

Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

stand: 3. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Moduln über \mathcal{D}_k	1
1.1	Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k	2
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise	4
1.2	(Links) \mathcal{D} -Moduln	5
1.3	Holonome \mathcal{D}_k -Moduln	6
2	Meromorphe Zusammenhänge	8
2.1	Meromorphe Zusammenhänge	9
2.2	Äquivalenz zu holonomen lokalisierten \mathcal{D} -Moduln	13
2.3	Newton Polygon	14
2.3.1	Die Filtrierung ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol	19
2.4	Operationen auf meromorphen Zusammenhängen	20
2.4.1	Tensorprodukt	20
2.4.2	pull-back und push-forward	22
2.4.3	Fouriertransformation	32
2.4.4	Betrachten bei Unendlich	33
2.5	Twisten von meromorphen Zusammenhängen	33
3	Operationen auf meromorphen Zusammenhängen	41
3.1	Tensorprodukt	41
3.2	pull-back und push-forward	42
3.3	Fouriertransformation	52
3.4	Betrachten bei Unendlich	53
3.5	Twisten von meromorphen Zusammenhängen	53
4	Elementare meromorphe Zusammenhänge	61
4.1	Elementare formale meromorphe Zusammenhänge	61
4.2	Elementare meromorphe Zusammenhänge	62
4.3	Definition in [Sab07]	62

4.4	Levelt-Turrittin-Theorem	63
4.4.1	Klassische Version	63
4.4.2	Sabbah's Refined version	66
5	Explizite Berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung	67
5.1	Rezept für allgemeine φ	67
5.2	Levelt-Turrittin-Zerlegung für \mathcal{M}_φ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$	73
5.2.1	Konvergenz der Summanden	81
	Anhang	86
A	Aufteilung von $t\varphi'(t)$	87
B	Genaueres zu $(x^2\partial_x)^k$	88
C	Quelltexte	89
C.1	ComplRat.hs	89
C.2	Koeffs.hs	90
C.3	SaveToFile.hs	94

Abbildungsverzeichnis

2.1	Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$	16
2.2	Newton-Polygon zu P_2	16
2.3	Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$	18
2.4	Newton Polygon zu P	19
2.5	Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$	31
2.6	Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$	31
2.7	Newton-Polygon zu P	33
2.8	Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P	33
3.1	Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$	51
3.2	Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$	51

3.3	Newton-Polygon zu P	53
3.4	Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P	53
5.1	Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$	70
5.2	Newton Polygon zu P_φ	73
5.3	Newton Polygon zu ρ^*P_φ	74
5.4	Newton Polygon zu \mathcal{N}	75
5.5	Newton-Polygon zu Q_1	77
5.6	Newton-Polygon zu Q_2	77
5.7	Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2}	84
5.8	Wurzkriterium angewendet auf die Koeffizienten	85
5.9	Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten	86

Tabellenverzeichnis

C.1	Numerisch berechnete Koeffizienten von $v(t)$ für $u_{-2} = i$ bzw. $a = \frac{1}{8}$	93
-----	---	----

Listings

C.1	ComplRat.hs	89
C.2	Koeffs.hs	90
C.3	testKoeffs.hs	91
C.4	SaveToFile.hs	94
C.5	GeneratePlots.sh	95

1 Moduln über \mathcal{D}_k

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ähnlich wird dies auch in [AV09, Kapitel 2] eingeführt. Allgemeiner und in mehreren Veränderlichen wird die Weyl-Algebra beispielsweise in [Cou95, Chapter 1] definiert.

Definition 1.1 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 1.2. Sei $k = \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$) ein Ring der Potenzreihen in x über \mathbb{C} . Sei $\partial_x : k \rightarrow k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x , so gilt

1. $[\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$

2. für $f \in k$ ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (1.1)$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] \stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial x^k}{\partial x} = kx^{k-1} \quad (1.2)$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \quad (1.3)$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \quad (1.4)$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g.$$

3. Siehe [Sab90, 1.2.4.] oder [AV09, Kor 2.8].

□

1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.5)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$, also dem bereits abgeleiteten f , darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 1.3. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.5). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^\infty a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$ die konvergenten Potenzreihen
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^\infty a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \widehat{K} := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen ^[1].

Bemerkung 1.4. 1. Es bezeichnet der Hut ($\widehat{}$) das jeweils formale Pendant zu einem konvergentem Objekt. Dementsprechend könnte man auch $\mathbb{C}[[x]] = \widehat{\mathbb{C}\{x\}}$ schreiben.

2. Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$.

3. Offensichtlich erhält \mathcal{D}_k in kanonischer Weise eine nichtkommutative Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.

Proposition 1.5. Jedes Element in \mathcal{D}_k kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]. □

^[1]Wird in [AV09] mit $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$ bezeichnet.

Kommentar: Gilt das folgende??

$$\alpha_i(x)\partial_x^i \equiv \frac{\alpha_i}{x^i}(x\partial_x)^i \mod F_{i-1}\mathcal{D}$$

Kommentar: Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 1.6. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max \left\{ \{i \mid a_i \neq 0\} \cup \{-\infty\} \right\}$$

als den *Grad (oder den ∂_x -Grad)* von P .

Kommentar: Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah Script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Kommentar:

Proposition 1.7. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringe

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO: Treffen?

□

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Kommentar: Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Ein (*holomorpher*) *differenzial Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung m , falls $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$.

Definition 1.8. Mit \mathcal{D}_X bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf X .

Die Garbe \mathcal{D}_X hat eine Ringstruktur mittels der Komposition als Multiplikation und \mathcal{O}_X ist ein Unterring von \mathcal{D}_X . Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über X . Es gilt, dass Θ_X in \mathcal{D}_X enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links \mathcal{O}_X -Untermodule, aber kein rechts \mathcal{O}_X -Untermodule ist.

Proposition 1.9. [Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$. Wobei ∂_x als $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die alternative Definition bereits mit der einfachen überein.

Kommentar:

Definition 1.10. [Ark12, Defn 2.1] Sei $X = \mathbb{A}^1$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{D}_X = [x, \partial_x]$ mit der Relation $[\partial_x, x] = 1$. Dann definieren wir die links \mathcal{D} -Moduln über \mathbb{A}^1 als die $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn im folgendem von \mathcal{D} -Moduln gesprochen wird, werden immer links \mathcal{D} -Moduln gemeint.

Beispiel 1.11. Hier ein paar Beispiele für (links) \mathcal{D} -Moduln

Kommentar: [Ark12, Exmp 2.2]

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ jeweils durch $x \cdot x^m = x^{m+1}$ und $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Objekt $\exp(\lambda x)$ ein, mit $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$. So ist $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x] \exp(\lambda x)$ ein \mathcal{D} -Modul.

Kommentar: [Ark12, Exmp 2.2]

4. Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das \mathcal{D} -Modul $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über \mathcal{D} durch $\log(x)$ erzeugt und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

Kommentar: [Gin98, Exmp 3.1.4]

Kommentar:

Lemma 1.12. [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist. Dann ist \mathcal{M} bereits ein freies $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.]. □

Korollar 1.13. [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem Typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon $\mathcal{M} = \{0\}$.

1.3 Holonome \mathcal{D}_k -Moduln

Definition 1.14. Sei \mathcal{M}_k ein links \mathcal{D}_k -Modul. \mathcal{M}_k heißt *holonom*, falls es ein Element $m \in \mathcal{M}_k$ gibt, das \mathcal{M}_k als \mathcal{D}_k -Modul erzeugt. Im speziellen folgt damit, dass $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{D}_k/\mathfrak{a}$ für ein $0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}_k$.

Bemerkung 1.15. In [Cou95] wird der Begriff holonom über die Dimension definiert und bei [Sab90] über die charakteristische Varietät.

Bemerkung 1.16. Nach [Cou95, Prop 10.1.1] gilt

- Submoduln und Quotienten von holonomen \mathcal{D}_k -Moduln sind holonom
- sowie endliche Summen von holonomen \mathcal{D}_k -Moduln sind holonom

und laut [Sab90, Thm. 4.2.3] gilt, dass

- für ein holonomes $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ -Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. ein $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ -Modul $\mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}$) ist die Lokalisierung

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K \quad (\text{bzw. } \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]} \otimes_{\mathbb{C}[[x]]} \widehat{K}),$$

mit der $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ (bzw. $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$) Modul Struktur durch

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

wieder holonom.

Satz 1.17. Sei \mathcal{M}_k ein holonomes \mathcal{D}_k -Modul, dann gilt, dass seine Lokalisierung isomorph zu $\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_k \cdot P$, mit einem $P \in \mathcal{D}_k$ ungleich Null, ist.

Beweis. Siehe [Sab90, Cor 4.2.8]. □

Kommentar:

Alternative Definition B

Definition 1.18. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei \mathcal{M} lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt, \mathcal{M} ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.19. [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein \mathcal{D} -Modul ist holonom genau dann, wenn $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

Kommentar:

Alternative Definition A

Definition 1.20 (Holonome \mathcal{D} -Moduln). [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich generierter \mathcal{D} -Modul \mathcal{M} ist *holonom*, falls $\mathcal{M} = 0$ gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

Bemerkung 1.21. [Cou95, Chap 10 §1] Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Links-Ideal von \mathcal{D} . Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$. Falls $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$, dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$. Somit ist \mathcal{D}/\mathfrak{a} ein holonomes \mathcal{D} -Modul.

2 Meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: Sei \mathcal{M} ein \mathcal{D} -Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit x bijektiv ist, so nennen wir \mathcal{M} einen meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

Kommentar: [HTT07, Chap 5.1.1]

Wir beginnen mit der klassischen Theorie von Gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sei V ein geeigneter Funktionenraum, beispielsweise der Raum der holomorphen Funktionen.

Definition 2.1 (Systeme von ODEs). Für eine Matrix $A = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ ^[1] definieren wir das *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen* (kurz *System von ODEs*) als

$$\frac{d}{dx}u(x) = Au(x), \quad (2.1)$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor^[2] von unbekannten Funktionen. Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine *Lösung* von (2.1), falls $v_i \in V$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Durch setzen von $w(x) = Tu(x)$ für eine invertierbare Matrix $T \in GL(n, K)$ erhält man aus 2.1 das System

$$\frac{d}{dx}w(x) = (T^{-1}AT - T^{-1}\frac{d}{dx}T)w(x),$$

und deshalb erhalten wir die folgende Definition.

^[1] Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m dimensionalen Matrizen mit Einträgen in k .

^[2] Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet ${}^tv := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ den transponierten Vektor.

Definition 2.2 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und $B \in M(n \times n, K)$ (differenziell) äquivalent ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(n, K)$ gibt, mit $B = T^{-1}AT - T^{-1}\frac{d}{dx}T$. Dementsprechend sind zwei Systeme von ODEs äquivalent, wenn ihre zugeordneten Matrizen differenziell äquivalent sind.

Kommentar: $1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$
 $1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

Mit elementarer Theorie über Gewöhnliche Differentialgleichungen lässt sich ein System von ODEs in eine einzige ODE der Form

$$\underbrace{(a_n \partial_x^n + a_{n-1} \partial_x^{n-1} + \cdots + a_1 \partial_x + a_0)}_{=:P} \cdot u(t) = 0, \quad (2.2)$$

mit $a_i \in K$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$, umschreiben. Dieses so erhaltene $P \in \mathcal{D}_K$ ist ein sogenannter linearer Differentialoperator und es gilt

$$v(x) \text{ ist Lösung von } P \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall Q \in \mathcal{D}_K \text{ ist } v(x) \text{ Lösung von } QP \cdot u(x) = 0.$$

Also ist eine Lösung von $P \cdot u(x) = 0$ auch eine Lösung von $Q \cdot u(x) = 0$ für alle $Q \in \mathcal{D}_K \cdot P \triangleleft \mathcal{D}_K$.

Kommentar: Sei P ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ geschrieben als $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$. Man sagt eine Funktion $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von P , falls u die Gleichung $Pu = 0$ erfüllt. Man sagt 0 ist ein singulärer Punkt falls $a_d(0) = 0$. Falls 0 kein singulärer Punkt ist, hat P genau d über \mathbb{C} Unabhängige Lösungen in $\mathbb{C}\{x\}$.

2.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.3 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tupel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum

- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.3)$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.4. Analog definiert man einen *formalen meromorphen Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$ bestehend, analog wie in Definition 2.3, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, ein endlich dimensionaler \widehat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.3) erfüllen soll.

Bemerkung 2.5. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K im Subscript verzichtet, sofern klar ist, welches K gemeint ist.

Definition 2.6. Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei meromorphe Zusammenhänge über k . Eine k -lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$. Ein solcher Morphismus ist ein Isomorphismus, falls die Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Isomorphismus von k -Vektorräumen ist.

Definition 2.7. Wir erhalten damit die Kategorie der meromorphen Zusammenhänge über k mit

Objekte: (M, ∂) meromorpher Zusammenhang über k

Morphismen: $(M, \partial) \xrightarrow{f} (M', \partial')$ Morphismus von meromorphen Zusammenhängen.

Lemma 2.8. Sei \mathcal{M}_K ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen, so gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \end{aligned}$$

$$= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$$

□

Kommentar:

Korollar 2.9. Für (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang existiert ein $A \in M(r \times r, K)$, so dass $\partial = \frac{d}{dx} - A$.

Beweis. Es sei (K^r, ∂) ein meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also lässt sich durch eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ darstellen, also ist, wie behauptet, $\partial = \frac{d}{dx} - A$. □

Kommentar: [HTT07, Seite 129]

Definition 2.10 (Zusammenhangsmatrix). Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein meromorpher Zusammenhang so wähle eine K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Matrix $A = (a_{ij}(x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Damit ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} \partial(u) &= \partial \left(\sum_{i=1}^n u_i(x) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j(x) \right) e_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n u'_i(x) e_i}_{= u'(x)} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j(x) e_i}_{= Au(x)} \\ &= u'(x) - Au(x) \end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = Au(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$. Damit haben wir gesehen, dass jeder meromorphe Zusammenhang (\mathcal{M}, ∂) ausgestattet mit einer K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zugeordnet werden kann.

Kommentar:

Proposition 2.11 (Transformationsformel). [[HTT07](#), Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 & \nwarrow \cong \varphi & & \nearrow \cong \varphi & \\
 \cong T & & M \xrightarrow{\partial} M & & T \cong \\
 & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \psi & \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$ und $(\frac{d}{dx} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der meromorphe Zusammenhang. $\frac{d}{dx} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

Definition 2.12. Wenn wir umgekehrt mit einer Matrix $A = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$, welche eine System von ODEs beschreibt, beginnen, können wir durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i \quad \text{und} \quad \partial_A \sum_{i=1}^n u_i e_i := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_j \right) e_i$$

den assoziierten meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ definieren.

Lemma 2.13. Sind $A_1, A_2 \in M(n \times n, K)$ zwei Matrizen, die zwei Systeme von ODEs beschreiben, dann gilt

$$\frac{d}{dx} u(x) = A_1 u(x) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \frac{d}{dx} u(x) = A_2 u(x)$$

genau dann, wenn

$$(\mathcal{M}_{A_1}, \partial_{A_1}) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad (\mathcal{M}_{A_2}, \partial_{A_2}).$$

Damit haben wir eine Eins zu Eins Beziehung zwischen meromorphen Zusammenhängen und Systemen von ODEs. Genauer betrachtet wird dies beispielsweise in [[HTT07](#), Sec 5.1].

2.2 Äquivalenz zu holonomen lokalisierten \mathcal{D} -Moduln

Satz 2.14. *Ein meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes \mathcal{D}_K -Modul und umgekehrt.*

Beweis. Dies wird beispielsweise in [Sab90, Thm 4.3.2] bewiesen. \square

Lemma/Definition 2.15. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] *Ist \mathcal{M}_K ein meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$. So ein wird P dann als Minimalpolynom von \mathcal{M}_K bezeichnet.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] \square

Kommentar:

Bemerkung 2.16. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$$

Kommentar: [Sab90, 4.2] Let \mathcal{M} be a left \mathcal{D} -module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 2.17 (Lemma vom zyklischen Vektor). *Sei \mathcal{M}_K ein meromorpher Zusammenhang. Es existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.*

Beweis. Ein Beweis ist beispielsweise in [Sab90, Thm 4.3.3] oder ausführlicher in [AV09, Satz 4.8]. \square

Korollar 2.18. *In der Situation von Lemma 2.17 gibt es ein $P \in \mathcal{D}_K$ mit ∂ -Grad von P ist gleich d und $P \cdot m = 0$, in diesem Fall ist P ein Minimalpolynom zu \mathcal{M}_K , also gilt $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$. Explizit ergibt sich aus der Basisdarstellung*

$$\partial_x^d m = \alpha_{d-1} \partial_x^{d-1} m + \alpha_{d-2} \partial_x^{d-2} m + \dots + \alpha_1 \partial_x m + \alpha_0 m \quad \alpha_i \in K$$

von $\partial_x^d m$, dass

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot \underbrace{(\partial^d - \alpha_{d-1} \partial_x^{d-1} - \alpha_{d-2} \partial_x^{d-2} - \dots - \alpha_1 \partial_x - \alpha_0)}_{=: P}$$

gilt.

Satz 2.19. [AV09, Seite 64] Ist $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ so gilt

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

Beweis. [AV09, Seite 57-64] □

Korollar 2.20. Sei $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ wie in Satz 2.19 so gilt

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

Beweis. Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

□

2.3 Newton Polygon

Kommentar: Quelle: sabbah?

sabbah mach alles formal, Barbara mach alles konvergent

Jedes $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, also insbesondere auch jedes $P \in \mathcal{D}_K$, lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) &:= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left((m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2 \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left((m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Definition 2.21. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\text{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Bemerkung 2.22. Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x)(x\partial_x)^k$$

mit $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexen Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left((m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.23. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ für die Menge der zu \mathcal{M} gehörigen slopes.
- P heißt *regulär* oder *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$ oder $\deg P = 0$, sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ (bzw. \mathcal{M}_K) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ (bzw. $P \in \mathcal{D}_K$) gibt, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ (bzw. $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$).

Beispiel 2.24. 1. Ein einfaches Beispiel ist $P_1 = x^{\textcolor{red}{1}}\partial_x^{\textcolor{blue}{2}}$. Es ist abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{m} = 2 \quad \text{und} \quad \textcolor{red}{l} = 1$$

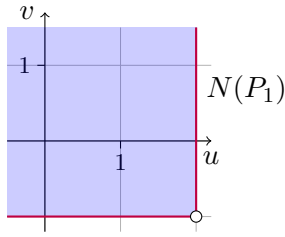
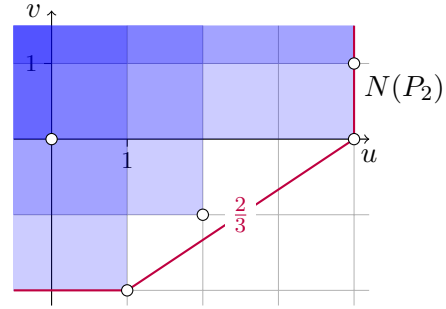
so dass

$$H(P_1) = \left((\textcolor{blue}{2}, \textcolor{red}{1} - \textcolor{blue}{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.1 ist der Quadrant, der zum Monom $x\partial_x^2$ gehört (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

Kommentar: [AV09, Bsp 5.3. 2.]

2. Sei $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$, so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$ ist.


 Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$

 Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu P_2

Bemerkung 2.25. Sei P ein Minimalpolynom zu \mathcal{M}_K . Für jedes $f \in \mathcal{D}_K^{\times [3]}$ gilt, dass $f \cdot P$ ebenfalls ein Minimalpolynom von cM_K ist, denn $\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \triangleleft \mathcal{D}_K$. Allerdings sind die zugehörigen Newton-Polygone möglicherweise vertikal verschoben.

Nach [Sab90, Seite 25] gilt, dass das Newton-Polygon, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten meromorphen Zusammenhang abhängt. Dies wird auch in [AV09, Bem 5.4] diskutiert.

Definition 2.26. In einem Polynom $P = \varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$, mit $\varepsilon, \alpha_{kl} \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$ sind die restlichen Monome *Therme im Quadranten* von $\varepsilon x^p \partial_x^q$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}_{\geq -N}$ mit $\alpha_{kl} \neq 0$ gilt: $k \leq q$ und $l - k \geq p - q$.

Bemerkung 2.27. • Anschaulich bedeutet das, dass

$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \left((q, p - q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \supset \left((k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = H(\alpha_{kl} x^l \partial_x^k),$$

für alle relevanten k und l .

- Sei P ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von $\varepsilon x^p \partial_x^q$ sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} H(P) &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \mathbf{T.i.Q. \ von \ } x^p \partial_x^q) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q) \\ \Rightarrow N(P) &= N(\varepsilon x^p \partial_x^q). \end{aligned}$$

Also können Terme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Terms befinden und nicht der Term selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das **T.i.Q.** ist eine hier Abkürzung für Terme im Quadranten.

[3] Für einen Ring R , bezeichnet R^{\times} die Einheitengruppe von R .

Kommentar:

Beispiel 2.28.

$$(x^a \partial_x^b)^c = x^{ac} \partial_x^{bc} + \text{T.i.Q. von } x^{ac} \partial_x^{bc}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} N((x^a \partial_x^b)^c) &= N(x^{ac} \partial_x^{bc} + \text{T.i.Q. von } x^{ac} \partial_x^{bc}) \\ &= N(x^{ac} \partial_x^{bc}) \end{aligned}$$

Kommentar:

Lemma 2.29. [[Sab90](#), 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

Siehe auch [[Sab90](#), Thm 5.3.4], Dort Steht:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

Korollar 2.30. [[Sab90](#), Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

Satz 2.31. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$.

Beweis. Einen Beweis hierfür findet man in [[Sab90](#), Thm 5.3.1] oder [[AV09](#), 5.15]. □

Bemerkung 2.32. In Satz 2.31 ist es wirklich notwendig, formale meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente meromorphe Zusammenhänge.

Kommentar:

Beispiel 2.33. [Sab90, Ex 5.3.6] Sei $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$. So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

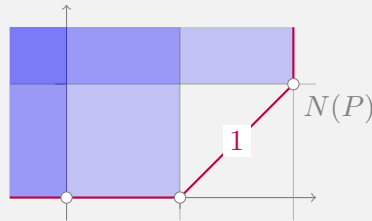


Abbildung 2.3: Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$

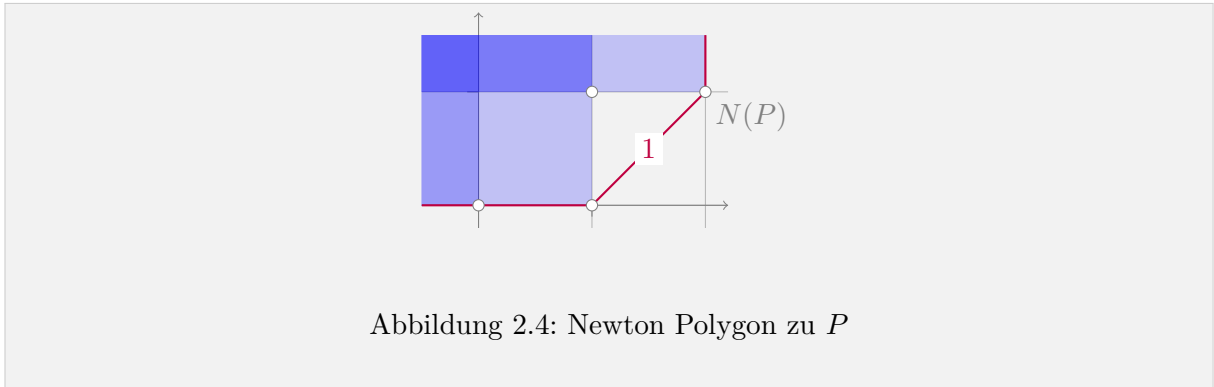
mit den slopes $\mathcal{P}(P) = \{0, 1\} =: \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Nach dem Satz 2.31 existiert eine Zerlegung $P = P_1 \cdot P_2$ mit $\mathcal{P}(P_1) = \{\Lambda_1\}$ und $\mathcal{P}(P_2) = \{\Lambda_2\}$. Durch scharfes hinsehen erkennt man, dass

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &\dots \\ &= (x(x\partial_x) + \dots) \cdot (x\partial_x + \dots) \\ &\dots \\ &= P_1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

anders geschrieben

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= xx\partial_x x\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^2(x\partial_x + 1)\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^3\partial_x^2 + x^2\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &= x^3\partial_x^2 + (x^2 + x)\partial_x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus



2.3.1 Die Filtrierung ${}^{\ell}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol

Kommentar: TODO: mache alle Linearformen L zu ℓ

Sei $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ vollständig gekürzt, also mit λ_0 und λ_1 in \mathbb{N} relativ prim. Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ in zwei Variablen, sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. Falls $P = x^a \partial_x^b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, setzen wir

$$\text{ord}_{\ell}(P) = \ell(b, b - a)$$

und falls $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$ mit $b_i \in \widehat{K}$, setzen wir

$$\text{ord}_{\ell}(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)).$$

Definition 2.34 (Die Filtrierung ${}^{\ell}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration ${}^{\ell}V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welche mit \mathbb{Z} indiziert ist, durch

$${}^{\ell}V_{\lambda}\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_{\ell}(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

Bemerkung 2.35. Man hat $\text{ord}_{\ell}(PQ) = \text{ord}_{\ell}(P) + \text{ord}_{\ell}(Q)$ und falls $\lambda_0 \neq 0$, hat man auch, dass $\text{ord}_{\ell}([P, Q]) \leq \text{ord}_{\ell}(P) + \text{ord}_{\ell}(Q) - 1$.

Definition 2.36 (ℓ -Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls $\lambda_0 \neq 0$, ist der graduierte Ring $gr^{{}^{\ell}V}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_{\lambda}^{{}^{\ell}V}\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von ∂_x in dem Ring durch ξ , dann ist der Ring isomorph zu $\widehat{K}[\xi]$. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, so ist $\sigma_{\ell}(P)$ definiert als die Klasse von P in $gr_{\text{ord}_{\ell}(P)}^{{}^{\ell}V}\mathcal{D}_{\widehat{K}}$. σ_{ℓ} wird hierbei als das ℓ -Symbol bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\sigma_\ell(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$.

Bemerkung 2.37. Bei [Sab90] wird der Buchstabe L anstatt ℓ für Linearformen verwendet, dieser ist hier aber bereits für $\mathbb{C}\{t\}$ reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das ℓ -Symbol als L -Symbol zu finden.

Bemerkung 2.38. Ist $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ geschrieben als $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$. So erhält man $\sigma_\ell(P)$ durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) | \ell(i,i-j) = \text{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

Beweis. TODO □

Kommentar: Ich will die Linearform vermeiden und direkt die skalare Steigung verwenden

Definition 2.39 (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zu dieser Ordnung verwendet.

Bemerkung 2.40. Wenn $\ell(x_0, s_1)$ wie oben aus Λ entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_\ell(P).$$

Kommentar: TODO: ist ℓ Slope (gehört zu Slope) dann hat $\sigma_\ell(P)$ zumindest 2 Monome

2.4 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

2.4.1 Tensorprodukt

Kommentar:

Definition 2.41 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\
 & & T
 \end{array}$$

Für eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned}
 \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\
 n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m)
 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.42. Hier einige Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (2.4)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (2.5)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (2.6)$$

Proposition 2.43. Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ meromorphe Zusammenhänge. Sei $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$. Durch Setzen von

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \quad (2.7)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem meromorphen Zusammenhang.

Kommentar: [\[Sch, Prop 4.1.1\]](#)

Kommentar:

Beweis. Klar

□

Lemma 2.44. [\[Sab90, Ex 5.3.7\]](#) Falls \mathcal{N} regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ genau die Menge der Slopes von \mathcal{M} .

Beweis. TODO

□

2.4.2 pull-back und push-forward

Kommentar: Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3].

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir meistens $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho,$$

wobei L (bzw. \widehat{L}) eine endliche Körpererweiterung von K (bzw. \widehat{K}) ist.

Kommentar: TODO: damit wird \widehat{L} zu einem \widehat{K} Vektorraum.

Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.45 (pull-back). Kommentar: [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34]

Der *pull-back* oder das *inverse Bild* $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.8)$$

Für ein allgemeines $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (2.9)$$

Kommentar: Nun wollen wir uns noch genauer mit dem pull-back beschäftigen, und stellen uns die Frage:

Wie sieht die Wirkung der Derivation auf dem pull-back Zusammenhang aus? Für $\rho(t) = t^p$ betrachten wir beispielsweise ein Element der Form $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\ &= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t)) \underbrace{\partial_{\rho(t)} m}_{=\partial_x m} \\ &= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m = (\star) \\ \rho'(t)^{-1}\partial_t(f(x)m) &= \frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t(f(t^p)m) \\ &= f'(t^p)m + f(t^p)\frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$ und somit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_x gleich der Wirkung von $\rho'(t)^{-1}\partial_t$ ist. In der Tat stimmt diese Vermutung, wie das folgende Lemma zeigt.

Kommentar: Sei $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\ &= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t)) \underbrace{\partial_{\rho(t)} m}_{=\partial_x m} \\ &= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m \\ &= f'(t^p)m + f(t^p)\frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t m \\ &= \frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t(f(t^p)m) \\ &= \underbrace{\rho'(t)^{-1}}_{\rho'(t)^{-1}}\partial_t(f(\underbrace{t^p}_{x})m)\end{aligned}$$

und damit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_x genau die Wirkung von $\rho'(t)^{-1}\partial_t$ ist. In der Tat ist dies, nach dem folgenden Satz, wahr.

Satz 2.46. In der Situation von Lemma 3.5, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ für ein $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, gilt

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t).$$

Für $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ werden wir auch $\rho^* P(t, \partial_t)$ schreiben.

Kommentar: [Cou95, Seite 130] Holonomic modules are preserved under this construction.

Kommentar: [Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ als den Vektor Raum über $\widehat{L} : \pi^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

Man erhält damit die Wirkung von $\partial_t = t^{-1}(t\partial_t)$.

Für den Beweis von Satz 3.6 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

Lemma 2.47. Es gilt $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ -Vektorräume, mittels

Kommentar: TODO: VR oder Moduln??

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

Kommentar:

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ erfüllt, in diesem Fall folgt die Behauptung. Zunächst sei die bilineare Abbildung

$$\kappa : \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{L}}, (f(t), Q(x, \partial_x)) \mapsto f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$$

gegeben, und nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es genau eine lineare Abbildung, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

Dieser so erhaltene eindeutige Morphismus ist genau unser Φ .

9

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k a_k(t) \underbrace{(\rho'(t)\rho'(t)^{-1})^k}_{=1} \partial_t^k \\
 &= \sum_k a_k(t) \rho'(t)^k (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k
 \end{aligned}$$

und zerlege $a_k(t)\rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
 g(t, \partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \left(\sum_k a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \right) \\
 &= \Phi \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes \left(\sum_k a_{k,i}(x) (\partial_x)^k \right) \right).
 \end{aligned}$$

Damit haben wir ein Urbild gefunden und die Surjektivität gezeigt. \square

Lemma 2.48. *Das in Lemma 3.7 definierte Φ ist sogar ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als meromorphe Zusammenhänge.*

Beweis. Sei ∂_t wie gewohnt und ∂_{\otimes} der Zusammenhang auf $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welcher wie in Proposition 3.3 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_{\otimes}$ gilt, also dass Φ ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
 \end{array}$$

und für einen Elementartensor $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

Kommentar: Q wie in großen Beweis später, Namenskollision

folgt dann

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
 & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\
 & & \uparrow \equiv \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t)
 \end{array} ,$$

also kommutiert das Diagramm. \square

Kommentar:

Bemerkung 2.49. BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma 3.7, definierte Φ erfüllt für Elementartensoren $1 \otimes m \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$

$$\begin{aligned}
 \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\
 &\xrightarrow{\Phi} \underbrace{\rho'(t) \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

und somit (3.5) wie gewollt.

Lemma 2.50. Sei $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$. In der Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\hat{L}}
 \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 3.7 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. Betrachte ein $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$. So gilt

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\
 & & \downarrow \Phi \\
 & & f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\
 \downarrow \Phi & & \\
 f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) & \xrightarrow{_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)} & f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit $\alpha = _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$. \square

Beweis zu Satz 3.6. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\
 & & & & u & \longmapsto & u \mod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P
 \end{array}$$

ist exakt, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil \widehat{K} flach ist, da Körper, ist auch, nach Anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} _$, die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}
 \end{array}$$

exakt.

Kommentar: Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} &\cong \text{coker}(\text{id} \otimes _ \cdot P) && (\text{weil exakt}) \\ &\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \left((\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\text{id} \otimes _ \cdot P) \right) && (\text{nach def. von coker}) \end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 3.7 und $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ nach Lemma 3.10 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & & \end{array}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, weil $_ \cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz fortsetzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Kokerne, die Behauptung. \square

Lemma 2.51. Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$.

Beweis. Siehe [Sab90, 5.4.3] für einen Beweis. \square

Kommentar:

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ mit $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$, dann ist $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ mit

$$\begin{aligned} H(P'(t, \partial_t)) &= H(P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)) \\ &= H\left(\sum_i a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i\right) \\ &= H\left(\sum_i a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p)((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p)(p \cdot t^{p-1})^{-i} \partial_t^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p) t^{-i(p-1)} \partial_t^i\right) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.52 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 3.1). Wende den pull-back mit $\rho : t \rightarrow x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 3.6 einfacher anwenden können:

$$\begin{aligned}
 \partial_x &\rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)} \partial_t = \frac{1}{2t} \partial_t, \\
 \partial_x^2 &\rightsquigarrow \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t} \partial_t \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right) = \frac{1}{2t} \left(-\frac{1}{2t^2} \partial_t + \frac{1}{2t} \partial_t^2\right) = \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t.
 \end{aligned}$$

Also ergibt Einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^* P &= (t^2)^3 \left(\frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t\right) - 4(t^2)^2 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \underbrace{t^3 \frac{1}{4} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t}_{-2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t} - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - 2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t - 1.
 \end{aligned}$$

Also ist $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^* P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.2) und somit $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1)$.

Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler \widehat{L} -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.53 (push-forward). Der *push-forward* oder das *direkte Bild* $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

- der \widehat{K} -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist definiert als der \mathbb{C} -Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der \widehat{K} -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ und $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1} \partial_t$.

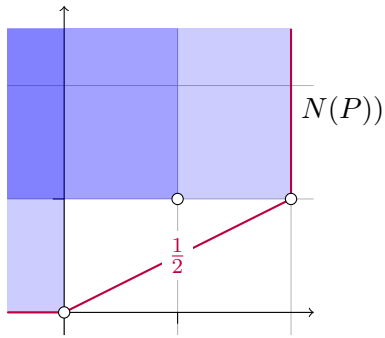


Abbildung 2.5: Newton Polygon zu
 $P = x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$

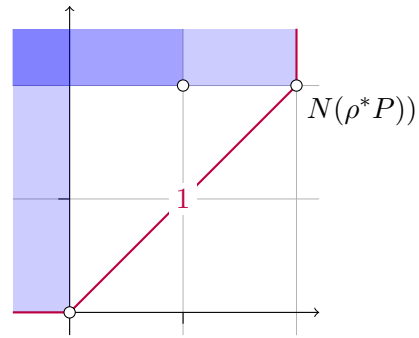


Abbildung 2.6: Newton Polygon zu
 $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$

Kommentar:

Newton-Polygon zu P

Newton-Polygon zu $\rho_+ P$

Beispiel 2.54 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \widehat{\mathcal{D}} / \widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \widehat{\mathcal{D}} / \widehat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=: P} \end{aligned}$$

mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 3.2). Bilde nun das Direkte Bild über ρ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u \left(\frac{1}{2u} \partial_u + \frac{1}{u^4} \right) \\ &= 2u (\rho'(u)^{-1} \partial_u + \frac{1}{u^4}) \end{aligned}$$

$$= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

Also ist $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+ P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.2)

Satz 2.55. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.10)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\cong \rho_+(\underbrace{(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L})}_{\mathcal{N}_{\widehat{L}}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\underbrace{\mathcal{N}_{\widehat{L}}}_{\mathcal{N}_{\widehat{L}}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \end{aligned}$$

□

2.4.3 Fouriertransformation

Definition 2.56 (Fouriertransformation). Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$, dann ist die *fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i.$$

Kommentar: [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1]

Definition 2.57 (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$ so ist die Fouriertransformierte davon ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$.

Beispiel 2.58. Sei $P = x^3 \partial_x^4 + x^2 \partial_x^2 + x$ dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_P &= \partial_z^3 (-z)^4 + \partial_z^2 (-z)^2 + \partial_z \\
 &= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{[\partial_z^3, z^4]} + \partial_z \\
 &= \underbrace{z^4 \partial_z^3 + [\partial_z^3, z^4]}_{z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z} + \underbrace{z^2 \partial_z^2 + [\partial_z^2, z^2]}_{z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + \sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i} + z^2 \partial_z^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z + z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2
 \end{aligned}$$

mit den Newton Polygonen wie in Abbildung 3.3 und 3.4.

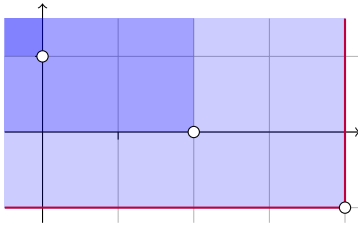


Abbildung 2.7: Newton-Polygon zu P

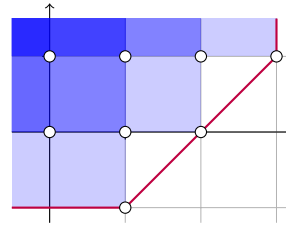


Abbildung 2.8: Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P

Kommentar:

2.4.4 Betrachten bei Unendlich

2.5 Twisten von meromorphen Zusammenhängen

Kommentar: ALT:

Definition 2.59. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben \mathcal{E}_K^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$, im speziellen

also $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$.

Definition 2.60. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben $\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbf{e} \cdot \widehat{K}$, wobei $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi$ Basis ist, ausgestattet mit $\partial_x(f \cdot \mathbf{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \mathbf{e}$, im speziellen also $\partial_x \mathbf{e} = \varphi'$.

Bemerkung 2.61. 1. Auf die Angabe des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.

2. Es ist $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$, denn für den zyklischen Vektor \mathbf{e} gilt, dass $\partial_x \cdot \mathbf{e} = \varphi'(x) \cdot \mathbf{e}$.

3. Wir werden oft $\mathbf{e} = 1$ als Basis nehmen.

Lemma 2.62. Für $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$ mit $a_{-p} \neq 0$ gilt, dass $\mathcal{P}(\mathcal{E}_{\widehat{K}}^\varphi) = \begin{cases} \{p\} & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=-p+1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \\ &= \underbrace{-p a_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \end{aligned}$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können, $(1, -1)$ und $(0, -(p+1))$ sind. Da einer der Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesamt nur einen Slope Λ geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max\left\{0, \frac{-1 - (-(p+1))}{1}\right\} \\ &= \max\{0, p\} \\ &= \begin{cases} p & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.63. Nach [Sab07, 1.a] gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$.

Kommentar: [Cou95, Chap 5 §2]

Lemma 2.64. Sei $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ ein meromorpher Zusammenhang mit P von Grad q und mit \mathbf{e} als ein zyklischer Vektor, so ist $\mathbf{e} \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi$.

Beweis. Da der Grad von P gleich q ist, ist nach Lemma 3.25 auch Q von Grad q und somit $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$. Also reicht es zu zeigen, dass $\mathbf{e} \otimes 1, \partial_x(\mathbf{e} \otimes 1), \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x(\mathbf{e} \otimes 1) &= (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\ &= (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(x) \\ &= (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\mathbf{e} \otimes 1)) \\ &= (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + (\partial_x \mathbf{e}) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(\mathbf{e} \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \mathbf{e} \otimes \psi'(x)) \\ &= (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi''(x)(\mathbf{e} \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \psi'(x)^2(\mathbf{e} \otimes 1) \\ &= (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(\mathbf{e} \otimes 1) \\ &\vdots \\ \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} \mathbf{e}) \otimes 1 + \dots + \lambda_1(\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 + \lambda_0(\mathbf{e} \otimes 1) \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e} \otimes 1 \\ \partial_x(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(\mathbf{e} \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \otimes 1 \\ (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} \mathbf{e}) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich $\mathbf{e} \otimes 1, (\partial_x \mathbf{e}) \otimes 1, (\partial_x^2 \mathbf{e}) \otimes 1, \dots, (\partial_x^{q-1} \mathbf{e}) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $\mathbf{e} \otimes 1, \partial_x(\mathbf{e} \otimes 1), \partial_x^2(\mathbf{e} \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(\mathbf{e} \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.65. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ und sei $\varphi \in \widehat{K}$. So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$.

Beweisskizze. Zeige, dass $P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = 0$ gilt, da $e \otimes 1$ ein zyklischer Vektor ist, folgt damit aus Gradgründen die Behauptung. Genauer ausgeführt wird dies in [Hei10, Seiten 39 bis 44].

Kommentar:

$$P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = \text{TODO}$$

□

Korollar 2.66. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und φ wie in 3.25, so gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} = \mathcal{M}_{\widehat{K}}.$$

Beweis. Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \end{aligned}$$

□

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_{\xi} : t \mapsto \xi t$.

Lemma 2.67. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi} = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi}}.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi}} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi}} \end{array}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung 3.23 berechtigt. Wir wählen eine \widehat{L} Basis \mathbf{e} des Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum \mathcal{E}^φ und damit erhält man die Familie $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$ als \widehat{K} -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x t^k \mathbf{e} &= \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k \mathbf{e}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} \\ &= \rho'(t)^{-1} (t^k \partial_t + k t^{k-1}) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Durch die Setzung $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$ wird die Familie $\mathbf{e} := (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$ eine \widehat{L} -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Zerlege nun $t\varphi'(t)$, wie in Anhang A beschrieben, in

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}] \quad (2.12)$$

mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$. Damit gilt

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p},$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e}_k &= t \partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \underbrace{t(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{\partial_x(t^k \mathbf{e})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi}})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} \\ &\stackrel{(3.8)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{(pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e}) \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t\varphi'(t) \mathbf{e} \\ &\stackrel{(3.9)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---} \\ \text{---}}} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}. \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-1}, \mathbf{e}_0)$ gilt. Es gilt

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right],$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t \mathbf{e}_0, \dots, t\partial_t \mathbf{e}_{p-1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]. \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis \mathbf{e} von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$ ist also beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(X) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. Sei so ein ξ ab jetzt fixiert. So dass gilt:

$$T \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} = \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1} \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1} t)^{p-1} \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da $\varphi'(t) = pt^{p-1}$. Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & &
 \end{array}$$

k-te Stelle

↓

der mit (\star) bezeichnete Teil kommutiert, wobei $\Phi : (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mapsto e_k$ der kanonische Basisisomorphismus und e_k Basis von $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$. Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm

kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi\left(\Phi^{-1}(v) \cdot \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j\right]\right) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente e_k gilt. Nach Definition 3.20 gilt

$$\begin{aligned} \partial_t e_k &= \underbrace{(\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t)} e_k \\ \text{Kettenregel} \quad \downarrow \\ &= \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})} \cdot \underbrace{\varphi'(t)} e_k \\ &= \underbrace{(\xi^{k-1})^p} \cdot \underbrace{(pt^{p-1})} e_k \\ &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k \end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc} \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\ \downarrow & & \\ \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\ \downarrow & & \\ (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t) \xi^{k-1} e_k \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt. \square

3 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

3.1 Tensorprodukt

Kommentar:

Definition 3.1 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

Für eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned} \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2. Hier einige Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (3.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (3.2)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (3.3)$$

Proposition 3.3. Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ meromorphe Zusammenhänge. Sei $n \otimes m \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$. Durch Setzen von

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \quad (3.4)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem meromorphen Zusammenhang.

Kommentar: [Sch, Prop 4.1.1]

Kommentar:

Beweis. Klar □

Lemma 3.4. [Sab90, Ex 5.3.7] Falls \mathcal{N} regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ genau die Menge der Slopes von \mathcal{M} .

Beweis. TODO □

3.2 pull-back und push-forward

Kommentar: Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3].

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir meistens $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho,$$

wobei L (bzw. \widehat{L}) eine endliche Körpererweiterung von K (bzw. \widehat{K}) ist.

Kommentar: TODO: damit wird \widehat{L} zu einem \widehat{K} Vektorraum.

Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 3.5 (pull-back). Kommentar: [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34]

Der *pull-back* oder das *inverse Bild* $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (3.5)$$

Für ein allgemeines $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (3.6)$$

Kommentar: Nun wollen wir uns noch genauer mit dem pull-back beschäftigen, und stellen uns die Frage:

Wie sieht die Wirkung der Derivation auf dem pull-back Zusammenhang aus? Für $\rho(t) = t^p$ betrachten wir beispielsweise ein Element der Form $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\ &= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t)) \underbrace{\partial_{\rho(t)} m}_{=\partial_x m} \\ &= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m = (\star) \\ \rho'(t)^{-1} \partial_t(f(x)m) &= \frac{1}{pt^{p-1}} \partial_t(f(t^p)m) \\ &= f'(t^p)m + f(t^p) \frac{1}{pt^{p-1}} \partial_t m = (\star) \end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m)$ und somit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_x gleich der Wirkung von $\rho'(t)^{-1} \partial_t$ ist. In der Tat stimmt diese Vermutung, wie das folgende Lemma zeigt.

Kommentar: Sei $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Es gilt, dass

$$\begin{aligned}
 \partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\
 &= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t)) \underbrace{\partial_{\rho(t)}}_{=\partial_x} m \\
 &= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m \\
 &= f'(t^p)m + f(t^p) \frac{1}{pt^{p-1}} \partial_t m \\
 &= \frac{1}{pt^{p-1}} \partial_t (f(t^p)m) \\
 &= \underbrace{\rho'(t)^{-1}} \partial_t (f(\overline{x})m)
 \end{aligned}$$

und damit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_x genau die Wirkung von $\rho'(t)^{-1}\partial_t$ ist. In der Tat ist dies, nach dem folgenden Satz, wahr.

Satz 3.6. *In der Situation von Lemma 3.5, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ für ein $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t).$$

Für $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ werden wir auch $\rho^* P(t, \partial_t)$ schreiben.

Kommentar: [Cou95, Seite 130] Holonomic modules are preserved under this construction.

Kommentar: [Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ als den Vektor Raum über $\widehat{L} : \pi^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

Man erhält damit die Wirkung von $\partial_t = t^{-1}(t\partial_t)$.

Für den Beweis von Satz 3.6 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

Lemma 3.7. *Es gilt $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ -Vektorräume, mittels*

Kommentar: TODO: VR oder Moduln??

$$\begin{aligned}\Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)\end{aligned}$$

Kommentar:

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ erfüllt, in diesem Fall folgt die Behauptung. Zunächst sei die bilineare Abbildung

$$\kappa : \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{L}}, (f(t), Q(x, \partial_x)) \mapsto f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$$

gegeben, und nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es genau eine lineare Abbildung, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}\widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\otimes} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ & \searrow \kappa & \downarrow \exists! \\ & & \mathcal{D}_{\widehat{L}}\end{array}$$

Dieser so erhaltene eindeutige Morphismus ist genau unser Φ .

$$\begin{array}{ccc}\widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\otimes} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ & \searrow \kappa & \downarrow \Phi \\ & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ & \searrow \gamma & \downarrow \exists? \\ & & V\end{array}$$

□

Beweis. Prüfe zunächst die Injektivität. Sei $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \ker(\Phi)$ so, dass

$$0 = \Phi(f(t) \otimes Q(x, \partial_x))$$

$$= f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$$

und, da hier alles nullteilerfrei ist, ist die Bedingung äquivalent zur folgenden

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 0 = f(t) & \text{oder} & \quad 0 = Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = f(t) & \text{oder} & \quad 0 = Q(x, \partial_x) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = f(t) \otimes Q(x, \partial_x). \end{aligned}$$

Kommentar: TODO: korrekt?

Nun zur Surjektivität. Sei $g(t, \partial_t) = \sum_k a_k(t) \partial_t^k \in \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ so gilt

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k a_k(t) \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \underbrace{(\rho'(t) \rho'(t)^{-1})^k}_{=1} \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \rho'(t)^k (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \end{aligned}$$

und zerlege $a_k(t) \rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \left(\sum_k a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \right) \\ &= \Phi \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes \left(\sum_k a_{k,i}(x) (\partial_x)^k \right) \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir ein Urbild gefunden und die Surjektivität gezeigt. □

Lemma 3.8. *Das in Lemma 3.7 definierte Φ ist sogar ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ als meromorphe Zusammenhänge.*

Beweis. Sei ∂_t wie gewohnt und ∂_{\otimes} der Zusammenhang auf $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welcher wie in Proposition 3.3 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_{\otimes}$ gilt, also dass Φ ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\hat{L}}
 \end{array}$$

und für einen Elementartensor $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$

Kommentar: Q wie in großen Beweis später, Namenskollision

folgt dann

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
 & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\
 & & \uparrow \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t)
 \end{array}$$

,

also kommutiert das Diagramm. □

Kommentar:

Bemerkung 3.9. BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma 3.7, definierte Φ erfüllt für Elementartensoren $1 \otimes m \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$

$$\begin{aligned}
 \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\
 &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(t) \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

und somit (3.5) wie gewollt.

Lemma 3.10. Sei $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$. In der Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
 \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 3.7 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. Betrachte ein $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. So gilt

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\
 & & \downarrow \Phi \\
 & & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\
 \downarrow \Phi & & \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)} & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit $\alpha = _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$. □

Beweis zu Satz 3.6. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\
 & & & & & & u \longmapsto u \mod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P
 \end{array}$$

ist exakt, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil \widehat{K} flach ist, da Körper, ist auch, nach Anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} _$, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$$

exakt.

Kommentar: Deshalb ist

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \text{coker}(\text{id} \otimes \cdot P) \quad (\text{weil exakt})$$

$$\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \left((\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\text{id} \otimes \cdot P) \right) \quad (\text{nach def. von coker})$$

Also mit Φ wie in Lemma 3.7 und $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ nach Lemma 3.10 ergibt sich

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi \quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi$$

$$\quad \quad \quad \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{D}_{\widehat{L}}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, weil $\cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz fortsetzen

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi \quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Kokerne, die Behauptung. \square

Lemma 3.11. Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$.

Beweis. Siehe [Sab90, 5.4.3] für einen Beweis. \square

Kommentar:

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ mit $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$, dann ist $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ mit

$$\begin{aligned}
 H(P'(t, \partial_t)) &= H(P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p) ((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p) (p \cdot t^{p-1})^{-i} \partial_t^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p) t^{-i(p-1)} \partial_t^i\right) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.12 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 3.1). Wende den pull-back mit $\rho : t \rightarrow x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 3.6 einfacher anwenden können:

$$\begin{aligned}
 \partial_x &\rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)} \partial_t = \frac{1}{2t} \partial_t, \\
 \partial_x^2 &\rightsquigarrow \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t} \partial_t \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right) = \frac{1}{2t} \left(-\frac{1}{2t^2} \partial_t + \frac{1}{2t} \partial_t^2\right) = \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t.
 \end{aligned}$$

Also ergibt Einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^* P &= (t^2)^3 \left(\frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t\right) - 4(t^2)^2 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \underbrace{t^3 \frac{1}{4} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t}_{-2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t} - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - 2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t - 1.
 \end{aligned}$$

Also ist $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^* P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.2) und somit $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1)$.

Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler \widehat{L} -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 3.13 (push-forward). Der *push-forward* oder das *direkte Bild* $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

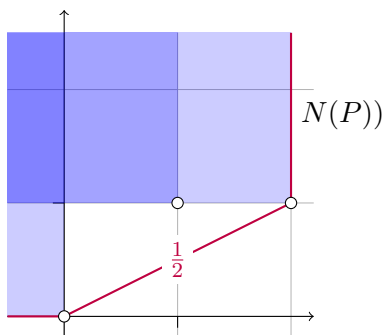


Abbildung 3.1: Newton Polygon zu
 $P = x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$

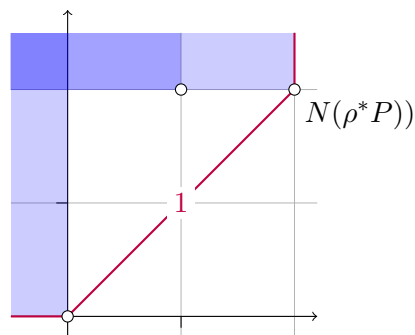


Abbildung 3.2: Newton Polygon zu
 $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$

- der \widehat{K} -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist definiert als der \mathbb{C} -Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der \widehat{K} -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ und
 $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1} \partial_t$.

Kommentar:

Newton-Polygon zu P

Newton-Polygon zu $\rho_+ P$

Beispiel 3.14 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^\varphi &\cong \widehat{\mathcal{D}} / \widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\
 &= \widehat{\mathcal{D}} / \widehat{\mathcal{D}} \cdot (\underbrace{\partial_u + \frac{2}{u^3}}_{=: P})
 \end{aligned}$$

mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 3.2). Bilde nun das Direkte Bild über ρ , betrachte dazu

$$\begin{aligned}\partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u\left(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}\right) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})\end{aligned}$$

Also ist $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \widehat{D}/\widehat{D} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+ P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 3.2)

Satz 3.15. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (3.7)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\underbrace{\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})}_{\text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}})}) \\ &\cong \rho_+(\underbrace{(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}}_{\text{(Rechenregeln Tensorprodukt)}}) \\ &\cong \rho_+(\underbrace{\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}}_{\text{(Rechenregeln Tensorprodukt)}}) \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}\end{aligned}$$

□

3.3 Fouriertransformation

Definition 3.16 (Fouriertransformation). Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$, dann ist die *fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i.$$

Kommentar: [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1]

Definition 3.17 (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$ so ist die Fouriertransformierte davon ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$.

Beispiel 3.18. Sei $P = x^3\partial_x^4 + x^2\partial_x^2 + x$ dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_P &= \partial_z^3(-z)^4 + \partial_z^2(-z)^2 + \partial_z \\
 &= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{[\partial_z^3, z^4]} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + [\partial_z^3, z^4] + \underbrace{z^2 \partial_z^2}_{[\partial_z^2, z^2]} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i}}_{z^2 \partial_z^2} + z^2 \partial_z^2 \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i}}_{4z \partial_z} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z + z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + \frac{4}{2} + \partial_z \\
 &= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2
 \end{aligned}$$

mit den Newton Polygonen wie in Abbildung 3.3 und 3.4.

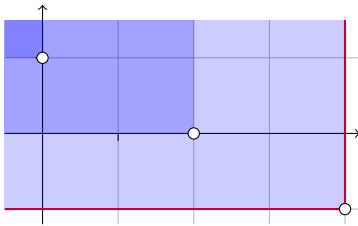


Abbildung 3.3: Newton-Polygon zu P

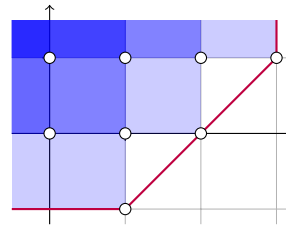


Abbildung 3.4: Newton-Polygon zu \mathcal{F}_P

Kommentar:

3.4 Betrachten bei Unendlich

3.5 Twisten von meromorphen Zusammenhängen

Kommentar: ALT:

Definition 3.19. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben \mathcal{E}_K^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$.

Definition 3.20. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben \mathcal{E}_K^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbf{e} \cdot \widehat{K}$, wobei $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_K^\varphi$ Basis ist, ausgestattet mit $\partial_x(f \cdot \mathbf{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \mathbf{e}$, im speziellen also $\partial_x \mathbf{e} = \varphi'$.

Bemerkung 3.21. 1. Auf die Angabe des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.

2. Es ist $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$, denn für den zyklischen Vektor \mathbf{e} gilt, dass $\partial_x \cdot \mathbf{e} = \varphi'(x) \cdot \mathbf{e}$.

3. Wir werden oft $\mathbf{e} = 1$ als Basis nehmen.

Lemma 3.22. Für $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$ mit $a_{-p} \neq 0$ gilt, dass $\mathcal{P}(\mathcal{E}_K^\varphi) = \begin{cases} \{p\} & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=-p+1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \\ &= \underbrace{-p a_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \end{aligned}$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können, $(1, -1)$ und $(0, -(p+1))$ sind. Da einer der Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesamt nur einen Slope Λ geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \max\left\{0, \frac{-1 - (-(p+1))}{1}\right\} \\ &= \max\{0, p\} \\ &= \begin{cases} p & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.23. Nach [Sab07, 1.a] gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$.

Kommentar: [Cou95, Chap 5 §2]

Lemma 3.24. Sei $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ ein meromorpher Zusammenhang mit P von Grad q und mit e als ein zyklischer Vektor, so ist $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi$.

Beweis. Da der Grad von P gleich q ist, ist nach Lemma 3.25 auch Q von grad q und somit $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$. Also reicht es zu zeigen, dass $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_x(e \otimes 1) &= (\partial_x e) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\
 &= (\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x) \\
 &= (\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1) \\
 \partial_x^2(e \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1)) \\
 &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + (\partial_x e) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x)) \\
 &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)^2(e \otimes 1) \\
 &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(e \otimes 1) \\
 &\vdots \\
 \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 + \dots + \lambda_1(\partial_x e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1)
 \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_x(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(e \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_x e) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich $e \otimes 1, (\partial_x e) \otimes 1, (\partial_x^2 e) \otimes 1, \dots, (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 3.25. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ und sei $\varphi \in \widehat{K}$. So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$.

Beweisskizze. Zeige, dass $P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = 0$ gilt, da $e \otimes 1$ ein zyklischer Vektor ist, folgt damit aus Gradgründen die Behauptung. Genauer ausgeführt wird dies in [Hei10, Seiten 39 bis 44].

Kommentar:

$$P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = \text{TODO}$$

□

Korollar 3.26. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und φ wie in 3.25, so gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} = \mathcal{M}_{\widehat{K}}.$$

Beweis. Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \end{aligned}$$

□

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$.

Lemma 3.27. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi(u) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi(u) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}
 \end{array}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung 3.23 berechtigt. Wir wählen eine \widehat{L} Basis \mathbf{e} des Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum \mathcal{E}^φ und damit erhält man die Familie $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$ als \widehat{K} -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_x t^k \mathbf{e} &= \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \mathbf{e} \\
 &= \rho'(t)^{-1} (t^k \partial_t + k t^{k-1}) \mathbf{e}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Durch die Setzung $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$ wird die Familie $\mathbf{e} := (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$ eine \widehat{L} -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Zerlege nun $t\varphi'(t)$, wie in Anhang A beschrieben, in

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}] \tag{3.9}$$

mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$. Damit gilt

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p},$$

denn:

$$\begin{aligned}
 t\partial_t \mathbf{e}_k &= t \partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\
 &\stackrel{(3.4)}{=} \underbrace{t (-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x (\underbrace{t^k \mathbf{e}}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi}))}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \\
 &\stackrel{(3.8)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{(pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \\
 &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} \underbrace{(kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e})}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \\
 &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\
 &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \underbrace{t\varphi'(t) \mathbf{e}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e} \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}.
 \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p-1}, \mathbf{e}_0)$ gilt. Es gilt

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right],$$

denn:

$$\begin{aligned}
 t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t \mathbf{e}_0, \dots, t\partial_t \mathbf{e}_{p-1}) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
 &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right].
 \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis \mathbf{e} von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$ ist also beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(X) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. Sei so ein ξ ab jetzt fixiert. So dass gilt:

$$\begin{aligned}
 T \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1} \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1} t)^{p-1} \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da $\varphi'(t) = pt^{p-1}$. Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}
 \end{array}$$

(★)

k-te Stelle

↓

der mit (\star) bezeichnete Teil kommutiert, wobei $\Phi : (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mapsto e_k$ der kanonische Basisisomorphismus und e_k Basis von $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$. Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi\left(\Phi^{-1}(v) \cdot \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \right) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente e_k gilt. Nach Definition 3.20 gilt

$$\begin{aligned} \partial_t e_k &= \underbrace{(\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t)} e_k \\ \text{Kettenregel} \quad \downarrow \\ &= \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})} \cdot \underbrace{\varphi'(t)} e_k \\ &= \underbrace{(\xi^{k-1})^p} \cdot \underbrace{(pt^{p-1})} e_k \\ &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k \end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc} \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\ \downarrow & & \\ \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\ \downarrow & & \\ (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t) \xi^{k-1} e_k \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt. □

4 Elementare meromorphe Zusammenhänge

4.1 Elementare formale meromorphe Zusammenhänge

Definition 4.1. Ein *elementarer formaler meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang \mathcal{M} , welcher isomorph zu $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$, mit passendem α und p , ist.

Lemma 4.2. *Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.*

Kommentar: [Sab90, Lem 5.2.1.]

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.17). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \widehat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$.

Kommentar: TODO: bis hier schon klar

Tatsächlich kann man $b_i(x) = x^i b'_i(x)$ mit $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$. □

Lemma 4.3. *Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.*

Beweis. Siehe [Sab90, Thm 5.2.2]. □

Satz 4.4. *Ein regulärer formaler Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen.*

Beweisskizze. Man wählt eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, in der die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist. Diese Matrix kann in Jordan Normalform gebracht werden und damit erhält man das Ergebnis. Ausgeführt wurde das in [Sab90, Cor. 5.2.6]. \square

4.2 Elementare meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: einführen als Bausteine oder kleinste meromorphe Zusammenhänge

Definition 4.5. Ein *elementarer meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang \mathcal{M} , für den es $\psi \in \mathbb{C}((x))$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$, also ein elementarer formaler meromorpher Zusammenhang, ist.

Lemma 4.6. In der Situation von Definition 4.5 gilt $\mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p$.

Beweis. Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} &= \mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p \\ &\stackrel{3.25}{=} \mathcal{D}/\mathcal{D}(x(\partial_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}) - \alpha)^p \\ &= \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p. \end{aligned}$$

\square

Kommentar:

4.3 Definition in [Sab07]

Definition 4.7 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in t\mathbb{C}[[t]]$, $\varphi \in \widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t))$ und einem endlich dimensionalen \widehat{L} -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten elementaren endlich dimensionalen \widehat{K} -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$ ab.

Lemma 4.8. [Sab07, Lem 2.2]

Lemma 4.9. [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$ genau dann, wenn

- es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$
- und $S \cong R$ als \widehat{L} -Vektorräume mit Zusammenhang.

Beweis. Siehe [Sab07, Lem 2.6.] □

Proposition 4.10. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale \widehat{K} -Vektorraum \mathcal{M} mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, $\rho : t \mapsto t^p$ vom Grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. Siehe [Sab07, Prop 3.1] □

4.4 Levelt-Turrittin-Theorem

Kommentar: Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

Kommentar:

4.4.1 Klassische Version

Satz 4.11. [Sab90, Thm 5.4.7] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler meromorpher Zusammenhang, so gibt es eine ganze Zahl p , so dass der Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, mit $\rho : t \mapsto x := t^p$, isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren meromorphen Zusammenhängen ist.

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

Beweis. Zum Beweis wird Induktion auf die lexicographisch geordneten Paare $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$ angewendet. Wobei $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dem größten Slope von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ entspricht. Es wird $\kappa = \infty$ gesetzt, falls der größte Slope nicht ganzzahlig ist.

Kommentar: TODO: Induktionsanfang und -schritt kennzeichnen

Wir nehmen oBdA an, dass $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ genau einen Slope Λ hat, sonst Teile $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ mittels Satz 2.31 in meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ (vollständig gekürzt) definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$. Wir nennen $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$ die *Determinanten Gleichung* von P . Da L zu einem Slope von P gehört, besteht $\sigma_L(P)$ aus zumindest zwei Monomen.

Kommentar: and is homogeneous of degree $\text{ord}_L(P) = 0$ because P is chosen with coefficients in $\mathbb{C}[[x]]$, one of them, being a unit.

Schreibe

$$\begin{aligned} \sigma_L(P) &= \sum_{L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i, i-j) = 0} \alpha_{ij} x^j \xi^i. \end{aligned}$$

Sei $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x i^{\lambda_1}$ so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei $\alpha_0 \neq 0$ ist.

Erster Fall: $\lambda_1 = 1$. Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_{\beta}}.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. Sei β_0 eine der Nullstellen, so setze $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0 + 1))z^{\lambda_0 + 1}$ und betrachte $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$.

Kommentar: AB HIER VLT NICHT RICHTIG, nur versuch

Falls $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$ gilt

$$P\left(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\right) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial(\frac{\beta_0}{\lambda_0+1} x^{-(\lambda_0+1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 z^{-(\lambda_0+2)}. \end{aligned}$$

Schreibe $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0+2)})$.

Lemma 4.12. *Es gilt, dass P' Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.*

Beweis. TODO

□

Des weiteren ist $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$. Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat nur eine Nullstelle.

Kommentar: TODO: Hier weiter

2. Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat mehrere Nullstellen.

Kommentar: TODO: Hier weiter

Zweiter Fall: $\lambda_1 \neq 1$. In diesem Fall ist einzige Slope Λ nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit λ_1 . Sei $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$ und erhalte P' so dass $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$. Nach Lemma 3.11 hat P' den einen Slope $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$. Damit können wir nun die zugehörige Linearform $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$ definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \dots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an.

□

Kommentar:

4.4.2 Sabbah's Refined version

Proposition 4.13. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$, wobei $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$, $\rho : x \mapsto t = x^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und S ist ein Rang 1 \widehat{K} -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.14 (Refined Turrittin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ kann in eindeutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind.

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

5 Explizite Berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von \mathcal{D} -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu einem Beispiel unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem φ D-Moduln ergibt. Im Laufe des Kapitels werden immer speziellere φ betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

5.1 Rezept für allgemeine φ

Hier wollen wir nun eine spezielle Klasse von meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und beginne mit \mathcal{E}^φ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left(\text{Hauptnenner von } \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\widehat{L}}^*} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left(t^{\max(I)+1} \cdot \left(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \right)}_{=: Q(t, \partial_t)}. \end{aligned}$$

Kommentar: Dies ändert den meromorphen Zusammenhang nicht, weil $t^{\max(I)+1}$ eine Einheit in $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ (und auch in \mathcal{D}_L) ist.

3. Fouriertransformiere \mathcal{E}^φ und erhalte

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle}.\end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an.

Was passiert mit der Ableitung ∂_x ? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$, und somit

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle.$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom P_φ assoziierten formalen meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$ betrachten.

Lemma 5.1. *Zu einem $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ ist das Minimalpolynom von \mathcal{M}_φ explizit gegeben durch*

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle.$$

Beweis. Sei $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$, so ist

$$\begin{aligned}Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \underbrace{(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t))}_{\overbrace{\partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}}}} \\ &= t^{\max(I)+1} \left(\partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k}\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= \underbrace{-(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1}}_{\overbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= \underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}_{\overbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{x^2 (x^{-1} \partial_x - x^{-2})} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\
 &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{(x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle
 \end{aligned}$$

□

Im Anhang B wird das $(x^2 \partial_x)^k$ genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

Lemma 5.2. *Es gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$.*

Beweis. *Kommentar:* [Sab07, 5.b.]

Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir P_φ um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von Bedeutung sind und deshalb vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die konvexen Hüllen, die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert werden. Sei $q := \max(I)$.

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(\underbrace{(-x^2 \partial_x)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{(-1)^q (x^{2q} \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^{2q} \partial_x^q)}^{\text{liefert keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \underbrace{x^{2q} \partial_x^q (x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q} \overbrace{(x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1})} \partial_x - x^{2q} \partial_x^q + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q} \partial_x^q - x^{2q} \partial_x^q}_{\substack{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \\ \text{sind also vernachlässigbar}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe auch vernachlässigt werden kann.

Behauptung: Es gilt

$$H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \subset H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)$$

Denn: Betrachte zu einem $m \in I \setminus \{q\}$, einen Summanden $ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}$ aus der Summe:

$$\begin{aligned} H(ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}) &= H(ma_m(-1)^q(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m} + \mathbf{T.i.Q. von } x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})) \\ &= H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m}) \\ &= (q-m, q-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

In Abbildung 5.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten, mit $N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q)$ in der gewohnten Farbe und $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$ in Blau, dargestellt. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh. \square

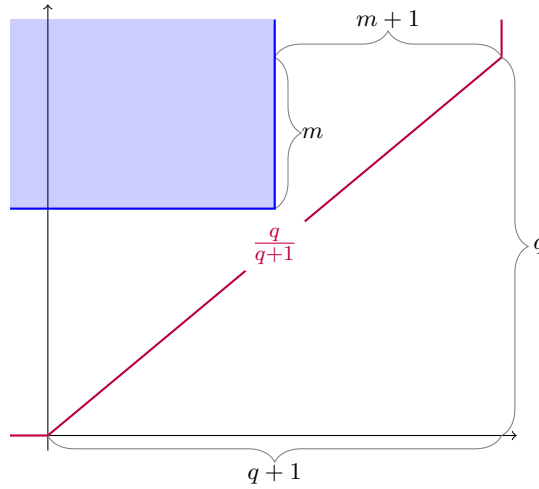


Abbildung 5.1: Newton-Polygon zu P_φ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$\begin{aligned} H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} ka_k(-x^2\partial_x)^{q-k}) \\ &\stackrel{\text{Beh.}}{=} H(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q). \end{aligned}$$

Also ist

$$N(P_\varphi(x, \partial_x)) = N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q).$$

womit die Behauptung des Lemmas folgt und das Newton-Polygon wie in Abbildung 5.1 aussieht. \square

Also ist, nach Lemma 3.11, ein pull-back mit Grad $q+1$ hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Denn wir wissen, dass nach Anwenden eines solchem pull-backs die Slopes mit $q+1$ multipliziert werden, also gilt $\mathcal{P}(\rho^+\mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$.

Lemma 5.3. Im Fall $\varphi = \frac{a}{t^q}$ ist mit $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$ der pull-back gegeben durch

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa).$$

Beweis. Sei $\varphi = \frac{a}{t^q}$, so ist P gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^q (x \partial_x - 1) + qa,$$

und sei $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \rho^+ (\mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \rho^* P_\varphi(t, \partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi\left(- (q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t\right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\underbrace{\left(-(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t \right)^q}_{\substack{=1}} \underbrace{\left(-(q+1)t^{q+1} \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t - 1 \right)}_{\substack{=1}} + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left(\left(\underbrace{\frac{(q+1)^2}{(q+1)^2}}_{=1} \underbrace{t^{2(q+1)-q}}_{\substack{=1}} \partial_t \right)^q \left(\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left((t^{q+2} \partial_t)^q \left(\frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa \right) \end{aligned}$$

□

Kommentar:

Korollar 5.4. Ordnung vom pull-back ist 0

Definiere mittels $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$ und berechne die Determinanten Gleichung $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$.

Kommentar: Schon gezeigt, dass $\text{ord}_\ell = 0$?

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ell(i,i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\ &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i\end{aligned}$$

Da $\widehat{L}[\xi]$ kommutativ ist, gilt hier, dass $(t^j \xi^i)^k = t^{jk} \xi^{ik}$ ist. Setze $\theta = t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^{q+1} \xi$ so, können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta \text{ Nullstelle}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$ eine Konstante ist. Sei β eine der Nullstellen. Da $\text{ord}_\ell(\rho^* P_\varphi) = 0$ und der einzige Slope von $\rho^* P_\varphi$ nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass $\alpha_0 \neq 0$. Also ist 0 keine Nullstelle von $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = (\beta/q)t^{-q}$ und betrachte

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &:= \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t)) \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi \\ &\stackrel{3.25}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t - \frac{\partial \psi}{\partial t})) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}})) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (t^{q+2}(\partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}))^q (t(\partial_x + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}) - (q+1)) + (q+1)qa\end{aligned}$$

Kommentar: TODO: hier weiter vereinfachen

Zerlege nun wie in Satz 2.31 den meromorphen Zusammenhang \mathcal{N} in $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$ wobei \mathcal{N}_i meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. Twiste die \mathcal{N}_i jeweils mit $\mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$ und somit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun, falls dieser nicht schon ein elementarer meromorpher Zusammenhang ist, Induktion anwenden.

Kommentar: nicht elementar, sondern regulär otimes E

5.2 Levelt-Turrittin-Zerlegung für \mathcal{M}_φ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Kommentar: rechtfertigen, das mehr gerechnet wird, als nötig

Als konkreten Fall betrachten wir nun \mathcal{M}_φ bezüglich $\varphi_1 := \frac{a}{x}$. Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\
 &= -x^2 \underbrace{\partial_x x}_{=1} \partial_x + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^2 \underbrace{(x \partial_x + 1)}_{=0} \partial_x + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 - \underbrace{x^2 \partial_x + x^2 \partial_x}_{=0} + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 + a.
 \end{aligned}$$

Erhalte daraus das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$.

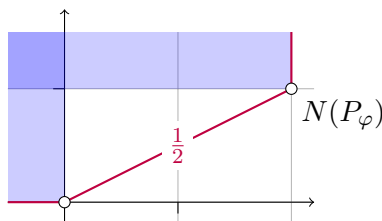


Abbildung 5.2: Newton Polygon zu P_φ

Berechne nun zu $\rho : t \mapsto x := -2t^2$ ein Minimalpolynom $\rho^* P_\varphi$ zu $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
 \rho^* P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t \partial_t - 2) + 2a \\
 &= t^3 \underbrace{\partial_t t}_{=1} \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^3 (t \partial_t + 1) \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 + t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 - \underbrace{t^3 \partial_t}_{=0} + 2a
 \end{aligned}$$

und erhalte einen meromorphen Zusammenhang $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_\varphi$ mit genau dem Slope $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$.

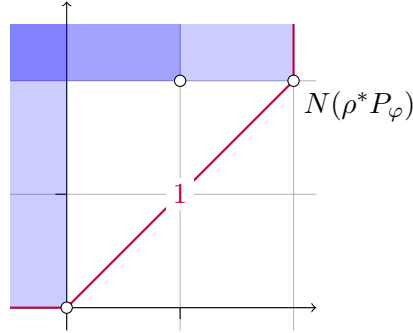


Abbildung 5.3: Newton Polygon zu $\rho^* P_\varphi$

Definiere die Linearform $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$. Berechne nun die *Determinanten Gleichung* $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ von $\rho^* P_\varphi$.

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j)|2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= t^4 \xi^2 + 2a \end{aligned}$$

Setze $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$, so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \theta^2 + 2a,$$

mit den Nullstellen $i\sqrt{2a} =: \beta$ und $-i\sqrt{2a}$. Setze $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$ und betrachte den Twist $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}^\psi$ von $\rho^+ \mathcal{M}$. Es ist $e \otimes 1$ ein zyklischer Vektor, wobei e ein zyklischer Vektor von $\rho^+ \mathcal{M}$ ist. Mit dem Lemma vom Zyklischen Vektor, bzw. dem Korollar 2.18, wollen wir nun ein Minimalpolynom zu \mathcal{N} berechnen^[1]:

$$\begin{aligned} \partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t(\underbrace{\partial_t(e \otimes 1)}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \partial_t(\underbrace{(\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)}) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \underbrace{(\partial_t^2 e) \otimes 1} + \underbrace{(\partial_t e) \otimes \psi'(t) + (\partial_t e) \otimes \psi'(t)} + \underbrace{e \otimes (\psi''(t) + \psi'(t)^2)}_{\in K} \\ &= \underbrace{((t^{-1} \partial_t - 2at^{-4})e) \otimes 1} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1} + \underbrace{(\psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1}_{\in K} \\ &= \underbrace{(t^{-1} \partial_t e) \otimes 1 - 2at^{-4} e \otimes 1} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi''(t)e \otimes 1 + \psi'(t)^2 e \otimes 1}_{\in K} \end{aligned}$$

^[1] Dies wäre auch schneller, aber weit weniger interessanter, mit Lemma 3.25 möglich.

$$\begin{aligned}
 &= (t^{-1} + 2\psi'(t)) \underbrace{(\partial_t \mathbf{e}) \otimes 1}_{(3.4)} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &\stackrel{(3.4)}{=} (t^{-1} + 2\psi'(t)) (\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - \mathbf{e} \otimes \psi'(t)) + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= \left((t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= \left((t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2 \right) \mathbf{e} \otimes 1
 \end{aligned}$$

also

$$0 = \underbrace{\left(\partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right)}_{=: P'} \mathbf{e} \otimes 1$$

und mit $\psi(t) = i\sqrt{2at}^{-1}$ ist $\psi'(t) = -i\sqrt{2at}^{-2}$ und $\psi''(t) = 2i\sqrt{2at}^{-3}$. Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - i\sqrt{2at}^{-3} + 2at^{-4} - 2i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{(-i\sqrt{2at}^{-2})^2}_{=0} \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3}
 \end{aligned}$$

mit, wie gewünscht, einem regulärem Anteil.

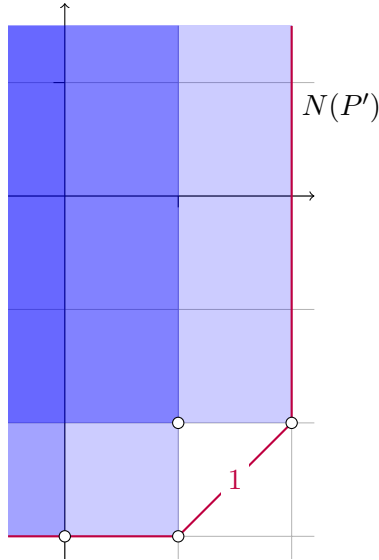


Abbildung 5.4: Newton Polygon zu \mathcal{N}

Kommentar:

Bemerkung 5.5. Alternativ ließe sich ein Minimalpolynom von \mathcal{N} mit der Formel aus Lemma 3.25 berechnen. Denn mit $\rho^*P(t, \partial_t) = t^4\partial_t^2 - t^3\partial_t + 2a$, ist

$$\begin{aligned}
 \rho^*P(t, \partial_t - \frac{\partial\psi}{\partial t}) &= \rho^*P(t, \partial_t - \frac{-i\sqrt{2a}}{t^2}) \\
 &= t^4 (\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2})^2 - t^3(\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2}) + 2a \\
 &= t^4 (\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2})(\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4 (\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^{-2}\partial_t + \partial_t i\sqrt{2a}t^{-2} + (i\sqrt{2a}t^{-2})^2) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^4 \partial_t t^{-2} - 2at^{-4}t^4 - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^4 (t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2a}t^2\partial_t + i\sqrt{2a}t^2\partial_t - 2i\sqrt{2a}t - t^3\partial_t - i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 - (t^3 - 2i\sqrt{2a}t^2)\partial_t - 3i\sqrt{2a}t + 2a \\
 &= t^4P'(t, \partial_t)
 \end{aligned}$$

Nachdem wir jetzt ein Minimalpolynom gefunden haben, ist unser nächstes Ziel, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ in zwei meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt $P'(t, \partial_t) = Q_1(t, \partial_t) \cdot Q_2(t, \partial_t)$.

Da der ∂_t -Grad von P' genau 2 ist, müssen die Q_i jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen. Allgemein haben die Q_i also die Form

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 := \bar{u}(t)\partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), \bar{u}(t), u(t) \in \widehat{L}.$$

Beobachtung 5.6. Ist Q_1 und Q_2 so ein solches Paar, dann ist für $\sigma \in \widehat{L}$ das Paar $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$ und $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$ ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{=1} \cdot Q_2 = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2.$$

Mit der Beobachtung 5.6 ist klar, dass wir den Faktor vor ∂_t in Q_2 frei wählen können. Setze $\bar{u}(t) := 1$ und erhalte

$$Q_1 = \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 = \partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \widehat{L}$$

und somit ist ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2}at^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2}at^{-3}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Damit ist ebenfalls $\bar{v}(t) = 1$.

Durch das Wissen über die Slopes der Q_i erhalten wir noch Informationen über die Reihen $v(t) := \sum_n v_n t^n$ und $u(t) := \sum_n u_n t^n$. Die beiden Polynome Q_1 und Q_2 enthalten ∂_t als einziges Monom vom ∂_t -Grad 1, deshalb ist $(1, -1)$ in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da Q_1 nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 5.5 aussehen und somit wissen wir, dass $v_n = 0$ für alle $n < -1$. Da Q_2 genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 5.6. Damit ist $u_n = 0$ für alle $n < -2$ und $u_{-2} \neq 0$.

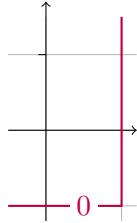


Abbildung 5.5: Newton-Polygon zu Q_1

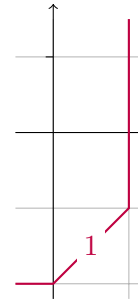


Abbildung 5.6: Newton-Polygon zu Q_2

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (5.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (5.2)$$

und mit den Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \overbrace{[\partial_t, u_n t^n]}) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \overbrace{n u_n t^{n-1}}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergebnis nun in (5.2) einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}}_{\text{Indexshift}} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right). \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Betrachte nun das letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\left(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right)}_{\text{Indexshift}} = t^{-3} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n \right)}_{\text{Cauchy Produkt}} \\
 &\quad \downarrow \\
 &= t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} \right) t^{n-3} \\
 &\quad \downarrow \\
 &= \sum_{n=-3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \tag{Indexshift}
 \end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (5.3) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \underbrace{\sum_{n=-3}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n}_{\text{Indexshift}} \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left((n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3}.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit der gewünschten Formel vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2at}^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \tag{5.4}$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) t^n \quad (5.5)$$

Nun können wir mit (5.4) und (5.5) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten zunächst aus (5.4), die Bedingungen

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \quad (5.6)$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \quad (5.7)$$

$$0 = u_n + v_n \quad \forall n \geq 0 \quad (5.8)$$

welche wir als nächstes mit (5.5) kombinieren wollen. Betrachte zunächst die Vorfaktoren vor t^{-3} :

$$\begin{aligned} -3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-3-k+1} \\ &= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\ \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \stackrel{(5.7)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} \\ &= u_{-1} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinem Koeffizienten vor t^n mit $n > -3$:

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)u_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + (\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{v_{n+2}u_{-2}}}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{v_{n+2}u_{-2}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + \underbrace{v_{n+2}}_{\overline{v_{n+2}}} \underbrace{u_{-2}}_{\overline{u_{-2}}} \\ \Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= - \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{u_{-2} \neq 0}{\Rightarrow} v_{n+2} = -\frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right)$$

und nach passendem Indexshift folgt

Kommentar: $n+2 \rightarrow n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ mit $\mathcal{N}_1 = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n)$ und $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n)$.
Zusammen mit $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, $u_{-1} = -\frac{3}{2}$ und $v_{-1} = \frac{1}{2}$ sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left((n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (5.9)$$

die Koeffizienten von $v(t)$ und $u(t)$ vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit $\mathcal{E}^{-\psi(t)}$ zurücktwisten und wir erhalten damit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} &\stackrel{3.26}{=} \underbrace{\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)}}_{(\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \\ &= \underbrace{\mathcal{N}_1}_{\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \oplus \underbrace{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}} \\ &= (\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \oplus (\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \end{aligned}$$

wobei Q_1 bereits regulär. Betrachte also noch $\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} &\stackrel{3.25}{=} \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2}) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2} + \underbrace{u(t)}_{\sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n}) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \\ &\stackrel{3.25}{=} \underbrace{\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n)}_{\text{regulär}} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \end{aligned}$$

Kommentar: Damit ist der zweite Summand also auch ein elementarer meromorpher Zusammenhang.

Also zerlegt sich \mathcal{M} , nach einem pull-back mit $\rho : t \mapsto x = -2t^2$, in

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \underbrace{\left(\mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_1} \oplus \underbrace{\left(\mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \left(\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_2}.$$

Nach Zerlegen von \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 in eine direkte Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen, wie in Satz 4.4, ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

5.2.1 Konvergenz der Summanden

Kommentar: TODO: text

Es ist klar, dass die Potenzreihen nicht konvergent sein dürfen, trotzdem wollen wir die Potenzreihen auf Konvergenz untersuchen

Für $n > 0$ gilt $v_{n-1} \stackrel{(5.8)}{=} -u_{n-1}$ und damit wollen wir die Formel (5.9) noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt. Aus (5.9) ergeben sich zunächst für $n = 0$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((-1)u_{-1} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1} u_{-k-1} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) \\ &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \frac{3i}{8\sqrt{2a}} = -u_0 \end{aligned}$$

Kommentar: Somit ergeben sich für $n = 1$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((1-1)u_{1-1} + \sum_{k=0}^1 v_{k-1} u_{1-k-1} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} (v_{-1}u_0 + v_0u_{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{v_0}{u_{-2}}(-v_{-1} + u_{-1}) \\
 &= \frac{3}{u_{-2} \cdot 4u_{-2}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{3}{4u_{-2}^2}(-2) \\
 &= -\frac{3}{2u_{-2}^2} \\
 &= \frac{3}{16a} = -u_1
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 a &= \frac{1}{8} \\
 &= 1.5
 \end{aligned}$$

und für $n = 2$ ist

$$\begin{aligned}
 v_2 &= -\frac{1}{u_{-2}}((2-1)u_{2-1} + \sum_{k=0}^2 v_{k-1}u_{2-k-1}) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}(u_1 + v_{-1}u_1 + v_0u_0 + v_1u_{-1}) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{-3}{4u_{-2}}\frac{3}{4u_{-2}} + \frac{-3}{2u_{-2}^2}\frac{-3}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}^3}\left(\frac{24}{16} + \frac{12}{16} - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right) \\
 &= -\frac{63}{16u_{-2}^3} \\
 &= -\frac{63}{16(2i\sqrt{2a})^3} \\
 &= \frac{63}{256ia\sqrt{2a}} \\
 &= -\frac{63}{256a\sqrt{2a}} = -u_2
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 a &= \frac{1}{8} \\
 &\approx -3.9375i
 \end{aligned}$$

und für $n = 3$ ist

$$\begin{aligned}
 v_3 &= -\frac{1}{u_{-2}}((3-1)u_{3-1} + \sum_{k=0}^3 v_{k-1}u_{3-k-1}) \\
 &\approx -u_{-2}^{-4}\left(-\frac{63}{8} - \frac{1}{2}v_2 - v_0v_1 - v_1v_0 - \frac{3}{2}v_2\right) \\
 &= -u_{-2}^{-4}\left(\underbrace{\left(-\frac{(4-1)63}{32} - 2\frac{-3-3}{4}\frac{-3}{2} - \frac{3-63}{2}\frac{16}{16}\right)}_{-(4-1)63 - 8 \cdot 9 + 3 \cdot 63}\right) \\
 &= -\frac{-(4-1)63 - 8 \cdot 9 + 3 \cdot 63}{32u_{-2}^4} \\
 &= -\frac{-8 \cdot 9}{8 \cdot 4u_{-2}^4} \\
 &= \frac{9}{4u_{-2}^4}
 \end{aligned}$$

Kommentar: und analog, für $n = 1$ und $n = 2$

$$v_1 = -\frac{3}{2u_{-2}^2} = \frac{3}{16a} = -u_1 \quad \text{und} \quad v_2 = -\frac{63}{16u_{-2}^3} = -\frac{63i}{256a\sqrt{2a}} = -u_2.$$

Die letzten zwei Paare sind für die Berechnung nicht von Bedeutung und dienen nur dazu, das Programm zu prüfen.

Nun vereinfachen wir die Formel:

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left((n-1)u_{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left(\underbrace{(n-1)u_{n-1}} + v_{-1} \underbrace{u_{n-1}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{u_{n-k-1}} \right)} + v_{n-1}u_{-1} \right) \\ &\stackrel{(5.8)}{=} -\frac{1}{u_{-2}} \left(\underbrace{-(n-1)v_{n-1}} + v_{-1} \underbrace{(-v_{n-1})} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{(-v_{n-k-1})} \right)} + \underbrace{v_{n-1}u_{-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left(-(n-1)v_{n-1} - \underbrace{\frac{1}{2}v_{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} - \underbrace{\frac{3}{2}v_{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left((n-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \end{aligned}$$

Zu gegebenem $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, sind die Koeffizienten gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_{-1} &= \frac{1}{2} & u_{-1} &= -\frac{3}{2} \\ v_0 &= -u_0 = -\frac{3}{4u_{-2}} \\ v_n &= -u_n = \frac{1}{u_{-2}} \left((n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) & \forall n > 0 \end{aligned}$$

Im Anhang wird in Abschnitt C.2 eine Haskell Modul vorgestellt, welches zu gegebenem u_{-1} die Werte von $v(t)$ und $u(t)$ berechnet.

In der Abbildung 5.7 sind die Beträge der Koeffizienten von $v(t)$ in Abhängigkeit von n für verschiedene u_{-2} angetragen.

Nun zum Konvergenzverhalten. Es ist klar, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \hat{L} \setminus L \quad \text{bzw.} \quad (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$$

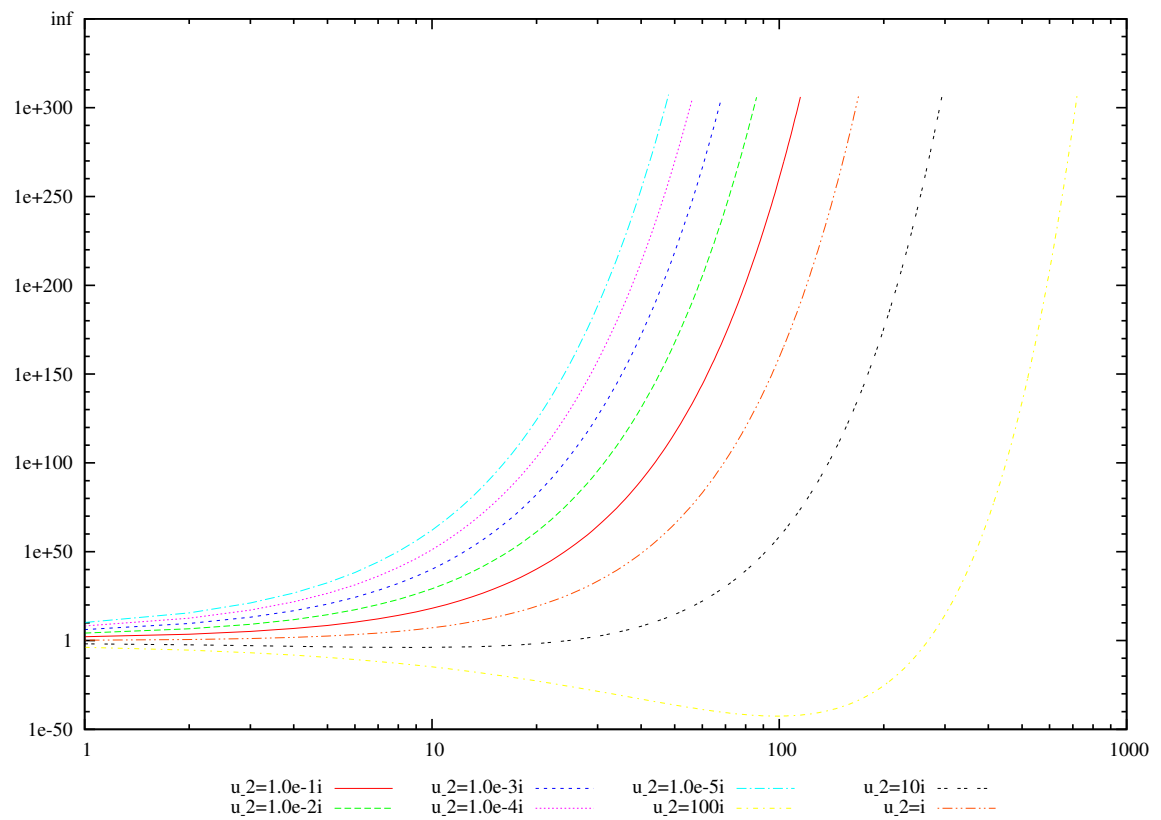


Abbildung 5.7: Die Beträge der v_n in Abhängigkeit von n für unterschiedliche u_{-2} .

gilt. Deshalb wollen wir die Potenzreihen v und u und im besonderen deren Konvergenzverhalten, noch genauer betrachten. Außerdem gilt, dass $v(t) \in \widehat{L} \setminus L \Leftrightarrow u(t) \in \widehat{L} \setminus L$. Wir betrachten die folgenden zwei klassischen Konvergenzkriterien.

Satz 5.7 (Wurzkriterium nach Cauchy). *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends konvergent.}$$

Beweis. siehe [Kno64, §18, Satz 94]. □

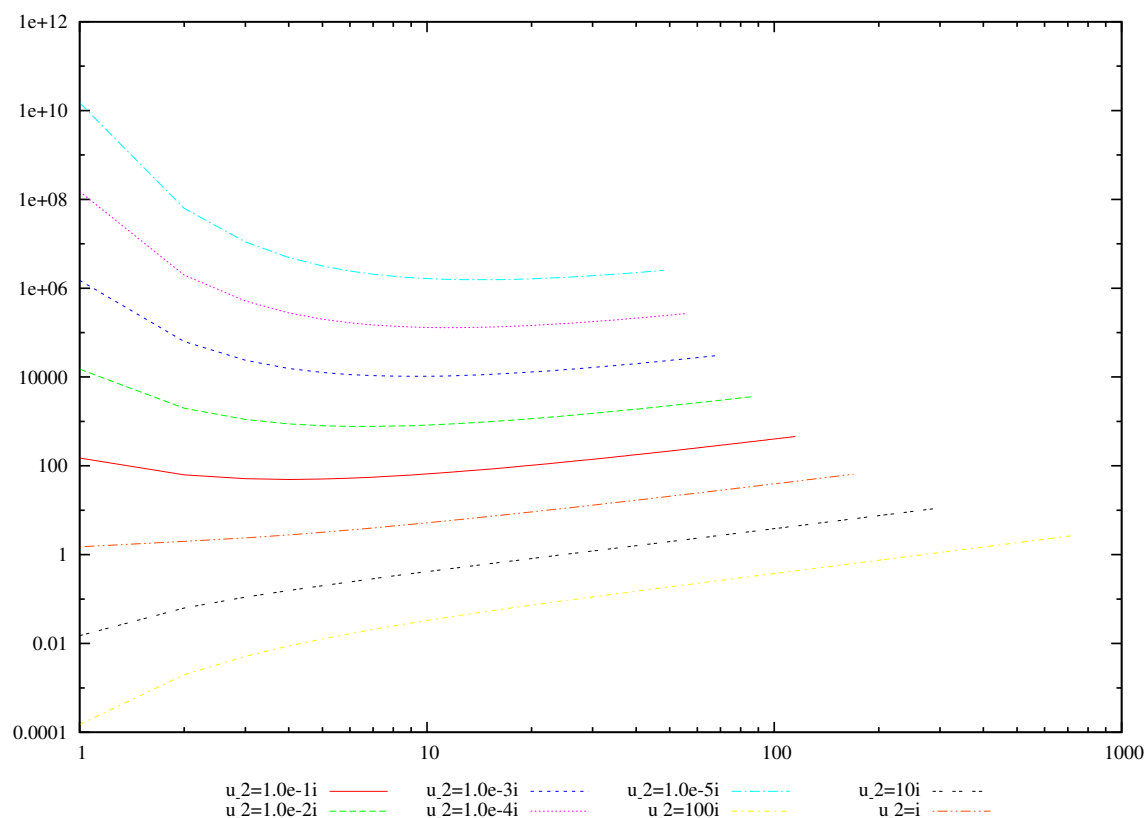


Abbildung 5.8: Wurzkriterium angewendet auf die Koeffizienten

Satz 5.8 (Quotientenkriterium). *Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends konvergent.}$$

Beweis. Es gilt, dass $\sum_n a_n x^n$ für ein $x \in \mathbb{C}$ konvergent ist, falls

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \leq \eta < 1$$

und das ist äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1.$$

Also konvergiert die Reihe für alle x mit $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

□

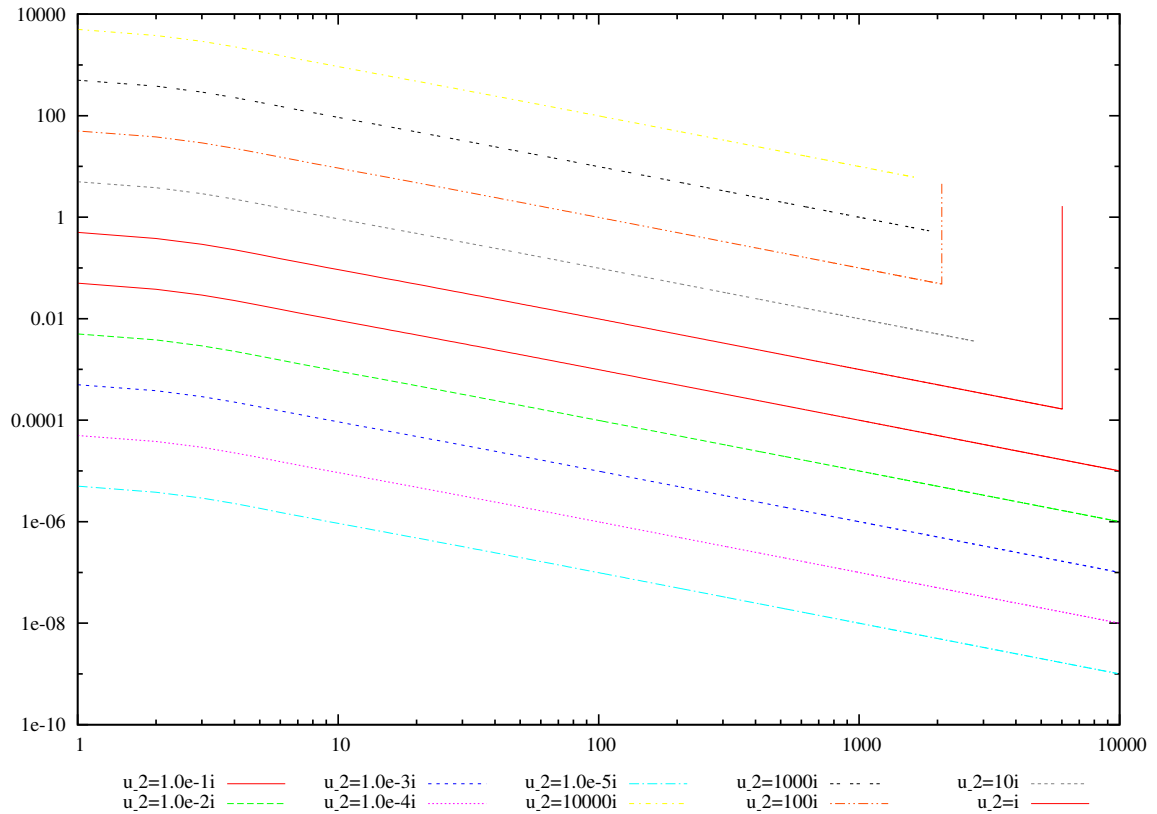


Abbildung 5.9: Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten

B Genaueres zu $(x^2 \partial_x)^k$

Nun wollen wir noch $(x^2 \partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$\begin{aligned}
 (x^2 \partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2}_{(2x + x^2 \partial_x)} \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= x^2 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2}_{(2x + x^2 \partial_x)} \partial_x + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2}_{(2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2)} \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x + x^4 (2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2) \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (4x^4 \partial_x + 2x^5 \partial_x^2 + 2x^5 \partial_x^2 + x^4 \partial_x + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
 \end{aligned}$$

Kommentar: Stirlingzahlen

also gilt für spezielle k

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

C Quelltexte

C.1 ComplRat.hs

Das Modul ComplRat implementiert die Zahlen $\mathbb{Q}(i)$.

Listing C.1: ComplRat.hs

```
1  -- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
2  -- Zahlen, also den Elementen von  $\mathbb{Q}(i)$ , bereit.
3  module ComplRat
4      ( ComplRat(..)
5        , realPart
6        , imagPart
7        , magnitude
8        , magnitudeSq
9        ) where
10 import Data.Ratio
11
12 -- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
13 -- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
14 data ComplRat = !Rational :+: !Rational
15     deriving (Eq)
16
17 -- -----
18 -- Funktionen
19
20 -- | Gibt den reellen Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
21 realPart :: ComplRat -> Rational
22 realPart (x :+: _) = x
23
24 -- | Gibt den imaginären Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
25 imagPart :: ComplRat -> Rational
26 imagPart (_ :+: y) = y
27
28 -- | Der nichtnegative Betrag einer complexen Zahl
29 -- nur für rein reelle oder complexe Zahlen, da es sonst, aufgrund der fehlenden
30 -- Wurzel, zu problemen kommt
31 magnitude :: ComplRat -> Rational
32 magnitude (x :+: 0) = abs x
33 magnitude (0 :+: y) = abs y
```

```
34 magnitude (_ :+: _) = error "Oops! Use magnitudeSq instead."
35 {-magnitude (x :+: y) = P.sqrt ( sqr x P.+ (sqr y) )-}
36 {-where sqr z = z P.* z-}
37
38 -- | Das Quadrat des Betrags einer complexen Zahl
39 -- ist für alle complexen zahlen geeignet
40 magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
41 magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y
42
43 -----
44 -- Instanzen von ComplRat
45
46 instance Show ComplRat where
47     show (x :+: y) | y == 0      = show x
48                       | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"
49
50 instance Num ComplRat where
51     (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
52     (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
53     negate (x :+: y)        = negate x :+: negate y
54     fromInteger i           = fromInteger i :+: 0
55     abs z                   = magnitude z :+: 0
56     signum (0:::0)          = 0
57     {-signum z@(x:::y)      = x P./ r :+: y P./ r where r = magnitude z-}
58
59 instance Fractional ComplRat where
60     fromRational r          = fromRational r :+: 0
61     (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/n) :+: ((b*c - (a*d))/n)
62     where n = c*c + d*d
```

Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die $a + ib$ entspricht.

C.2 Koeffs.hs

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von u_{-2} eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `ComplRat`. Dies ermöglicht es, dass die Berechnung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

Listing C.2: Koeffs.hs

```
1 -- | Dieses Modul stellt Funktionen bereit, welche die zu einem Startwert
2 -- gehörigen Koeffizienten von v(t) und u(t) generieren
3 module Koeffs
4   ( vKoeffs
5     , uKoeffs
```

```

6     ) where
7     import ComplRat
8     import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
9
10    -- returns array with the coefficients of v(t)
11    -- first element in array is koefficient from t^{-1}
12    vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
13    vKoeffs uMin2 = 1/2+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
14    where koeff :: Int -> ComplRat
15           koeff = memo koeff'
16           koeff' :: Int -> ComplRat
17           koeff' n | n > 0 = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
18                     | n == 0 = -3/(uMin2*4)
19                     | n == -1 = 1/2
20                     | otherwise = 0
21           where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
22
23    -- returns array with the coefficients of u(t)
24    -- first element in array is koefficient from t^{-2}
25    uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
26    uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2+:0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))

```

Beispielhaft kann man mit dem folgendem Programm die Koeffizienten von $v(t)$, zu $a = \frac{1}{8}$ also $u_{-2} = i = 2i\sqrt{2a}$, erzeugen lassen.

Listing C.3: testKoeffs.hs

```

1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4  import System.Environment
5
6  uMin2=(0+:1)
7
8  main :: IO()
9  main = do x <- getArgs
10         putStrLn $ "n\t| v_n\n-----+""++(replicate 70 '-')
11         main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x
12     where main' :: Int -> IO()
13           main' end = mapM_ addLine $ zip [-1..end] $ vKoeffs uMin2
14           where addLine (i,a) = putStrLn $ show i ++ "\t| " ++ show a

```

Ist der Code in einer Datei `/Pfad/zu/testKoeffs.hs` gespeichert, so lässt er sich in Unix-
Artigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen.

```

1 $ ghc --make /Pfad/zu/testKoeffs.hs
2 $ /Pfad/zu/testKoeffs 15

```

Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von v bis zum Index 15 und gibt in der Konsole das folgende aus

```

1  n      | v_n
2  -----+-----
3  -1     | 1 % 2
4  0      | (0 % 1+i3 % 4)
5  1      | 3 % 2
6  2      | (0 % 1+i(-63) % 16)
7  3      | (-27) % 2
8  4      | (0 % 1+i1899 % 32)
9  5      | 324 % 1
10 6      | (0 % 1+i(-543483) % 256)
11 7      | (-32427) % 2
12 8      | (0 % 1+i72251109 % 512)
13 9      | 2752623 % 2
14 10     | (0 % 1+i(-30413055339) % 2048)
15 11     | (-175490226) % 1
16 12     | (0 % 1+i9228545313147 % 4096)
17 13     | 31217145174 % 1
18 14     | (0 % 1+i(-30419533530730323) % 65536)
19 15     | (-14741904895227) % 2

```

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise ergibt sich daraus die folgende Tabelle:

n	v_n
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{4}i$
1	$\frac{3}{2}$
2	$-\frac{63}{16}i$
3	$-\frac{27}{2}$
4	$\frac{1899}{32}i$
5	$\frac{342}{1}$
6	$-\frac{543483}{256}i$
7	$-\frac{32427}{2}$
8	$\frac{72251109}{512}i$
9	$\frac{2752623}{2}$
10	$-\frac{30413055339}{2048}i$
11	$-\frac{175490226}{1}$
12	$\frac{9228545313147}{4096}i$
13	$\frac{31217145174}{1}$
14	$-\frac{30419533530730323}{65536}i$
15	$-\frac{14741904895227}{2}$

Tabelle C.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von $v(t)$ für $u_{-2} = i$ bzw. $a = \frac{1}{8}$

Kommentar:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \frac{1}{2}t^{-1} + \frac{3}{4}it^0 + \frac{3}{2}t^1 + \frac{-63}{16}it^2 + \frac{-27}{2}t^3 + \frac{1899}{32}it^4 + \frac{324}{1}t^5 + \frac{-543483}{256}it^6 + \\
 & \frac{-32427}{2}t^7 + \frac{72251109}{512}it^8 + \frac{2752623}{2}t^9 + \frac{-30413055339}{2048}it^{10} + \frac{-175490226}{1}t^{11} + \\
 & \frac{9228545313147}{4096}it^{12} + \frac{31217145174}{1}t^{13} + \frac{-30419533530730323}{65536}it^{14} + \\
 & \frac{-14741904895227}{2}t^{15} + \frac{16317191917079376129}{131072}it^{16} + \frac{4456057685561073}{2}t^{17} + \\
 & \frac{-22082325223708363779009}{524288}it^{18} + \frac{-1677161966915352627}{2}t^{19} + \\
 & \frac{18391039987731669876160557}{1048576}it^{20} + \frac{384452768592440499024}{1}t^{21} + \\
 & \frac{-73930258776609869550094166319}{8388608}it^{22} + \frac{-210878717949731493002826}{1}t^{23} + \\
 & \frac{88204980719873920964105544038937}{16777216}it^{24} + \frac{136346686011011135869054074}{1}t^{25} + \\
 & \frac{-246474684300724210330466557670749827}{67108864}it^{26} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-102614997677451303311734530276}{1} t^{27} + \\ & \frac{398608966820777951112056743321778108571}{134217728} i t^{28} + \\ & \frac{88929857099067937229443324337874}{1} t^{29} + \\ & \frac{-11819876688678190917510659802435441505814403}{4294967296} i t^{30} + \dots \end{aligned}$$

C.3 SaveToFile.hs

Listing C.4: SaveToFile.hs

```
1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4
5  import qualified Control.Monad.Parallel as P
6
7  import System.Environment
8  import System.IO
9  import Data.Time
10
11  main :: IO()
12  main = do x <- getArgs
13           P.sequence_ (main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
14  where
15      main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"      , (0+:1))
16                                   {-, ("./data/u_-2=10000i" , (0+:10000))-}
17                                   {-, ("./data/u_-2=1000i"   , (0+:1000))-}
18                                   {-, ("./data/u_-2=100i"    , (0+:100))-}
19                                   {-, ("./data/u_-2=10i"     , (0+:10))-}
20                                   {-, ("./data/u_-2=1.0e-1i"  , (0+:1.0e-1))-}
21                                   , ("./data/u_-2=1.0e-2i"  , (0+:1.0e-2))
22                                   {-, ("./data/u_-2=1.0e-3i"  , (0+:1.0e-3))-}
23                                   {-, ("./data/u_-2=1.0e-4i"  , (0+:1.0e-4))-}
24                                   {-, ("./data/u_-2=1.0e-5i"  , (0+:1.0e-5))-}
25                                   ]
26
27  saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
28  saveData end (fn, uMin2) =
29      do start <- getCurrentTime
30         withFile fn WriteMode (\handle -> do
31             hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
32         stop <- getCurrentTime
33         putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
```

```
34     where vals      = vKoeffs uMin2
35           triples = zip3 [0..] (tail vals) vals
36
37     genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
38     genLine (i,v1,v2) = concat [ show i                      , "\t"
39                                , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
40                                , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
41                                , genItemQuot (i,v1,v2)   , "\n" ]
42     where genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
43           genItemBetrag (_,v,_) = show $ fromRational $ magnitude v
44
45           genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
46           genItemCauchy (i,v,_) = show $ genItemCauchy'*(1/(fromIntegral i))
47           where genItemCauchy' = fromRational $ magnitude v
48
49           genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
50           genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
51           where genItemQuot' = magnitudeSq v2/magnitudeSq v1
```

Das folgende Script nutzt 7 Prozessoren, um mit `SaveToFile.hs` die ersten 10000 werte zu berechnen. Anschließend werden mittels `gnuplot` die Plots als PDF erzeugt.

Listing C.5: GeneratePlots.sh

```
1  #!/bin/sh
2  max=10000
3  ghc --make -threaded ./SaveToFile.hs
4  mkdir -p ./data
5  ./SaveToFile $max +RTS -N7
6  mkdir -p ./plot
7  art[2]="betrag"; art[3]="cauchy"; art[4]="quot";
8  for i in 2 3 4; do
9      name="${art[i]}"
10     echo $name
11     gnuplot << EOF
12     set samples 1001
13     set key below
14     set term push #TODO: unnötig?
15     set term post enh color lw 1 12 "Times-Roman"
16     set output "${name}.eps"
17     set log xy
18     plot for [fn in $(ls data/*)] fn every ::0::${max} using 1:${i}\
19         with lines title $(basename ".fn")
20 EOF
21     epstopdf "${name}.eps" --outfile "./plot/${name}.pdf"
22     rm "${name}.eps"
23 done
```

Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov, *D -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for d -modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer D -Moduln und Fouriertransformation*, 2010.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Hut07] Graham Hutton, *Programming in Haskell*, Cambridge University Press, January 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara, *D -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

- [Kno64] Konrad Knopp, *Theorie und anwendung der unendlichen reihen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1964.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.

Kommentar: TODO: Erklärung das das wirklich selbstgemacht ist