der  $n$  mal  $m$  Dimensionalen Matrizen mit Einträgen in  $k$ .

**Definition 0.2** (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien  $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von  $x$  und  $y$  ist ein Objekt  $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  zusammen mit Morphismen  $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$  und  $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$  so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes  $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Morphismen  $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$  und  $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$  existiert ein eindeutiges  $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$  so dass das Diagramm



kommutiert.

**Definition 0.3** (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\
 & & T
 \end{array}$$

Für eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  definiere das Tensorprodukt davon über  $R$  mit  $N$  als

$$\begin{aligned}
 \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\
 n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m)
 \end{aligned}$$

*Bemerkung 0.4.* Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M/\text{im}(f)) \cong N \otimes_R M/\text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

**Definition 0.5** (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle  $i$  gilt, dass  $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$ .

**Definition 0.6** (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

**Definition 0.7** (Kokern). Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so ist der *Kokern* von  $f$  definiert als  $\text{coker}(f) = M / \text{im}(f)$ .

**Proposition 0.8.** Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz.

*Beweis.*

□

**Definition 0.9** (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung*  $F$  von einem Objekt (Ring)  $A$  ist eine Familie von  $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter  $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$  und damit das zu  $A$  mit Filtrierung  $F$  assoziierte graduierte Modul

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

$gr_i^F$  als was??

**Definition 0.10.** [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

**Definition 0.11** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von  $a$  und  $b$*  definiert.

**Proposition 0.12.** Sei  $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \hat{K}\}$ . Sei  $\partial_x : k \rightarrow k$  der gewohnte Ableitungsoperator nach  $x$ , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. für  $f \in k$  ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

*Beweis.* 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt  $g \in k$  ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□



# 1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ab hier sei  $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \hat{K}\}$ .

## 1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in k$ . Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator*  $f$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

**Definition 1.1.** Definiere nun den Ring  $\mathcal{D}_k$  als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in  $k$  zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[x]$ , und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$

- $\mathcal{D}_{\hat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \hat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

*Bemerkung 1.2.* Es gilt  $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$  und  $\hat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\hat{K}}$ .

**Lemma 1.3.** Sei  $A$  einer der 3 soeben eingeführten Objekten, so definieren die Addition

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

eine Ringstruktur auf  $A$ .

*Beweis.* [AV09, Kapittel 2 Section 1] □

**Proposition 1.4.** [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in  $\mathcal{D}_k$  kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in k$ , geschrieben werden.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

**Definition 1.5.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , wie in Proposition 1.4, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von  $P$ .

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung  $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$  mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

*Beweis.* Sei  $P \in F_N \mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.6.** *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$   
isomorph als grad. Ringe

also  $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$  als graduierte Ringe.

*Beweis.* TODO

Treffen?

□

### 1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

[Kas03, Chap 1.1.] Sei  $X$  eine 1-Dimensionale Komplexe Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X$ . Ein (holomorpher) *differential Operator* auf  $X$  ist ein Garben-Morphismus  $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ , lokal in der Koordinate  $x$  und mit holomorphen Funktionen  $a_n(x)$  als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für  $u \in \mathcal{O}_X$ ). Zusätzlich nehmen wir an, dass  $a_n(x) \equiv 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir setzen  $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$ . Wir sagen ein Operator hat Ordnung  $m$ , falls  $\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$ . Mit  $\mathcal{D}_X$  bezeichnen wir die Garbe von Differentialoperatoren auf  $X$ . Die Garbe  $\mathcal{D}_X$  hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und  $\mathcal{O}_X$  ist ein Unterring von  $\mathcal{D}_X$ . Sei  $\Theta_X$  die Garbe der Vektorfelder über  $X$ . Es gilt, dass  $\Theta_X$  in  $\mathcal{D}_X$  enthalten ist. Bemerke auch, dass  $\Theta_X$  ein links  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule, aber kein rechts  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule ist.

**Proposition 1.7.** [Ark12, Exmp 1.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$  und  $\Theta_X = \mathbb{C}[t]\partial$ . Wobei  $\partial$  als  $\partial(t^n) = nt^{n-1}$  wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[t, \partial], \quad \text{mit} \quad \partial t - t\partial = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

**Definition 1.8.** [Ark12, Defn 2.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$  und  $\mathcal{D}_X = [t, \partial]$  mit der Relation  $[\partial, t] = 1$ . Dann definieren wir die links  $\mathcal{D}$ -Moduln über  $\mathbb{A}^1$  als die  $\mathbb{C}[t, \partial]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als  $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

## 1.2 (Links) $\mathcal{D}$ -Moduln

Da  $\mathcal{D}$  ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts  $\mathcal{D}$ -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von  $\mathcal{D}$ -Moduln rede, werde ich mich immer, wie auch [Ara, Chapter 1.6.], auf links  $\mathcal{D}$ -Moduln beziehen.

**Beispiel 1.9** (Einfachste links  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1.  $\mathcal{D}$  ist ein links und rechts  $\mathcal{D}$ -Modul

2.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t]$  durch

- $\partial(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}$  und  $t \cdot f(t) = tf$
- oder [Gin98, Exmp 3.1.2]  $\mathbb{C}[t] = \mathcal{D} \cdot 1 = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot \partial$ .

3.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  mit  $t \cdot t^m = t^{m+1}$  und  $\partial(t^m) = mt^{m-1}$

**Beispiel 1.10** (Weiter  $\mathcal{D}$ -Moduln). 1. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne jeglichen analytischen Hintergrund, ein Symbol  $\exp(\lambda t)$  ein, mit  $\partial(f(t) \exp(\lambda t)) = \frac{\partial f}{\partial t} \exp(\lambda t) + f \lambda \exp(\lambda t)$ . So ist  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda t)$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul.

2. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol  $\log(x)$  mit den Eigenschaften  $\partial \cdot \log(x) = \frac{1}{x}$  ein. Erhalte nun das  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Dieses Modul ist über  $\mathcal{D}$  erzeugt durch  $\log(x)$  und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial x \partial).$$

**Lemma 1.11.** [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist. Dann ist  $\mathcal{M}$  bereits ein freies  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.] □

**Korollar 1.12.** [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon  $\mathcal{M} = \{0\}$ .

### 1.2.1 Holonome $\mathcal{D}$ -Moduln

TODO: defn of Car als Charakteristische Varietät

**Definition 1.13.** [Sab90, Def 3.3.1.] Sei  $\mathcal{M}$  lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt,  $\mathcal{M}$  ist holonom, falls  $\mathcal{M} = 0$  oder falls  $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$ .

**Lemma 1.14.** [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein  $\mathcal{D}$ -Modul ist holonom genau dann, wenn  $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$ .

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

### 1.3 Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln

[Sab90, Chap 4.1.] Sei  $M$  ein  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul. Wir schreiben  $M[x^{-1}]$  für den  $K$ -Vektorraum  $M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$ . Im allgemeinen gilt, falls  $M$  von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist, so ist  $M[x^{-1}]$  von endlichem Typ über  $K$ . Bemerke aber, dass  $M[x^{-1}]$  generell nicht von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist.

### 1.4 Lokalisierung eines (holonomen) $\mathcal{D}$ -Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul. Betrachte  $\mathcal{M}$  als  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 1.15.** [Sab90, Prop 4.2.1.]  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  bekommt in natürlicher Weise eine  $\mathcal{D}$ -Modul Struktur.

*Beweis.* [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

beweis der  $\mathcal{D}$ -linearität ist als übung gelassen

□

Alle MeromZsh sind  $\mathcal{D}$ -Moduln aber nicht andersherum?

## 2 Der Meromorphe Zusammenhang

### 2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$  betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$  ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um  $x = 0 \in \mathbb{C}$  betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an  $x = 0$  (geschrieben als  $\tilde{\mathcal{O}}$ ). Wir sagen  $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$  ist eine Lösung von (2.1), falls  $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $v$  die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei  $x = 0$ ) ist ein Tupplel  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation* oder *Zusammenholksumfrageang*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

**Definition 2.2.** Seien  $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$  zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie  $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \partial_{\mathcal{N}} \circ \varphi$  erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch  $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ .

*Bemerkung 2.3.* 1. Später wird man auf die Angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}_K$  als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von  $K$  verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle  $f \in \tilde{\mathcal{O}}$  und für alle  $u \in \mathcal{M}_K$  erfüllt sein muss, äquivalent.

**Definition 2.4** (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$ . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis*  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  die Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$  definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , die Wirkung von  $\partial$  auf  $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$  beschrieben durch

$$\begin{array}{c} \boxed{??} \\ \downarrow \\ \partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i. \end{array}$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung  $\partial u(x) = 0$ , für  $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$ , äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$ . Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammenhang  $(\mathcal{M}, \partial)$  ausgestattet mit einer  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$  zu einem ODE zugeordnet werden kann.



Umgekehrt können wir für jede Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))$  den assoziierten Meromorphen Zusammenhang  $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$  angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

## 2.2 Alternativer Zugang

Hier wird nun ein alternativer Zugang, wie in [Sab90, 3.1.1], präsentiert. Sei  $\mathcal{F}$  ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren  $\mathcal{D}$  wirken.

Sei  $P$  ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in  $a_i(t) \in \mathbb{C}\{x\}$  geschrieben als  $P = \sum_{i=0}^d a_i(t) \partial_t^i$ . Man sagt eine Funktion  $u \in \mathcal{F}$  ist Lösung von  $P$ , falls  $u$  die Gleichung  $Pu = 0$  erfüllt. Man sagt  $0$  ist ein singulärer Punkt falls  $a_d(0) = 0$ . Falls  $0$  kein singulärer Punkt ist, hat  $P$  genau  $d$  über  $\mathbb{C}$  Unabhängige Lösungen in  $\mathbb{C}\{t\}$ .

Falls  $u$  ein Lösung von  $P$  ist, so ist  $u$  auch Lösung von  $Q \cdot P$  mit  $Q \in \mathcal{D}$ . Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal  $I$  von  $\mathcal{D}$ , welches von  $P$  erzeugt wird.

## 2.3 Eigenschaften

[Sab90, 4.2] Let  $\mathcal{M}$  be a left  $\mathcal{D}$ -module. First we consider it only as a  $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  be the localized module.

**Lemma 2.5** (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element  $m \in \mathcal{M}_K$  und eine ganze Zahl  $d$  so dass  $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$  eine  $K$ -Basis von  $\mathcal{M}_K$  ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

**Satz 2.6.** [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein  $\mathcal{D}_K$ -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

**Lemma 2.7.** [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein  $P \in \mathcal{D}_K$  so dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ .

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

*Bemerkung 2.8.* [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

**Lemma 2.9.** Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}_K$ , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt:  $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

**Lemma 2.10.** Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Isomorphismus so ist  $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ein zu  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  isomorpher Zusammenhang.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

**Lemma 2.11.** Sei  $\mathcal{M}_K \cong K^r$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum mit  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist  $K$ -linear.

*Beweis.* Seien  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Derivationen auf  $\mathcal{M}_K$ . Da  $\partial_1$  und  $\partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, ist  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.12.** Es sei  $(K^r, \partial)$  ein Meromorpher Zusammenhang. So ist  $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also es existiert eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  mit  $\frac{d}{dz} - \partial = A$ , also ist  $\partial = \frac{d}{dz} - A$ .

**Definition 2.13** (Transformationsformel). [HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & & \nwarrow \cong \varphi \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong \psi & & & \nwarrow \cong \psi \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$  und  $(\frac{d}{dz} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:

Der Merom. Zush.  $\frac{d}{dz} + A$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

**Definition 2.14** (Differenziell Äquivalent). Man nennt  $A$  und  $B$  *differenziell Äquivalent* ( $A \sim B$ ) genau dann, wenn es ein  $T \in GL(r, K)$  gibt, mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$ .

$$\begin{aligned} 1 &= TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0 \\ 1 &= T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0 \end{aligned}$$

**Proposition 2.15.** [[Sch](#), Prop 4.1.1] Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzen von

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von  $\partial$  auf das  $K$ -Modul  $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ , wird  $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$  zu einem Meromorphen Zusammenhang.

## 2.4 Newton Polygon

Quelle: sabba?

sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes  $P \in \mathcal{D}$  lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit  $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$  schreiben. Betrachte das zu  $P$  dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \left( (k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Bei Sabbah:  $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  und dann konvexe Hülle davon in  $\mathbb{R}^2$

**Definition 2.16.** Das Randpolygon der konvexen Hülle  $\text{conv}(H(P))$  von  $H(P)$  heißt das *Newton Polygon* von  $P$  und wird als  $N(P)$  geschrieben.

**Definition 2.17.** Die Menge  $\text{slopes}(P)$  sind die nicht-vertikalen Steigungen von  $N(P)$ , die sich echt rechts von  $\{0\} \times \mathbb{R}$  befinden.

- $P$  heißt *regulär singulär*  $\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$ , sonst *irregulär singulär*.
- Schreibe  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$  für die Menge der zu  $\mathcal{M}_K$  gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}_K$  heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres  $P$  gibt, mit  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$

**Beispiel 2.18.** 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist  $P_1 = t^{\textcolor{red}{1}}\partial_t^{\textcolor{blue}{2}}$ . Es ist leicht abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{k} = 2$$

$$\textcolor{red}{l} = 1$$

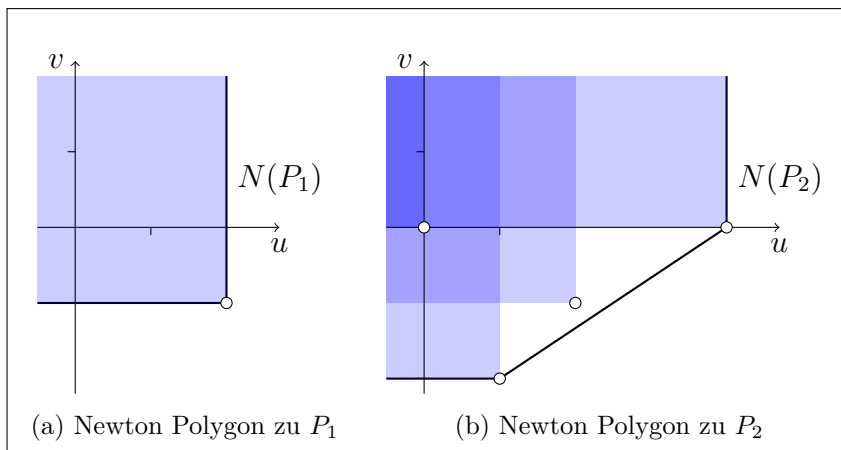
so dass

$$H(P_1) = \left( (\textcolor{blue}{2}, \textcolor{red}{1} - \textcolor{blue}{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.2a ist  $H(P_1)$  (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist  $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$  und damit ist  $P_1$  regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei  $P_2 = t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$  so kann man daraus das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2b visualisiert.

Abbildung 2.1: Zu Beispiel 2.18



**Lemma 2.19.** [Sab90, 5.1]

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$  ist nicht Leer, wenn  $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$  hat, so gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$ .

## 2.5 Formale Meromorphe Zusammenhänge

bei ZulaBarbara ist  $\hat{\mathcal{D}}_{\hat{K}} = \mathbb{C}((u)) < \partial_u >$  hier  $= \mathcal{D}_{\hat{K}}$

**Definition 2.20** (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *formaler Meromorpher Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$  besteht, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , ein endlich dimensionaler  $\hat{K}$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Derivation  $\partial : \mathcal{M}_{\hat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{K}}$ , welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

*Bemerkung 2.21.* Alle bisher getroffene Aussagen stimmen auch für formale Meromorphe Zusammenhänge. Im besonderen existiert für jedes  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ein ein  $P \in \mathcal{D}_{\hat{K}}$  mit  $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ .

**Definition 2.22.** [Sab07, 1.a] Sei  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}^\varphi$  für den (formalen) Rang 1 Vektorraum  $\mathbb{C}((u))$  ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$ , im speziellen also  $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$ .

Also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathbb{C}((u)) \xrightarrow{\partial_u} \mathbb{C}((u)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(u) \\ f(u) &\mapsto f'(u) + f(u)\varphi'(u) \end{aligned}$$

*Bemerkung 2.23.* [Sab07, 1.a] Es gilt  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$  genau dann wenn  $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$ .

**Satz 2.24.** [Sab90, Thm 5.3.1] Sei  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$  die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Aufteilung  $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$  in formale Meromorphe Zusammenhänge mit  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$ .

*Beweis.* [Sab90, Thm 5.3.1] □

Aussagen, die aus dem Beweis entstehen:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

**Korollar 2.25.** [Sab90, Thm 5.3.4]  $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$  und  $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

## 2.6 Formale Struktur regulärer Zusammenhänge

[Sab90, Chap 5.2] Sei  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ein regulärer Formaler Meromorpher Zusammenhang, also  $\text{slopes}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = 1$ . Das nun folgende Kapitel wird sich mit der Struktur solcher Zusammenhänge genauer auseinandersetzen.

**Lemma 2.26.** [Sab90, Def 5.1.1 Remarks 3.] Ein  $P = \sum a_i(x)(x\partial_x)^i$  mit  $a_i \in \mathbb{C}[[x]]$  ist regulär, genau dann wenn der Koeffizient  $a_d$  vor dem dominanten Term eine Einheit ist.

*Beweis.* □

Dank diesem Satz ist es berechtigt, reguläre Zusammenhänge genauer zu betrachten.

**Lemma 2.27.** [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  über  $\hat{K}$  mit der Eigenschaften, dass die Matrix, die  $x\partial_x$  beschreibt, nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.

*Beweis.* Wähle einen zyklischen Vektor  $m \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$  und betrachte die Basis  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  (siehe Lemma 2.5). Schreibe  $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$  in Basisdarstellung mit Koeffizienten  $b_i \in \hat{K}$ . Also erfüllt  $m$  die Gleichung  $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$ .

bis hier schon klar

Tatsächlich werden wir  $b_i(x) = x^i b'_i(x)$  mit  $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$  schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass  $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1}m$  ebenfalls eine Basis von  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ist.

Die Matrix von  $x\partial_x$  zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$ .  $\square$

**Lemma 2.28.** [Sab90, Lem 5.2.2.] *Es existiert sogar eine Basis von  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  über  $\hat{K}$  so dass die Matrix zu  $x\partial_x$  konstant ist.*

*Beweis.*  $\square$

## 2.7 pull-back und push-forward

[HTT07, 1.3]

Nach [Sab07, 1.a]. Sei  $(\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto t := \rho(u)) \in u\mathbb{C}[[u]]$  mit Bewertung  $p \geq 1$  und sei  $\mathcal{M}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}((t))$  Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang  $\nabla$ .

**Definition 2.29** (pull-back). [Sab07, 1.a] Der *pull-back (Inverses Bild)*  $\rho^+ \mathcal{M}$  ist der Vektorraum  $\rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}$  mit dem *pull-back Zusammenhang*  $\rho^* \nabla$  definiert durch

$$\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m. \quad (2.3)$$

**Lemma 2.30.** *Es gilt  $\rho^* \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))}$  mittels*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \\ f(u) \otimes m(t, \partial_t) &\longmapsto f(u)m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

*Beweis.*  $\square$



*Bemerkung 2.31.* Das soeben, in Lemma 2.30, definierte  $\Phi$  erfüllt für  $1 \otimes m \in \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))}$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(u) \otimes \partial_t m \\ &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(u) \rho'(u)^{-1}}_{=1} \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \\ &= \partial_u m(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u) \end{aligned}$$

und somit (2.3) wie gewollt.

**Lemma 2.32.** *In der Situation*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P(t, \partial_t)} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \end{array}$$

mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.30 macht  $\alpha := \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$  das Diagramm kommutativ.

*Beweis.* □

**Lemma 2.33.** *In der Situation von Lemma 2.29, mit  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P(t, \partial_t)$  für ein  $P(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$ , gilt*

$$\rho^* \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u).$$

*also wird der Übergang beschrieben durch*

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \rho(t) \\ \partial_t &\rightarrow \rho'(t)^{-1} \partial_u \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $P \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$  und  $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q$$

für  $Q = P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$  gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{-\cdot P} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\
 & & u \longmapsto & u \cdot P & & & \\
 & & u \longmapsto & u \bmod \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P & & & 
 \end{array}$$

ist **exact**, weil  $\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P = \text{coker}(\_ \cdot P)$ . Weil  $\mathbb{C}((u))$  **flach** ist, da Körper, ist auch, nach anwenden von  $\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \_$ , die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes - \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & \rho^* \mathcal{M}
 \end{array}$$

exact. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
 \rho^* \mathcal{M} &\cong \text{coker}(\text{id} \otimes \_ \cdot P) && (\text{weil exact}) \\
 &\cong \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / (\text{id} \otimes \_ \cdot P) \left( \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \right) && (\text{nach def. von coker})
 \end{aligned}$$

Also mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.30 und  $Q(u, \partial_u) := P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u)$  nach Lemma 2.32 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes - \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 & & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{-\cdot Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & & 
 \end{array}$$

wobei das Diagramm kommutiert. Nun lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen (weil  $\_ \cdot Q$  injektiv)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes - \cdot P} & \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi} & \rho^* \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \xrightarrow{-\cdot Q} & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ingo sagt:

Nun zu deiner Situation: Da geht es jeweils um die rechten Endstücke. Anders als die Mittelstücke sind diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt;  $C$  ist der Kokern von  $(A \rightarrow B)$  und  $c$  der Kokern von  $(a \rightarrow b)$ . Aufgrund der Kommutativität des Quadrats links müssen daher diese Kokerne zueinander isomorph sein.

Konkret kannst du einen Isomorphismus über eine Diagrammjagd konstruieren: Sei  $x \in C$  beliebig. Wir wollen ein zugehöriges Element in  $c$  angeben. Da  $(B \rightarrow C)$  surjektiv ist, gibt es ein  $y \in B$ , das unter  $(B \rightarrow C)$  auf  $x$  geschickt wird. Unser gesuchtes Element in  $c$  ist dann das Bild von  $y$  unter  $(B \rightarrow b)$  und  $(b \rightarrow c)$ . Dann ist noch Wohldefiniertheit nachzuweisen. Die Umkehrfunktion konstruiert man auf analoge Weise. Dann muss man natürlich noch nachrechnen, dass die beiden Morphismen zueinander invers sind.

(Geheimtipp: Linearität muss man, obwohl es eigentlich so scheint, tatsächlich nicht nachweisen – wenn man weiß, wie man intern in Topoi Mathematik betreiben kann. :-))

Nun wollen wir mittels Diagrammjagd einen Isomorphismus

$$\varphi : \rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} (\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q$$

finden. Sei dazu  $x \in \rho^* \mathcal{M}$ , weil die Abbildung  $\pi$  surjektiv ist, existiert ein  $y \in \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))}$  mit  $\pi(x) = y$ .

leider kann man hier NICHT das (kurzem) Fünfer-Lemma anwenden und damit gilt dann nach dem (kurzem) Fünfer-Lemma

$$\begin{aligned} \rho^* \mathcal{M} &\stackrel{\varphi}{\cong} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot Q \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((u))} \cdot P(\rho(u), \rho'(u)^{-1} \partial_u), \end{aligned}$$

falls es einen Morphismus  $\varphi$  überhaupt gibt.

kurzes 5er-lemma sagt nur (für den mittleren) das isomorph, falls oben und unten exact, rechts und links isomorph, und ein möglicher morphismus für Die mitte bereits existent. Muss auch alles Kommutieren.

- warum sind die schon zusammenhänge isomorph?  
eventuell noch ein Lemma bei kurzen exacten Sequenzen hinzufügen

□

*Bemerkung 2.34* (versuch 1). Wieso sieht die Wirkung auf dem pull-back Zusammenhang so aus?

Betrachte ein Element der Form  $f(t)m = f(\rho(u))m$ .

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m) \\ &= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u)) \underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t} m = (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u(f(u^p)m) \\ &= f'(u^p)m + f(u^p)\frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt  $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$  und somit ist die Wirkung von  $\partial_t$  gleich der Wirkung von  $\rho'(u)^{-1}\partial_u$ .

**Lemma 2.35.** *Ein pull-back mit  $u \mapsto u^p$  multipliziert alle slopes mit  $p$ .*

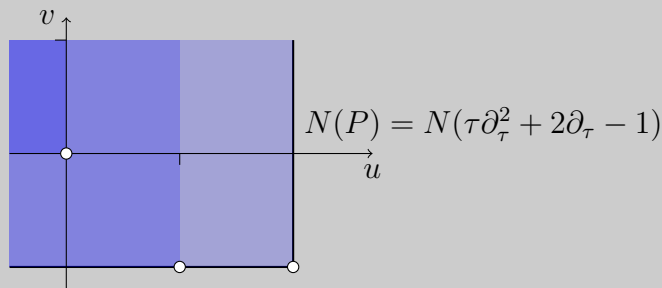
*Beweis.*

□

**Beispiel 2.36** (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$



und gehe von  $\tau$  über zu  $t$  via  $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$ :

- was passiert mit der Ableitung  $\partial_\tau$ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist  $\partial_t(t^2 \partial_t)$ ?

$$\begin{aligned} \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t \end{aligned}$$

- was passiert mit  $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$ ?

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1 \\ &= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t(t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= t(\partial_t(t^2\partial_t)) - 2t^2\partial_t - 1 \\
 &= t(t^2\partial_t^2 - 2t\partial_t) - 2t^2\partial_t - 1 \\
 &= t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1 =: P
 \end{aligned}$$

Wir wollen  $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  bzgl.  $P := t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$  betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes erhalte. Es gilt  $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$  (siehe Abbildung 2.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back  $\rho : t \rightarrow u^2$ , welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 2.33 anwenden können.

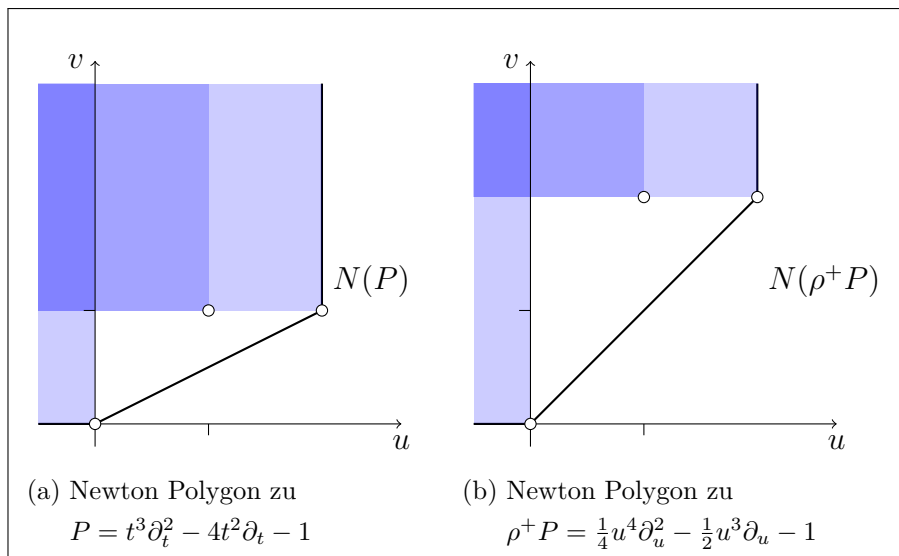
$$\begin{aligned}
 \partial_t &\rightarrow \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\
 \partial_t^2 &\rightarrow \left(\frac{1}{2u}\partial_u\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2u}\partial_u\left(\frac{1}{2u}\partial_u\right) \\
 &= \frac{1}{2u}\left(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2\right) \\
 &= \frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u
 \end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^+P &= u^6\left(\frac{1}{4u^2}\partial_u^2 - \frac{1}{4u^3}\partial_u\right) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\
 &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\
 &= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1
 \end{aligned}$$

Also ist  $\rho^+P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$  mit  $\text{slopes}(\rho^+P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.3b) und somit  $\rho^*\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (\frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1)$ .

Abbildung 2.2: Zu Beispiel 2.36

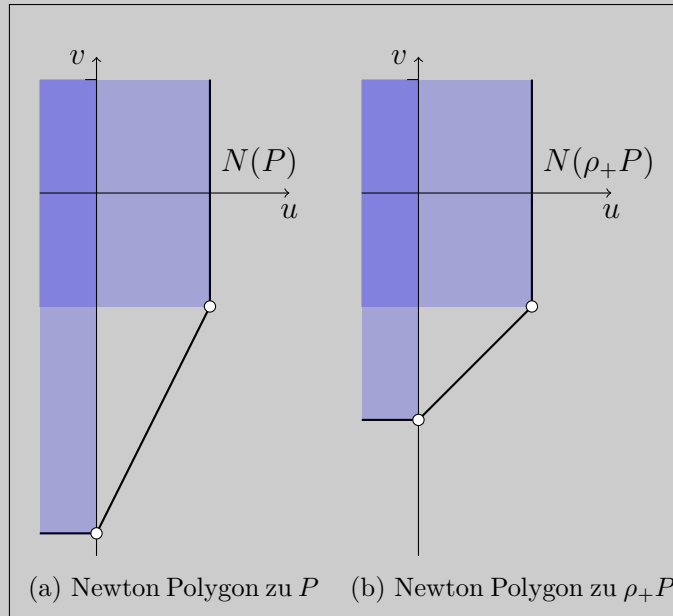


Sei  $\mathcal{N}$  ein  $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

**Definition 2.37** (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* (*Direktes Bild*)  $\rho_+ \mathcal{N}$  ist

- der  $\mathbb{C}((t))$ -VR  $\rho_* \mathcal{N}$  ist der  $\mathbb{C}$ -Vektor Raum  $\mathcal{N}$  mit der  $\mathbb{C}((t))$ -Vektor Raum Struktur durch  $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung  $\partial_t$  beschrieben durch  $\rho'(u)^{-1} \partial_u$ .

Abbildung 2.3: Zu Beispiel 2.38



**Beispiel 2.38** (push-forward). Für  $\rho : t \rightarrow u^2$ ,  $\varphi = \frac{1}{u^2}$  betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=: P} \end{aligned}$$

mit  $\text{slopes}(P) = \{2\}$  (siehe Abbildung 2.4a). Bilde nun das Direkte Bild über  $\rho$ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$  mit  $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$  und  $\text{slopes}(\rho_+P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.4b)



**Satz 2.39.** [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) \cong \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}. \quad (2.4)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} && (?) \end{aligned}$$

□

Sei  $\rho(u) = u^p = t$  und  $\varphi(t)$  gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

# 3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 3.1** (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1]

Alternative. ausführlichere / komplexe definition [Sab90, Def 5.4.5.]

Zu einem gegebenen  $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$ ,  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  und einem endlich dimensionalen  $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum  $R$  mit regulärem Zusammenhang  $\nabla$ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen  $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt  $El(\rho, \varphi, R)$  nur von  $\varphi \bmod \mathbb{C}[[u]]$  ab.

**Lemma 3.2.** [Sab07, Lem 2.2]

sabbah\_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei  $\rho : u \mapsto u^p$  und  $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$ .

**Lemma 3.3.** [Sab07, Lem 2.4] Für alle  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

*Beweis.* Wir wählen eine  $\mathbb{C}((u))$  Basis  $\{e\}$  von  $\mathcal{E}^\varphi$  und zur vereinfachung nehmen wir an, dass  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  <sup>[1]</sup>.

Dann ist die Familie  $e, ue, \dots, u^{p-1}e$  eine  $\mathbb{C}((t))$ -Basis von  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ .

Setze  $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$ . Dann ist die Familie  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$  eine  $\mathbb{C}((u))$ -Basis von  $\rho^+\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ .

Zerlege nun  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  (siehe: Anhang A).

Sei  $P$  die Permutationsmatrix, definiert durch  $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  <sup>[2]</sup>.

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \end{aligned}$$

---

<sup>[1]</sup>  $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

<sup>[2]</sup>  $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

so dass gilt:

$$u \partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} u \partial_u \mathbf{e} &= (u \partial_u e_0, \dots, u \partial_u e_{p-1}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right] \end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_u$  auf die Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$  ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun  $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$ , mit  $\xi^p = 1$  und  $T \in Gl_p(\mathbb{C})$ .

So dass gilt:

---

<sup>[3]</sup>Klar, da mipo  $X^p - 1$

$$\begin{aligned}
 T\left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j\right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (T P T^{-1})^j\right] \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j\right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} \quad [4] \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von  $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$  aus?

$$\begin{aligned}
 \partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}
 \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$  und  $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$  ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

**Lemma 3.4.** [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt  $El([u \mapsto u^p], \varphi, R) \cong El([u \mapsto u^p], \psi, S)$  genau dann, wenn

- es ein  $\zeta$  gibt, mit  $\zeta^p = 1$  und  $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$
- und  $S \cong R$  als  $\mathbb{C}((u))$ -Vektorräume mit Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Lem 2.6.]

□

**Proposition 3.5.** [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale  $\mathbb{C}((x))$ -Vektorraum  $\mathcal{M}$  mit Zusammenhang ist isomorph zu  $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$ , wobei  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ ,  $\rho : u \rightarrow u^p$  vom grad  $p \geq 1$  und ist minimal unter  $\varphi$ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und  $L$  ist ein Rang 1  $\mathbb{C}((x))$ -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

## 4 Levelt-Turrittin-Theorem

Quellen:

sabbah\_cimpa90 seite 28 / 30

**Satz 4.1** (Levelt-Turittin). *Es ex. endliche Körper  $\hat{L}|\hat{K}$  mit  $\hat{L} = \mathbb{C}((u))$  mit  $\hat{K} \hookrightarrow \hat{L}, x \mapsto u^p$  so dass:*

$$\hat{M} \otimes_{\hat{K}} \hat{L} = \bigoplus_{i=1}^r \hat{M}_i$$

mit  $\text{slopes}(\hat{M}_i) = 1 \forall i$  bzw. genauer  $\hat{M}_i = \xi^{\varphi_i} \otimes R$

**Satz 4.2** (Levelt-Turrittin-Malgrange).  *$\hat{L}|\hat{K}$  mit  $\hat{M}_i \otimes_{\hat{K}} \hat{L} = \bigoplus_{j=1}^s \hat{N}_j$  mit*

$$\hat{N}_i = \xi^{\varphi_j} \otimes R$$

und

- $\dim_L \xi^{\varphi_j} = 1, \varphi_j \in \mathbb{C}[u^{-1}] \cdot u^{-1}$
- $R$  regulär singular, also mit  $\text{slopes} = \{0\}$

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

Sei  $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  und nehme an, dass  $N(P)$  zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte  $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$  in 2 Teile. Dann gilt:

**Lemma 4.3.** *Es existiert eine Aufteilung  $P = P_1 P_2$  mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$  und  $N(P_2) \subset N_2$

- $A$  ist eine kante von ...

## 4.1 Klassische Definition

[Sab90, Page 34] Sei  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}}$  als den Vektor Raum über  $\hat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}$ . Dann definiert man die Wirkung von  $\partial_t$  durch:  $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$  und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

**Satz 4.4.** [Sab90, Thm 5.4.7] Sei  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl  $q$  so dass der Zusammenhang  $\pi^*\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_{\hat{L}}$  isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.

**Beispiel 4.5.** Sei hier  $P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - \frac{1}{2}u^3\partial_u - 1$ , wie in Beispiel ?? . Wir wollen  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  mittels des Levelt-Turritin-Theorems Zerlegen.

## 4.2 Sabbah's Refined version

**Proposition 4.6.** [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  ist isomorph zu  $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$ , wobei  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ ,  $\rho : u \mapsto t = u^p$  mit  $\text{grad } p \geq 1$  minimal bzgl.  $\varphi$  (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und  $L$  ist ein Rang 1  $\mathbb{C}((u))$ -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.

*Beweis.* [Sab07, Prop 3.1] □

**Satz 4.7** (Refined Turritin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$  kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe  $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$ , so dass jedes  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$  irreduzibel ist und keine zwei  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$  isomorph sind.



*Beweis.* [Sab07, Cor 3.3]

□

## 5 Beispiel

### 5.1 Allgemein

sei  $\varphi \in \left\{ \frac{1}{t^k}, \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}, \dots \right\}$

1. Starte mit:  $P(t, \partial_t) := (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$
2. Furiertrafo:  $F_P(z, \partial_z) = P(\partial_z, -z) \in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle$
3.  $x = z^{-1}$  und  $\partial_x = -z^2 \partial_z$

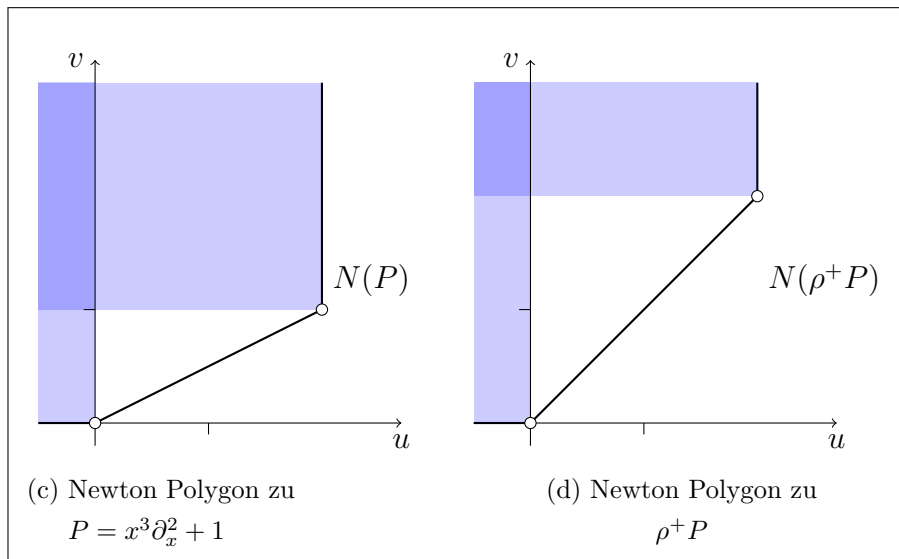
$$Q(x, \partial_x) := F_P(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$$

4. Berechne für  $Q$  das NP usw...

### 5.2 Explizit

Betrachte nun Spezialfälle von 5.1.

Im besonderen zunächst  $\mathcal{D}/\mathcal{D}(x^3 \partial_x^2 + 1)$  also mit  $P = x^3 \partial_x^2 + 1$



# A Aufteilung von ...

Sei  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ , so ist  $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  also  $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ , welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ :

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots$$

also:

$$\begin{aligned}\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots \\ \psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$

# Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on  $d$ -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov,  *$D$ -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic  $d$ -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott,  *$D$ -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki,  *$D$ -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara,  *$D$ -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to  $d$ -modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.