

**Bachelorarbeit**

---

**mein thema**

---

vorgelegt von

**Maximilian Huber**

am

**Institut für Mathematik  
der  
Universität Augsburg**

betreut durch

**Prof. Dr. Marco Hien**

abgegeben am

**noch nicht**

stand: 25. November 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iii</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra . . . . .	1
1.2 Weiterführende Definitionen . . . . .	2
1.3 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$ . . . . .	2
1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring . . . . .	4
1.4 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$ . . . . .	4
1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules . . . . .	4
1.6 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$ -Modules . . . . .	4
<b>2 Der Meromorpher Zusammenhang</b>	<b>5</b>
2.1 Definition . . . . .	5
2.2 Eigenschaften . . . . .	5
2.3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	6
<b>3 Weiterführende Aussagen</b>	<b>7</b>
<b>Anhang</b>	<b>9</b>
<b>A Aufteilung von ...</b>	<b>10</b>

# Einleitung



# 1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [6] und [1] beziehen.

## 1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt  $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ .

**Lemma 1.1** (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1.  $\mathbb{C}[x]$  ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

*alle Ideale haben die form  $(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{C}$*

2. wenn  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $\mathbb{C}[x]$  (erzeugt von  $x$  ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}^k$$

*The ring  $\mathbb{C}[[x]]$  ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term  $\neq 0$  ist invertierbar.*

*Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)*

*Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt  $\mathfrak{m}$ -adische Firation, ist die Filtrierung  $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] \mid v(f) \geq k\}$*

*und es gilt  $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$*

3.  $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$  ist ein Unterring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.  
*ist ähnlich zu  $\mathbb{C}[[x]]$*

## 1.2 Weiterführende Definitionen

**Definition 1.2** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der *Kommutator von  $a$  und  $b$*  genannt.

**Definition 1.3** (pull-back). Der *pull-back*  $\rho^+M$  ist der Vektorraum  $\rho^*M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$  mit der *pull-back Verknüpfung (connection)*  $\rho^*\nabla$  definiert durch  $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun  $N$  ein  $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung

**Definition 1.4** (push-forward). Der *push-forward*  $\rho_+N$  ist definiert durch:

- der  $\mathbb{C}((t))$ -VR  $\rho_*N$  ist der  $\mathbb{C}$ -VR  $N$  mit der  $\mathbb{C}((t))$  Struktur durch  $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die Wirkung von  $\partial_t$  ist die von  $\rho'(u)^{-1}\partial_u$

**Satz 1.5.** es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+M) \cong \rho_+N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \quad (1.1)$$

TEST für ref

1.5

TEST für eqref

(1.1)

## 1.3 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [6, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in \mathbb{C}[x]$  (bzw.  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw.  $\mathbb{C}[[x]]$ ). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator*  $f$ :

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

**Definition 1.6** (Weyl Algebra). Definiere nun die Weyl Algebra  $A_1(\mathbb{C})$  (bzw. die Algebra  $\mathcal{D}$  von linearen Operatoren mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw. die Algebra  $\hat{\mathcal{D}}$  (Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$ )) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation  $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$  (bzw.  $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$  bzw.  $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] < \partial_x >$ ) verwenden.

**Lemma 1.7.** Sei  $A$  einer der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

definieren auf  $A$  eine Ringstruktur  $(A, +, \cdot)$ .

*Beweis.* Zula Barbara: Kapittel 2 section 1 □

*Bemerkung 1.8.*  $A_1(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{D}$  und  $\hat{\mathcal{D}}$  sind nicht kommutative Algebren.

**Lemma 1.9.** Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

*Beweis.* Zula Barbara □

**Proposition 1.10.** Jedes Element in  $A_1(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathcal{D}$  oder  $\hat{\mathcal{D}}$ ) kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathcal{D}$  oder  $\hat{\mathcal{D}}$ ), geschrieben werden.

*Beweis.* [6, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

**Definition 1.11.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$  gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man  $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$  sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

*Beweis.* Sei  $P \in F_N \mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.12.** Es gilt:

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$   
isomorph als grad. Ringen

### 1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei  $A$  nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring  $A \langle \partial_x \rangle$  kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit  $F(A \langle \partial_x \rangle)$  bezeichnen werden. Sei  $P$  ein bzgl. 1.10 minimal geschriebener Operator, so ist  $P$  in  $F_k$  falls der maximale Grad von  $\partial_x$  in  $P$  kleiner oder gleich  $k$ . So definiere den Grad  $\deg P$  von  $P$  als die Eindeutige ganze Zahl  $k$  mit  $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle \setminus F_{k-1} \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

## 1.4 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$

## 1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules

## 1.6 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$ -Modules



## 2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [6]

### 2.1 Definition

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher zusammenhang* (Bzw. besser *Keim eines Meromorphen Zusammenhangs*)  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vr
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation*. Wobei für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.1)$$

erfüllt sein soll.

### 2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften von Meromorphen Zusammenhängen.

**Lemma 2.2.** Sei  $(M, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}$ , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M} \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1}\partial\varphi} & K^r \end{array}$$

gilt:  $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$  ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

*Beweis.* TODO, (3. Treffen)

□

Sind  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Meromorphe Zusammenhänge auf  $\mathcal{M}_K \cong K^r$ . So betrachte  $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  :

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.** Da  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear und, wie eben gezeigt,  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$  allgemein gilt: Die Differenz zweier Meromorpher Zusammenhänge ist  $K$ -linear.

Insbesondere ist  $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also es existiert eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  mit  $\frac{d}{dz} - \partial = A$ , also ist  $\partial = \frac{d}{dz} - A$ .

**Definition 2.4** (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc} K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & K^r & & \\ & \searrow \cong \varphi & & \nwarrow \cong \psi & \\ \cong T & & M & \xrightarrow{\partial} & M & & T \cong \\ & \nearrow \cong \psi & & \nwarrow \cong \varphi & \\ K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & K^r & & \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$  und  $(\frac{d}{dz} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:  
Der Merom. Zush.  $\frac{d}{dz} + A$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

**Definition 2.5.**  $A \sim B$  differenziell Äquivalent  $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$  mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} 1 &= TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0 \\ 1 &= T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0 \end{aligned}$$

## 2.3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

Sabbah redet in [5] von formal meromorphic connenctions

**Definition 2.6** (Elementarer formaler Zusammenhang). Zu einem gegebenen  $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$ ,  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  und einem endlich dimensional  $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum  $R$  mit regulärem Zusammenhang  $\nabla$ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensional  $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E} \otimes R)$$

### 3 Weiterführende Aussagen

**Lemma 3.1.**  $\rho : u \mapsto u^p$ ,  $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$ , für alle  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

Wir wählen eine  $\mathbb{C}((u))$  Basis  $\{e\}$  von  $\mathcal{E}^\varphi$  und zur vereinfachung nehmen wir an, dass  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  [1].

Dann ist die Familie  $e, ue, \dots, u^{p-1}e$  eine  $\mathbb{C}((t))$ -Basis von  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Setze  $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$ . Dann ist die Familie  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$  eine  $\mathbb{C}((u))$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Zerlege nun  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[j^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  (siehe: Anhang A).

Sei  $P$  die Permutationsmatrix, definiert durch  $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  [2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \end{aligned}$$

---

[1]  $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

[2]  $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u \partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u \partial_u \mathbf{e} &= (u \partial_u e_0, \dots, u \partial_u e_{p-1}) \\
&= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_u$  auf die Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$  ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun  $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$ , mit  $\xi^p = 1$  und  $T \in Gl_p(\mathbb{C})$ .

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\
&= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right]
\end{aligned}$$

---

<sup>[3]</sup> Klar, da mipo  $X^p - 1$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} [4] \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wie sieht dann die Wirkung auf die Basis von  $\bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$  aus?

$$\begin{array}{ccccccc}
 e_i & \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \longleftarrow \cong & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{T} & \mathbb{C}((u))^p & \longrightarrow \cong & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow & \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\
 \partial_u e_i & \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \longleftarrow \cong & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{T} & \mathbb{C}((u))^p & \longrightarrow \cong & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 & ? & \longleftarrow \vdash & (... , 0, 1, 0, ...) & & (... , 0, 1, 0, ...) & \vdash \longrightarrow & (... , 0, 1, 0, ...)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{e} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j]
 \end{array}$$

## A Aufteilung von ...

Sei  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ , so ist  $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i} u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  also  $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1} u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ , welches wir zerlegen wollen. Zerlege also  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ :

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots$$

also:

$$\begin{aligned} \psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots \\ \psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots \\ &\vdots \\ \psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots \end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [4] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform. *ArXiv e-prints*, June 2007.
- [5] Claude Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal fourier-laplace transform. Paper.
- [6] Claude Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.