Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turrittin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

Inhaltsverzeichnis

0 Mathematische Grundlagen

Wir betrachten $\mathbb{C}$ hier als Complexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$ ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}(\!(x)\!) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit $\tilde{K}$ bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inclulsionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[\![x]\!]$ und $K \subsetneq \widehat{K}$ gelten.

Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$$^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m Dimensionalen Matritzen mit Einträgen in k.

Definition 0.1 (Direkte Summe)**.** [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
 & & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 0.2 (Tensorprodukt)**.** [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Für eine Abbildung $f : M \to M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_N \otimes f : \quad N \otimes_R M &\to N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

Bemerkung 0.3. Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \tag{0.1}$$

$$M \otimes_R R \cong M \tag{0.2}$$

Sei $f : M' \to M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M/\operatorname{im}(f)) \cong N \otimes_R M/\operatorname{im}(\mathrm{id}_R \otimes f) \tag{0.3}$$

Definition 0.4 (Exacte Sequenz)**.** Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.5 (Kurze exacte Sequenz)**.** Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 0.6 (Kokern)**.** Ist $f : M' \to M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\operatorname{coker}(f) = M/\operatorname{im}(f)$.

Proposition 0.7. *Ist $f : M' \to M$ eine injektive Abbildung, so ist*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') & \longrightarrow & 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \mod f(M') & & \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz und $M/f(M') = \operatorname{coker}(f)$ ist der Kokern *von f.*

Beweis. □

Definition 0.8 (Filtrierung)**.** [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_iA)_{i\in\mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unterring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_iA/F_{k-1}A$ und damit das zu A mit Filtrierung F *assoziierte graduierte Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} gr_i^F A\,.$$

Definition 0.9. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als k immer ein Element aus $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \widehat{K}\}$ betrachten.

Definition 1.1 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 1.2. *Sei* $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[\![x]\!], K, \widehat{K}\}$. *Sei* $\partial_x : k \to k$ *der gewohnte Ableitungsoperator nach* x, *so gilt*

1. $[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$
2. *für* $f \in k$ *ist*
$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$
3. *Es gelten die Formeln*
$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \tag{1.1}$$
$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \tag{1.2}$$
$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i\geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i} \tag{1.3}$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist
$$[\partial_x, f]\cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□

1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.4}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g\,.$$

Definition 1.3. Definiere nun den Ring $\mathcal{D}_k$ als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.4). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$ falls $k = \mathbb{C}[\![x]\!]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) < \partial_x >$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}(\!(x)\!) < \partial_x >$ falls $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ [1].

Bemerkung 1.4.
- Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$
- Offensichtlich erhält $\mathcal{D}_k$ in kanonischer weiße eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapittel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- $\mathcal{D}_k$ ist offensichtlich nichtkommutativ.

Proposition 1.5. *[Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in $\mathcal{D}_k$ kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.*

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

Definition 1.6. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad (oder den ∂_x-Grad)* von P.

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

[1] Wird mit $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$ bezeichnet, in [AV09].

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.7. *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} \underbrace{:= \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] =}_{\substack{\cong \\ \text{isomorph als grad. Ringe}}} \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

also $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ *als graduierte Ringe.*

Beweis. TODO □

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-Dimensionale complexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Ein *(holomorpher) differenzial Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x)\partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzten $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung m, falls $\forall n \geq m : \alpha_n(x) \equiv 0$.

Definition 1.8. Mit $\mathcal{D}_X$ bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf X.

Die Garbe $\mathcal{D}_X$ hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und $\mathcal{O}_X$ ist ein Unterring von $\mathcal{D}_X$. Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über über X. Es gilt, dass Θ_X in $\mathcal{D}_X$ enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links $\mathcal{O}_X$-Untermodul, aber kein rechts $\mathcal{O}_X$-Untermodul ist.

Proposition 1.9. *[Ark12, Exmp 1.1] Sei* $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ *und* $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$. *Wobei* ∂_x *als* $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$ *wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren*

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \qquad \text{mit} \qquad \partial_x x - x\partial_x = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

1.2 (Links) $\mathcal{D}$-Moduln

Da $\mathcal{D}$ ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links unr rechts $\mathcal{D}$-Moduln unterschiden. Wenn ich im folgendem von $\mathcal{D}$-Moduln rede, werde ich mich immer auf links $\mathcal{D}$-Moduln beziehen.

Beispiel 1.10 (links $\mathcal{D}$-Moduln)**.** [Ark12, Exmp 2.2]

1. $\mathcal{D}$ ist ein links und rechts $\mathcal{D}$-Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ jeweils durch $x \cdot x^m = x^{m+1}$ und $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergurnd, ein Symbol $\exp(\lambda x)$ ein, mit $\partial(f(x)\exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x}\exp(\lambda x) + f\lambda\exp(\lambda x)$. So ist $\mathcal{M} = \mathscr{O}_X \exp(\lambda x)$ ein $\mathcal{D}$-Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das $\mathcal{D}$-Modul $\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über $\mathcal{D}$ erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x]\log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\partial_x x \partial_x)\,.$$

1.2.1 Holonome $\mathcal{D}$-Moduln

Definition 1.11. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei $\mathcal{M}$ lineares Differentialsystem (linear differential system) . Man sagt, $\mathcal{M}$ ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\operatorname{Car}\mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.12. *[Sab90, Lem 3.3.8.] Ein $\mathcal{D}$-Modul ist holonom genau dann, wenn* $\dim_{gr^F\mathcal{D},0} gr^F\mathcal{M} = 1$.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

Alternative Definition A

Definition 1.13 (Holonome $\mathcal{D}$-Moduln)**.** [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich genertierter $\mathcal{D}$-Modul $\mathcal{M}$ ist *holonom*, falls $\mathcal{M} = 0$ gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

Bemerkung 1.14. [Cou95, Chap 10 §1] Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Links-Ideal von $\mathcal{D}$. Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$. Falls $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$, dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$. Somit ist $\mathcal{D}/\mathfrak{a}$ ein holonomes $\mathcal{D}$-Modul.

Bemerkung 1.15. [Cou95, Prop 10.1.1]

- Submoduln und Quotienten von holonomen $\mathcal{D}$-Moduln sind holonom.
- Endliche Summen von holonomen $\mathcal{D}$-Moduln sind holonom.

Alternative Definition B

Definition 1.16. Ein lokalisiertes $\mathcal{D}$-Modul $\mathcal{M}$ heißt *holonom*, falls es ein $\mathfrak{a} \lhd \mathcal{D}$ gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{D}/\mathfrak{a}\,.$$

Bemerkung 1.17. In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die Carakteristische Varietät.

1.3 Lokalisierung eines $\mathcal{D}$-Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}$-Modul. Betrachte $\mathcal{M}$ als $\mathbb{C}\{x\}$-Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von $\mathcal{M}$.

Proposition 1.18. *[Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ erhält in natürlicher Weise eine $\mathcal{D}$-Modul Struktur.*

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

$\square$

Korollar 1.19. *[Sab90, Cor 4.2.8.] Sei $\mathcal{M}$ ein holonomes Modul. Dann ist die lokalisierung von $\mathcal{M}$ isomorph zu $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ für ein $P \in \mathcal{D}/\{0\}$*

2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{D}$-Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit x bijektiv ist, so nennen wir $\mathcal{M}$ einen Meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \tag{2.1}$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \ldots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Alternativer Zugang

[Sab90, 3.1.1] Sei $\mathcal{F}$ ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren $\mathcal{D}$ wirken. Ein Element $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von $P \in \mathcal{D}$ falls $P \cdot u = 0$ gilt.

Falls u ein Lösung von P ist, so ist u auch Lösung von $Q \cdot P$ mit $Q \in \mathcal{D}$. Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal $\mathcal{D} \cdot P \lhd \mathcal{D}$ ab.

2.1.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses Klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tuppel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vektor Raum

- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.2}$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.2 (Formaler Meromorpher Zusammenhang)*.* Analog definiert man einen *formalen Meromorphen Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$ bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, ein endlich dimensionaler $\widehat{K}$-Vektor Raum
- einer $\mathbb{C}$-linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \to \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

Definition 2.3. Seien $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine K-lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$.

Definition 2.4. Wir erhalten damit die Kategorie dier meromorphen Zusammenhänge über $\widehat{K}$ mit

Objekte: ()

Bemerkung 2.5. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u\,,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.6 (Zusammenhangsmatrix)**.** [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine K-Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ von $\mathcal{M}$. Dann ist die *Zusammenhangsmatrix bzgl. der Basis* $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j\,.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\partial(u) = \partial\Big(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\Big) \overset{\overset{??}{\downarrow}}{=} \sum_{i=1}^n \Big(u_i'(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\Big)e_i\,.$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \ldots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammanhang $(\mathcal{M}, \partial)$ ausgestattet mit einer K-Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ von $\mathcal{M}$ zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten Meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^{n} K e_i\,, \qquad \partial_A e_i := -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) e_i\,.$$

2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$-Moduln

Lemma 2.7 (Lemma vom zyklischen Vektor)**.** *[Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_x m, \ldots, \partial_x^{d-1} m$ eine K-Basis von $\mathcal{M}_K$ ist.*

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 2.8. *[Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes $\mathcal{D}_K$-Modul und andersherum.*

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma/Definition 2.9. *[AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$. So ein P heißt dann* Minimalpolynom *von $\mathcal{M}_K$.*

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Satz 2.10. *[AV09, Seite 64] Ist $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ so gilt*

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2\,.$$

Beweis. [AV09, Seite 57-64] □

Korollar 2.11. *Sei $P = P_1 \cdot P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$ wie in Satz 2.10 so gilt*

$$\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\
&\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \\
&= \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P_1 \\
&\cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.12. *Sei* $(\mathcal{M}_K, \partial)$ *ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und* φ *ein Basisisomorphismus von* K^r *nach* $\mathcal{M}_K$*, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\ K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ\partial\circ\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"'] \end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ *ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.*

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.13. *Sei* $\mathcal{M}_K$ *ein endlich dimensionaler* K*-Vektor Raum mit* ∂_1 *und* ∂_2 *zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die differenz zweier Derivationen ist* K*-linear.*

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{M}_K$. Da ∂_1 und ∂_2 $\mathbb{C}$-linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ $\forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)\end{aligned}$$

□

Korollar 2.14. *Für* (K^r, ∂) *ein Meromorpher Zusammenhang existiert ein* $A \in M(r \times r, K)$*, so dass* $\partial = \frac{d}{dx} - A$*.*

Beweis. Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also lässt sich durch eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ darstellen , also ist, wie behauptet, $\partial = \frac{d}{dx} - A$. □

Proposition 2.15 (Transformationsformel)**.** *[HTT07, Chap 5.1.1] In der Situation*

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+A"] \arrow[dr, "\varphi", "\cong"'] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi"', "\cong"] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi", "\cong"'] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz}+B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$ und $(\frac{d}{dx} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Meromorphe Zusammenhang. $\frac{d}{dx} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

Definition 2.16 (Differenziell Äquivalent)**.** Man nennt A und B *differenziell Äquivalent* ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

Proposition 2.17. *[Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzten von*

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K-Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem Meromorphen Zusammenhang.

Beweis. Klar □

Lemma 2.18. *[Sab90, Ex 5.3.7] Falls $\mathcal{N}$ regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ genau die Menge der Slopes von $\mathcal{M}$.*

Beweis. TODO □

2.3 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, also insbesondere auch jedes $P \in \mathcal{D}_K$, lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\partial_x^k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl}x^l)\partial_x^k$$

mit $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) := & \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \Big((m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \Big) \subset \mathbb{R}^2 \\ = & \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \Big((m, deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \Big) \subset \mathbb{R}^2 . \end{aligned}$$

Definition 2.19. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\operatorname{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Bemerkung 2.20. Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weiße. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x)(x\partial_x)^k$$

mit $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexe Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \Big((m, deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Definition 2.21. Die Menge $\operatorname{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ für die Menge der zu $\mathcal{M}$ gehörigen slopes.
- P heißt *regulär* oder *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \operatorname{slopes}(P) = \{0\}$ oder $\deg P = 0$, sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ (bzw. $\mathcal{M}_K$) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ (bzw. $P \in \mathcal{D}_K$) gibt, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ (bzw. $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$).

Beispiel 2.22.
1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = x^1\partial_x^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

   $$m = 2 \qquad\qquad l = 1$$

   so dass

   $$H(P_1) = \Big((2, 1-2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 2, v \geq -1\} .$$

   In Abbildung 2.1 ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\operatorname{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$ so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$ ist.

Bemerkung 2.23. [AV09, Bem 5.4] Für alle $f \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$ gilt allgemein, dass das zu $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von $f \cdot P$ übereinstimmt.

Beweis. TODO $\square$

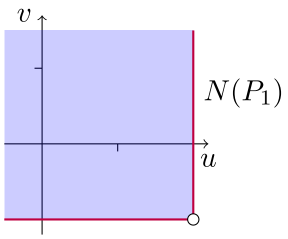

Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$

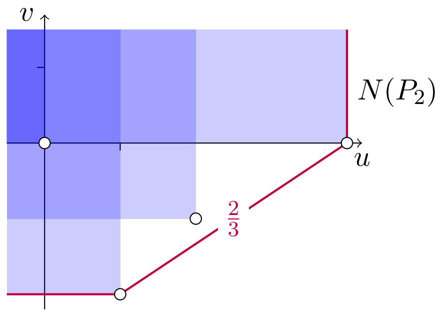

Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu P_2

Damit Lässt sich das Newton Polygon, durch ein f, immer so verschieben, dass $(0,0) \in N(f \cdot P)$, und es gilt, dass

$$\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \lhd \mathcal{D}_K$$

ist.

Lemma 2.24. *[Sab90, Seite 26] Das Newton-Polygon hängt, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten Meromorphen Zusammenhang ab.*

Lemma 2.25. *[Sab90, 5.1]*

1. *$\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$*

2. *Wenn man eine exacte Sequenz $0 \to \mathcal{M}'_K \to \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}''_K \to 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.*

Satz 2.26. *[Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge seiner slopes. Es exisitiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung*

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

Beispiel 2.27. [Sab90, Ex 5.3.6] Sei $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$. So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

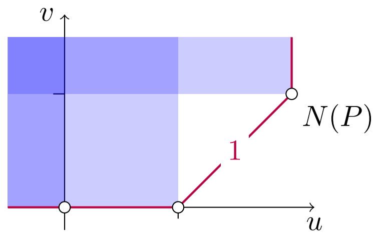

Abbildung 2.3: Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$

mit den Slopes $\mathcal{P}(P) = \{0, 1\} =: \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Nach dem Satz 2.26 existiert eine Zerlegung $P = P_1 \cdot P_2$ mit $\mathcal{P}(P_1) = \{\Lambda_1\}$ und $\mathcal{P}(P_2) = \{\Lambda_2\}$. Durch scharfes hinsehen erkennt man, dass

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &\dots \\ &= (x(x\partial_x) + \dots) \cdot (x\partial_x + \dots) \\ &\dots \\ &= P_1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

Korollar 2.28. *[Sab90, Cor 5.2.6] Falls $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein regulärer formaler Meromorpher Zusammenhang ist, dann ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen Zusammenhängen. Wobei die elementaren formalen Zusammenhänge die sind, die zu passendem $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$ isomorph sind.*

2.3.1 Die Filtrierung ${}^L V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das L-Symbol

Sei $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ vollständig gekürtzt, also mit λ_0 und λ_1 in $\mathbb{N}$ relativ prim Definiere die Linearform $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ in zwei Variablen, Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. Falls $P = x^a \partial_x^b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathrm{ord}_L(P) = L(b, b - a)$$

und falls $P = \sum_{i=0}^d b_i(x)\partial_x^i$ mit $b_i \in \widehat{K}$ setzen wir

$$\mathrm{ord}_L(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} L(i, i - v(b_i))\,.$$

Definition 2.29 (Die Filtrierung ${}^L V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$)**.** [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration ${}^L V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welche mit $\mathbb{Z}$ indiziert ist, durch

$${}^L V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \mathrm{ord}_L(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

Bemerkung 2.30. Man hat $\mathrm{ord}_L(PQ) = \mathrm{ord}_L(P) + \mathrm{ord}_L(Q)$ und falls $\lambda_0 \neq 0$ hat man auch, dass $\mathrm{ord}_L([P, Q]) \leq \mathrm{ord}_L(P) + \mathrm{ord}_L(Q) - 1$.

Definition 2.31 (L-Symbol)**.** [Sab90, Seite 25] Falls $\lambda_0 \neq 0$ ist der graduierte Ring $gr^{LV}\mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}} gr_\lambda^{LV}\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von ∂_x in dem Ring durch ξ, dann ist der Ring isomorph zu $\widehat{K}[\xi]$. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, so ist $\sigma_L(P)$ definiert als die Klasse von P in $gr^{LV}_{\mathrm{ord}_L(P)}\mathcal{D}_{\widehat{K}}$. σ_L wir hierbei als das L-Symbol Bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\sigma_L(x^a\partial_x^b) = x^a\xi^b$.

Bemerkung 2.32. Ist $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ geschrieben als $P = \sum_i\sum_j \alpha_{ij}x^j\partial_x^i$. So erhält man $\sigma_L(P)$ durch die Setzung

$$\sigma_L(P) = \sum_{\{(i,j)|L(i,i-j)=\mathrm{ord}_L(P)\}} \alpha_{ij}x^j\xi^i\,.$$

Beweis. □

Definition 2.33 (Stützfunktion)**.** Die Funktion

$$\omega_P : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u.v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als alternative zu dieser Ordnung verwendet.

Bemerkung 2.34. Wenn $L(x_0, s_1)$ wie oben aus Λ entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = ord_L(P)\,.$$

2.4 Formale Struktur regulärer Zusammenhänge

[Sab90, Chap 5.2] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein regulärer formaler Meromorpher Zusammenhang.

Lemma 2.35. *[Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über $\widehat{K}$ mit der Eigenschaften, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[\![x]\!]$ hat.*

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \ldots, \partial_x^{d-1}m$ (siehe Lemma 2.7). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1}(-b_i(x))\partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \widehat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x)\partial_x^i m = 0$.

Tatsächlich werden wir $b_i(x) = x^i b_i'(x)$ mit $b_i' \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x\partial_x m, \ldots, (x\partial_x)^{d-1}m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x\partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[\![x]\!]$. □

Lemma 2.36. *[Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über $\widehat{K}$ so dass die Matrix zu $x\partial_x$ konstant ist.*

Beweis. TODO □

2.5 pull-back und push-forward

Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3]. Sei

$$\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \qquad\qquad \in t\mathbb{C}[\![t]\!]$$

mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir immer $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \qquad \text{bzw.} \qquad \rho^* : \mathbb{C}[\![x]\!] \hookrightarrow \mathbb{C}[\![t]\!], f \mapsto f \circ \rho$$

analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \qquad \text{bzw.} \qquad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}(\!(t)\!), f \mapsto f \circ \rho$$

wobei L (bzw. $\widehat{L}$) eine enldiche Körpererweiterung von K (bzw. $\widehat{K}$) ist. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 2.37 (pull-back)**.** [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *Inverses Bild* $\rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}(\!(t)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(x)\!)} \mathcal{M}_{\mathbb{C}(\!(x)\!)}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m\,. \tag{2.3}$$

Für ein allgemeines $\varphi \otimes m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \otimes m\,. \tag{2.4}$$

Wie sieht die Wirkung der Derivation auf dem pull-back Zusammenhang aus? Betrachte ein Element der Form $f(t)m = f(\rho(u))m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m)\\ &= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u))\underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t} m = (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u(f(u^p)m)\\ &= f'(u^p)m + f(u^p)\frac{1}{pu^{p-1}}\partial_u m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$ und somit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von ∂_t gleich der Wirkung von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$ ist. In der Tat stimmt diese Vermutung, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.38. *In der Situation von Lemma 2.37, mit* $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ *für ein* $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$*, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} \Big/ \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)\,.$$

Für den Beweis von Lemma 2.38 werden zunächst zwei kleine Lemmata bewiesen.

Lemma 2.39. *Es gilt* $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ *mittels*

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\quad\cong\quad} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes m(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

Beweis. □

Lemma 2.40. *Sei* $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$*. In der Situation*

$$\begin{tikzcd} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \_ \cdot P(t, \partial_t)"] \arrow[d, mapsto, "\cong \Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[d, mapsto, "\cong \Phi"] \\ \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{tikzcd}$$

mit Φ *wie in Lemma 2.39 macht* $\alpha := \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ *das Diagram kommutativ.*

Beweis. TODO □

zu Lemma 2.38. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \overset{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} & \longrightarrow 0 \\ & u & \longmapsto & u \cdot P & & & \\ & & & u & \longmapsto & u \mod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P & \end{array}$$

ist **exact**, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} \Big/ \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \operatorname{coker}(\_ \cdot P)$. Weil $\widehat{K}$ **flach** ist, da Körper, ist auch, nach anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \_$, die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes _ \cdot P"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} &
\end{tikzcd}$$

exact. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} &\cong \operatorname{coker}(\mathrm{id} \otimes _ \cdot P) && \text{(weil exact)} \\
&\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \Big/ \Big((\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\mathrm{id} \otimes _ \cdot P) \Big) && \text{(nach def. von coker)}
\end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 2.39 und $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ nach Lemma 2.40 ergibt sich

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes _ \cdot P"] \arrow[d, dashed, "\cong \Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong \Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "_ \cdot Q"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & &
\end{tikzcd}$$

als kommutatives Diagram. Nun, weil $\_ \cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes _ \cdot P"] \arrow[d, dashed, "\cong \Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}"] \arrow[d, dashed, "\cong \Phi"] & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "_ \cdot Q"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \arrow[r, "\pi_{\widehat{L}}"] & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \Big/ \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und damit folgt die Behauptung.

$\square$

Lemma 2.41. *[Sab90, 5.4.3] Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ mit $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$, dann ist $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ mit

$$\begin{aligned}
P'(t, \partial_t) &= P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
&= \sum a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i \\
&= \sum a_i(t^p) ((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 2.42 (pull-back)**.** Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes zu erhalten. Es gilt slopes$(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.4) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back mit $\rho : t \to x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 2.38 einfacher anwenden können.

$$\begin{aligned}
\partial_x &\to \frac{1}{\rho'(t)}\partial_t = \frac{1}{2t}\partial_t \\
\partial_x^2 &\to (\frac{1}{2t}\partial_t)^2 \\
&= \frac{1}{2t}\partial_t(\frac{1}{2t}\partial_t) \\
&= \frac{1}{2t}(-\frac{1}{2t^2}\partial_t + \frac{1}{2t}\partial_t^2) \\
&= \frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t
\end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
\rho^+P &= t^6(\frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t) - 4t^4\frac{1}{2t}\partial_t - 1 \\
&= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - t^3\frac{1}{4u^3}\partial_t - 4t^3\frac{1}{2}\partial_t - 1 \\
&= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - 2\frac{1}{4}t^3\partial_t - 1
\end{aligned}$$

Also ist $\rho^+P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$ mit slopes$(\rho^+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.5) und somit $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1)$.

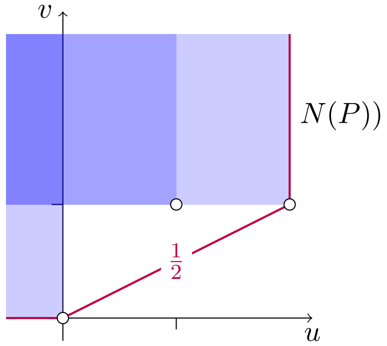

Abbildung 2.4: Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$

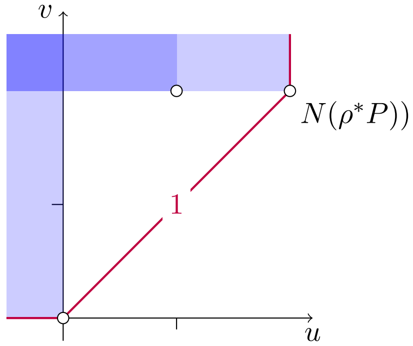

Abbildung 2.5: Newton Polygon zu $\rho^+P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$

Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler $\widehat{L}$-VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.43 (push-forward)**.** [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *Direktes Bild* $\rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

- der $\widehat{K}$-VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist definiert als der $\mathbb{C}$-Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der $\widehat{K}$-Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \begin{array}{ccc} \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} & \to & \mathcal{N}_{\widehat{L}} \\ (f(x), m) & \mapsto & f(x) \cdot m := f(\rho(t))m \end{array}$ und
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1}\partial_t$.

Satz 2.44. *[Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}\,. \tag{2.5}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?) \end{aligned}$$

□

2.6 Fouriertransformation

Definition 2.45 (Fouriertransformation)**.** [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1] Sei $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i$. Dann ist die *Fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^{d} a_i(\partial_z)(-z)^i$$

Definition 2.46 (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln)**.** Ist $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$ so ist die Fouriertransformierte davon ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$.

Beispiel 2.47. Sei $P = t^2\partial_t + 1$ dann ist die Fouriertransformierte davon $\mathcal{F}_P = \dots$

3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 3.1. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben $\mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}$ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}(\!(x)\!) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$.

Bemerkung 3.2. 1. Es für ein allgemeines $f(x) \in \mathscr{E}^{\varphi}_{\widehat{K}}$ gilt $\partial_x f(x) = f'(x) + f(x)\varphi'(x)$.

2. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird im folgendem meist verzichtet.

3. Offensichtlich ist $\mathscr{E}^{\varphi} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$, weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$.

Bemerkung 3.3. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathscr{E}^{\varphi} \cong \mathscr{E}^{\psi}$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$.

Lemma 3.4. *[Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt*

$$\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi} = \bigoplus_{\xi^p = 1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} .$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagram, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d, "\partial_t"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \arrow[d, "\partial_t"] \\
\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung 3.3 berechtigt. Wir wählen eine $\widehat{L}$ Basis e des Rang 1 $\widehat{L}$-Vektorraum $\mathscr{E}^{\varphi}$ und damit erhält man die Familie $e, te, ..., t^{p-1}e$ als $\widehat{K}$-Basis von $\rho_+ \mathscr{E}^{\varphi}$.
Durch die Setzung $e_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e$ wird die Familie $\mathbf{e} := (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\widehat{L}$-Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi}$.
Zerlege nun $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ (siehe: Anhang A). Es gilt:

$$t\partial_t e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
t\partial_t e_k &= t\partial_t(t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e) \\
&= t(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x(\underbrace{t^k e}_{\in \rho_+ \mathscr{E}^{\varphi}})) \\
&= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (pt^{p-1})^{-1}(kt^{k-1}e + t^k \varphi'(t)e) \\
&= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1}e + t^k \varphi'(t)e) \\
&= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1}e}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t)e \\
&= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+1} \varphi'(t)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \underbrace{\psi_i(t^p)}_{\in \widehat{K}} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p)(t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ gilt, so dass gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j]$$

denn:

$$\begin{aligned}
t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t e_0, ..., t\partial_t e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0,..,p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & & \cdots & t^3\psi_3(t^p) & t^2\psi_2(t^p) & t^1\psi_1(t^p) \\
t^1\psi_1(t^p) & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & & & \ddots & t^2\psi_2(t^p) \\
t^2\psi_2(t^p) & t^1\psi_1(t^p) & \ddots & & & t^3\psi_3(t^p) \\
t^3\psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & t^1\psi_1(t^p) & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) & \\
t^{p-2}\psi_{p-2}(t^p) & \cdots & t^3\psi_3(t^p) & t^2\psi_2(t^p) & t^1\psi_1(t^p) & t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p)
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j]$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(t)}$ ist also Beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j]\,.$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(x) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Passendes T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)V^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)(TVT^{-1})^j] \\
&= [\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)D^j] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j\left(\xi^1\right)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j\left(\xi^{p-1}\right)^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(t\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(t\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}t)\xi^{p-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit wissen wir bereits, das im Diagram

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_t"] & \widehat{L}^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j V^j"] & \widehat{L}^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1}\mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_t"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \widehat{L}^p \arrow[l, "\cong"'] & \widehat{L}^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1}\mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \\
& (\star) & &
\end{tikzcd}$$

der mit $(\star)$ bezeichnete Teil kommutiert. Um zu zeigen, dass alles kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(\Phi(x)) = \Phi\Big(\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(x)D^j\Big) \qquad\qquad \forall x \in \widehat{L}^p$$

gilt. Sei $x = {}^t(x_1, \dots, x_p) \in \widehat{L}^p$. So ist

$$\partial_t(\Phi(x)) = \partial_t({}^t(\dots))$$

und

$$\begin{aligned}
\Phi\Big({}^t x\big(\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1}\psi_j(t^p)D^j\big)\Big) &= \Phi\Bigg((x_1, \dots, x_p)\begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}t)\xi^{p-1} \end{pmatrix}\Bigg) \\
&= \Phi\Big((x_1\varphi'(t), x_2\varphi'(\xi t)\xi, \dots, x_p\varphi'(\xi^{p-1}t)\xi^{p-1})\Big)
\end{aligned}$$

□

Definition 3.5. Ein *Elementarer Meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang $\mathcal{M}$, für den es $\psi \in \mathbb{C}((x))$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathscr{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p}\,,$$

mit $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$, ist.

Lemma 3.6. $\mathscr{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot(x\partial_x - (\alpha + x\frac{\partial\psi}{\partial x}))^p$

Beweis. [Hei10, Lem 5.12] □

3.1 Defnintion in [Sab07]

Definition 3.7 (Elementarer formaler Zusammenhang)**.** [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen $\rho \in t\mathbb{C}[\![t]\!]$, $\varphi \in \widehat{L} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}(\!(t)\!)$ und einem endlich dimensionalen $\widehat{L}$-Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇, definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\widehat{K}$-Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \mod \mathbb{C}[\![t]\!]$ ab.

Lemma 3.8. *[Sab07, Lem 2.2]*

Lemma 3.9. *[Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$ genau dann, wenn*

- *es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \mod \mathbb{C}[\![t]\!]$*
- *und $S \cong R$ als $\widehat{L}$-Vektorräume mit Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Lem 2.6.] □

Proposition 3.10. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale $\widehat{K}$-Vektorraum $\mathcal{M}$ mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, $\rho : t \to t^p$ vom Grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ. (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 $\widehat{L}$-Vektrorraum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

3.2 Twisten von Meromorphen Zusammenhängen

[Cou95, Chap 5 §2]

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, Meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

4.1 Klassische Version

Satz 4.1. *[Sab90, Thm 5.4.7] Sie $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl p so dass der Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, mit $\rho : t \mapsto x := t^p$, isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

Beweis. Zum Beweis wird Induktion auf die Lexicographisch geordnetem Paare $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$ angewendet. Wobei $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dem größtem Slope von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Es wird $\kappa = \infty$ gesetzt, falls der größte Slope nicht Ganzzahlig ist.

Wir nehmen oBdA an, dass $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ genau einen Slope Λ hat, sonst Teile $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ mittels Satz 2.26 in Meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ (vollständig gekürtzt) Definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$. Wir nennen $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$ die *Determinanten Gleichung* von P. Da L zu einem Slope von P gehört, besteht $\sigma_L(P)$ aus zumindest zwei Monomen. Schreibe

$$\begin{aligned}\sigma_L(P) &= \sum_{L(i,i-j)=\mathrm{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i,i-j)=0} \alpha_{ij} x^j \xi^i .\end{aligned}$$

Sei $\theta := x^{\lambda_0+\lambda_1} xi^{\lambda_1}$ so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei $\alpha_0 \neq 0$ ist.

Erster Fall: $\lambda_1 = 1$. Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_\beta (\theta - \beta)^{\gamma_\beta} .$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. Sei β_0 eine der Nullstellen. So setze $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0+1))z^{\lambda_0+1}$ und betrachte $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}^R_{\widehat{K}}$.

Lemma 4.2. *Falls e ein zyklischer Vektor für $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist, so ist $e \otimes e(R)$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}^R_{\widehat{K}}$.*

Beweis. TODO □

Falls $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$ gilt

$$P\Big(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\Big) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial(\frac{\beta_0}{\lambda_0+1} x^{-(\lambda_0+1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 z^{-(\lambda_0+2)} . \end{aligned}$$

Schreibe $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0+2)})$.

Lemma 4.3. *Es gilt, dass P' Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$ hat.*

Beweis. TODO □

Des weiteren ist $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$. Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat nur eine Nullstelle.**
2. **Die Determinanten Gleichung $\sigma_L(P)$ hat mehrere Nullstellen.**

Zweiter Fall: $\lambda_1 \neq 1$. In diesem Fall ist einzige Slope Λ nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit λ_1. Sei $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$ und erhalte P' so dass $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$. Nach Lemma 2.41 hat P' den einen Slope $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$. Damit können wir nun die zugehörige Linearform $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$ definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \ldots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an.

□

4.2 Sabbah's Refined version

Proposition 4.4. *[Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang* $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$ *ist isomorph zu* $\rho_+(\mathscr{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$*, wobei* $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^-1]$*,* $\rho : x \mapsto t = x^p$ *mit grad* $p \geq 1$ *minimal bzgl.* φ *(siehe [Sab07, Rem 2.8]), und* S *ist ein Rang* 1 $\widehat{K}$*-Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

Satz 4.5 (Refined Turrittin-Levelt)**.** *[Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang* $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ *kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe* $\bigoplus El(\rho, \varphi, R) \overset{def}{=} \bigoplus \rho_+(\mathscr{E}^\varphi) \otimes R$*, so dass jedes* $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ *irreduzibel ist und keine zwei* $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$ *isomorph sind.*

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

5 DIE Klasse der Fourier-Transformationen

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von $\mathcal{D}$-Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu 2 Beispielen unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem φ D-Moduln ergibt. Im laufe des Kapitels werden immer speziellere φ betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

5.1 Rezept für allgemeine φ

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k\in I} \frac{a_k}{t^k} | I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und beginne mit $\mathscr{E}^\varphi$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\underbrace{\text{Hauptnenner}}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}^*_{\widehat{L}}} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t))) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{(t^{\max(I)+1} \cdot (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)))}_{=:Q(t,\partial_t)}\end{aligned}$$

3. Fouriertransformiere $\mathscr{E}^\varphi$ und erhalte

$$\begin{aligned}{}^{\mathcal{F}}\mathscr{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] < \partial_z >}\end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an. Was passiert mit der Ableitung ∂_x? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2\partial_z$.

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2\partial_x) \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom P_φ assoziierten Meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$ betrachten.

Wen wir ein spezielles $\varphi = \sum_{k\in I} \frac{a_k}{t^k}$ betrachten, können wir das entstehende P_φ, wie folgt, explizit berechnen

$$
\begin{aligned}
Q(t,\partial_t) &= t^{\max(I)+1}(\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \\
&= t^{\max(I)+1}\underbrace{\Big(\partial_t + \sum_{k\in I} k\frac{a_k}{t^{k+1}}\Big)}_{\in\mathbb{C}[t][t^{-1}]<\partial_t>} \\
&= t^{\max(I)+1}\partial_t + \sum_{k\in I} k\,\frac{a_k}{t^{k-\max(I)}} \\
&= t^{\max(I)+1}\partial_t + \sum_{k\in I} k\,a_k t^{\max(I)-k} && \in \mathbb{C}[t] < \partial_t > \\
\mathcal{F}_Q(z,\partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\
&= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k\in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k}
\end{aligned}
$$

und damit ist

$$
\begin{aligned}
P_\varphi(x,\partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2\partial_x) \\
&= -(-x^2\partial_x)^{\max(I)+1}x^{-1} + \sum_{k\in I} k a_k(-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \\
&= (-x^2\partial_x)^{\max(I)}x^2\,\partial_x x^{-1} + \sum_{k\in I} k a_k(-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \\
&= (-x^2\partial_x)^{\max(I)}\,x^2\,(x^{-1}\partial_x - x^{-2}) + \sum_{k\in I} k a_k(-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} \\
&= (-x^2\partial_x)^{\max(I)}\,(x\partial_x - 1) + \sum_{k\in I} k a_k(-x^2\partial_x)^{\max(I)-k} && \in \mathbb{C}[x] < \partial_x >
\end{aligned}
$$

Im Anhang B wird das $(x^2\partial_x)^k$ genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

Ab jetzt nur noch für den Spezialfall $\varphi = \frac{a}{t^q}$. Also sei $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}}\cdot P_\varphi$ mit

$$
P_\varphi(x,\partial_x) = (-x^2\partial_x)^q(x\partial_x - 1) + qa\,,
$$

so dass

Lemma 5.1. *Es gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$.*

Beweis. [Sab07, 5.b.] Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir P_φ um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon von bedeutung sind.

$$
N\Big(P_\varphi(x,\partial_x)\Big) = N\Big((-x^2\partial_x)^q(x\partial_x - 1) + qa\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&= N\Big(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}}(x^{2q}\partial_x^q + \underbrace{\mathbf{T.h.O.}}_{\text{liefern keinen Beitrag}})(x\partial_x - 1) + qa\Big)\\
&= N\Big(x^{2q}\partial_x^q(x\partial_x - 1) + qa\Big)\\
&= N\Big(x^{2q}\,\partial_x^q x\,\partial_x - x^{2q}\partial_x^q + qa\Big)\\
&= N\Big(x^{2q}\,(x\partial_x^q + q\partial_x^{q-1})\,\partial_x - x^{2q}\partial_x^q + qa\Big)\\
&= N\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + \underbrace{qx^{2q}\partial_x^q - x^{2q}\partial_x^q}_{\text{liefern keinen Beitrag}} + qa\Big)\\
&= N\Big(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa\Big)
\end{aligned}
$$

Wobei hier das **T.h.O** eine Abkürzung für *Therme höherer Ordnung* ist. Hier ist ein Term $\varepsilon x^p\partial_x^q$, mit $\varepsilon \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$, von höherer Ordnung als $\tilde{\varepsilon}x^{\tilde{p}}\partial_x^{\tilde{q}}$, mit $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{C}, \tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{Z}$, falls $q > \tilde{q}$ und $p - q < \tilde{p} - \tilde{q}$. Anschaulich bedeutet das, dass

$$\Big((q, p-q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big) \supset \Big((\tilde{q}, \tilde{p} - \tilde{q}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\Big)\,.$$

Offensichtlich ist damit $N(\varepsilon x^p\partial_x^q + \tilde{\varepsilon}x^{\tilde{p}}\partial_x^{\tilde{q}}) = N(\varepsilon x^p\partial_x^q)$, also können Therme höherer Ordnung vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist.

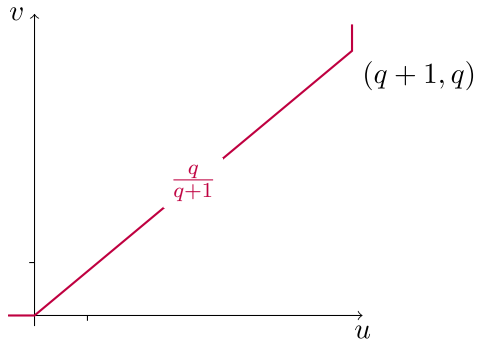

Abbildung 5.1: Newton-Polygon zu P_φ

□

Also ist ein pull-back mit Grad $q + 1$ nötig, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Sei $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$ so ist

$$
\begin{aligned}
\rho^+\mathcal{M}_\varphi &= \rho^+(\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x))\\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\rho^* P_\varphi(x, \partial_x))\\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t))\\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (P_\varphi(-(q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2t^q}\partial_t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((-(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t)^q (-(q+1)t^{q+1} \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t - 1) + qa) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((-\frac{-(q+1)^2}{(q+1)^2} t^{2(q+1)-q} \partial_t)^q (\frac{1}{q+1} t\partial_t - 1) + qa) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2} \partial_t)^q (\frac{1}{q+1} t\partial_t - 1) + qa) \\
&= \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2}\partial_t)^q (t\partial_t - (q+1)) + (q+1)qa)
\end{aligned}
$$

mit $\mathcal{P}(\rho^+\mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$. Definiere mittels $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ die Linearform

$$L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1 \,.$$

Schreibe $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$ und berechne die *Determinanten Gleichung* $\sigma_L(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$.

$$
\begin{aligned}
\sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \mid L(i,i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\
&= \sum_{\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i
\end{aligned}
$$

Da $\widehat{L}[\xi]$ kommutativ ist gilt hier, dass $(t^j\xi^i)^k = t^{jk}\xi^{ik}$ ist. Setze $\theta = t^{\lambda_0+\lambda_1}\xi^{\lambda_1} = t^{q+1}\xi$ so können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \theta^k \qquad\qquad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_\beta (\theta - \beta)^{\gamma_\beta} \,.$$

Wobei $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$ eine Konstante ist. Sei β_0 eine der Nullstellen. Da $\mathrm{ord}_L(\rho^* P_\varphi) = 0$ und der einzige Slope von $\rho^* P_\varphi$ nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass $\alpha_0 \neq 0$. Also ist 0 keine Nullstelle von $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$. Setze $\psi(x) := (\beta_0/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = (\beta_0/q)t^{-q}$ und betrachte

$$\mathcal{N} := \rho^+\mathcal{M}_\varphi \otimes \mathscr{E}^\psi_{\widehat{L}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi) \otimes \mathscr{E}^\psi_{\widehat{L}} \,.$$

Lemma 5.2. *Sei e ein zyklischer Vektor zu $\rho^+\mathcal{M}_\varphi$, so ist $e \otimes \underbrace{1}_{\in\widehat{L}} \in \mathcal{N}$ ein zyklischer Vektor für $\mathcal{N} \overset{def}{=} \rho^+\mathcal{M}_\varphi \otimes \mathscr{E}^\psi_{\widehat{L}}$.*

Beweis. Es sei e ein zyklischer Vektor von $\rho^+\mathcal{M}_{\varphi_1}$. Da der Grad von $\rho^* P_\varphi$ gleich $q+1$ ist, ist auch die Dimension von $\rho^+\mathcal{M}$ gleich $q+1$. Damit ist auch $\dim_K \mathcal{N} = q+1$, also reicht zu zeigen, dass $e\otimes 1$, $\partial_t(e\otimes 1)$, $\partial_t^2(e\otimes 1)$, ,. . . , $\partial_t^q(e\otimes 1)$ ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\partial_t(e\otimes 1) &= (\partial_t e)\otimes 1 + t\otimes \partial_t 1 \\
&= (\partial_t e)\otimes 1 + e\otimes \psi'(t)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)(e \otimes 1) \\
\partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t((\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)(e \otimes 1)) \\
&= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + (\partial_t e) \otimes \psi'(t) + \psi''(t)(e \otimes 1) + \psi'(t)((\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)) \\
&= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + \psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi''(t)(e \otimes 1) + \psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi'(t)^2(e \otimes 1) \\
&= (\partial_t^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + (\psi''(t) + \psi'(t)^2)(e \otimes 1) \\
&\vdots \\
\partial_t^q(e \otimes 1) &= (\partial_t^q e) \otimes 1 + \lambda_{q-1}(\partial_t^{q-1} e) \otimes 1 + \cdots + \lambda_1(\partial_t e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1)
\end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_t(e \otimes 1) \\ \partial_t^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_t^{q-1}(e \otimes 1) \\ \partial_t^q(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \psi'(t) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \cdots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_{q-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_t e) \otimes 1 \\ (\partial_t^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_t^{q-1} e) \otimes 1 \\ (\partial_t^q e) \otimes 1 \end{pmatrix}$$

Da bekanntlich $e \otimes 1$, $(\partial_t e) \otimes 1$, $(\partial_t^2 e) \otimes 1, \ldots$, $(\partial_t^q e) \otimes 1$ linear unabhängig sind, gilt dies auch für $e \otimes 1$, $\partial_t(e \otimes 1)$, $\partial_t^2(e \otimes 1)$, $, \ldots$, $\partial_t^q(e \otimes 1)$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Zerlege nun $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$ wobei $\mathcal{N}_i$ Meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope. Wende auf die $\mathcal{N}_i$ jeweils die Induktion an und erhalte zu jedem (nach eventuellem pullback) eine Zerlegung in reguläre Meromorphe Zusammenhänge. Nach dem diese mittels $\mathscr{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$ zurückgetwistet wurden, sind diese immer noch regulär, aber die direkte Summe davon ist isomorph zu $\rho^+\mathcal{M}_\varphi$.

5.2 Spezialfall $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Als konkreten Fall betrachten wir nun $\mathcal{M}_{\varphi_1}$ bezüglich $\varphi_1 := \frac{a}{x}$. Es ist das Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
P_{\varphi_1}(x, \partial_x) &= -x^2\partial_x(x\partial_x - 1) + a \\
&= -x^2 \underbracket{\partial_x x}\, \partial_x + x^2\partial_x + a \\
&= \underbracket{-x^2 \overbracket{(x\partial_x + 1)}\, \partial_x} + x^2\partial_x + a \\
&= \overbracket{-x^3\partial_x^2 - x^2\partial_x} + x^2\partial_x + a \\
&= -x^3\partial_x^2 + a
\end{aligned}$$

Erhalte nun das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\varphi_1}) = \{\frac{1}{2}\}$.

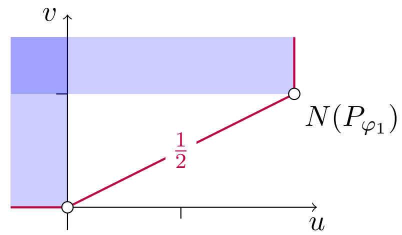

Abbildung 5.2: Newton Polygon zu P_{φ_1}

Berechne nun zu $\rho : t \mapsto x := -2t^2$ ein Minimalpolynom $\rho^* P_{\varphi_1}$ zu $\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1}$:

$$\begin{aligned}
\rho^* P_{\varphi_1}(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t\partial_t - 2) + 2a \\
&= t^3 \underbrace{\partial_t t}\, \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
&= t^3 \overbrace{(t\partial_t + 1)}\, \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
&= t^4 \partial_t^2 + t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
&= t^4 \partial_t^2 - t^3 \partial_t + 2a
\end{aligned}$$

und erhalte einen Meromorphen Zusammenhang $\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_{\varphi_1}$ mit genau dem Slope $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$.

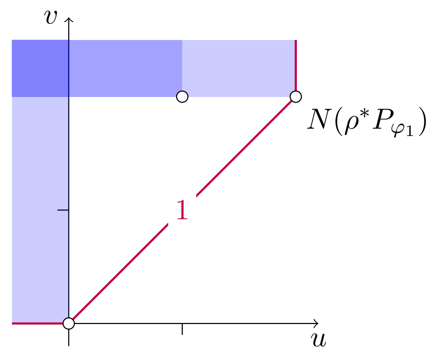

Abbildung 5.3: Newton Polygon zu $\rho^* P_{\varphi_1}$

Definiere die Linearform $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$. Berechne nun die *Determinanten Gleichung* $\sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) \in \widehat{L}[\xi]$ von $\rho^* P_{\varphi_1}$.

$$\begin{aligned}
\sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) &= \sum_{\{(i,j) | 2i - j = 0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\
&= t^4 \xi^2 + 2a
\end{aligned}$$

Setze $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$ so erhalten wir

$$\sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) = \theta^2 + 2a$$

schreiben, welches wir als nächstes faktorisieren

$$\begin{aligned}
\sigma_L(\rho^* P_{\varphi_1}) &= \theta^2 + 2a \\
&= (\theta - \underbrace{i\sqrt{2a}}_{=:\beta_0})(\theta + i\sqrt{2a})
\end{aligned}$$

Setze $\psi(x) := (\beta_0/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$ und betrachte den Twist $\mathcal{N} := \rho^+\mathcal{M}_{\varphi_1} \otimes \mathscr{E}^{\psi}_{\widehat{K}}$ von $\mathcal{M}$. Es ist $e \otimes 1$ ein zyklischer Vektor, wobei e ein zyklischer Vektor von $\rho^+\mathcal{M}$ ist. Somit existieren $a_0(t)$ und $a_1(t)$ in $\widehat{L}$, so dass

$$0 = \partial_t^2(e \otimes 1) + (a_1(t)\partial_t + a_0(t))e \otimes 1$$

und damit ist dann $\mathcal{N} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (\partial_t^2 + a_1(t)\partial_t + a_0(t))$. Es ist

$$\begin{aligned}
\partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t(\underbracket{\partial_t(e \otimes 1)}) \\
&= \partial_t(\overbracket{(\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)}) \\
&= (\underbracket{\partial_t^2 e}) \otimes 1 + \underbracket{(\partial_t e) \otimes \psi'(t) + (\partial_t e) \otimes \psi'(t)} + e \otimes \underbrace{((\frac{\partial}{\partial t} + \psi'(t))\psi'(t))}_{\in K} \\
&= \underbracket{(\overbracket{(t^{-1}\partial_t - 2at^{-4}}e) \otimes 1} + \overbracket{2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1} + \underbracket{(\psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1} \\
&= \overbracket{(t^{-1}\partial_t e) \otimes 1 - 2at^{-4}e \otimes 1} + 2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \overbracket{(\psi''(t)e \otimes 1 + \psi'(t)^2 e \otimes 1} \\
&= (t^{-1} + 2\psi'(t))\,\underbracket{(\partial_t e) \otimes 1} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\
&= (t^{-1} + 2\psi'(t))\,\overbracket{(\partial_t(e \otimes 1) - e \otimes \psi'(t))} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\
&= (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t(e \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2)e \otimes 1 \\
&\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1 \\
&= \Big((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2\Big)e \otimes 1 \\
&= \Big((t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2\Big)e \otimes 1
\end{aligned}$$

also

$$0 = \Big(\underbrace{\partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2}_{=:P'}\Big)e \otimes 1$$

und somit mit $\psi(t) = i\sqrt{2a}t^{-1}$ ist $\psi'(t) = -i\sqrt{2a}t^{-2}$ und $\psi''(t) = 2i\sqrt{2a}t^{-3}$. Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t))\partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2a - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\
&= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-3} + 2a^{-4} - 2i\sqrt{2a}t^{-3} + \underbracket{(-i\sqrt{2a}t^{-2})^2} \\
&= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3} + \underbrace{2at^{-4} \overbracket{-2at^{-4}}}_{=0}
\end{aligned}$$

$$= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}$$

mit, wie gewünscht, mehr als einem Slope.

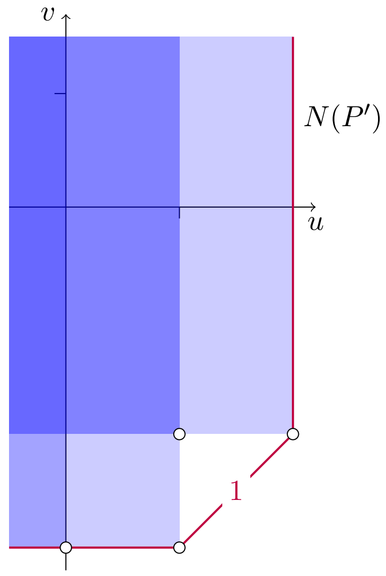

Abbildung 5.4: Newton Polygon zu $\mathcal{N}$

Unser nächstes Ziel ist es, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P'$ in zwei Meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in $P' = Q_1 \cdot Q_2$.

Da der ∂_t-Grad von P' genau 2 ist, müssen die Q_i jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen.

Beobachtung 5.3. Ist Q_1 und Q_2 so ein solches Paar, dann ist für $\sigma \in \widehat{K}$ das Paar $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$ und $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$ ebenfalls eine Zerlegung.

Beweis. Es ist klar, dass die Beobachtung korrekt ist, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = \underbrace{\mathbb{Q}_1 \cdot \sigma}_{\in \mathcal{D}_{\widehat{L}}} \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot Q_2}_{\in \mathcal{D}_{\widehat{L}}} = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2 \,.$$

□

Mit der Beobachtung 5.3 ist klar, dass wir den Faktor vor den ∂_t in Q_2 frei wählen können. Setze diesen also setze allgemein auf 1 und erhalte

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \qquad Q_2 := \partial_t + u(t) \qquad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$$

und somit ist

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\overset{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Somit ist ebenfalls $\bar{v}(t) = 1$.

Durch das Wissen über die Slopes der Q_i erhalten wir noch Informationen über die Koeffizienten $v(t) := \sum_n v_n t^n$ bzw. $u(t) := \sum_i u_n t^n$. Die beiden Polynome Q_1 und Q_2 enthalten ∂_t als einziges Monom vom ∂_t-Grad 1, deshalb ist $(1, -1)$ in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten.

Da Q_1 nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 5.5 aussenen und somit wissen wir, dass $v_n = 0$ für alle $n < -1$. Da Q_2 nur den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 5.6, also ist $u_n = 0$ für alle $n < -2$ und $u_{-2} \neq 0$.

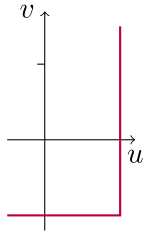

Abbildung 5.5: Newton-Polygon zu Q_1

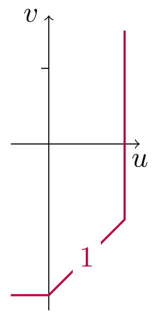

Abbildung 5.6: Newton-Polygon zu Q_2

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (5.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) \tag{5.2}$$

und mit denn Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + [\partial_t, u_n t^n]) \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + n u_n t^{n-1}) \\
&= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}
\end{aligned}$$

Wenn wir dieses Ergenis nun in (5.2) einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) \\
&= \partial_t^2 + \Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big) \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) \\
&= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \, \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Betrachte nun das Letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n\Big) &= t^{-3}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n\Big)\\ &= t^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_{k-1}t^k u_{n-k-2}t^{(n-k)}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-2}t^{k+(n-k)-3}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_{k-1}u_{n-k-2}\Big)t^{n-3}\\ &= \sum_{n=-3}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big)t^{n}\end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (5.4) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}Q_1\cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty}(u_n+v_n)t^n\partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty}(n+1)u_{n+1}t^n + \sum_{n=-3}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big)t^n\\ &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty}(u_n+v_n)t^n\partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty}\Big((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big)t^n\\ &\overset{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2a}t^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2a}t^{-3}\end{aligned} \tag{5.4}$$

Nun haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit den gewünschten Polynom vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2a}t^{-2} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty}(u_n+v_n)t^n \tag{5.5}$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty}\Big((n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}\Big)t^n \tag{5.6}$$

Nun können wir mit (5.5) und (5.6) jeweils nochmal einen Koeffizientenvergleich machen und erhalten zunächst aus (5.5) dass

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \tag{5.7}$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \tag{5.8}$$

$$0 = u_n + v_n \qquad \forall n \geq 0 \tag{5.9}$$

Als nächstes wollen wir dieses Ergenis mit (5.6) kombinieren. Betrachte zunächst den Vorfaktor vor t^{-3}:

$$-3i\sqrt{2a} = (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^{0} v_{k-1}u_{-3-k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\
&\overset{(5.7)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\
\Rightarrow -3 &\overset{a\neq 0}{=} -4 + 2v_{-1} \\
\Rightarrow v_{-1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\overset{(5.8)}{\Rightarrow} -1 = u_{-1} + \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow u_{-1} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Nun zum allgemeinem Koeffizienten vor t^n:

$$\begin{aligned}
0 &= (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1} \\
&= (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} + v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1} \\
&= (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} + v_{n+2}u_{-2} \\
\Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= -(n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \\
\Rightarrow v_{n+2} &= -(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_{-2}} - \sum_{k=0}^{n+2} \frac{v_{k-1}u_{n-k+1}}{u_{-2}} \\
&= -(n+1)\frac{u_{n+1}}{2i\sqrt{2a}} - \sum_{k=0}^{n+2} \frac{v_{k-1}u_{n-k+1}}{2i\sqrt{2a}} \\
&= i\Big((n+1)\frac{u_{n+1}}{2\sqrt{2a}} + \sum_{k=0}^{n+2} \frac{v_{k-1}u_{n-k+1}}{2\sqrt{2a}}\Big) \\
&\overset{(5.9)}{=} -u_{n+2}
\end{aligned}$$

also nach passendem Indexshift:

$$v_n = -u_n = i\Big((n-1)\frac{u_{n-1}}{2\sqrt{2a}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{v_{k-1}u_{n-k-1}}{2\sqrt{2a}}\Big) \qquad \forall n \geq 0 \tag{5.10}$$

Zusammen mit $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$, $u_{-1} = -\frac{3}{2}$ und $v_{-1} = \frac{1}{2}$ sind die Koeffizienten vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit $\mathscr{E}^{-\psi(t)}$ zurücktwisten.

5.2.1 Sabah's refined Levelt-Turrittin-Zerlegung für φ_1

5.3 Angewendet für $\varphi_2 := \frac{a}{x^2}$

A Aufteilung von $t\varphi'(t)$

Sei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}t^{-i} \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ also $u\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}t^{-i} \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j\psi_j(t^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$:

$\psi_0(t^p)$

$$t\varphi'(t) = a_{-2}t^{-1} + \dots + a_{-p}t^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(p+2)}t^{-(p+1)} + \dots + a_{-2p}t^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + a_{-(2p+3)}t^{-(2p+1)} + \dots$$

$t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p)$ $t\psi_1(t^p)$

also:

$$\psi_0(t^p) = a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + \dots$$
$$\psi_1(t^p) = a_{-p}t^{-p} + a_{-2p}t^{2p} + \dots$$
$$\vdots$$
$$\psi_{p-1}(t^p) = a_{-2}t^{p} + a_{-(p+2)}t^{2p} + \dots$$

B Genaueres zu $(x^2\partial_x)^k$

Nun wollen wir noch $(x^2\partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$
\begin{aligned}
(x^2\partial_x)^{k+1} &= x^2\,\underbrace{\partial_x x^2}\,\partial_x(x^2\partial_x)^{k-1}\\
&= x^2\,\overbrace{(2x+x^2\partial_x)}\,\partial_x(x^2\partial_x)^{k-1}\\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)(x^2\partial_x)^{k-1}\\
&= (2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2)(x^2\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2}\\
&= (2x^3\,\underbrace{\partial_x x^2}\,\partial_x + x^4\,\underbrace{\partial_x^2 x^2}\,\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2}\\
&= (2x^3\,\overbrace{(2x+x^2\partial_x)}\,\partial_x + x^4\,\overbrace{(2x\partial_x+1+x^2\partial_x^2)}\,\partial_x)(x^2\partial_x)^{k-2}\\
&= (4x^4\partial_x + 2x^5\partial_x^2 + 2x^5\partial_x^2 + x^4\partial_x + x^6\partial_x^3)(x^2\partial_x)^{k-2}\\
&= (5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3)(x^2\partial_x)^{k-2}\\
&= \sum_{n=1}^{k+1}\binom{k}{n-1}\frac{(k+1)!}{n!}x^{n+k}\partial_x^n
\end{aligned}
$$

also gilt für spezielle k

$$
(x^2\partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3\partial_x + x^4\partial_x^2 & \text{falls } k=1\\ 5x^4\partial_x + 4x^5\partial_x^2 + x^6\partial_x^3 & \text{falls } k=2\\ \sum_{n=1}^{k+1}\binom{k}{n-1}\frac{(k+1)!}{n!}x^{n+k}\partial_x^n \end{cases} \tag{B.1}
$$

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Ara] D. Arapura, *Notes on d-modules and connections with hodge theory*, Notizen?

[Ark12] S. Arkhipov, *D-modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.

[AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.

[Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d-modules*, Vorlesungsskript, 2009.

[BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.

[Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for d-modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d-modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.

[Ell10] C. Elliott, *D-modules*, unpublished notes available online, April 2010.

[Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d-modules*, Vorlesungsskript, 1998.

[GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.

[Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer D-Moduln und Fouriertransformation*, 2010.

[HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.

[Kas03] M. Kashiwara, *D-modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.

[Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.

[Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.

[Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules.*

[Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, December 2012.