

Bachelorarbeit

---

# Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle $\mathcal{D}$ -Moduln

---

vorgelegt von Maximilian Huber  
am Institut für Mathematik  
der Universität Augsburg  
betreut durch Prof. Dr. Marco Hien  
abgegeben am 04.07.2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Moduln über <math>\mathcal{D}_k</math></b>	<b>1</b>
1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$ . . . . .	2
1.2 Holonome $\mathcal{D}_K$ -Moduln . . . . .	3
<b>2 Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>5</b>
2.1 Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	6
2.2 Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	8
2.3 Newton-Polygon . . . . .	10
<b>3 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen</b>	<b>13</b>
3.1 Tensorprodukt . . . . .	13
3.2 Pullback und Pushforward . . . . .	13
3.3 Fouriertransformation . . . . .	20
3.4 Betrachtung bei Unendlich . . . . .	21
3.5 Twisten von meromorphen Zusammenhängen . . . . .	21
<b>4 Levelt-Turrittin-Theorem</b>	<b>28</b>
4.1 Elementare meromorphe Zusammenhänge . . . . .	28
4.2 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $\ell$ -Symbol . . . . .	29
4.3 Levelt-Turrittin-Theorem . . . . .	31
<b>5 Explizite Berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung</b>	<b>33</b>
5.1 Betrachte $\mathcal{M}_\varphi$ für allgemeine $\varphi$ . . . . .	34
5.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . . . . .	38
5.3 Konvergenzbetrachtung am Beispiel $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . . . . .	45
<b>Ausblick</b>	<b>49</b>
<b>Anhang</b>	<b>51</b>
<b>A Aufteilung von <math>t\varphi'(t)</math></b>	<b>51</b>
<b>B Quelltexte</b>	<b>52</b>
B.1 ComplRat.hs . . . . .	52
B.2 Koeffs.hs . . . . .	53
B.3 SaveToFile.hs . . . . .	55



# Einleitung

Die Theorie der  $\mathcal{D}$ -Moduln ist aus einem Versuch, Systeme von partiellen Differentialgleichungen algebraisch zu betrachten, entstanden. Seit den 1960er Jahren wurde diese Theorie von beispielsweise B. Malgrange, J. Bernstein, P. Deligne, M. Sato, und M. Kashiwara entwickelt und vorangetrieben. Auch aktuell wird viel auf diesem Thema geforscht, so ist hier vor allem C. Sabbah zu erwähnen, der auch zwei der Hauptquellen dieser Arbeit, namentlich [Sab90] und [Sab07], verfasst hat.

Eines der wichtigsten Resultate für  $\mathcal{D}$ -Moduln ist die Riemann-Hilbert-Korrespondenz. Sie beschreibt mittels des de-Rham-Funktors  $\mathbf{DR}$  die Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} \text{Regulär singuläre} \\ \text{holonome } \mathcal{D}\text{-Moduln} \end{array} \right\} & \xrightleftharpoons{\mathbf{DR}} & \{\text{Perverse Garben}\} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \left\{ \begin{array}{c} \text{Regulär singuläre} \\ \text{meromorphe} \\ \text{Zusammenhänge} \end{array} \right\} & \xleftarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Regulär singuläre} \\ \text{lokalisierte} \\ \text{holonome } \mathcal{D}\text{-Moduln} \end{array} \right\} & \xrightleftharpoons{\quad} \{\text{Lokale Systeme}\} .
 \end{array}$$

Vergleiche hierzu [Kas84, Sec 6] oder [HTT07, Thm 7.2.1].

Allerdings lässt sich dieses Resultat über regulär singuläre holonome  $\mathcal{D}$ -Moduln leider nicht kanonisch auf irregulär singuläre fortsetzen. Jedoch gibt es zumindest für formale irregulär singuläre  $\mathcal{D}$ -Moduln bzw. formale irregulär singuläre meromorphe Zusammenhänge eine allgemeine Strukturaussage: das Levelt-Turrittin-Theorem, welches im Rahmen dieser Arbeit genauer betrachtet werden soll.

Das Levelt-Turrittin-Theorem beschreibt, wie sich ein formaler meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}$  nach einem möglicherweise notwendigem Pullback in die direkte Summe

$$\mathcal{M} \cong \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{E}^{\psi_i} \otimes R_i$$

zerlegen lässt. Die  $\mathcal{E}^{\psi_i} \otimes R_i$  stellen dabei elementare meromorphe Zusammenhänge dar und  $R_i$  ist jeweils einer der bereits erwähnten regulär singulären meromorphen Zusammenhänge.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, in die Theorie der  $\mathcal{D}$ -Moduln (Kapitel 1) bzw. der meromorphen Zusammenhänge (Kapitel 2 und 3) kurz einzuführen und danach eine Levelt-Turrittin-Zerlegung explizit an einem Beispiel auszuführen und zu berechnen.

Im ersten Kapitel erfolgt ein kurzer Überblick über die Theorie der  $\mathcal{D}$ -Moduln, dabei wird der Schwerpunkt auf diejenigen Themen gelegt, die für das weitere Verständnis der Arbeit nötig sind. Eine ausführliche Einführung, z.B. zur genauen Definition von Holonomie, kann in [Sab90] oder in [HTT07] nachgeschlagen werden.

Im zweiten Kapitel werden die meromorphen Zusammenhänge definiert. Diese sind das wichtigste mathematische Objekt in dieser Arbeit. Ein wichtiges Resultat in diesem Kapitel ist die Eins-zu-Eins Korrespondenz von meromorphen Zusammenhängen zu holonomen lokalisierten  $\mathcal{D}$ -Moduln.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich ausschließlich mit Operationen auf meromorphen Zusammenhängen. Vorgestellt werden Tensorprodukt, Pullback und Pushforward, Fouriertransformation, die sogenannte „Betrachtung bei Unendlich“ und das Twisten eines meromorphen Zusammenhangs. Diese Operationen werden in den folgenden zwei Kapiteln Verwendung finden.

Im vierten Kapitel soll das Levelt-Turrittin-Theorem vorgestellt werden. Es erlaubt, einen meromorphen Zusammenhang in elementare meromorphe Zusammenhänge zu zerlegen.

Das letzte Kapitel hat das Ziel, die Levelt-Turrittin-Zerlegung auf eine Klasse von meromorphen Zusammenhängen anzuwenden. Dazu wird zu Beginn ein Rezept gegeben, welches die gewünschten Zusammenhänge beschreibt. Zu diesen Zusammenhängen werden zunächst allgemeine Aussagen getroffen, bevor in Abschnitt 5.2 ganz konkret eine Levelt-Turrittin-Zerlegung zu einem meromorphen Zusammenhang berechnet wird. Zuletzt wird in Abschnitt 5.3 das Konvergenzverhalten der berechneten Zusammenhänge analysiert.

# 1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

In diesem Kapitel wird die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1] oder in [AV09, Kapittel 2], in einer Veränderlichen einführen. Allgemeiner und in mehreren Veränderlichen wird die Weyl-Algebra beispielsweise in [Cou95, Chapter 1] definiert.

**Definition 1.1** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von  $a$  und  $b$*  definiert.

**Proposition 1.2.** Sei  $k = \mathbb{C}[x]$  (bzw.  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw.  $\mathbb{C}[[x]]$ ) ein Ring der Polynome (bzw. der konvergenten Potenzreihen bzw. der formalen Potenzreihen) in  $x$  über  $\mathbb{C}$ . Sei  $\partial_x : k \rightarrow k$  der gewohnte Ableitungsoperator nach  $x$ , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. für  $f \in k$  ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (1.1)$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] \stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial x^k}{\partial x} = kx^{k-1} \quad (1.2)$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \quad (1.3)$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \quad (1.4)$$

*Beweis.* Die erste Aussage ist klar. Für die zweite Aussage gilt für ein Testobjekt  $g \in k$

$$\begin{aligned} [\partial_x, f] \cdot g &= \underbrace{\partial_x(fg)} - f\partial_x g \\ &= \overbrace{(\partial_x f)g} + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} \\ &= (\partial_x f)g. \end{aligned}$$

Der Rest der Proposition wird beispielsweise in [Sab90, 1.2.4.] oder [AV09, Kor 2.8] bewiesen.  $\square$

## 1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in \mathbb{C}[x]$  (bzw.  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw.  $\mathbb{C}[[x]]$ ). Man hat die folgende Kommutationsrelation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator*  $f$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x}, f \right] = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (1.5)$$

wobei die rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , also dem bereits abgeleiteten  $f$ , darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man  $[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$ , denn

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x}, f \right] \cdot g &= \frac{\partial(fg)}{\partial x} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}_{=0} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g. \end{aligned}$$

**Definition 1.3.** Definiere nun den Ring  $\mathcal{D}_k$  als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in  $k$  zusammen mit dem Element  $\partial_x$  erzeugt wird, modulo der Relation (1.5). Wir schreiben diesen Ring auch als:

- $A_1(\mathbb{C})$  bzw.  $\mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ , falls  $k = \mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=0}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$ , und nennen ihn die *Weyl Algebra*.
- $\mathcal{D}$ , falls  $k = \mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$  die konvergenten Potenzreihen.
- $\widehat{\mathcal{D}}$ , falls  $k = \mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\}$  die formalen Potenzreihen.
- $\mathcal{D}_K$ , falls  $k = K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$  der Ring der Laurent Reihen.
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , falls  $k = \widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  der Ring der formalen Laurent Reihen<sup>[1]</sup>.

*Bemerkung 1.4.* 1. Es bezeichnet der Hut ( $\widehat{\phantom{x}}$ ) das jeweils formale Pendant zu einem konvergenten Objekt. Dementsprechend könnte man auch  $\widehat{\mathbb{C}\{x\}}$  für  $\mathbb{C}[[x]]$  schreiben.

2. Es gilt  $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$  und  $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ .

3. Offensichtlich erhält  $\mathcal{D}_k$  in kanonischer Weise eine nichtkommutative Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.

*Bemerkung 1.5.* Jede Aussage bzw. Definition, die in dieser Arbeit über  $K$  bzw.  $\mathcal{D}_K$  getroffen wird, gilt auch über  $\widehat{K}$  bzw.  $\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . Die andere Richtung gilt im Allgemeinen nicht.

**Proposition 1.6.** Jedes Element in  $\mathcal{D}_K$  kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in k$ , geschrieben werden.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]. □

---

<sup>[1]</sup>Wird in [AV09] mit  $\widehat{\widehat{\mathcal{D}_{\widehat{K}}}}$  bezeichnet.



**Definition 1.7.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , wie in Proposition 1.6 gegeben, so definiere

$$\deg P := \max \left\{ \{i \mid a_i \neq 0\} \cup \{-\infty\} \right\}$$

als den *Grad* (oder den  $\partial_x$ -Grad) von  $P$ .

Da  $\mathcal{D}$  ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen Links- und Rechts- $\mathcal{D}$ -Moduln unterscheiden. Wenn im Folgendem von  $\mathcal{D}$ -Moduln gesprochen wird, sind damit immer Links- $\mathcal{D}$ -Moduln gemeint.

**Beispiel 1.8.** Hier einige Beispiele für (Links-)  $\mathcal{D}$ -Moduln

1.  $\mathcal{D}$  ist ein Links- und Rechts- $\mathcal{D}$ -Modul.
2.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$  oder  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  mit jeweils  $x \cdot x^m = x^{m+1}$  und  $\partial_x(x^m) = mx^{m-1}$  ist ein Links- $\mathcal{D}$ -Modul.
3. Führt man formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Objekt  $\exp(\lambda x)$  ein, mit  $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$ , so ist  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x] \exp(\lambda x)$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul.
4. Führt man analog ein Symbol  $\log(x)$  mit den Eigenschaften  $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$  ein, so erhält man nun den  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Dieses Modul ist über  $\mathcal{D}$  durch  $\log(x)$  erzeugt und es gilt

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

## 1.2 Holonome $\mathcal{D}_K$ -Moduln

In diesem Abschnitt werden die Holonomen  $\mathcal{D}_K$ -Moduln nur sehr einfach und ohne großen Hintergrund eingeführt, da wir diese Theorie nicht benötigen. Eine detailreichere Definition ist bei [Sab90, Def. 3.3.1] zu finden.

**Definition 1.9.** Sei  $\mathcal{M}_K$  ein Links- $\mathcal{D}_K$ -Modul ungleich  $\mathcal{D}_K$ .  $\mathcal{M}_K$  heißt *holonom*, falls es ein Torsionselement  $m \in \mathcal{M}_K$  gibt, das  $\mathcal{M}_K$  als  $\mathcal{D}_K$ -Moduln erzeugt. Im Speziellen folgt damit, dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathfrak{a}$  für ein  $0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}_K$ .

*Bemerkung 1.10.* In [Cou95] wird der Begriff holonom über die Dimension definiert und bei [Sab90] über die charakteristische Varietät. Letzteres ist die übliche Definition, da sich diese gut verallgemeinern lässt.

*Bemerkung 1.11.* Nach [Cou95, Prop 10.1.1] gilt

- Submoduln und Quotienten von holonomen  $\mathcal{D}_K$ -Moduln sind holonom
- sowie endliche Summen von holonomen  $\mathcal{D}_K$ -Moduln sind holonom

und laut [Sab90, Thm. 4.2.3] gilt, dass

- für einen holonomen  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ -Modul  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}$  (bzw. einen  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ -Modul  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}$ ) ist die Lokalisierung

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K \quad (\text{bzw. } \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]} \otimes_{\mathbb{C}[[x]]} \widehat{K}),$$

mit der  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ - (bzw.  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ -) Modul-Struktur durch

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

wieder holonom.

Nach [Sab90, Cor 4.2.8] gilt der folgende wichtige Satz.

**Satz 1.12.** *Sei  $\mathcal{M}_K$  ein holonomes  $\mathcal{D}_K$ -Modul, dann gilt, dass seine Lokalisierung isomorph zu  $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$ , mit einem  $P \in \mathcal{D}_K$  ungleich Null, ist.*

## 2 Meromorphe Zusammenhänge

In diesem Kapitel werden wir das Konzept der meromorphen Zusammenhänge einführen und die folgenden zwei Eins-zu-Eins Korrespondenzen besprechen:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Systeme} \\ \text{von} \\ \text{ODEs} \end{array} \right\} \xleftarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Meromorphe} \\ \text{Zusammenhänge} \end{array} \right\} \xleftarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Lokalisierte} \\ \text{holonome} \\ \mathcal{D}\text{-Moduln} \end{array} \right\}.$$

Zum Schluss des Kapitels werden noch die Newton-Polygone eingeführt, welche als Invarianten für meromorphe Zusammenhänge fungieren sollen.

Wir beginnen mit der klassischen Theorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sei  $V$  ein geeigneter Funktionenraum, beispielsweise der Raum der holomorphen Funktionen.

**Definition 2.1** (Systeme von ODEs). Für eine Matrix  $A = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)^{[1]}$  definieren wir das *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen* (kurz *System von ODEs*) als

$$\frac{d}{dx}u(x) = Au(x), \quad (2.1)$$

wobei  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$  ein Spaltenvektor<sup>[2]</sup> von unbekannten Funktionen ist. Wir sagen  $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$  ist eine *Lösung* von (2.1), falls  $v_i \in V$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $v$  die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Durch Setzen von  $w(x) := Tu(x)$ , für eine invertierbare Matrix  $T \in GL(n, K)^{[3]}$ , erhält man aus 2.1 das äquivalente System

$$\frac{d}{dx}w(x) = (T^{-1}AT - T^{-1}\frac{d}{dx}T)w(x),$$

und damit erhalten wir die folgende Definition.

**Definition 2.2** (Differenziell Äquivalent). Man nennt  $A$  und  $B \in M(n \times n, K)$  (*differenziell*) *äquivalent* ( $A \sim B$ ) genau dann, wenn es ein  $T \in GL(n, K)$  gibt, mit  $B = T^{-1}AT - T^{-1}\frac{d}{dx}T$ . Dementsprechend sind zwei Systeme von ODEs äquivalent, wenn ihre zugeordneten Matrizen differenziell äquivalent sind.

<sup>[1]</sup> Es bezeichnet  $M(n \times m, k)$  die Menge der  $n \times m$ -Matrizen mit Einträgen in  $k$ .

<sup>[2]</sup> Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ein Vektor, bezeichnet  ${}^tv := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  den transponierten Vektor.

<sup>[3]</sup>  $GL(n, K)$  bezeichnet die Menge der invertierbaren Matrizen in  $M(n \times n, K)$ .

Mit elementarer Theorie über gewöhnliche Differentialgleichungen lässt sich ein System von ODEs in eine einzige ODE der Form

$$\underbrace{(a_n \partial_x^n + a_{n-1} \partial_x^{n-1} + \cdots + a_1 \partial_x + a_0)}_{=:P} \cdot u(t) = 0, \quad (2.2)$$

mit  $a_i \in K$  für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$ , umschreiben. Dieses so erhaltene  $P \in \mathcal{D}_K$  ist ein sogenannter linearer Differentialoperator und es gilt

$$v(x) \text{ ist Lösung von } P \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall Q \in \mathcal{D}_K \text{ ist } v(x) \text{ Lösung von } QP \cdot u(x) = 0.$$

Also ist eine Lösung von  $P \cdot u(x) = 0$  für alle  $\tilde{Q} \in \mathcal{D}_K \cdot P \triangleleft \mathcal{D}_K$  auch eine Lösung von  $\tilde{Q} \cdot u(x) = 0$ . Diese Eigenschaft, dass ein linearer Differentialoperator  $P$  ein Ideal bestimmt, wollen wir nun nutzen, um das Problem der Differentialgleichungen algebraisch zu betrachten.

## 2.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde in die moderne Sprache der meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

**Definition 2.3** (Meromorpher Zusammenhang). Ein (*konvergenter*) *meromorpher Zusammenhang* (bei  $x = 0$ ) ist ein Tupel  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.3)$$

erfüllen soll.

*Bemerkung 2.4.* Analog definiert man einen *formalen meromorphen Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$  bestehend, genau wie in Definition 2.3, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , ein endlich dimensionaler  $\widehat{K}$ -Vektorraum und
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Derivation  $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , welche die *Leibnitzregel* (2.3) erfüllen soll.

*Bemerkung 2.5.* Alle in dieser Arbeit vorgestellten Resultate, welche für konvergente meromorphe Zusammenhänge gelten, gelten, analog wie in Bemerkung 1.5, auch für formale meromorphe Zusammenhänge. Die Rückrichtung hiervon gilt aber nicht, ein Beispiel hierfür ist Satz 2.27.

*Bemerkung 2.6.* Später wird man auf die Angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}_K$  als den meromorphen Zusammenhang bezeichnen. Auch wird manchmal auf die Angabe von  $K$  im Subscript verzichtet, sofern klar ist welches  $K$  gemeint ist.

**Definition 2.7.** Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  zwei meromorphe Zusammenhänge über  $K$ . Eine  $K$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, falls sie  $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$  erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch  $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ . Ein solcher Morphismus ist ein Isomorphismus, falls die Abbildung  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen ist.

**Lemma 2.8.** Sei  $\mathcal{M}_K$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum mit  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei darauf definierte Derivationen, so gilt: Die Differenz zweier Derivationen ist  $K$ -linear.

*Beweis.* Seien  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Derivationen auf  $\mathcal{M}_K$ . Da  $\partial_1$  und  $\partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, ist  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u). \end{aligned}$$

□

Dieser lineare Unterschied zweier Derivationen lässt sich als Matrix darstellen, und so kommt man zur folgenden Definition

**Definition 2.9** (Zusammenhangsmatrix). Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein meromorpher Zusammenhang so wähle eine  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$ . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix* bzgl. der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  die Matrix  $A = (a_{ij}(x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M(n \times n, K)$  definiert durch

$$a_{ij}(x) := -{}^t e_i \partial e_j.$$

Damit ist, bezüglich der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , die Wirkung von  $\partial$  auf  $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$  beschrieben durch  $\partial(u) = u'(x) - Au(x)$ , denn

$$\begin{aligned} \partial(u) &= \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n u'_i(x)e_i}_{= u'(x)} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)e_i}_{= Au(x)} \\ &= u'(x) - Au(x). \end{aligned}$$

Somit ist die Bedingung  $\partial u(x) = 0$ , für  $u(x) = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  äquivalent zur Gleichung

$$u'(x) = Au(x)$$

für  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ . Damit haben wir gesehen, dass jeder meromorphe Zusammenhang  $(\mathcal{M}, \partial)$  ausgestattet mit einer  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$  zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zugeordnet werden kann.

**Definition 2.10.** Wenn wir umgekehrt mit einer Matrix  $A = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$ , welche ein System von ODEs beschreibt, beginnen, können wir durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i \quad \text{und} \quad \partial_A \sum_{i=1}^n u_i e_i := \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_j \right) e_i$$

den *assozierten meromorphen Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$  definieren.

**Lemma 2.11.** Sind  $A_1, A_2 \in M(n \times n, K)$  zwei Matrizen, die zwei Systeme von ODEs beschreiben, dann gilt:

$$\frac{d}{dx} u(x) = A_1 u(x) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \frac{d}{dx} u(x) = A_2 u(x)$$

genau dann, wenn

$$(\mathcal{M}_{A_1}, \partial_{A_1}) \quad \text{zu} \quad (\mathcal{M}_{A_2}, \partial_{A_2})$$

äquivalent ist.

Damit haben wir eine Eins-zu-Eins Korrespondenzen zwischen meromorphen Zusammenhängen und Systemen von ODEs. Genauer wird dies beispielsweise in [HTT07, Sec 5.1] oder auch in [Sab90, Sec 3] betrachtet.

## 2.2 Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln

**Lemma 2.12** (Lemma vom zyklischen Vektor). Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein meromorpher Zusammenhang. Es existiert ein Element  $m \in \mathcal{M}_K$  und eine ganze Zahl  $d$  so dass  $m, \partial m, \dots, \partial^{d-1} m$  eine  $K$ -Basis von  $\mathcal{M}_K$  ist.

*Beweis.* Ein Beweis ist beispielsweise in [Sab90, Thm 4.3.3] oder ausführlicher in [AV09, Satz 4.8] nachzulesen.  $\square$

**Satz 2.13.** Ein meromorpher Zusammenhang bestimmt einen holonomen lokalisierten  $\mathcal{D}_K$ -Moduln und umgekehrt.

*Beweis.* Dies wird beispielsweise in [Sab90, Thm 4.3.2] bewiesen.  $\square$

**Definition/Korollar 2.14.** Ist  $\mathcal{M}_K$  ein meromorpher Zusammenhang, dann existiert nach Satz 1.12 ein  $P \in \mathcal{D}_K$ , so dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ . Solch ein  $P$  wird als Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_K$  bezeichnet.

Vergleiche dazu auch [AV09, Satz 4.12], dort wird diese Aussage ohne die Theorie der Lokalisierten holonomen  $\mathcal{D}$ -Moduln bewiesen.

*Bemerkung 2.15.* Dieses so definierte Minimalpolynom ist nicht eindeutig. Im Besonderen ist für jedes  $f \in \mathcal{D}_K^\times$ <sup>[4]</sup>

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P),$$

denn  $\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \triangleleft \mathcal{D}_K$ .

**Proposition 2.16.** *In der Situation von Lemma 2.12 sei*

$$\partial^d m = \alpha_{d-1} \partial^{d-1} m + \alpha_{d-2} \partial^{d-2} m + \cdots + \alpha_1 \partial m + \alpha_0 m, \quad \alpha_i \in K$$

eine Basisdarstellung von  $\partial^d m$ , dann ist

$$\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \left( \underbrace{\partial_x^d - \alpha_{d-1} \partial_x^{d-1} - \alpha_{d-2} \partial_x^{d-2} - \cdots - \alpha_1 \partial_x - \alpha_0}_{=: P \in \mathcal{D}_K} \right),$$

also  $P = \partial_x^d - \alpha_{d-1} \partial_x^{d-1} - \cdots - \alpha_1 \partial_x - \alpha_0$  ein Minimalpolynom.

*Beweisskizze.* Betrachte die surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathcal{D}_K \rightarrow \mathcal{D}_K, \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \partial_x^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \partial_x^i m.$$

Nachdem gezeigt wurde, dass  $\varphi$   $K$ -Linear ist, reicht es zu zeigen, dass  $\ker(\varphi) = \mathcal{D} \cdot P$ . Nun folgt die Behauptung nach dem Homomorphiesatz. Vergleiche dazu [AV09, Satz 4.12].  $\square$

**Satz 2.17.** *Ist  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  so gilt*

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

*Beweis.* Bewiesen wird dies in [AV09, Seite 57-64] oder auch in [Sab90, Seite 30-32].  $\square$

**Korollar 2.18.** *Sei  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  wie in Satz 2.17, so gilt*

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1).$$

*Beweis.* Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1). \end{aligned}$$

$\square$

<sup>[4]</sup> Für einen Ring  $R$ , bezeichnet  $R^\times$  die Einheitengruppe von  $R$ .

## 2.3 Newton-Polygon

Jedes  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , also insbesondere auch jedes  $P \in \mathcal{D}_K$ , lässt sich nach Proposition 1.6 eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit  $a_k(x) \in \widehat{K}$  bzw.  $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$  schreiben. Betrachte das zu  $P$  dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) &:= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left( (m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Definition 2.19.** Das Randpolygon der konvexen Hülle  $\text{conv}(H(P))$  von  $H(P)$  heißt das *Newton-Polygon* von  $P$  und wird mit  $N(P)$  bezeichnet.

*Bemerkung 2.20.* Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt  $P = \sum_{k=0}^n a_k(x) (x \partial_x)^k$  mit  $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexen Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Er bemerkt auch, dass seine Definition, bis auf möglicherweise vertikale Verschiebung, zu Definition 2.19 äquivalent ist.

**Definition 2.21.** Die Menge  $\mathcal{P}(P)$ , genannt *Slopes von  $P$* , sind die nicht-vertikalen Steigungen von  $N(P)$ , die sich in der rechten Halbebene befinden.

- Ist  $\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  so definiere  $\mathcal{P}(P)$  als die zu  $\mathcal{M}$  gehörigen Slopes und schreibe dafür  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ .
- $P$  heißt *regulär singulär* oder nur *regulär*  $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(P) = \{0\}$  oder  $\deg P = 0$ , sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $\mathcal{M}_K$ ) heißt *regulär singulär*, falls es ein regulär singuläres  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $P \in \mathcal{D}_K$ ) gibt, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  (bzw.  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ ).

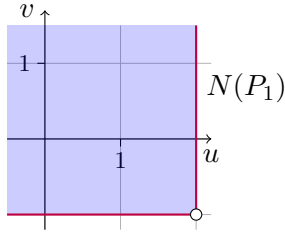
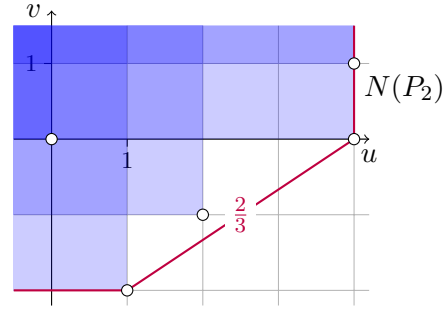
**Beispiel 2.22.**

1. Ein einfaches Beispiel ist  $P_1 = x^1 \partial_x^2$ . Es ist abzulesen, dass  $m = 2$  und  $l = 1$ , so dass

$$H(P_1) = \left( (2, 1 - 2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.1 ist der Quadrant, der zum Monom  $x \partial_x^2$  gehört (blau) sowie das Newton-Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist  $\mathcal{P}(P_1) = \{0\}$  und damit ist  $P_1$  regulär singulär.




 Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu  $P_1 = x\partial_x^2$ .

 Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu  $P_2$ .

2. Sei  $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$ . Das Newton-Polygon zu  $P_2$  wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass  $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$  ist. Also ist  $P_2$  irregulär singulär.

**Bemerkung 2.23.** Sei  $P$  ein Minimalpolynom zu  $\mathcal{M}_K$ . Für jedes  $f \in \mathcal{D}_K^\times$  gilt nach 2.15, dass  $f \cdot P$  ebenfalls ein Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_K$  ist. Allerdings sind die zugehörigen Newton-Polygone möglicherweise vertikal verschoben.

Nach [Sab90, Seite 25] gilt, dass das Newton-Polygon, bis auf vertikales Verschieben, nur vom assoziierten meromorphen Zusammenhang abhängt. Dies wird auch in [AV09, Bem 5.4] thematisiert.

**Definition 2.24.** Seien  $\varepsilon x^p \partial_x^q$  und  $\varepsilon' x^{p'} \partial_x^{q'}$  zwei Monome aus  $\mathcal{D}_K$ , also mit  $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{C}$ ,  $p, p' \in \mathbb{Z}$  und  $q, q' \in \mathbb{N}_0$ . Man sagt, dass  $\varepsilon' x^{p'} \partial_x^{q'}$  ein *Term im Quadranten* von  $\varepsilon x^p \partial_x^q$  ist, falls  $p' \geq p$  und  $q' \leq q$  gilt.

**Bemerkung 2.25.**

- Anschaulich bedeutet dies, dass

$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \left( (q, p - q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \supset \left( (q', p' - q') + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = H(\varepsilon' x^{p'} \partial_x^{q'}).$$

- Sei  $P$  ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von  $\varepsilon x^p \partial_x^q$  sind, dann gilt:

$$H(P) = H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^p \partial_x^q) = H(\varepsilon x^p \partial_x^q)$$

und damit folgt, dass  $N(P) = N(\varepsilon x^p \partial_x^q)$  ist. Also können Terme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Terms befinden und nicht der Term selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das T.i.Q. ist eine hier die Abkürzung für „Terme im Quadranten“.

**Bemerkung 2.26.** Nach [Sab90] gilt sogar, dass beim Kommutieren von zwei Elementen  $a, b \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  nur Elemente im gemeinsamen Quadranten auftauchen. Es gilt also

$$a \cdot b = b \cdot a + \text{T.i.Q. von } b \cdot a. \quad (2.4)$$

Damit sieht man auch, dass Kommutieren innerhalb von  $P$  das Newton-Polygon von  $P$  nicht ändert.

Ein erster Schritt zur Levelt-Turrittin-Zerlegung ist der folgende Satz. Dieser erlaubt es meromorphe Zusammenhänge „entlang der Slopes“ zu zerlegen.

**Satz 2.27.** *Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler meromorpher Zusammenhang und sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge seiner Slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung*

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

*in formale meromorphe Zusammenhänge mit  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$ .*

*Beweis.* Einen Beweis hierfür findet man in [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15]. □

*Bemerkung 2.28.* In Satz 2.27 ist es wirklich notwendig formale meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente meromorphe Zusammenhänge.

## 3 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

### 3.1 Tensorprodukt

Hier zunächst zwei Rechenregeln die für jedes Tensorprodukt gelten:

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L), \quad (3.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M. \quad (3.2)$$

Sei  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so gilt allgemein

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong (N \otimes_R M) / \text{im}(\text{id}_R \otimes f). \quad (3.3)$$

**Proposition 3.1.** *Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  meromorphe Zusammenhänge. Sei  $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ . Durch Setzen von*

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \quad (3.4)$$

*als die Wirkung von  $\partial$  auf dem  $K$ -Moduln  $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ , wird  $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$  zu einem meromorphen Zusammenhang. Vergleiche dazu beispielsweise [Sch94, Prop 4.1.1].*

**Lemma 3.2.** *Falls  $\mathcal{N}$  regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  genau die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}$ .*

### 3.2 Pullback und Pushforward

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto x := \rho(t) \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung  $p \geq 1$ . Hier werden wir meistens  $\rho(t) = t^p$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, \quad f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], \quad f \mapsto f \circ \rho.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), \quad f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), \quad f \mapsto f \circ \rho,$$

wobei  $L$  (bzw.  $\widehat{L}$ ) eine endliche Körpererweiterung von  $K$  (bzw.  $\widehat{K}$ ) ist. Damit wird  $\widehat{L}$  kanonisch zu einem  $\widehat{K}$  Vektorraum. Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}((x))$  Vektorraum ausgestattet mit einer Derivation  $\partial_x$ .

**Definition 3.3** (Pullback). Der *Pullback* oder das *inverse Bild*  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  von  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial_x)$  ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit der *Pullback Derivation*  $\partial_t := \rho^* \partial_x$  definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (3.5)$$

*Bemerkung 3.4.*

- Wir sagen ein Pullback ist vom Grad  $q$ , falls  $\deg(\rho) = q$ .
- Für ein allgemeines  $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  gilt

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (3.6)$$

Der folgende Satz zeigt, wie sich mit dem Pullback rechnen lässt, bzw. wie man konkret ein entsprechendes Minimalpolynom berechnen kann.

**Satz 3.5.** In der Situation von Lemma 3.3, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$  für ein  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , gilt

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t).$$

Für  $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  werden wir auch  $\rho^* P(t, \partial_t)$  schreiben.

Für den Beweis von Satz 3.5 werden zunächst einige Lemmata bewiesen.

**Lemma 3.6.** Es gilt  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  als  $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ -Vektorräume, mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

*Beweis.* Prüfe zunächst die Injektivität. Sei  $\sum_{k=0}^{p-1} t^k \otimes Q_k(x, \partial_x)$  ein allgemeines Element, welches

$$0 = \Phi \left( \sum_{k=0}^{p-1} t^k \otimes Q_k(x, \partial_x) \right)$$

erfüllt, also in  $\ker(\Phi)$  liegt. Es ist

$$\Phi \left( \sum_{k=0}^{p-1} t^k \otimes Q_k(x, \partial_x) \right) = \sum_{k=0}^{p-1} t^k Q_k(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) = 0$$

eine eindeutige Zerlegung des Bildes, wobei jede Potenz von  $t$  in nur genau einem Summanden vorkommt. Also ist diese Summe gleich 0, genau dann, wenn jeder einzelne Summand verschwindet. Also

$$\Phi\left(\sum_{k=0}^{p-1} t^k \otimes Q_k(x, \partial_x)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(t^k \otimes Q_k(x, \partial_x)\right) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, p-1\}$$

und, da hier alles nullteilerfrei ist und da  $t^k \neq 0 \in \hat{L} \forall k$ , ist die Bedingung äquivalent zu

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 0 = Q_k(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \quad \forall k \in \{0, \dots, p-1\} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = Q_k(x, \partial_x) \quad \forall k \in \{0, \dots, p-1\} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = t^k \otimes Q_k(x, \partial_x) \quad \forall k \in \{0, \dots, p-1\}. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass  $\sum_{k=0}^{p-1} t^k \otimes Q_k(x, \partial_x) = 0$ , womit die Injektivität gezeigt ist. Nun zur Surjektivität. Mache dazu Induktion über den  $\partial_t$ -Grad von  $g(t, \partial_t)$ .

**Induktionsanfang:** Sei  $g(t, \partial_t) = a_0(t) \partial_t^0 \in \mathcal{D}_{\hat{L}}$  vom  $\partial_t$ -Grad 0. So gilt, dass  $\Phi(a_0(t) \otimes 1) = a_0(t)$ , damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

**Induktionsbehauptung:** Alle  $g(t, \partial_t) \in \mathcal{D}_{\hat{L}}$  mit einem  $\partial_t$ -Grad kleiner als  $d$  seien als Bild von  $\Phi$  darstellbar.

**Induktionsschritt:** Sei  $g(t, \partial_t) = \sum_{k=0}^d a_k(t) \partial_t^k \in \mathcal{D}_{\hat{L}}$  vom  $\partial_t$ -Grad  $d$ , so gilt

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_{k=0}^d a_k(t) \partial_t^k \\ &= \sum_{k=0}^d a_k(t) \underbrace{(\rho'(t) \rho'(t)^{-1})^k}_{=1} \partial_t^k \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^d a_k(t) \rho'(t)^k (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k}_{=: \tilde{g}(t, \partial_t)} + \underbrace{\text{Rest von niedrigerem } \partial_t\text{-Grad}}_{\text{Darstellbar nach Induktionsbehauptung}}. \end{aligned}$$

Zeige noch, dass  $\tilde{g}(t, \partial_t)$  ein Urbild hat, zerlege dazu  $a_k(t) \rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t, \partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \left( \sum_k a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \right) \\ &= \Phi \left( \sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes \left( \sum_k a_{k,i}(x) (\partial_x)^k \right) \right). \end{aligned}$$

Somit haben wir ein Urbild gefunden und die Surjektivität gezeigt. □

**Lemma 3.7.** *Das in Lemma 3.6 definierte  $\Phi$  ist zusätzlich ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  als meromorphe Zusammenhänge.*

*Beweis.* Sei  $\partial_t$  wie gewohnt und  $\partial_{\otimes}$  die Derivation auf  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , welcher wie in Proposition 3.1 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass  $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_{\otimes}$  gilt, also dass  $\Phi$  ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{array}$$

und für einen Elementartensor  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  folgt dann:

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\ & & \uparrow \\ f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm. □

**Lemma 3.8.** *Sei  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . In der Situation*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(x, \partial_x)} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{array}$$

mit  $\Phi$  wie in Lemma 3.6 macht  $\alpha := \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  das Diagramm kommutativ.

*Beweis.* Betrachte ein  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , so gilt

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\ & & \downarrow \Phi \\ & & f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\ \downarrow \Phi & & \\ f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) & \xrightarrow{\_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)} & f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t), \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit  $\alpha = \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ .  $\square$

*Beweis zu Satz 3.5.* Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für  $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\ & & & & & & u \longmapsto u \bmod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P. \end{array}$$

Diese ist exakt, da  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(\_ \cdot P)$ . Weil  $\widehat{L}$  flach über dem Körper  $\widehat{K}$  ist, ist auch nach Anwenden des Funktors  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \_$  die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \end{array}$$

exakt. Also mit  $\Phi$  wie in Lemma 3.6 und  $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  nach Lemma 3.8 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & & 
 \end{array}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, da  $\cdot Q$  injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0
 \end{array}$$

fortsetzen und damit folgt, wegen Isomorphie der Kokerne, die Behauptung.  $\square$

**Lemma 3.9.** Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , dann gilt für  $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$ , dass  $\Lambda'_i = p \cdot \Lambda_i$ .

*Beweis.* Siehe [Sab90, 5.4.3] für einen Beweis.  $\square$

Hier nun ein explizit berechneter Pullback.

**Beispiel 3.10.** Wir wollen  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  mit  $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$  betrachten. Unser Ziel ist es ganzzahlige Slopes zu erhalten, dies ist auch der Anwendungsfall, in dem der Pullback später verwendet wird. Es gilt  $\mathcal{P}(P) = \{\frac{1}{2}\}$  (siehe Abbildung 3.1). Wende den Pullback mit  $\rho : t \rightarrow x := t^2$  an. Zunächst folgt eine Nebenrechnung, damit wir Satz 3.5 einfacher anwenden können:

$$\left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t} \partial_t \underbrace{\frac{1}{2t} \partial_t}_{(3.7)} \quad (3.7)$$

$$\stackrel{(1.1)}{=} \frac{1}{2t} \left( -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2t} \partial_t \right) \partial_t \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t. \quad (3.9)$$

Also ergibt Einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^* P &\stackrel{(3.7)}{=} (t^2)^3 \left( \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t \right) - 4(t^2)^2 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - t^3 \frac{1}{4} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \underbrace{\frac{9}{4} t^3 \partial_t}_{(3.9)} - 1.
 \end{aligned}$$

Also gilt  $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{9}{4} t^3 \partial_t - 1$  mit  $\mathcal{P}(\rho^* P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 3.2) und somit ist der Pullback gegeben durch  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{9}{4} t^3 \partial_t - 1)$ .



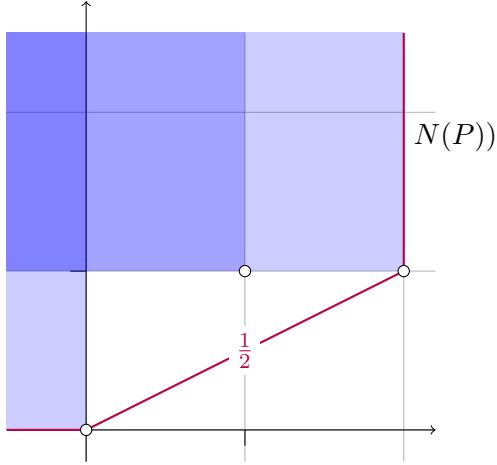


Abbildung 3.1: Newton-Polygon zu  
 $P = x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$ .

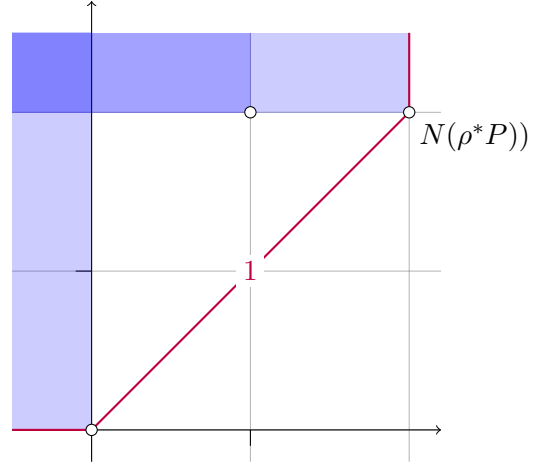


Abbildung 3.2: Newton-Polygon zu  
 $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{9}{4} t^3 \partial_t - 1$ .

Sei  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ein endlich dimensionaler  $\widehat{L}$ -Vektorraum mit Zusammenhang, so definiere den Pushforward wie folgt.

**Definition 3.11** (Pushforward). Der *Pushforward* oder das *direkte Bild*  $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$  von  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ist:

- Der  $\widehat{K}$ -Vektorraum  $\rho_* \mathcal{N}$  ist definiert als der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  mit der  $\widehat{K}$ -Vektorraumstruktur durch die skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} &\longrightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}} \\ (f(x), m) &\longmapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m. \end{aligned}$$

- Die Wirkung von  $\partial_x$  ist gegeben durch  $\rho'(t)^{-1} \partial_t$ .

**Satz 3.12.** Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (3.10)$$

*Beweis.* Mit einfachen Umformungen gilt:

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}})) \\ &\stackrel{(3.1)}{\cong} \rho_+(\underbrace{(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L})}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\stackrel{(3.2)}{\cong} \rho_+(\widehat{\mathcal{N}_{\widehat{L}}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Fouriertransformation

**Definition 3.13** (Fouriertransformation). Sei  $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$ , dann ist die *Fouriertransformierte von  $P$*  gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i.$$

**Definition 3.14.** Ist  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$ , so ist die *Fouriertransformierte von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$*  definiert als  ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$ .

**Beispiel 3.15.** Sei  $P = x^3 \partial_x^4 + x^2 \partial_x^2 + x$  dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_P &= \partial_z^3 (-z)^4 + \partial_z^2 (-z)^2 + \partial_z \\ &= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{\text{}} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{\text{}} + \partial_z \\ &= \overbrace{z^4 \partial_z^3 + [\partial_z^3, z^4]} + \overbrace{z^2 \partial_z^2 + [\partial_z^2, z^2]} + \partial_z \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \overbrace{z^4 \partial_z^3 + \sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i}} + \overbrace{z^2 \partial_z^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i}} + \partial_z \\ &= \overbrace{z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z} + \overbrace{z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2}} + \partial_z \\ &= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2 \end{aligned}$$

mit den Newton-Polygonen wie in Abbildung 3.3 und 3.4.

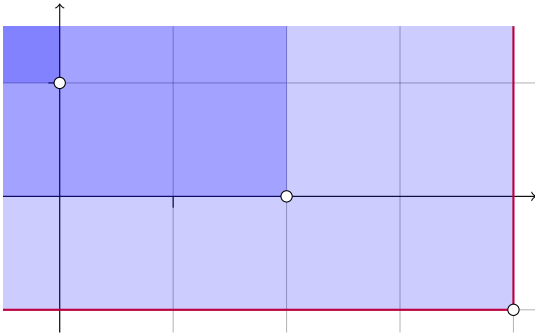


Abbildung 3.3: Newton-Polygon zu  $P$ .

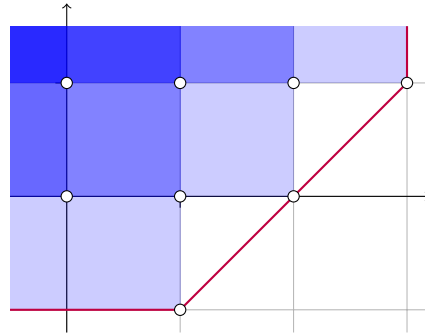


Abbildung 3.4: Newton-Polygon zu  $\mathcal{F}_P$ .

### 3.4 Betrachtung bei Unendlich

Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  ein Minimalpolynom zum meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ . Wir wollen den Zusammenhang bei Unendlich betrachten und dazu den Übergang  $x \rightsquigarrow z^{-1}$  durchführen. Vergleiche dazu beispielsweise [Sab90, Seite 70 Exmp. 2].

**Definition 3.16.** Wir definieren den *Zusammenhang bei Unendlich*  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}^\infty$  von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  als den zu  $P^\infty$  assoziierten Zusammenhang, wobei wir  $P^\infty(z, \partial_z) := P(z^{-1}, -z^2 \partial_z)$  setzen.

**Beispiel 3.17.** Sei  $P = x^3 \partial_x^4 + x^2 \partial_x^2 + x$ , dann ist  $P^\infty$  gegeben durch

$$\begin{aligned} P^\infty &= x^{-3}(-x^2 \partial_x)^4 + x^{-2}(-x^2 \partial_x)^2 + x^{-1} \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \underbrace{x^{-3+8} \partial_x^4 + \text{T.i.Q.}}_{x^5 \partial_x^4 + \text{T.i.Q.}} + \underbrace{x^{-2+4} \partial_x^2 + \text{T.i.Q.}}_{x^2 \partial_x^2 + \text{T.i.Q.}} + x^{-1} \\ &= x^5 \partial_x^4 + \text{T.i.Q.} + x^2 \partial_x^2 + \text{T.i.Q.} + x^{-1} \end{aligned}$$

mit den Newton-Polygonen wie in Abbildung 3.5 und 3.6.

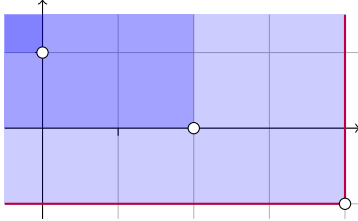


Abbildung 3.5: Newton-Polygon zu  $P$ .

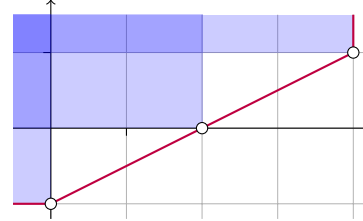


Abbildung 3.6: Newton-Polygon zu  $P^\infty$ .

### 3.5 Twisten von meromorphen Zusammenhängen

**Definition 3.18.** Sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$  für den (formalen) Rang-1-Vektorraum  $\mathbf{e} \cdot \widehat{K}$ , wobei  $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$  eine Basis ist, ausgestattet mit  $\partial_x(f \cdot \mathbf{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \mathbf{e}$ , im Speziellen also  $\partial_x \mathbf{e} = \varphi'$ .

*Bemerkung 3.19.*

1. Auf die Angabe des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.
2. Das hier definierte  $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$  entspricht  $\mathcal{F}_{\widehat{K}}^{\varphi(x^{-1})}$  in der Notation von [Sab90, 5.4.4] und  $\widehat{E}_\varphi$  in [Hei10, Def 5.8].
3. Es ist  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$ , denn für den zyklischen Vektor  $\mathbf{e}$  gilt, dass  $\partial_x \cdot \mathbf{e} = \varphi'(x) \cdot \mathbf{e}$ .
4. Wir werden oft  $\mathbf{e} = 1$  als Basis nehmen.

**Lemma 3.20.** Für  $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$  mit  $a_{-p} \neq 0$  gilt, dass  $\mathcal{P}(\mathcal{E}_K^\varphi) = \begin{cases} \{p\} & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}$ .

*Beweis.* Es ist

$$\varphi'(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=-(p+1)}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i = \underbrace{-p a_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können,  $(1, -1)$  und  $(0, -(p+1))$  sind. Da einer der relevanten Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesamt nur einen Slope  $\Lambda$  geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\Lambda = \max \left\{ 0, \frac{-1 - (-(p+1))}{1} \right\} = \max\{0, p\} = \begin{cases} p & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}.$$

□

*Bemerkung 3.21.* Nach [Sab07, 1.a] gilt  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$  genau dann wenn  $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$ .

**Lemma 3.22.** Sei  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  ein meromorpher Zusammenhang mit  $P$  von Grad  $q$  und sei  $e$  ein zyklischer Vektor. So ist  $e \otimes 1$  ein zyklischer Vektor für  $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_K^\psi$ .

*Beweis.* Da der Grad von  $P$  gleich  $q$  ist, ist auch  $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$ . Also reicht es zu zeigen, dass  $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$  ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x(e \otimes 1) &= (\partial_x e) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\ &= (\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x) \\ &= (\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1)) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + (\partial_x e) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x)) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)^2(e \otimes 1) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(e \otimes 1) \\ &\vdots \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 + \dots + \lambda_1(\partial_x e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1) \end{aligned}$$

mit  $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-2} \in \widehat{K}$ . Somit gilt dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_x(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(e \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_x e) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich  $e \otimes 1, (\partial_x e) \otimes 1, (\partial_x^2 e) \otimes 1, \dots, (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1$  linear unabhängig sind, gilt dies auch für  $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$ . Damit folgt die Behauptung. □

**Lemma 3.23.** Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$  und sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit  $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$ .

*Beweisidee.* Zeige, dass  $P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \mathbf{e} \otimes 1 = 0$  gilt. Da  $\mathbf{e} \otimes 1$  ein zyklischer Vektor ist, folgt aus Gradgründen die Behauptung. Genauer ausgeführt wird dies in [Hei10, Seiten 39 bis 44].  $\square$

**Korollar 3.24.** Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und  $\varphi$  wie in 3.23, so gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \cong \mathcal{M}_{\widehat{K}}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &\cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &\cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \underbrace{\partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \end{aligned}$$

$\square$

Nun wollen wir noch das folgende Lemma aus [Sab07, Lem 2.4] beweisen. Dieses Lemma wird im Weiteren nicht weiter verwendet, deshalb kann ein Leser, der nur an den letzten Kapiteln interessiert ist, diesen Beweis überspringen. Jedoch werden im Beweis mehrere interessante Tricks verwendet, die diesen auf jeden Fall lesenswert machen.

**Lemma 3.25.** Sei  $\rho : t \mapsto x := t^p$  und  $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$ . Für alle  $\varphi \in \widehat{L}$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm für einen passenden Isomorphismus kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Es sei oBdA  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ . Dies ist nach Bemerkung 3.21 erlaubt. Wir wählen eine  $\widehat{L}$  Basis  $\mathbf{e}$  des Rang-1- $\widehat{L}$ -Vektorraum  $\mathcal{E}^\varphi$  und damit erhält man die Familie  $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$  als  $\widehat{K}$ -Basis von  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_x t^k \mathbf{e} &= \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k \mathbf{e}}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi} \\ &= \rho'(t)^{-1} (t^k \partial_t + kt^{k-1}) \mathbf{e}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Durch die Setzung  $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$  wird die Familie  $\underline{\mathbf{e}} := (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$  eine  $\widehat{L}$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ . Zerlege nun  $t\varphi'(t)$  wie in Anhang A beschrieben in

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]\tag{3.12}$$

mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ . Damit gilt

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p},$$

denn:

$$\begin{aligned}t\partial_t \mathbf{e}_k &= t\partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \overbrace{t(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{\partial_x(t^k \mathbf{e})}_{\in \rho_+\mathcal{E}^\varphi})}^{(3.11)} \\ &\stackrel{(3.11)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \overbrace{(pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}^{(3.12)} \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \overbrace{(kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}^{(3.12)} \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{t^k t \varphi'(t) \mathbf{e}}_{(3.12)} \\ &\stackrel{(3.12)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}.\end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass  $\underline{e} \cdot V = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  gilt. Dann gilt

$$t\partial_t \underline{e} = \underline{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right],$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \underline{e} &= (t\partial_t e_0, \dots, t\partial_t e_{p-1}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \underline{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\ &= \underline{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]. \end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_t$  auf die Basis  $\underline{e}$  von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$  wird also beschrieben durch

$$\partial_t \underline{e} = \underline{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da  $V$  das Minimalpolynom  $\chi_V(X) = X^p - 1$  hat, können wir diese Matrix durch Transformation mit  $T$  auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit  $\xi^p = 1$ , bringen. Sei so ein  $\xi$  ab jetzt fixiert.

Somit erhalten wir, wenn wir diese Transformation auf  $\left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right]$  anwenden:

$$\begin{aligned}
 T \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\
 &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi^1 t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi^1 t)^{p-1} \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1} t)^{p-1} \xi^{p-1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

da  $\varphi'(t) = pt^{p-1}$ . Damit wissen wir bereits, dass im folgendem Diagramm der mit  $(\star)$  bezeichne-

k-te Stelle



te Teil kommutiert, wobei  $\Phi : (0, \dots, 0, \overset{1}{1}, 0, \dots, 0) \mapsto \mathbf{e}_k$  der kanonische Basisisomorphismus ist und  $\mathbf{e}_k$  Basis von  $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$  ist.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & & 
 \end{array}$$



Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi \left( \Phi^{-1}(v) \cdot \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \right) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente  $e_k$  erfüllt ist. Nach Definition 3.18 gilt

$$\begin{aligned} \partial_t e_k &= (\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t) e_k \\ &= \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})} \cdot \underbrace{\varphi'(t)} e_k \\ &= (\xi^{k-1})^p \cdot (pt^{p-1}) e_k \\ &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k \end{aligned}$$

und auf dem anderen Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc} \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\ \downarrow & & \\ \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\ \downarrow & & \\ (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t) \xi^{k-1} e_k \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt. □

## 4 Levelt-Turrittin-Theorem

Nun zum wichtigsten Satz in dieser Arbeit. Das Levelt-Turrittin-Theorem besagt, dass sich jeder meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}$ , nach einem möglicherweise nötigen Pullback, in eine direkte Summe von „elementaren“ meromorphen Zusammenhängen zerlegen lässt. Vergleiche dazu [Sab90].

Zunächst soll geklärt werden, welche Zusammenhänge die „richtigen“ elementaren meromorphen Zusammenhänge sind.

### 4.1 Elementare meromorphe Zusammenhänge

**Definition 4.1.** Ein *elementarer regulärer (formaler) meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang  $\mathcal{M}$ , welcher isomorph zu  $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$ , mit passendem  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $p \in \mathbb{N}$ , ist.

*Bemerkung 4.2.* Es ist leicht zu sehen, dass jeder elementare reguläre meromorphe Zusammenhang tatsächlich auch regulär ist.

**Lemma 4.3.** *Es existiert eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die  $x\partial_x$  beschreibt, nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.*

*Beweisskizze.* Wähle einen zyklischen Vektor  $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und betrachte die Basis  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  (siehe Lemma 2.12). Schreibe  $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$  mit Koeffizienten  $b_i \in \widehat{K}$ . Also erfüllt  $m$  die Gleichung  $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$ . Tatsächlich kann man, wegen Regularität,  $b_i(x) = x^i b'_i(x)$  mit  $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$  schreiben. Dies impliziert, dass  $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$  ebenfalls eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist. Die Matrix von  $x\partial_x$  zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$ .  $\square$

Nach [Sab90, Thm 5.2.2] gilt sogar das folgende Lemma.

**Lemma 4.4.** *Es existiert sogar eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$ , so dass die Matrix zu  $x\partial_x$  Einträge in  $\mathbb{C}$  hat, also konstant ist.*

Durch nutzen von Lemma 4.4 erhält man eine Konstante Matrix, welche in Jordan Normalform gebracht werden kann. Ausgeführt wurde das in [Sab90, Cor. 5.2.6]. Damit erhält man den folgenden Satz.

**Satz 4.5.** *Ein regulärer formaler Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren regulären meromorphen Zusammenhängen.*

Durch Twisten der elementaren regulären meromorphen Zusammenhänge erhält man wie folgt die elementaren meromorphen Zusammenhänge.

**Definition 4.6.** Ein *elementarer (formaler) meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , für den es  $\psi \in \widehat{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $p \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit  $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}}(x\partial_x - \alpha)^p$ , also ein elementarer regulärer meromorpher Zusammenhang ist.

**Lemma 4.7.** In der Situation von Definition 4.6 gilt  $\mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p$ .

*Beweis.* Mit Lemma 3.23 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} &= \mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}}(x\partial_x - \alpha)^p \\ &\stackrel{3.23}{=} \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}}(x(\partial_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}) - \alpha)^p \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}}(x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p. \end{aligned}$$

□

## 4.2 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $\ell$ -Symbol

Dieser Abschnitt bezieht sich auf [Sab90, Sec 5.1] und beschreibt das  $\ell$ -Symbol, welches im Beweis des Levelt-Turrittin-Theorems Verwendung findet.

Zu einer rationalen Zahl  $\Lambda \geq 0$  seien  $\lambda_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $\lambda_1 \in \mathbb{N}$  relativ prim, so dass  $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ . Definiere die Linearform  $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ . Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . Falls  $P = x^a \partial_x^b$  mit  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N}$ , setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) := \ell(b, b - a)$$

und falls  $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$  mit  $b_i \in \widehat{K}$ , setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) := \max_{\{i | a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)).$$

Die folgende Bemerkung soll helfen,  $\text{ord}_\ell(P)$  bildlich zu verstehen.

*Bemerkung 4.8.* Sei  $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  gegeben und  $P$  ein linearer Differentialoperator. Betrachte die Geradenschar  $g_a(x) := \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + a$ . Dann gibt es genau ein  $a$ , welches minimal unter der Eigenschaft ist, dass  $g_a(x)$  das Newton-Polygon zu  $P$  schneidet. Dieses so gefundene  $a$  entspricht genau  $\text{ord}_\ell(P)$ .

In Abbildung 4.1 ist dies für  $P = x^3 \partial_x^2 + 1$  und  $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$  bildlich dargestellt. Man liest ab, dass  $\text{ord}_\ell(P) = -1$  gilt.

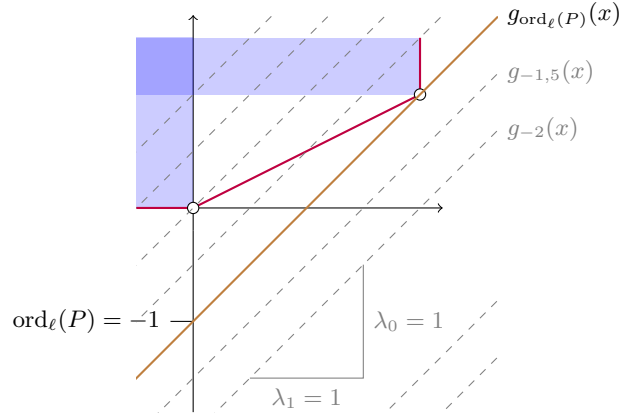


Abbildung 4.1: Zu Bemerkung 4.8.

**Bemerkung 4.9.** Nach [Sab90, Seite 25] gilt, dass  $\text{ord}_\ell(PQ) = \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q)$  und falls  $\lambda_0 \neq 0$ , gilt auch, dass  $\text{ord}_\ell([P, Q]) \leq \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q) - 1$ .

Nun können wir die aufsteigende Filtration  ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , welche mit  $\mathbb{Z}$  indiziert ist, durch

$${}^\ell V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_\ell(P) \leq \lambda\}$$

definieren. Falls  $\lambda_0 \neq 0$ , ist der gradierte Ring  $gr^\ell \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_\lambda^\ell \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , wobei  $gr_\lambda^\ell \mathcal{D}_{\widehat{K}} := {}^\ell V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} / {}^\ell V_{\lambda-1} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  ist, ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von  $\partial_x$  in dem Ring durch  $\xi$ , dann ist dieser Ring isomorph zu  $\widehat{K}[\xi]$ .

**Definition 4.10** ( $\ell$ -Symbol). Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , so ist  $\sigma_\ell(P)$  definiert als die Äquivalenzklasse von  $P$  in  $gr_{\text{ord}_\ell(P)}^\ell \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und wird als das  $\ell$ -Symbol von  $P$  bezeichnet.

**Beispiel 4.11.** Zum Beispiel ist  $\sigma_\ell(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$  für alle  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ . Ein komplexeres Beispiel ist  $P = x^2 \partial_x + 1$ . Betrachte dazu  $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  mit  $\lambda_0 \neq 0$  und unterscheide die folgenden drei Fälle:

- $\lambda_0 - \lambda_1 > 0$ , so ist  $\sigma_\ell(P) = x^2 \xi$ .
- $\lambda_0 = \lambda_1$ , so ist  $\sigma_\ell(P) = x^2 \xi + 1$ .
- $\lambda_0 - \lambda_1 < 0$ , so ist  $\sigma_\ell(P) = 1$ .

In Abbildung 4.2 ist für jeden der drei Fälle, jeweils das Newton-Polygon zusammen mit  $g_{\text{ord}_\ell(P)}(x) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \text{ord}_\ell(P)$  in braun eingezeichnet. Das  $\ell$ -Symbol von  $P$  besteht, bildlich vorgestellt, jeweils aus den Monomen, die auf  $g_{\text{ord}_\ell(P)}(x)$  „liegen“. Mit dieser Vorstellung ist klar, dass  $\sigma_\ell(P)$  genau dann aus mehr als einem Monom besteht, wenn  $\Lambda := \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  ein Slope von  $P$  ist.

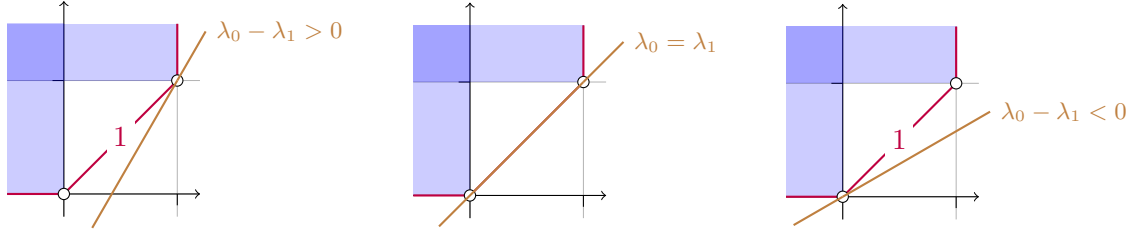


Abbildung 4.2: Zu Beispiel 4.11.

**Bemerkung 4.12.** Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  geschrieben als  $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$ , so erhält man  $\sigma_\ell(P)$  durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) | \ell(i,i-j) = \text{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

**Bemerkung 4.13.** Bei [Sab90] wird der Buchstabe  $L$  anstatt  $\ell$  für Linearformen verwendet. Dieser ist hier aber bereits für  $\mathbb{C}(\{t\})$  reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als  ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und das  $\ell$ -Symbol als  $L$ -Symbol zu finden.

**Bemerkung 4.14** (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zur hier definierten Filtrierung verwendet. Wenn  $\ell(s_0, s_1)$  wie am Anfang des Abschnittes aus  $\Lambda$  entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_\ell(P).$$

### 4.3 Levelt-Turrittin-Theorem

**Satz 4.15** (Levelt-Turrittin-Theorem). Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler meromorpher Zusammenhang, so gibt es eine ganze Zahl  $p$ , so dass der Zusammenhang  $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , mit  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren meromorphen Zusammenhängen ist.

**Bemerkung 4.16.** Man kann auch allgemeiner für  $\rho$  ein beliebiges Polynom vom Grad  $p$  nehmen.

*Beweisskizze.* Zum Beweis wird Induktion auf die lexikographisch geordneten Paare  $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$  angewendet. Wobei  $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  dem größtem Slope von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , falls dieser ganzzahlig ist, entspricht. Sonsts wird  $\kappa = \infty$  gesetzt. In jedem Induktionsschritt wird entweder die Dimension oder  $\kappa$  verringert.

Wir nehmen oBdA an, dass  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  genau einen Slope  $\Lambda$  hat, sonst Teile  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  mittels Satz 2.27 in meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope auf und wende jeweils Induktion an. Mit  $\frac{\lambda_0}{\lambda_1} := \Lambda$  (vollständig gekürzt) definieren wir die dem Slope zugeordnete Linearform  $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ . Wir nehmen oBdA auch an, dass  $\text{ord}_\ell(P) = 0$ . Dies geht nach Bemerkung 2.23. Da  $\ell$  zu einem Slope von  $P$  gehört, besteht  $\sigma_\ell(P)$  aus zumindest zwei Monomen.

Schreibe

$$\begin{aligned}\sigma_\ell(P) &= \sum_{\ell(i, i-j)=\text{ord}_\ell(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{\ell(i, i-j)=0} \alpha_{ij} x^j \xi^i\end{aligned}$$

und setze  $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x i^{\lambda_1}$ . So erhalten wir

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k,$$

wobei  $\alpha_0 \neq 0$  ist.

**Erster Fall:**  $\lambda_1 = 1$ . Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_\ell(P) = \varepsilon \prod_{\substack{\beta \text{ Nullstelle} \\ \text{von } \sigma_\ell(P)}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$  eine Konstante ist und  $\gamma_\beta$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\beta$ . Sei  $\beta$  eine der Nullstellen, so setze  $\psi(x) := (\beta_0/\lambda_0)x^{-\lambda_0}$  und betrachte  $\mathcal{M}_{\widehat{K} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi}$ . Sei  $P$  ein Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , dann ist nach Lemma 3.23 ein Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_{\widehat{K} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}P'(x, \partial_x) &= P(x, \partial_x - \frac{\partial \psi}{\partial x}) \\ &= P(x, \partial_x + \frac{\beta}{x^{\lambda_0+1}})\end{aligned}$$

mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$ . Des Weiteren ist  $\sigma_\ell(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$ . Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinantengleichung  $\sigma_\ell(P)$  hat nur eine Nullstelle.** In diesem Fall wurde die maximale Steigung echt verringert.
2. **Die Determinantengleichung  $\sigma_\ell(P)$  hat mehrere Nullstellen.** In diesem Fall hat  $\mathcal{M}_{\widehat{K} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi}$  mehr als nur einen Slope und kann deshalb mit Satz 2.27 in eine direkte Summe von meromorphen Zusammenhängen, mit echt niedrigerer Dimension, zerlegt werden.

In beiden Unterfällen muss danach das Twisten, nach Anwendung der Induktion, durch ein Tensorieren mit  $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^{-\psi}$  rückgängig gemacht werden.

**Zweiter Fall:**  $\lambda_1 \neq 1$  (**bzw.**  $\kappa = +\infty$ ). In diesem Fall ist der einzige Slope  $\Lambda$  nicht ganzzahlig. Führe deshalb einen Pullback mit Grad  $\lambda_1$  aus. Sei beispielsweise  $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$ . Nach Lemma 3.9 hat dann  $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  nur den einen Slope  $\Lambda' = \Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0 \in \mathbb{N}$ . Nun können wir auf  $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  den ersten Fall anwenden.  $\square$

*Bemerkung 4.17.* Das Levelt-Turrittin-Theorem ist auch in [Sab90, Thm 5.4.7], aber ohne ausführlichen Beweis, zu finden. Eine sehr detaillierte Version dieses Beweises, ist beispielsweise in [Hei10, Thm 5.16] ausformuliert.

## 5 Explizite Berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung

In diesem Kapitel soll für spezielle meromorphe Zusammenhänge, zunächst allgemein und ab Abschnitt 5.2 für einen konkreten Zusammenhang, die Levelt-Turrittin-Zerlegung berechnet werden.

Hier wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem  $\varphi$  einen meromorphen Zusammenhang liefert:

**Schritt 1:** Wähle zunächst ein  $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$  aus und beginne mit  $\mathcal{E}^\varphi$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left( \text{Hauptnenner von } \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\widehat{L}}^*} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left( t^{\max(I)+1} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \right)}_{=: Q(t, \partial_t) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle}. \end{aligned}$$

**Schritt 2:** Fouriertransformiere  $\mathcal{E}^\varphi$  und erhalte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{E}^\varphi} &= \mathcal{D}_{\mathbb{C}((z))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((z))} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\mathbb{C}((z))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((z))} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle}. \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich und erhalte somit das entsprechende Minimalpolynom

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q^\infty(x, \partial_x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle.$$

Im Folgendem werden wir den zum Minimalpolynom  $P_\varphi$  assoziierten formalen meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$  betrachten.

## 5.1 Betrachte $\mathcal{M}_\varphi$ für allgemeine $\varphi$

**Lemma 5.1.** Zu einem  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich, } a_k \in \mathbb{C}\}$  ist das Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_\varphi$  explizit gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle.$$

*Beweis.* Sei  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$ , so ist

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \left( \partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte aus Schritt 2 ist somit gegeben durch

$$\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) = Q(\partial_z, -z) = -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= -\underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= \underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \underbrace{x^2 (x^{-1} \partial_x - x^{-2})} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 5.2.* Nach [Com74, Chap 4] lässt sich  $(x^2 \partial_x)^k$  unter Verwendung der Stirling-Zahlen wie folgt umschreiben:

$$(x^2 \partial_x)^k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \frac{k!}{i!} x^{k+i} \partial_x^i$$

Diese Formel, schön genug, um erwähnt zu werden, wird aber im Weiteren nicht verwendet.



**Lemma 5.3.** Zu einem  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$  gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$ , wobei  $q = \max(I)$ .

*Beweis.* Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir  $P_\varphi$  um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von Bedeutung sind und deshalb vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die konvexe Hülle zu  $P_\varphi$ , die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert wird.

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(\underbrace{(-x^2 \partial_x)^q (x \partial_x - 1)}_{\text{liefern keinen Beitrag}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q (x^{2q} \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^{2q} \partial_x^q)}_{\text{liefert keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \underbrace{x^{2q} \partial_x^q (x \partial_x - 1)}_{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \text{ sind also vernachlässigbar}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q}_{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \text{ sind also vernachlässigbar}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q} (x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1}) \partial_x - x^{2q} \partial_x^q + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q} \partial_x^q - x^{2q} \partial_x^q}_{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \text{ sind also vernachlässigbar}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \underbrace{\sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}}_{(*)}\right).
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe  $(*)$  auch vernachlässigt werden kann.

**Behauptung:** Es gilt

$$H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \subset H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right).$$

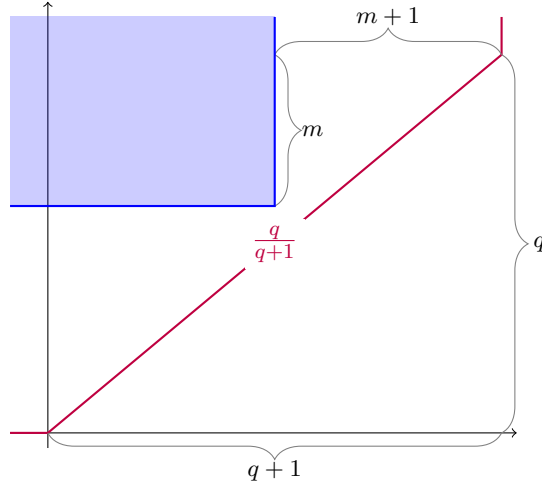
**Denn:** Betrachte zu einem  $m \in I \setminus \{q\}$ , einen Summanden  $m a_m (-x^2 \partial_x)^{q-m}$  aus der Summe:

$$\begin{aligned}
 H(m a_m (-x^2 \partial_x)^{q-m}) &= H(m a_m (-1)^q (x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m} + \text{T.i.Q. von } x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})) \\
 &= H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m}) \\
 &= (q - m, q - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}.
 \end{aligned}$$

In Abbildung 5.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten, mit  $N(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q)$  in der gewohnten Farbe und  $H(x^{2(q-m)} \partial_x^{q-m})$  in Blau, dargestellt. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh.  $\square$

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$H(P_\varphi(x, \partial_x)) = H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \stackrel{\text{Beh.}}{=} H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right).$$


 Abbildung 5.1: Newton-Polygon zu  $P_\varphi$  zusammen mit  $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$ .

Also ist

$$N\left(P_\varphi(x, \partial_x)\right) = N\left(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q\right).$$

womit die Behauptung des Lemmas folgt und somit das Newton-Polygon zu  $P_\varphi(x, \partial_x)$  wie in Abbildung 5.1 aussieht.  $\square$

Also ist, nach Lemma 3.9, ein Pullback mit Grad  $q+1$  hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Denn wir wissen, dass nach Anwendung eines solchen Pullbacks die Slopes mit  $q+1$  multipliziert werden, also gilt  $\mathcal{P}(\rho^+\mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$ .

**Lemma 5.4.** *Im Fall  $\varphi = \frac{a}{t^q}$  ist mit  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$  der Pullback gegeben durch*

$$\rho^+\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2}\partial_t)^q(t\partial_t - (q+1)) + (q+1)qa).$$

*Beweis.* Sei  $\varphi = \frac{a}{t^q}$ , so ist  $P$  gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2\partial_x)^q(x\partial_x - 1) + qa,$$

und sei  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \rho^+\mathcal{M}_\varphi &= \rho^+(\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \rho^*P_\varphi(t, \partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi\left(-(q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2t^q}\partial_t\right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\underbrace{\left(-(-(q+1)t^{q+1})^2\frac{-1}{(q+1)^2t^q}\partial_t\right)^q}_{\text{Slope } q} \underbrace{\left(-(q+1)t^{q+1}\frac{-1}{(q+1)^2t^q}\partial_t - 1\right)}_{\text{Slope } 0} + qa\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \underbrace{\left( \frac{(q+1)^2}{(q+1)^2} t^{2(q+1)-q} \partial_t \right)}_{=1}^q \left( \frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( (t^{q+2} \partial_t)^q \left( \frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( (t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa \right).
 \end{aligned}$$

□

Das so erhaltene  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$  wollen wir, wenn nötig, noch weiter zerlegen. Dazu würden wir gerne Satz 2.27 anwenden, leider haben wir momentan aber genau einen Slope. Hier hilft uns aber der folgende Trick. Nach Korollar 3.24 gilt  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \cong \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\psi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\psi}$ , wobei  $\mathcal{N} := \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\psi$  möglicherweise mehr als einen Slope hat. Genau diesen Sonderfall möchten wir ausnutzen, um mit Satz 2.27 die Zerlegung  $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$  zu erhalten. Damit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \cong \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}.$$

Nun wollen wir, wie im Beweis von Satz 4.15 beschrieben, ein passendes  $\psi$  finden. Definiere dazu, mittels  $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ , die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe  $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$  und berechne die *Determinantengleichung*  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ . Aus dem Beweis von Lemma 5.3 ist ersichtlich, dass hier  $\text{ord}_\ell = 0$  gilt, und damit

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ell(i, i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i = \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i.$$

Da  $\widehat{L}[\xi]$  kommutativ ist, gilt hier, dass  $(t^j \xi^i)^k = t^{jk} \xi^{ik}$  ist. Setze  $\theta = t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^{q+1} \xi$ , so können wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi)(\theta) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben. Sei  $\beta$  eine der Nullstellen von  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi)(\theta)$ . Da  $\text{ord}_\ell(\rho^* P_\varphi) = 0$  und der einzige Slope von  $\rho^* P_\varphi$  nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass  $\alpha_0 \neq 0$ . Also ist 0 keine Nullstelle von  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi)$ . Definiere  $\psi(x) := (\beta/\lambda_0) t^{-\lambda_0} = (\beta/q) t^{-q}$  und betrachte

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &:= \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t)) \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi \\
 &\stackrel{3.23}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \rho^* P_\varphi(t, \partial_t - \frac{\partial \psi}{\partial t}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \rho^* P_\varphi(t, \partial_t + \frac{\beta}{t^{q+1}}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( (t^{q+2} (\partial_t + \frac{\beta}{t^{q+1}}))^q (t (\partial_t + \frac{\beta}{t^{q+1}}) - (q+1)) + (q+1)qa \right)
 \end{aligned}$$

Zerlege nun wie in Satz 2.27 den meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{N} \cong \bigoplus_i \mathcal{N}_i$  wobei  $\mathcal{N}_i$  meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. OBdA sei jedes reguläre  $\mathcal{N}_i$  möglichst weit mittels dem Satz 4.5 zerlegt. Nutze Korollar 3.24 und twiste die  $\mathcal{N}_i$  jeweils mit  $\mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$  und somit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \cong \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun, falls dieser nicht schon ein elementarer meromorpher Zusammenhang ist, Induktion anwenden.

## 5.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Als konkreten Fall betrachten wir nun  $\mathcal{M}_\varphi$  bezüglich  $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned} P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\ &= -x^2 \underbrace{\partial_x x \partial_x}_{=0} + x^2 \partial_x + a \\ &= -x^2 (x \partial_x + 1) \partial_x + x^2 \partial_x + a \\ &= -x^3 \underbrace{\partial_x^2 - x^2 \partial_x + x^2 \partial_x}_{=0} + a \\ &= -x^3 \partial_x^2 + a. \end{aligned}$$

Wir lesen ab, dass  $\mathcal{M}_\varphi$  genau die Slopes  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$  hat. Das Newton-Polygon dazu ist in Abbildung 5.2 abgebildet.

Berechne nun zu  $\rho : t \mapsto x := -2t^2$  ein Minimalpolynom  $\rho^* P_\varphi$  zu  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \rho^* P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t \partial_t - 2) + 2a \\ &= t^3 \underbrace{\partial_t t \partial_t}_{=0} - 2t^3 \partial_t + 2a \\ &= t^3 (t \partial_t + 1) \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\ &= t^4 \partial_t^2 + t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\ &= t^4 \partial_t^2 - t^3 \partial_t + 2a \end{aligned}$$

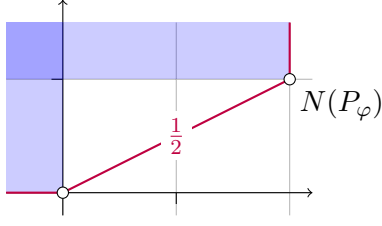
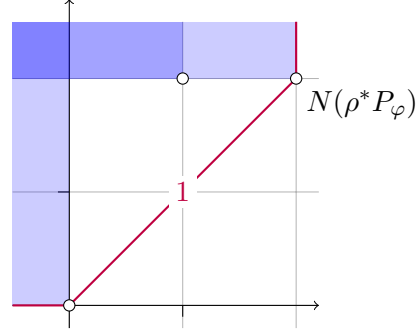
und erhalte einen meromorphen Zusammenhang  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \rho^* P_\varphi$  mit dem Slope 1 (Siehe Abbildung 5.3).

Setze deshalb  $\lambda_0 = 1$  und  $\lambda_1 = 1$  und definiere die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1.$$

Wir suchen nun ein  $\psi$ , so dass der Twist  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$  mehr als einen Slope hat, damit wir entlang der Slopes zerlegen können. Berechne dazu die *Determinantengleichung*  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$  von  $\rho^* P_\varphi$ :

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \sum_{\{(i,j) | 2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i = t^4 \xi^2 + 2a.$$


 Abbildung 5.2: Newton-Polygon zu  $P_\varphi$ .

 Abbildung 5.3: Newton-Polygon zu  $\rho^* P_\varphi$ .

Definiere  $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$ , so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \theta^2 + 2a,$$

mit den Nullstellen  $i\sqrt{2a} =: \beta$  und  $-i\sqrt{2a}$ . Setze  $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$  und betrachte den Twist  $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}^\psi$  von  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$ . Es ist  $e \otimes 1$  ein zyklischer Vektor, wobei  $e$  ein zyklischer Vektor von  $\rho^+ \mathcal{M}$  ist. Mit dem Lemma vom zyklischen Vektor bzw. der Proposition 2.16 wollen wir nun ein Minimalpolynom  $P'$  zu  $\mathcal{N}$  berechnen<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t(\partial_t(e \otimes 1)) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \partial_t((\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} (\partial_t^2 e) \otimes 1 + (\partial_t e) \otimes \psi'(t) + (\partial_t e) \otimes \psi'(t) + e \otimes (\underbrace{\psi''(t) + \psi'(t)^2}_{\in K}) \\ &= ((t^{-1}\partial_t - 2at^{-4})e) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= (t^{-1}\partial_t e) \otimes 1 - 2at^{-4}e \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi''(t)e \otimes 1 + \psi'(t)^2e \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))(\partial_t e) \otimes 1 + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &\stackrel{(3.4)}{=} (t^{-1} + 2\psi'(t))(\partial_t(e \otimes 1) - e \otimes \psi'(t)) + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t(e \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= ((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\ &= ((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2)e \otimes 1 \end{aligned}$$

also

$$0 = \underbrace{\left( \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right)}_{=: P'} e \otimes 1.$$

<sup>[1]</sup> Dies wäre auch schneller, aber weit weniger interessant, mit Lemma 3.23 möglich.

Da  $\psi(t) = i\sqrt{2at}^{-1}$  ist dessen Ableitung gegeben durch  $\psi'(t) = -i\sqrt{2at}^{-2}$  und man erhält daraus  $\psi''(t) = 2i\sqrt{2at}^{-3}$ . Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2})\partial_t - i\sqrt{2at}^{-3} + 2at^{-4} - 2i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{(-i\sqrt{2at}^{-2})^2}_{=0} \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\ &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3} \end{aligned}$$

mit, wie gewünscht, mehr als einem Slope (siehe Abbildung 5.4).

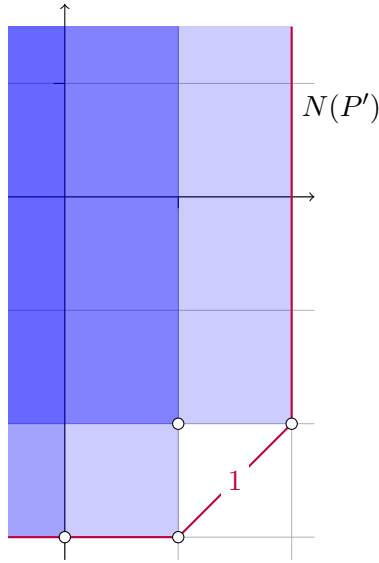


Abbildung 5.4: Newton-Polygon zu  $\mathcal{N}$ .

Nachdem wir jetzt ein Minimalpolynom gefunden haben, ist unser nächstes Ziel  $\mathcal{N} \cong \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot P'$  in zwei meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zu zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt  $P'(t, \partial_t) = Q_1(t, \partial_t) \cdot Q_2(t, \partial_t)$ .

Da der  $\partial_t$ -Grad von  $P'$  genau 2 ist, müssen die  $Q_i$  jeweils Grad 1 haben, um eine echte nicht-triviale Zerlegung zu bekommen. Allgemein haben die  $Q_i$  also die Form

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 := \bar{u}(t)\partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), \bar{u}(t), u(t) \in \hat{L}.$$

*Beobachtung 5.5.* Ist  $Q_1$  und  $Q_2$  ein solches Paar, dann ist für  $\sigma \in \hat{L}$  das Paar  $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$  und  $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$  ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{=1} \cdot Q_2 = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2.$$

Mit der Beobachtung 5.5 ist klar, dass wir den Faktor vor  $\partial_t$  in  $Q_2$  frei wählen können. Setze oBdA als  $\bar{u}(t) := 1$  und erhalte

$$Q_1 = \bar{v}(t)\partial_t + v(t), \quad Q_2 = \partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \hat{L}$$

und somit ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2}at^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2}at^{-3}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Damit ist ebenfalls  $\bar{v}(t) = 1$ .

Durch das Wissen über die Slopes der  $Q_i$  erhalten wir noch Informationen über die Reihen  $v(t) := \sum_n v_n t^n$  und  $u(t) := \sum_n u_n t^n$ . Die beiden Polynome  $Q_1$  und  $Q_2$  enthalten  $\partial_t$  als einziges Monom vom  $\partial_t$ -Grad 1, deshalb ist  $(1, -1)$  in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da  $Q_1$ , oBdA durch Korollar 2.18, nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 5.5 aussehen und somit wissen wir, dass  $v_n = 0$  für alle  $n < -1$ . Da  $Q_2$  dann genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 5.6. Damit ist  $u_n = 0$  für alle  $n < -2$  und  $u_{-2} \neq 0$ .

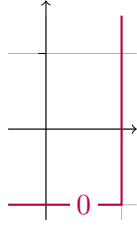


Abbildung 5.5: Newton-Polygon zu  $Q_1$ .

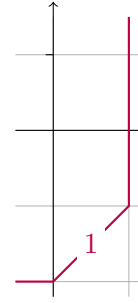


Abbildung 5.6: Newton-Polygon zu  $Q_2$ .

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (5.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (5.2)$$

und mit dem Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + [\partial_t, u_n t^n]) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \overline{nu_n t^{n-1}}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} nu_n t^{n-1}. \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis nun in (5.2) einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Betrachte nun das letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) &= t^{-3} \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n \right) \\
 &= t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)-3} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} \right) t^{n-3} \\
 &= \sum_{n=-3}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n
 \end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (5.3) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \sum_{n=-3}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left( (n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2}at^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2}at^{-3}.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir ein Ergebnis, das sich nun koeffizientenweise mit dem gewünschten Polynom vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2}at^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \tag{5.4}$$

$$-3i\sqrt{2}at^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left( (n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \tag{5.5}$$

Nun können wir mit (5.4) und (5.5) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten zunächst aus (5.4) die Bedingungen



$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \quad (5.6)$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \quad (5.7)$$

$$0 = u_n + v_n \quad \forall n \geq 0 \quad (5.8)$$

welche wir als Nächstes mit (5.5) kombinieren wollen. Betrachte dazu zunächst die Vorfaktoren vor  $t^{-3}$ :

$$\begin{aligned} -3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-3-k+1} \\ &= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\ \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \stackrel{(5.7)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} = u_{-1} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinen Koeffizienten vor  $t^n$  mit  $n > -3$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)u_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{=0}}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{=0} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) + \overbrace{v_{n+2}u_{-2}}^{=0} \\ \Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= -\left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) \\ \stackrel{u_{-2} \neq 0}{\Rightarrow} v_{n+2} &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}\right) \end{aligned}$$

und nach passendem Indexshift folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}\right) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$  mit

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n) \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_2 = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n)$$

und zusammen mit  $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$ ,  $u_{-1} = -\frac{3}{2}$  und  $v_{-1} = \frac{1}{2}$  sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (5.9)$$

die Koeffizienten von  $v(t)$  und  $u(t)$  vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit  $\mathcal{E}^{-\psi(t)}$  zurücktwisten und wir erhalten damit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} &\stackrel{3.24}{=} \underbrace{\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}}_{=} \\ &= (\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\ &= \underbrace{\mathcal{N}_1}_{=} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \oplus \underbrace{\mathcal{N}_2}_{=} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\ &= (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \oplus (\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \end{aligned}$$

wobei  $Q_1$  bereits regulär. Betrachte also noch  $\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} &\stackrel{3.23}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2} + u(t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \underbrace{i\sqrt{2a}t^{-2}}_{=-\frac{\partial\psi}{\partial t}} + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \\ &\stackrel{3.23}{=} \underbrace{\mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n)}_{\text{regulär}} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)}. \end{aligned}$$

Also zerlegt sich  $\mathcal{M}$ , nach einem Pullback mit  $\rho : t \mapsto x = -2t^2$ , in

$$\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} = \underbrace{\left( \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{-\frac{i\sqrt{2a}}{t}} \right)}_{=:R_1} \oplus \underbrace{\left( \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{\frac{i\sqrt{2a}}{t}} \right)}_{=:R_2}.$$

Nach Zerlegen von  $R_1$  und  $R_2$  in eine direkte Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen, wie in Satz 4.5 beschrieben, ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

Die erhaltene Zerlegung lässt sich noch, wie in [Sab07, Cor 3.3] beschrieben, nach einem Push-forward sortieren und zusammenfassen. Das Ergebnis ist eine direkte Summe aus, in [Sab07] eingeführten  $El(\rho, \varphi, R)$ , welche die Slopes von  $\mathcal{M}$  „respektieren“.

### 5.3 Konvergenzbetrachtung am Beispiel $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Nun wollen wir in diesem Abschnitt noch das Konvergenzverhalten der berechneten Zerlegung, bzw. derer Summanden, betrachten. Dieses Beispiel wurde 2011 auch schon in einem Brief von Takuro Mochizuki an Giovanni Morando angesprochen. Demnach wurde mittels Monodromiebetrachtung gezeigt, dass diese Zerlegung nicht konvergent möglich ist. Nichtsdestotrotz wollen wir dies hier trotzdem weiter untersuchen. Das Werkzeug der Wahl hierfür ist, zwei klassische Konvergenzkriterien (Vergleiche [Kno64, §18, Satz 94]) mit dem Computer zu „prüfen“.

Für  $n > 0$  gilt  $v_{n-1} \stackrel{(5.8)}{=} -u_{n-1}$  und damit wollen wir die Formel (5.9) zunächst noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt. Aus (5.9) ergeben sich zunächst für  $n = 0$  die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( \underbrace{(-1)u_{-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-k-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) \\ &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \frac{3i}{8\sqrt{2a}} = -u_0. \end{aligned}$$

Nun vereinfachen wir die Formel:

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (n-1)u_{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( \underbrace{(n-1)u_{n-1}} + \underbrace{v_{-1}u_{n-1}} + \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}u_{n-k-1} \right)} + v_{n-1}u_{-1} \right) \\ &\stackrel{(5.8)}{=} -\frac{1}{u_{-2}} \left( \underbrace{-(n-1)v_{n-1}} + \underbrace{v_{-1}(-v_{n-1})} + \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}(-v_{n-k-1}) \right)} + \underbrace{v_{n-1}u_{-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( -(n-1)v_{n-1} - \frac{1}{2}v_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} - \frac{3}{2}v_{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left( \left( n-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right). \end{aligned}$$

Zu gegebenem  $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$ , sind nun die Koeffizienten gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_{-1} &= \frac{1}{2}, \quad u_{-1} = -\frac{3}{2} \\ v_0 &= -u_0 = -\frac{3}{4u_{-2}} \\ v_n &= -u_n = \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \quad \forall n > 0 \end{aligned}$$

Im Anhang wird in Abschnitt B.2 eine Haskell Modul vorgestellt, welches zu gegebenem  $u_{-2}$  die Werte von  $v(t)$  und  $u(t)$  berechnet. Möchte man zu mehreren Werten von  $u_{-2}$  gleichzeitig die entsprechenden  $v_i$  bzw.  $u_i$  berechnen, so kann man die Berechnung wie folgt noch effizienter gestalten, definiere dazu  $\tilde{v}_i$  bzw.  $\tilde{u}_i$  so, dass gilt:

$$v_i = \frac{1}{u_{-2}^{i+1}} \tilde{v}_i \quad \text{und} \quad u_i = \frac{1}{u_{-2}^{i+1}} \tilde{u}_i \quad \forall i > -1.$$

Dafür setzen wir

$$\tilde{v}_{-1} := \frac{1}{2}, \quad \tilde{u}_{-1} := -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \tilde{v}_0 := -\tilde{u}_0 := -\frac{3}{4}$$

und wegen

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1) \frac{1}{u_{-2}^n} \tilde{u}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{-2}^k} \tilde{v}_{k-1} \frac{1}{u_{-2}^{n-k}} \tilde{v}_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}^{n+1}} \underbrace{\left( (n+1)\tilde{u}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{v}_{k-1}\tilde{v}_{n-k-1} \right)}_{=:\tilde{v}_n =: -\tilde{u}_n} \end{aligned}$$

definieren wir

$$\tilde{v}_n := -\tilde{u}_n := (n+1)\tilde{v}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{v}_{k-1}\tilde{v}_{n-k-1} \quad \forall n > 0$$

Der Abschnitt B.3 enthält ein Programm, dass zum generieren der Werte für die folgenden Abbildungen genutzt wurde. Dieses Programm nutzt die soeben definierten  $\tilde{v}_i$  zur Berechnung.

Nun wollen wir das Konvergenzverhalten genauer betrachten. Es gilt, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \hat{L} \setminus L \quad \text{bzw.} \quad \left( \partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L.$$

Außerdem gilt, dass  $v(t) \in \hat{L} \setminus L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$ . Also reicht es eine der beiden Potenzreihen zu untersuchen. Wir betrachten die folgenden zwei klassischen Konvergenzkriterien.

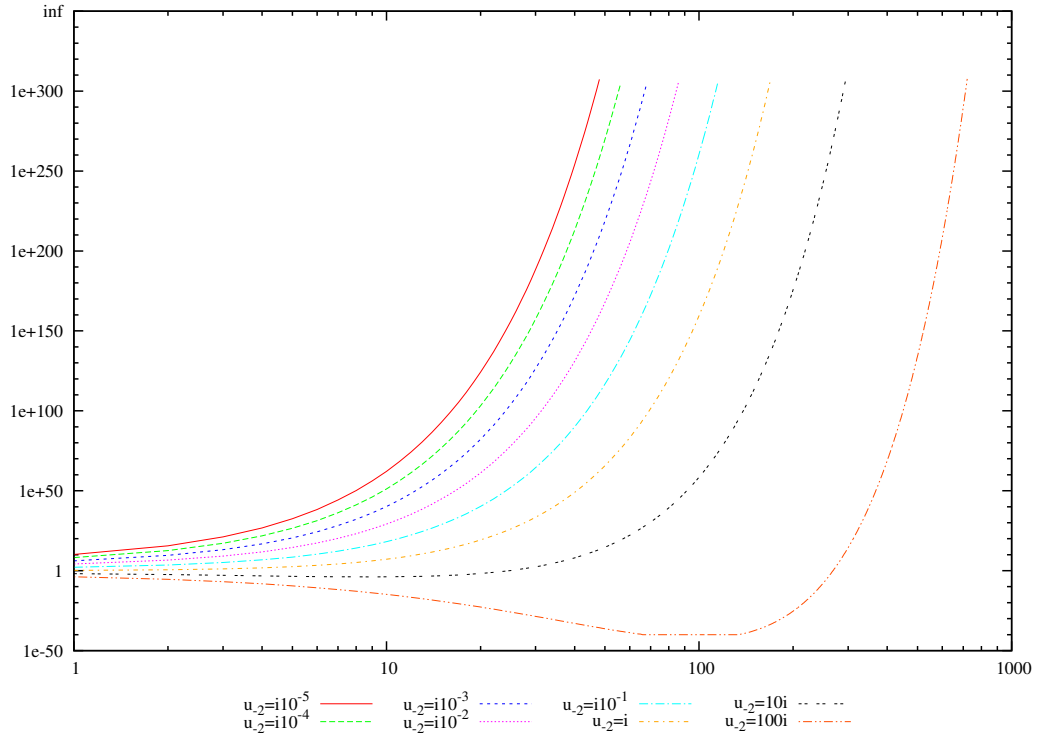


Abbildung 5.7: Die Beträge der  $v_n$  in Abhängigkeit von  $n$  für unterschiedliche  $u_{-2}$ .

**Satz 5.6** (Wurzelkriterium nach Cauchy). Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe. Es gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nur in 0 konvergent.}$$

In der Abbildung 5.8 sind für verschiedene  $u_{-2}$  die numerischen Werte von  $\sqrt[n]{|a_n|}$  in Abhängigkeit von  $n$  aufgetragen. Man sieht, dass die Werte, soweit diese berechnet wurden, durchgehend steigen. Dies deutet darauf hin, dass der Konvergenzradius auch gegen 0 geht.

**Satz 5.7** (Quotientenkriterium). Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe und es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  so dass  $a_n \neq 0 \forall n \geq N$ . Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0 \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nur in 0 konvergent.}$$

In Abbildung 5.9 sind, analog wie in Abbildung 5.8, die Werte von  $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  in Abhängigkeit von  $n$  eingezeichnet. Auch hier sieht es so aus, als konvergieren die Werte, wie erwartet, für jedes  $u_{-2}$  gegen 0. Die zwei geprüften Konvergenzkriterien weisen also beide darauf hin, dass die Polynome  $v(t)$  und  $u(t)$  keinen positiven Konvergenzradius haben, also in  $\widehat{L} \setminus L$  liegen.

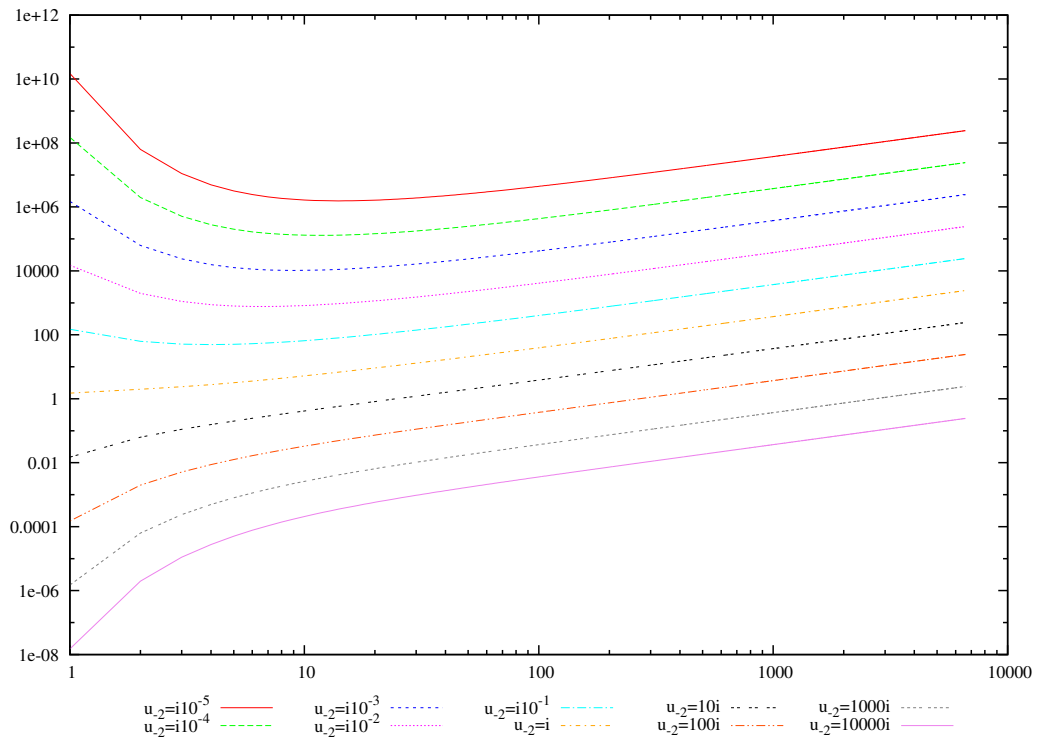


Abbildung 5.8: Wurzelkriterium angewandt auf die Koeffizienten.

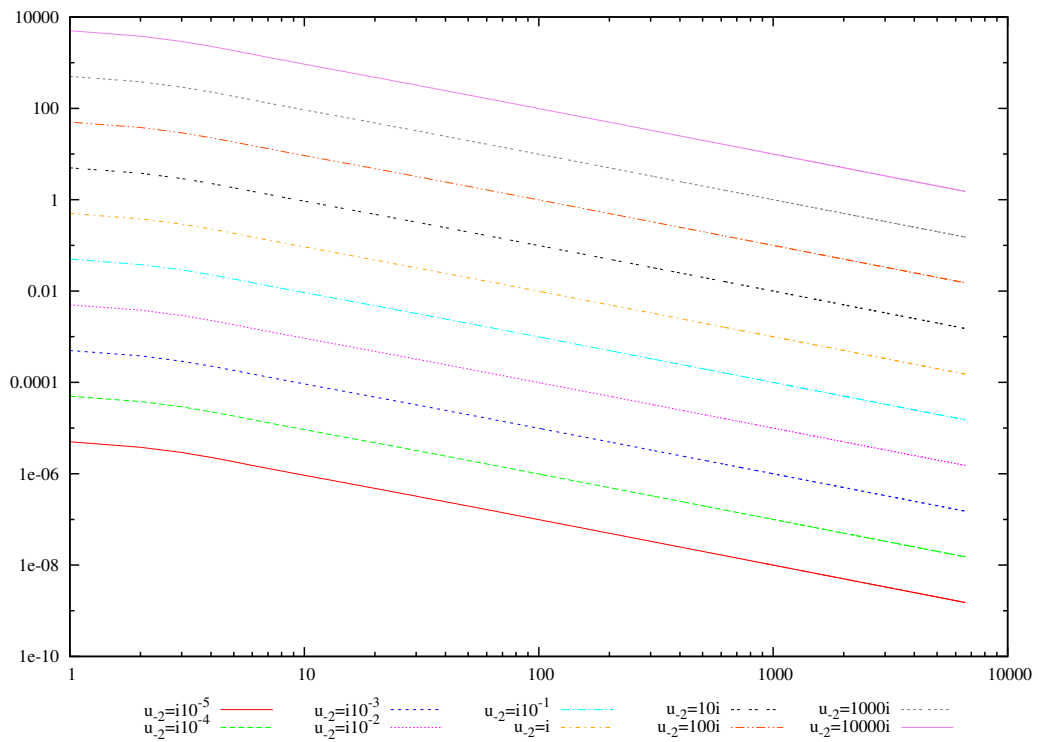


Abbildung 5.9: Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten.

# Ausblick

Ein sinnvoller nächster Schritt wäre es, zu untersuchen, in wie fern sich die in Abschnitt 5.2 berechnete Zerlegung auf weitere  $\varphi$  aus  $\{\sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$  verallgemeinern lässt. Auch könnte man versuchen, die von Takuro Mochizuki genutzte Monodromiebetrachtung nachzuvollziehen und mit dem hier berechneten Ergebnissen in bezug bringen.

Möchte man irreguläre meromorphe Zusammenhänge bzw. irregulär singuläre  $\mathcal{D}$ -Moduln genauer klassifizieren, können Ideen und Konzepte aus der asymptotischen Analysis verwendet werden. Einen vielversprechenden Ansatz liefert die Beschreibung der Asymptotik der Lösungen anhand der sogenannten „Stokes-Struktur“. Durch die Stokes Struktur wird die Änderung der asymptotischen Lösung auf Sektoren der Pole kodiert. Auf diesem Gebiet gibt es noch viel Forschungsbedarf, so hat sich bisher nur im Eindimensionalen eine einheitliche Theorie entwickelt. Für höherdimensionale Fragestellungen sind immer noch die meisten Fragen offen. Das Ziel ist es, In Anlehnung an die Riemann-Hilbert-Korrespondenz, irregulär singuläre  $\mathcal{D}$ -Moduln anhand der Lösung und ihrer Stokes-Struktur vollständig beschreiben zu können. Vergleiche dazu beispielsweise [Sab13] oder [Boa01].

Das Berechnen solch einer Stokes-Struktur ist im Allgemeinen sehr anspruchsvoll. Es gibt mehrere Ansätze dies zu vereinfachen. Ein solche Ansatz ist, den formalisierten meromorphen Zusammenhang zunächst in elementare formale meromorphe Zusammenhänge zu zerlegen. Dann kann man die Asymptotik der Lösungen jedes einzelnen Summanden der Levelt-Turrittin-Zerlegung gesondert untersuchen. Auf diesen Ergebnissen aufbauend ließe sich in sinnvoller Weise eine weiterführende Arbeit anschließen, in der die zugehörige Stokes-Struktur explizit bestimmt wird.





## A Aufteilung von $t\varphi'(t)$

Sei  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , so ist  $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}t^{-i} \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$  und damit  $u\varphi'(t) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1}t^{-i} \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , welches wir zerlegen wollen. Zerlege also  $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p)$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ :

$$\begin{array}{c}
 \psi_0(t^p) \xrightarrow{\quad} \psi_1(t^p) \\
 \\
 t\varphi'(t) = a_{-2}t^{-1} + \dots + a_{-p}t^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(p+2)}t^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + a_{-(2p+3)}t^{-(2p+1)} + \dots
 \end{array}$$

also:

$$\begin{aligned}
 \psi_0(t^p) &= a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + \dots \\
 \psi_1(t^p) &= a_{-p}t^{-p} + a_{-2p}t^{2p} + \dots \\
 &\vdots \\
 \psi_{p-1}(t^p) &= a_{-2}t^p + a_{-(p+2)}t^{2p} + \dots
 \end{aligned}$$

## B Quelltexte

Als gutes Buch zum Thema Haskell empfiehlt sich [Hut07] von Graham Hutton.

### B.1 ComplRat.hs

Das Modul ComplRat implementiert die Zahlen  $\mathbb{Q}(i)$ . Jede Zahl wird intern als Tupel von Zahlen vom Typ `Rational`. Dieser Zahlentyp ermöglicht es, mit Brüchen von beliebiger Genauigkeit zu rechnen.

Listing B.1: ComplRat.hs

```
1  -- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
2  -- Zahlen, also den Elementen von  $\mathbb{Q}(i)$ , bereit.
3  module ComplRat
4      ( ComplRat(..)
5        , realPart
6        , imagPart
7        , magnitude
8        , magnitudeSq
9        ) where
10 import Data.Ratio
11
12 -- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
13 -- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
14 data ComplRat = !Rational :+: !Rational
15               deriving (Eq)
16
17 -- -----
18 -- Funktionen
19
20 -- | Gibt den reellen Teil einer gegebenen komplexen Zahl zurück.
21 realPart :: ComplRat -> Rational
22 realPart (x :+: _) = x
23
24 -- | Gibt den imaginären Teil einer gegebenen komplexen Zahl zurück.
25 imagPart :: ComplRat -> Rational
26 imagPart (_ :+: y) = y
27
28 -- | Der nichtnegative Betrag einer komplexen Zahl.
29 -- Nur für rein reelle oder rein komplexe Zahlen, da es sonst, aufgrund der
30 -- fehlenden Wurzelfunktion, zu Problemen kommt.
31 magnitude :: ComplRat -> Rational
32 magnitude (x :+: 0) = abs x
33 magnitude (0 :+: y) = abs y
34 magnitude (_ :+: _) = error "Ups! Benutze magnitudeSq stattdessen."
35
36 -- | Das Quadrat des Betrags einer komplexen rationalen Zahl
37 -- ist für alle komplexen Zahlen eine rationale Zahl.
38 magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
39 magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y
40
41 -- -----
```

```

42 -- Instanzen von ComplRat
43
44 instance Show ComplRat where
45     show (x :+: y) | y == 0    = show x
46                         | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"
47
48 instance Num ComplRat where
49     (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
50     (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
51     negate (x :+: y)       = negate x :+: negate y
52     fromInteger i          = fromInteger i :+: 0
53     abs z                  = magnitude z :+: 0
54     signum (0 :+: 0)       = 0
55
56 instance Fractional ComplRat where
57     fromRational r          = fromRational r :+: 0
58     (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/n) :+: ((b*c - (a*d))/n)
59     where n = c*c + d*d

```

Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die  $a + ib$  entspricht.

## B.2 Koeffs.hs

Das Modul `Koeffs` stellt die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von  $u_{-2} =: \text{uMin2}$  eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `ComplRat`. Dies ermöglicht es, dass die Berechnung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

Listing B.2: Koeffs.hs

```

1  -- | Dieses Modul stellt Funktionen bereit, welche die zu einem Startwert
2  -- | gehörigen Koeffizienten von /v(t)/ und /u(t)/ generieren
3  module Koeffs
4  ( vKoeffs
5    , uKoeffs
6  ) where
7  import ComplRat
8  import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
9
10 -- | Gibt ein Array mit den Koeffizienten von /v(t)/ zurück.
11 -- Das erste Element entspricht dem Vorfaktor vot /t^{-1}/
12 vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
13 vKoeffs uMin2 = 1/2 :+: 0 : [koeff i | i <- [0..]]
14 where koeff :: Int -> ComplRat
15       koeff = memo koeff'
16       koeff' :: Int -> ComplRat
17       koeff' n | n > 0    = (koeff (n-1) * (fromIntegral n + 1) + summe) / uMin2
18                 | n == 0  = -3 / (uMin2 * 4)
19                 | n == -1 = 1/2
20                 | otherwise = 0
21       where summe = sum [koeff (k-1) * (koeff (n-k-1)) | k <- [1..n-1]]
22
23 -- | Gibt ein Array mit den Koeffizienten von /u(t)/ zurück.
24 -- Das erste Element entspricht dem Vorfaktor vot /t^{-2}/
25 uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
26 uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2 :+: 0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))

```

Beispielhaft kann man mit dem folgendem Programm die Koeffizienten von  $v(t)$  zu  $a = \frac{1}{8}$ , also  $u_{-2} = i = 2i\sqrt{2a}$ , erzeugen lassen.

Listing B.3: testKoeffs.hs

```

1 module Main where
2 import ComplRat
3 import Koeffs
4 import System.Environment
5
6 uMin2=(0:+:1)
7
8 main :: IO()
9 main = do x <- getArgs
10          putStrLn $ "n \t| v_n\n-----" ++ replicate 70 '-'
11          main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x
12      where main' :: Int -> IO()
13            main' end = mapM_ addLine $ zip [-1..end] $ vKoeffs uMin2
14            where addLine (i,a) = putStrLn $ show i ++ "\t| " ++ show a

```

Ist der Code in einer Datei `/Pfad/zu/testKoeffs.hs` gespeichert, so lässt er sich in Unix-artigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen kompilieren und ausführen.

```

1 $ ghc --make /Pfad/zu/testKoeffs.hs
2 $ /Pfad/zu/testKoeffs 13

```

Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von  $v$  bis zum Index 13 und gibt in der Konsole das Folgende aus

```

1  n      | v_n
2  -----
3 -1      | 1 % 2
4 0       | (0 % 1+i3 % 4)
5 1       | 3 % 2
6 2       | (0 % 1+i(-63) % 16)
7 3       | (-27) % 2
8 4       | (0 % 1+i1899 % 32)
9 5       | 324 % 1
10 6      | (0 % 1+i(-543483) % 256)
11 7      | (-32427) % 2
12 8      | (0 % 1+i72251109 % 512)
13 9      | 2752623 % 2
14 10     | (0 % 1+i(-30413055339) % 2048)
15 11     | (-175490226) % 1
16 12     | (0 % 1+i9228545313147 % 4096)
17 13     | 31217145174 % 1

```

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise ergibt sich daraus die folgende Tabelle:

n	-1	0	1	2	3
$v_n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}i$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{63}{16}i$	$-\frac{27}{2}$
n	4	5	6	7	8
$v_n$	$\frac{1899}{32}i$	342	$-\frac{543483}{256}i$	$-\frac{32427}{2}$	$\frac{72251109}{512}i$
n	9	10	11	12	13
$v_n$	-175490226	$\frac{9228545313147}{4096}i$	31217145174	$-\frac{30419533530730323}{65536}i$	$-\frac{14741904895227}{2}$

Tabelle B.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von  $v(t)$  für  $u_{-2} = i$  bzw.  $a = \frac{1}{8}$

## B.3 SaveToFile.hs

Das folgende Programm wurde verwendet um die Daten für die Abbildungen 5.7, 5.8 und 5.9 zu erzeugen. Es speichert dazu die Werte zeilenweise in Textdateien.

Listing B.4: SaveToFile.hs

```

1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Data.MemoTrie (memo) -- Aus dem Paket: MemoTrie
4  import Data.Number.CReal (CReal) -- Aus dem Paket: numbers.
5  import qualified Control.Monad.Parallel as P (sequence_) -- Aus: monad-parallel.
6  import System.Environment
7  import System.IO
8
9  main :: IO()
10 main = do x <- getArgs; P.sequence_ $ main' $ (read $ head x :: Int)
11     where
12         main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"      , (0+:1))
13                                     , ("./data/u_-2=1.0e-5i" , (0+:1.0e-5))
14                                     , ("./data/u_-2=1.0e-4i" , (0+:1.0e-4))
15                                     , ("./data/u_-2=1.0e-3i" , (0+:1.0e-3))
16                                     , ("./data/u_-2=1.0e-2i" , (0+:1.0e-2))
17                                     , ("./data/u_-2=1.0e-1i" , (0+:1.0e-1))
18                                     , ("./data/u_-2=10000i"  , (0+:10000))
19                                     , ("./data/u_-2=1000i"   , (0+:1000))
20                                     , ("./data/u_-2=100i"    , (0+:100))
21                                     , ("./data/u_-2=10i"     , (0+:10))
22                                     ]
23
24 saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
25 saveData end (fn, uMin2) =
26     do withFile fn WriteMode (\handle -> do
27         hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
28     where vals = (1/2+:0 : [vals' i|i <- [0..]])
29           vals' i = product [1/uMin2|j <- [1..(i+1)]] * (tildeKoeff i)
30           triples = zip3 [0..] (tail vals) vals
31
32 genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
33 genLine (i,v1,v2) = concat [ show i           , "\t"
34                             , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
35                             , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
36                             , genItemQuot (i,v1,v2)  , "\n" ]
37     where realMag = fromRational $ magnitude v1 :: CReal
38
39 genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
40 genItemBetrag (_,v,_) = show $ realMag
41
42 genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
43 genItemCauchy (i,v,_)
44     | i == 0     = show $ realMag
45     | otherwise  = show $ realMag**(1 / (fromIntegral i))
46
47 genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
48 genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
49     where genItemQuot' = magnitudeSq v2 / magnitudeSq v1
50
51 tildeKoeff :: Int -> ComplRat
52 tildeKoeff = memo tildeKoeff'
53 tildeKoeff' :: Int -> ComplRat
54 tildeKoeff' n | n > 0 = tildeKoeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+
55     sum [tildeKoeff (k-1)*(tildeKoeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
56     | n == 0 = -3/(4)
57     | n == -1 = 1/2
58     | otherwise = 0

```

In diesem Modul werden zusätzlich die Module `Data.Number.CReal` und `Control.Monad.Parallel` eingebunden. Der Datentyp `CReal` des ersten Moduls implementiert die reellen Zahlen und wird verwendet, da die berechneten Zahlen den Zahlenbereich des Floating-Datentypes übersteigen. Das zweite Modul stellt eine veränderte Version von `sequence_` bereit, welche automatisch die Ausführungen parallelisiert.

Auf Unix-artigen Systemen lässt sich durch die folgenden Befehle das Programm Kompilieren, danach wird ein Ordner erstellt, welcher nötig ist. Mit dem Letzten Befehl wird das Programm ausgeführt, es nutzt dazu 8 Prozessorkerne (wegen dem `-N8`) und berechnet die ersten 7500 Werte für die Abbildungen.

```
1 $ ghc --make -threaded /Pfad/zu/SaveToFile.hs
2 $ mkdir -p /Pfad/zu/data
3 %$ /Pfad/zu/SaveToFile 7500 +RTS -N8
```

Zum erzeugen der Daten für die eingebunden Grafiken lief Dieses Programm insgesamt 740 Stunden verteilt auf 8 Prozessorkerne mit jeweils 2.27GHz. Dabei hat es insgesamt 75000 Zeilen an Werten erzeugt, wobei der längste Eintrag in einer Zeile 66028 Zeichen lang war. Die entstandenen Textdateien hatten zusammen eine Größe von 1,2GB.

Erstellt wurden die Graphen mit `Gnuplot` und auch sonst wurde zum erstellen dieser Arbeit ausschließlich freie Software verwendet.

# Literaturverzeichnis

- [AV09] ALKOFER, B. und VOGL, F.: *Lineare Differentialgleichungen und deren Fouriertransformierte aus algebraischer Sicht / Lineare Differentialgleichungen aus algebraischer Sicht*. Zulassungsarbeit, Universität Regensburg, 2009.
- [Boa01] BOALCH, P.: *Symplectic Manifolds and Isomonodromic Deformations*. Advances in Mathematics, 163(2):137–205, 2001.
- [Com74] COMTET, L.: *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [Cou95] COUTINHO, S.C.: *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [Hei10] HEIZINGER, H.: *Verschwindungszykel regulär singulärer D-Moduln und Fouriertransformation*. Diplomarbeit, Universität Regensburg, 2010.
- [HTT07] HOTTA, R., TAKEUCHI, K. und TANISAKI, T.: *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2007.
- [Hut07] HUTTON, G.: *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
- [Kas84] KASHIWARA, M.: *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*. Publ. R. I. M. S. Kyoto University 20 (1984) 319–365, 1984.
- [Kas03] KASHIWARA, M.: *D-Modules and Microlocal Calculus*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 2003.
- [Kno64] KNOPP, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1964.
- [Sab90] SABBAAH, C.: *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*. Vorlesungsskript [http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah\\_cimpa90.pdf](http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah_cimpa90.pdf), 1990.
- [Sab07] SABBAAH, C.: *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*. in Singularities I, Contemp. Math., vol. 474, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, p. 309–330, 2007.
- [Sab13] SABBAAH, C.: *Introduction to Stokes Structures*. Lecture Notes in Mathematics. Springer London, Limited, 2013.
- [Sch94] SCHNEIDERS, J.P.: *An Introduction to D-Modules*. <http://www.analg.ulg.ac.be/jps/rec/idm.pdf>, 1994.