

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 19. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iv
I Theorie	1
1 Mathematische Grundlagen	2
1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra	2
1.2 Weiterführende Definitionen	3
1.3 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}	4
1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring	6
1.4 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D}	7
1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules	7
1.6 Lokalisierung eines holonomen \mathcal{D} -Modules	7
2 Der Meromorphe Zusammenhang	8
2.1 Definition	8
2.2 Eigenschaften	8
2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge	10
2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge	11
2.5 Newton Polygon	11
3 Levelt-Turittin-Theorem	13
II Beispiele	17
4 Beispiele/Anwendung	18
4.1 Einfache Beispiele	18

4.2	Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zuerfällt . . .	19
4.2.1	beispiel von sabbah	19
4.2.2	Beispiel ohne namen	20
Anhang		21
A	Aufteilung von ...	22

Einleitung

Teil I

Theorie

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [5] und [1] beziehen.

1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$.

Lemma 1.1 (Seite 2)

ein paar eigenschaften

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese Graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die Form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem Term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der Ring ist ebenfalls ein diskreter VVR (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach Grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Filtration, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] \mid v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ ist ein Untertring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.

ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

1.2 Weiterführende Definitionen

Definition 1.2 (Kommutator)

Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der Kommutator von a und b genannt.

Definition 1.3 (pull-back)

Der pull-back ρ^*M ist der Vektorraum $\rho^*M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$ mit dem pull-back Zusammenhang $\rho^*\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun N ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung

Definition 1.4 (*push-forward*)

Der push-forward $\rho_+ N$ ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR $\rho_* N$ ist der \mathbb{C} -VR N mit der $\mathbb{C}((t))$ Struktur durch $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die Wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^{-1} \partial_u$

Satz 1.5

es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ M) \cong \rho_+ N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \quad (1.1)$$

1.3 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [5, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.6 (*Weyl Algebra*)

Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra \mathcal{D} von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x] \langle \partial_x \rangle$) verwenden.

Lemma 1.7

Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

definieren auf A eine Ringstruktur $(A, +, \cdot)$.

Beweis: Zula Barbara: Kapittel 2 section 1

Bemerkung 1.8

$A_1(\mathbb{C})$, \mathcal{D} und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Lemma 1.9

Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis: Zula Barbara

Proposition 1.10

Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.

Beweis: [5, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

Definition 1.11

Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis: Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

■

Proposition 1.12

Es gilt:

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringen

1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A \langle \partial_x \rangle$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A \langle \partial_x \rangle)$ bezeichnen werden. Sei P ein bzgl. 1.10 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k . So definiere den Grad $\deg P$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle / F_{k-1} A \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.4 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D}

1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules

1.6 Lokalisierung eines holonomen \mathcal{D} -Modules

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [5]

2.1 Definition

Definition 2.1 (*Meromorpher Zusammenhang*)

Ein (Keim eines) Meromorpher Zusammenhang (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vr
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt Derivation, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die Leibnitzregel

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.1)$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.2

Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

Lemma 2.3

Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in ??$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}$.

P.

Lemma 2.4

Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1}\partial\varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis: TODO, (3. Treffen) ■

Sind ∂_1 und ∂_2 zwei Meromorphe Zusammenhänge auf $\mathcal{M}_K \cong K^r$. So betrachte $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$:

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1u - f'u - f\partial_2u \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

Lemma 2.5

Da $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear und, wie eben gezeigt, $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ allgemein gilt: Die Differenz zweier Meromorpher Zusammenhänge ist K -linear.

Insbesondere ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.6 (Transformationsformel)

In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & \swarrow \cong \psi & \\
 & M & \xrightarrow{\partial} & M & \\
 & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \varphi & \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r \\
 \cong T \uparrow & & & & \uparrow T \cong
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.7

$A \sim B$ differenziell Äquivalent $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$ mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$$

$$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$$

2.3 Formale Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.8 (Formaler Meromorpher Zusammenhang)

Ein Formaler Meromorpher zusammenhang $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$, ein endlich dimensionaler \hat{K} -Vr
- eine Derivation ∂ , für die die Leibnitzregel (2.1), für alle $f \in \hat{K}$ und $u \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$, erfüllt sein soll.

Oder einfach ein Meromorpher Zshg. über anderes K also \hat{K}

Bemerkung 2.9

alle bisher gegebenen Definitionen und Lemmata gelten für formale Meromorphe Zusammenhänge analog wie für konvergente Meromorphe Zusammenhänge.

2.4 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Definition 2.10 (*Elementarer formaler Zusammenhang*)

Zu einem gegebenen $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$, $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ und einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E} \otimes R)$$

2.5 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben und betrachte das dazugehörige

$$H := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \{(k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

bei sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe hülle davon in \mathbb{R}^2

Definition 2.11

Das Randpolygon von $\text{conv}(H)$ heißt das Newton Polygon von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 2.12

Die Steigungen (engl. slopes) sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt regulär singulär $:\Leftrightarrow \text{slopes } P = \{0\}$, sonst irregulär singulär.

alternativ: $:\Leftrightarrow$ wenn $\text{conv}(H)$ ein Quadrant ist

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu \mathcal{M}_K gehörigen slopes

- Ein meromorpher Zusammenhang \mathcal{M}_K heißt regulär singulär, falls $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mit P regulär singulär, sonst irregulär singulär

alternativ $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \{0\}$

3 Levelt-Turittin-Theorem

sabbah_cimpba90 seite 28 / 30

Sei $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 3.1

Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:

- $N(P_1) \subset N_1$ und $N(P_2) \subset N_2$
- A ist eine kante von ...

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4 [4]

Lemma 3.2

$\rho : u \mapsto u^p, \mu_\xi : u \mapsto \xi u$, für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

Beweis: Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

[1] $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ ^[2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, \dots, u\partial_u e_{p-1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \end{aligned}$$

$$^{[2]}P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\ u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\ u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & u^3\psi_3(u^p) \\ u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$, mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\
&= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[4]}
\end{aligned}$$

^[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\begin{aligned} \partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist. ■

Teil II

Beispiele

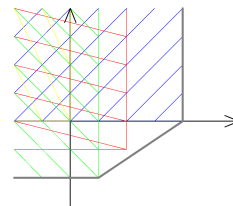
4 Beispiele/Anwendung

4.1 Einfache Beispiele

Hier soll ein einfaches Beispiel hergeleitet werden, an dem die Zerlegung nach dem Levelt-Turittin-Theorem einmal explizit ausformuliert werden soll.

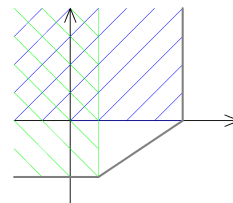
Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



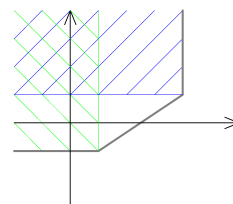
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit t und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [5, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$



und es gilt $\text{slopes}(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$. Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich $\rho : t \mapsto u^3$ für den Pullback an.

Dieser Pullback Multipliziert (indirekt) die Slopes mit 3, **Quelle?**
aber wie wendet man ihn (explizit) an?

$$\rho^+ P = ???$$

welches die Slopes $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$ hat. Schreibe nun dieses $\rho^+ P = Q \cdot R$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[[u]]$ wobei gilt $\text{slopes}(Q) = \{0\}$ und $\text{slopes}(R) = \{2\}$.

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zuerfällt

Quellen??

$$\sum n! x^n$$

4.2.1 beispiel von sabbah

Sei $P = t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2}$

1. zeige $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ ist ein Meromorpher Zusammenhang.
2. Zeichne das Newton Polygon von P und finde eine formale Aufteilung von $\mathcal{M}_{\hat{K}}$.
3. Zeige \mathcal{M} kann nicht in eine direkte Summe von zwei \mathcal{D} modulen zerlegt werden, dazu:
 - a) Zeige das die Produktzerlegung

$$P = (t(t\partial_t) + v(t)) \cdot (t\partial_t + u(t)),$$

mit $u, v \in \mathbb{C}[[u]]$, existiert.

- b) Berechne durch induktion die koeffizienten von u .
- c) Zeige dass $u \notin \mathbb{C}((u))$.

4.2.2 Beispiel ohne namen

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

und gehe von τ über zu t via $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2 \partial_t)$?

$$\begin{aligned} \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t \end{aligned}$$

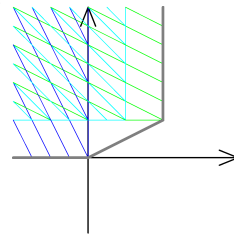
- was passiert mit $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1 \\ &= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t(t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t(\partial_t(t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t(t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t) - 2t^2 \partial_t - 1 \end{aligned}$$

$$= t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1 =: P$$

Wir wollen nun den zum folgendem P assoziierten Meromorphen Zusammenhang betrachten:

$$P = t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1$$



Es ist offensichtlich, dass $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$.

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i} u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-(i-1)} u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen.

Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$\begin{array}{c}
 u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p-1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots \\
 \begin{array}{c}
 \text{---} \psi_0(u^p) \text{---} \\
 \text{---} u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) \text{---} \dots u\psi_1(u^p) \text{---}
 \end{array}
 \end{array}$$

also:

$$\psi_0(u^p) = a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots$$

$$\psi_1(u^p) = a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots$$

\vdots

$$\psi_{p-1}(u^p) = a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots$$

Literaturverzeichnis

- [1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [4] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal fourier-laplace transform. Paper.
- [5] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.
- [6] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform. *ArXiv e-prints*, June 2007.