

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 10. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Mathematische Grundlagen	1
1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra	1
1.2 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}	3
1.2.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring	6
1.2.2 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D}	6
2 Der Meromorpher Zusammenhang	7
2.1 Definition	7
2.2 Eigenschaften	8
2.3 Newton Polygon	10
2.4 pull-back und push-forward	11
2.5 Elementare Meromorphe Zusammenhänge	16
3 Levelt-Turittin-Theorem	17
3.1 Klassische Definition	17
3.2 Sabbah's Refined version	18
4 Beispiele/Anwendung	22
4.1 Einfache Beispiele	22
4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zerfällt	23
4.2.1 beispiel von sabbah	23
Anhang	24
A Aufteilung von ...	25

Einleitung

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

Wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$.

Es bezeichnet der Hut (^) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 1.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit , $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

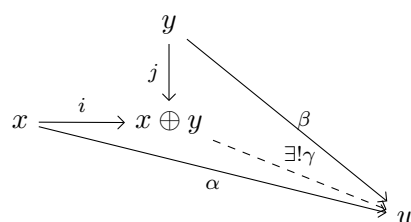
Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Firation, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] \mid v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ ist ein Unterring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.

ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

Definition 1.2 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 1.3 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\
 & & T
 \end{array}$$

1.2 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator* f :

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.4 (Weyl Algebra). Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra \mathcal{D} von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x] < \partial_x >$) verwenden.

Lemma 1.5. Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, so definieren die Addition

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

eine Ringstruktur auf A .

Beweis. [AV09, Kapitel 2 Section 1]

□

Bemerkung 1.6. $A_1(\mathbb{C})$, \mathcal{D} und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Definition 1.7 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

der *Kommutator von a und b* genannt.

Proposition 1.8. 1. Es gilt

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, so gilt:

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Denn für $g \in \mathbb{C}[x]$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis. [AV09] □

Proposition 1.9. Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.

Beweis. [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Definition 1.10. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.11. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

isomorph als grad. Ringe

also

$$gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N.$$

Beweis. TODO

Treffen?

□

1.2.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A \langle \partial_x \rangle$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A \langle \partial_x \rangle)$ bezeichnen werden. Sei P ein bzgl. 1.9 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k . So definiere den Grad $\deg P$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle / F_{k-1} \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.2.2 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D}

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [\[Sab90\]](#)

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vr
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$

erfüllen soll.

Definition 2.2 (Meromorpher Zusammenhang über k). Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang über k* (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_k, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_k , ein endlich dimensionaler k -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M}_k$, genannt *Derivation*, welche für alle $f \in k$ und $u \in \mathcal{M}_k$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.2}$$

erfüllen soll.

Falls $k = K$ reden wir von einem *Meromorphen Zusammenhang* und falls $k = \hat{K}$ reden wir von einem *formalen Meromorphen Zusammenhang*.

Bemerkung 2.3. Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, so erhalte einen formalen Meromorphen Zusammenhang durch

$$\mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{M}_K \otimes_{\hat{K}} \hat{K}.$$

Bemerkung 2.4. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

Definition 2.5. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}((u))$. Wir schreiben \mathcal{E}^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((u))$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_u} 1 = \partial_u 1 = \varphi'$.

Also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathbb{C}((u)) \xrightarrow{\partial_u} \mathbb{C}((u)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(u) \\ f(u) &\mapsto f'(u) + f(u)\varphi'(u) \end{aligned}$$

Bemerkung 2.6. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

[Sab90, 4.2] Let \mathcal{M} be a left \mathcal{D} -module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 2.7 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_t m, \dots, \partial_t^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8]

□

Satz 2.8. [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein \mathcal{D} -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 2.9. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Lemma 2.10. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \partial \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \partial \varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.11. Sei $\mathcal{M}_K \cong K^r$ ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

□

Korollar 2.12. *Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.*

Definition 2.13 (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & \swarrow \cong \varphi & \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \psi & \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r \\
 \cong T \uparrow & & & & \uparrow T \cong \\
 & & & &
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.14 (differenziell Äquivalent). Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

$$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$$

$$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$$

TODO: Ab hier formal???

2.3 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben und betrachte das dazugehörige

$$H := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \{(k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

bei sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe hülle davon in \mathbb{R}^2

Definition 2.15. Das Randpolygon von $\text{conv}(H)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 2.16. Die *Steigungen* (engl. *slopes*) sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \text{slopes } P = \{0\}$, sonst *irregulär singulär*.

alternativ: $:\Leftrightarrow$ wenn $\text{conv}(H)$ ein Quadrant ist

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu \mathcal{M}_K gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang \mathcal{M}_K heißt regulär singulär, falls $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mit P regulär singulär, sonst irregulär singulär

alternativ $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \{0\}$

Lemma 2.17. [Sab90, 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

2.4 pull-back und push-forward

[HTT07, 1.3]

Nach [Sab07, 1.a]. Sei $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei \mathcal{M} ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.18 (pull-back). [Sab07, 1.a] Der *pull-back* $\rho^+\mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^*\mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$.

Beispiel 2.19. Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

und gehe von τ über zu t via $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2 \partial_t)$?

$$\begin{aligned} \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t \end{aligned}$$

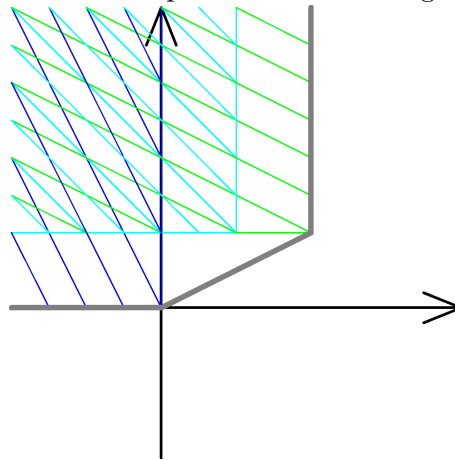
- was passiert mit $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1 \\ &= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t(t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t(\partial_t(t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t(t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1 =: P \end{aligned}$$

Wir wollen den zu $P = t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1$ assoziierten Meromorphen Zusammenhang betrachten:

$$P = t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1$$

mit $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$



Wir wollen ganzzahlige slopes haben, also wende den pull-back $\rho : t \rightarrow u^2$, welcher alle slopes mit 2 Multipliziert, an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen:

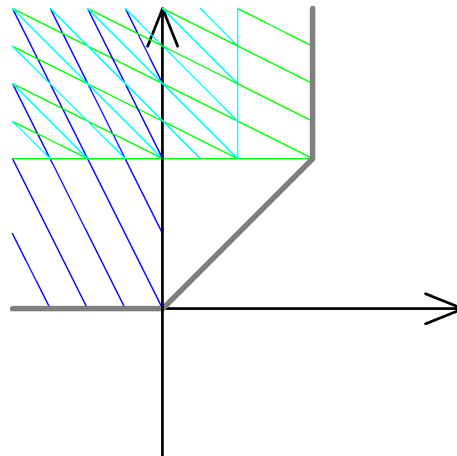
$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{1}{\rho'} \partial_u = \frac{1}{2u} \partial_u \\ \partial_t^2 &= \left(\frac{1}{2u} \partial_u \right)^2 \\ &= \frac{1}{2u} \left(-\frac{1}{2u^2} \partial_u + \frac{1}{2u} \partial_u^2 \right) \\ &= \frac{1}{4u^2} \partial_u^2 - \frac{1}{4u^3} \partial_u \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \rho^+ P &= u^6 \left(\frac{1}{4u^2} \partial_u^2 - \frac{1}{4u^3} \partial_u \right) - 4u^4 \frac{1}{2u} \partial_u - 1 \\ &= \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - u^3 \frac{1}{4u^3} \partial_u - 4u^3 \frac{1}{2} \partial_u - 1 \\ &= \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - 2 \frac{1}{4} u^3 \partial_u - 1 \end{aligned}$$

$$\rho^+ P = \frac{1}{4}u^4 \partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3 \partial_u - 1$$

mit $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{1\}$



wie sieht die wirkung vom pull-back zusammenhang aus?

$$\partial_t(f(t))m = \dots = \rho'(u)^{-1} \partial_u f(t)m$$

Sei \mathcal{N} ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

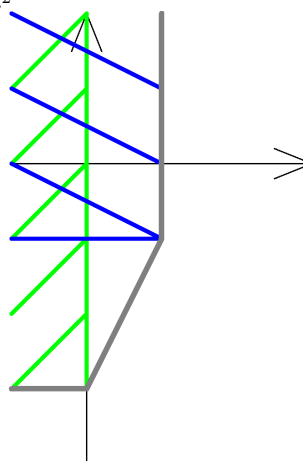
Definition 2.20 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* $\rho_+ \mathcal{N}$ ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist der \mathbb{C} -Vektor Raum \mathcal{N} mit der $\mathbb{C}((t))$ -Vektor Raum Struktur durch
 $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- die Wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^{-1} \partial_u$

Beispiel 2.21 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_t \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \frac{2}{u^3}) \end{aligned}$$

also $P = \partial_u + \frac{2}{u^3}$ mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$



mache nun einen push-forward mittels ρ :

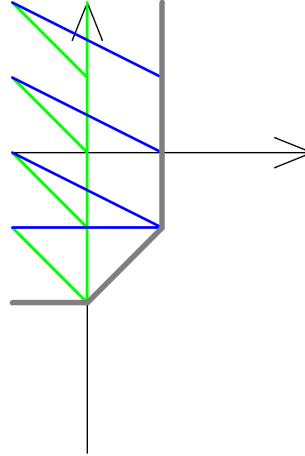
$$\begin{aligned} (\partial_u + \frac{2}{u^3}) &= 2u(\frac{1}{2u} \partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u) \partial_u + \frac{1}{u^4}) \end{aligned}$$

$$= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

Also ist

$$\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}} / \hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

also $\rho_* P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ mit $\text{slopes}(P) = \{1\}$



Satz 2.22. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) \cong \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}. \quad (2.3)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &= \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \end{aligned}$$

□

Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

2.5 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.23 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

3 Levelt-Turittin-Theorem

Quellen:

sabbah_cimpa90 seite 28 / 30

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten. Alle bisher getroffenen Aussagen gelten für diese aber analog.

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}}/\mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 3.1. *Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$ und $N(P_2) \subset N_2$
- A ist eine kante von ...

3.1 Klassische Definition

Satz 3.2. [[Sab90](#), Thm 5.3.1] Sei $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}) = \{L^{(1)}, \dots, L^{(r)}\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Aufteilung $\mathcal{M}_{\hat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}$ in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\hat{K}}^{(i)}) = \{L^{(i)}\}$.

Beweis. [[Sab90](#), Thm 5.3.1]

□

3.2 Sabbah's Refined version

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 3.3. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$. Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ [2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \end{aligned}$$

[1] $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u) e \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
 \end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u \partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
 u \partial_u \mathbf{e} &= (u \partial_u e_0, \dots, u \partial_u e_{p-1}) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
 &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
 \end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$ [3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in GL_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
 T\left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j\right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j\right] \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j\right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} \quad [4] \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

Proposition 3.4. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, $\rho : u \mapsto t = u^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ ([Sab07, Rem 2.8]), und L ist ein Rang 1 $\mathbb{C}((u))$ -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

Satz 3.5 (Refined Turritin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R)$, so dass jedes $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind

Beweis. [Sab07, Cor 3.3]

□

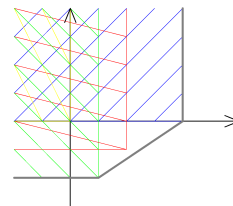
4 Beispiele/Anwendung

4.1 Einfache Beispiele

Hier soll ein einfaches Beispiel hergeleitet werden, an dem die Zerlegung nach dem Levelt-Turittin-Theorem einmal explizit ausformuliert werden soll.

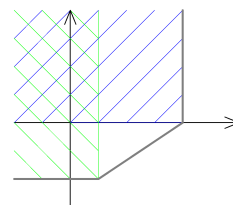
Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



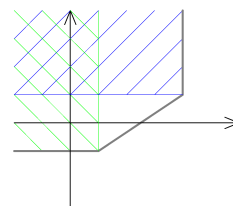
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit t und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [Sab90, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$



und es gilt $\text{slopes}(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$. Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich $\rho : t \mapsto u^3$ für den Pullback an.

Dieser Pullback Multipliziert (indirekt) die Slopes mit 3, **Quelle?**
aber wie wendet man ihn (explizit) an?

$$\rho^+ P = ???$$

welches die Slopes $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$ hat. Schreibe nun dieses $\rho^+ P = Q \cdot R$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[[u]]$ wobei gilt $\text{slopes}(Q) = \{0\}$ und $\text{slopes}(R) = \{2\}$.

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zerfällt

4.2.1 beispiel von sabbah

Sei $P = t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2}$

1. zeige $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ ist ein Meromorpher Zusammenhang.
2. Zeichne das Newton Polygon von P und finde eine formale Aufteilung von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$.
3. Zeige \mathcal{M} kann nicht in eine direkte Summe von zwei \mathcal{D} modulen zerlegt werden, dazu:

a) Zeige das die Produktzerlegung

$$P = (t(t\partial_t) + v(t)) \cdot (t\partial_t + u(t)),$$

mit $u, v \in \mathbb{C}[[u]]$, existiert.

b) Berechne durch Induktion die Koeffizienten von u .

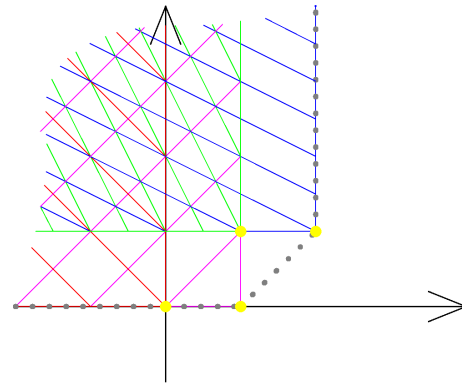
c) Zeige dass $u \notin \mathbb{C}((u))$.

Schritt 1

Zeige das $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ einen Meromorphen Zusammenhang Definiert.

Schritt 2

$$\begin{aligned}
 P &= t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2} \\
 &= tt(\partial_t t)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\
 &= t^2(t\partial_t + 1)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\
 &= t^3\partial_t^2 + (t^2 + t)\partial_t + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



Also mit slopes $P = \{0, 1\}$

Schritt 3 a)

Schritt 3 b)

Schritt 3 c)

Literaturverzeichnis

- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.