

**Bachelorarbeit**

---

**mein thema**

---

vorgelegt von

**Maximilian Huber**

am

**Institut für Mathematik**

der

**Universität Augsburg**

betreut durch

**Prof. Dr. Marco Hien**

abgegeben am

**noch nicht**

stand: 24. Dezember 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iv</b>
<b>I Theorie</b>	<b>1</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra . . . . .	2
1.2 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$ . . . . .	3
1.2.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring . . . . .	6
1.2.2 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$ . . . . .	7
1.3 D-Moduln . . . . .	7
1.3.1 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduls . . . . .	7
1.3.2 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$ -Moduls . . . . .	7
<b>2 Der Meromorphe Zusammenhang</b>	<b>8</b>
2.1 Definition . . . . .	8
2.2 Eigenschaften . . . . .	8
2.3 pull-back und push-forward . . . . .	10
2.4 Formale Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	12
2.5 Elementare Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	13
2.6 Newton Polygon . . . . .	13
<b>3 Levelt-Turittin-Theorem</b>	<b>15</b>
<b>II Beispiele</b>	<b>19</b>
<b>4 Beispiele/Anwendung</b>	<b>20</b>
4.1 Einfache Beispiele . . . . .	20

4.2	Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zerfällt . . . .	21
4.2.1	beispiel von sabbah . . . . .	21
4.2.2	Beispiel ohne namen . . . . .	22
<b>Anhang</b>		<b>24</b>
<b>A</b>	<b>Aufteilung von ...</b>	<b>25</b>

# Einleitung

# **Teil I**

# **Theorie**

# 1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [6] und [2] beziehen.

## 1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt  $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ .

**Lemma 1.1** (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1.  $\mathbb{C}[x]$  ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

*alle Ideale haben die form  $(x - a)$  mit  $a \in \mathbb{C}$*

2. wenn  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $\mathbb{C}[x]$  (erzeugt von  $x$  ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[x] \setminus \mathfrak{m}^k$$

*The ring  $\mathbb{C}[[x]]$  ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term  $\neq 0$  ist invertierbar.*

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

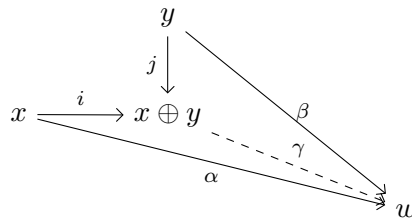
Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt  $\mathfrak{m}$ -adische Firation, ist die Filtrierung  $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt  $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3.  $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$  ist ein Unterring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.

ist ähnlich zu  $\mathbb{C}[[x]]$

**Definition 1.2** (Direkte Summe). [8, 4(Categories).5.1] Seien  $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von  $x$  und  $y$  ist ein Objekt  $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  zusammen mit Morphismen  $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$  und  $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$  so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes  $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Morphismen  $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$  und  $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$  existiert ein eindeutiges  $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$  so dass das Diagramm



kommutiert.

**Definition 1.3** (Tensorprodukt / Faserprodukt). [8, 3(Algebra).11.21] [8, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

## 1.2 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [6, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in \mathbb{C}[x]$  (bzw.  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw.  $\mathbb{C}[[x]]$ ). Man hat die

folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikationsoperator*  $f$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

**Definition 1.4** (Weyl Algebra). Definiere nun die Weyl Algebra  $A_1(\mathbb{C})$  (bzw. die Algebra  $\mathcal{D}$  von linearen Operatoren mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}\{x\}$  bzw. die Algebra  $\hat{\mathcal{D}}$  (Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$ )) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1).

Wir werden die Notation  $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$  (bzw.  $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$  bzw.  $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] < \partial_x >$ ) verwenden.

**Lemma 1.5.** Sei  $A$  einer der 3 soeben eingeführten Objekten, die Addition

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

definieren auf  $A$  eine Ringstruktur  $(A, +, \cdot)$ .

*Beweis.* [1, Kapittel 2 Section 1] □

*Bemerkung 1.6.*  $A_1(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{D}$  und  $\hat{\mathcal{D}}$  sind nicht kommutative Algebren.

**Definition 1.7** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

der *Kommutator* von  $a$  und  $b$  genannt.

**Proposition 1.8.** 1. Es gilt

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$



2. Sei  $f \in \mathbb{C}[x]$ , so gilt:

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial_x f}{\partial_x}.$$

Denn für  $g \in \mathbb{C}[x]$  ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis. [1]

□

**Proposition 1.9.** Jedes Element in  $A_1(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathcal{D}$  oder  $\hat{\mathcal{D}}$ ) kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathcal{D}$  oder  $\hat{\mathcal{D}}$ ), geschrieben werden.

Beweis. [6, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exersice"

□

**Definition 1.10.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$  gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man  $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$  sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

*Beweis.* Sei  $P \in F_N \mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.11.** *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

*isomorph als grad. Ringe*

*Beweis.* TODO

Treffen?

□

### 1.2.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei  $A$  nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring  $A \langle \partial_x \rangle$  kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit  $F(A \langle \partial_x \rangle)$  bezeichnen werden. Sei  $P$  ein bzgl. 1.9 minimal geschriebener Operator, so ist  $P$  in  $F_k$  falls der maximale Grad von  $\partial_x$  in  $P$  kleiner oder gleich  $k$ . So definiere den Grad  $deg P$  von  $P$  als die Eindeutige ganze Zahl  $k$  mit  $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle / F_{k-1} A \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

### 1.2.2 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$

## 1.3 *D*-Moduln

### 1.3.1 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduls

**Definition 1.12.** Sei  $M$  ein  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und  $K = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ , dann ist die Lokalisierung

$$M[x^{-1}] := M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K.$$

### 1.3.2 Lokalisierung eines holonomen $\mathcal{D}$ -Moduls

## 2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [6]

### 2.1 Definition

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an  $x = 0$ )  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vr
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$

erfüllen soll.

*Bemerkung 2.2.* Später wird man auf die Angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}_K$  als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

**Definition 2.3.** Sei  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}^\varphi$  für den Rang 1 Vektorraum  $\mathbb{C}((u))$  ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla = \partial_u + \partial_u \varphi$ , so dass  $\nabla_{\partial_u} 1 = \varphi'$ . Es gilt  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$  genau dann wenn  $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$ .

### 2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

**Satz 2.4.** [6, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonom lokalisiertes  $\mathcal{D}$ -Modul und andersherum.

Beweis. [6, Thm 4.3.2] □

- Lemma vom zyklischen Vektor  
[6, Thm 4.3.3]  
[1, Satz 4.8]

**Lemma 2.5.** [1, Satz 4.12] Sei  $\mathcal{M}_K$  ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein  $P \in \mathcal{D}_K$  so dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ .

Beweis. [1, Satz 4.12] □

**Lemma 2.6.** Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}_K$ , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1}\partial\varphi} & K^r \end{array}$$

gilt:  $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$  ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Sind  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Meromorphe Zusammenhänge auf  $\mathcal{M}_K \cong K^r$ . So betrachte  $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  :

$$\begin{aligned} (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\ &= f'u + f\partial_1u - f'u - f\partial_2u \\ &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \end{aligned}$$

**Lemma 2.7.** Da  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear und, wie eben gezeigt,  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$  allgemein gilt: Die Differenz zweier Meromorpher Zusammenhänge ist  $K$ -linear.

Insbesondere ist  $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also es existiert eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  mit  $\frac{d}{dz} - \partial = A$ , also ist  $\partial = \frac{d}{dz} - A$ .

**Definition 2.8** (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & K^r \\
 & \searrow \cong \varphi & & \nearrow \cong \psi & \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \cong \psi & & \searrow \cong \varphi & \\
 K^r & & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & K^r \\
 \cong T \uparrow & & & & \uparrow \cong T \\
 K^r & & & & K^r
 \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$  und  $(\frac{d}{dz} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:

Der Merom. Zush.  $\frac{d}{dz} + A$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

**Definition 2.9.**  $A \sim B$  differenziell Äquivalent  $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$  mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

$$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$$

$$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$$

## 2.3 pull-back und push-forward

[4, 1.3]

nach [7, 1.a]. Sei  $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$  mit Bewertung  $p \geq 1$  und sei  $\mathcal{M}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}((t))$  Vektorraum ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla$ .

**Definition 2.10** (pull-back). Der *pull-back*  $\rho^+ \mathcal{M}$  ist der Vektorraum  $\rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathcal{M}$  mit dem *pull-back Zusammenhang*  $\rho^* \nabla$  definiert durch  $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

wie sieht die wirkung vom pull-back zusammenhang aus?

$$\partial_t(f(t)m) = \dots = \rho'(u)^{-1} \partial_u f(t)m$$

Sei  $\mathcal{N}$  ein  $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung, so definiere

**Definition 2.11** (push-forward). Der *push-forward*  $\rho_+ \mathcal{N}$  ist definiert durch:

- der  $\mathbb{C}((t))$ -VR  $\rho_* \mathcal{N}$  ist der  $\mathbb{C}$ -VR  $\mathcal{N}$  mit der  $\mathbb{C}((t))$  Struktur durch  $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- die wirkung von  $\partial_t$  ist die von  $\rho'(u)^{-1} \partial_u$

**Beispiel 2.12** (push-forward). Betrachte  $\rho : t \rightarrow u^2$ ,  $\varphi = \frac{1}{u^2}$

Betrachte:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \hat{\mathcal{D}} / \hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_t \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}} / \hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \frac{2}{u^3}) \end{aligned}$$

TODO

also  $P = \partial_u + \frac{2}{u^3}$  mit  $\text{slopes}(P) = \{2\}$

mache nun einen push-forward mittels  $\rho$ :

$$\begin{aligned} (\partial_u + \frac{2}{u^3}) &= 2u(\frac{1}{2u} \partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u) \partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist

$$\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}} / \hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

also  $\rho_* P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$  mit  $\text{slopes}(P) = \{1\}$

TODO

**Satz 2.13.** *Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) \cong \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \quad (2.2)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+ \mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\ &= \rho_+ \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M} \end{aligned}$$

□

## 2.4 Formale Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 2.14** (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Ein *Formaler Meromorpher Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_{\hat{K}}, \partial)$  besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ , ein endlich dimensionaler  $\hat{K}$ -Vr
- eine *Derivation*  $\partial$ , für die die *Leibnitzregel* (2.1), für alle  $f \in \hat{K}$  und  $u \in \mathcal{M}_{\hat{K}}$ , erfüllt sein soll.



Oder einfach ein Meromorpher Zshg. über anderes  $K$  also  $\hat{K}$

*Bemerkung 2.15.* alle bisher gegebenen Definitionen und Lemmata gelten für formale Meromorphe Zusammenhänge analog wie für konvergente Meromorphe Zusammenhänge.

## 2.5 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

**Definition 2.16** (Elementarer formaler Zusammenhang). [7, Def 2.1] Zu einem gegebenen  $\rho \in u\mathbb{C}[[u]]$ ,  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  und einem endlich dimensionalen  $\mathbb{C}((u))$ -Vektorraum  $R$  mit regulärem Zusammenhang  $\nabla$ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensionalen  $\mathbb{C}((t))$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

## 2.6 Newton Polygon

Jedes  $P \in \mathcal{D}$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$P = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit  $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$  schreiben und betrachte das dazugehörige

$$H := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \{(k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

bei sabbah:  $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  und dann konvexe hülle davon in  $\mathbb{R}^2$

**Definition 2.17.** Das Randpolygon von  $\text{conv}(H)$  heißt das *Newton Polygon* von  $P$  und wird geschrieben als  $N(P)$ .

**Definition 2.18.** Die *Steigungen* (engl. *slopes*) sind die nicht-vertikalen Steigungen von  $N(P)$ , die sich echt rechts von  $\{0\} \times \mathbb{R}$  befinden.

- $P$  heißt *regulär singulär*  $:\Leftrightarrow$  slopes  $P = \{0\}$ , sonst *irregulär singulär*.

alternativ:  $:\Leftrightarrow$  wenn  $\text{conv}(H)$  ein Quadrant ist

- Schreibe  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$  für die Menge der zu  $\mathcal{M}_K$  gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}_K$  heißt regulär singulär, falls  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  mit  $P$  regulär singulär, sonst irregulär singulär

alternativ  $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \{0\}$

### 3 Levelt-Turittin-Theorem

sabbah\_cimpba90 seite 28 / 30

Sei  $M_{\hat{K}} = \mathcal{D}_{\hat{K}} / \mathcal{D}_{\hat{K}} \cdot P$  und nehme an, dass  $N(P)$  zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte  $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$  in 2 Teile. Dann gilt:

**Lemma 3.1.** *Es existiert eine Aufteilung  $P = P_1 P_2$  mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$  und  $N(P_2) \subset N_2$
- $A$  ist eine kante von ...

sabbah\_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei  $\rho : u \mapsto u^p$  und  $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$ .

**Lemma 3.2.** *[7, Lem 2.4] Für alle  $\varphi \in \mathbb{C}((u))$  gilt*

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

*Beweis.* Wir wählen eine  $\mathbb{C}((u))$  Basis  $\{e\}$  von  $\mathcal{E}^\varphi$  und zur vereinfachung nehmen wir an, dass  $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  <sup>[1]</sup>.

Dann ist die Familie  $e, ue, \dots, u^{p-1}e$  eine  $\mathbb{C}((t))$ -Basis von  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Setze  $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$ . Dann ist die Familie  $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$  eine  $\mathbb{C}((u))$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Zerlege nun  $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$  mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$  (siehe: Anhang A).

---

<sup>[1]</sup>  $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

Sei  $P$  die Permutationsmatrix, definiert durch  $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  <sup>[2]</sup>.

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho + \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, \dots, u\partial_u e_{p-1}) \\ \hline {}^{[2]}P &= \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_u$  auf die Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$  ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun  $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$ , mit  $\xi^p = 1$  und  $T \in Gl_p(\mathbb{C})$ .

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\
&= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

---

<sup>[3]</sup> Klar, da mipo  $X^p - 1$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} [4] \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von  $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$  aus?

$$\begin{aligned}
 \partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow[\cong]{} & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \mathbb{C}((u))^p & \xrightarrow[\cong]{} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}
 \end{array}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$  und  $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j$  ein Äquivalenter Moromorpher Zusammenhang definiert ist.

□

## **Teil II**

# **Beispiele**

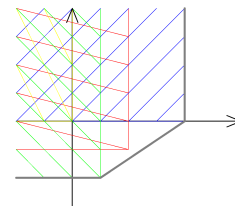
## 4 Beispiele/Anwendung

### 4.1 Einfache Beispiele

Hier soll ein einfaches Beispiel hergeleitet werden, an dem die Zerlegung nach dem Levelt-Turittin-Theorem einmal explizit ausformuliert werden soll.

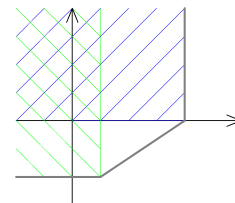
Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



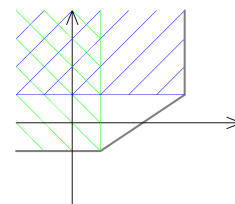
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit  $t$  und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [6, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$





und es gilt  $\text{slopes}(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$ . Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich  $\rho : t \mapsto u^3$  für den Pullback an.

Dieser Pullback Multipliziert (indirekt) die Slopes mit 3, **Quelle?**  
aber wie wendet man ihn (explizit) an?

$$\rho^+ P = ???$$

welches die Slopes  $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$  hat. Schreibe nun dieses  $\rho^+ P = Q \cdot R$  mit  $P, Q \in \mathbb{C}[[u]]$  wobei gilt  $\text{slopes}(Q) = \{0\}$  und  $\text{slopes}(R) = \{2\}$ .

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

## 4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zerfällt

### 4.2.1 beispiel von sabbah

Sei  $P = t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2}$

1. zeige  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  ist ein Meromorpher Zusammenhang.
2. Zeichne das Newton Polygon von  $P$  und finde eine formale Aufteilung von  $\mathcal{M}_{\hat{K}}$ .
3. Zeige  $\mathcal{M}$  kann nicht in eine direkte Summe von zwei  $\mathcal{D}$  modulen zerlegt werden, dazu:

a) Zeige das die Produktzerlegung

$$P = (t(t\partial_t) + v(t)) \cdot (t\partial_t + u(t)),$$

mit  $u, v \in \mathbb{C}[[u]]$ , existiert.

b) Berechne durch Induktion die Koeffizienten von  $u$ .

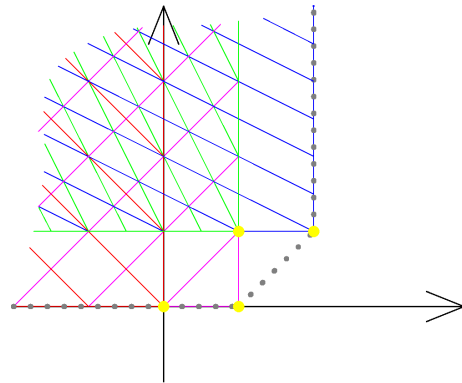
c) Zeige dass  $u \notin \mathbb{C}((u))$ .

### Schritt 1

Zeige das  $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$  einen Meromorphen Zusammenhang Definiert.

### Schritt 2

$$\begin{aligned} P &= t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= tt(\partial_t t)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= t^2(t\partial_t + 1)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= t^3\partial_t^2 + (t^2 + t)\partial_t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Also mit slopes  $P = \{0, 1\}$

### Schritt 3 a)

### Schritt 3 b)

### Schritt 3 c)

### 4.2.2 Beispiel ohne namen

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau\partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

und gehe von  $\tau$  über zu  $t$  via  $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$ :

- was passiert mit der Ableitung  $\partial_\tau$ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2\partial_t$$

- was ist  $\partial_t(t^2\partial_t)$ ?

$$\begin{aligned}\partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t\end{aligned}$$

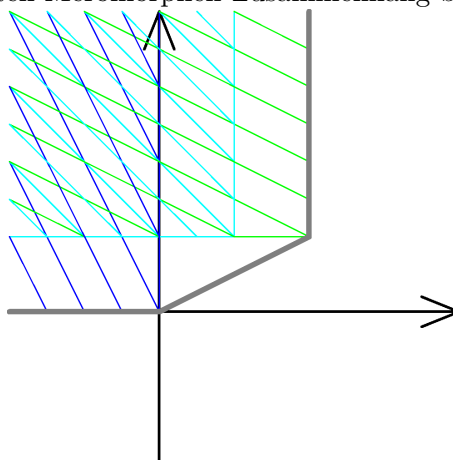
- was passiert mit  $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$ ?

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1 \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1 \\ &= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t(\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t(t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t) - 2t^2 \partial_t - 1 \\ &= t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1 =: P\end{aligned}$$

Wir wollen nun den zum folgendem  $P$  assoziierten Meromorphen Zusammenhang betrachten:

$$P = t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1$$

mit  $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$



Wir wollen ganzzahlige slopes haben, also werde den pull-back  $\rho : t \rightarrow u^2$  an.

Zunächst ein paar nebenrechnungen:

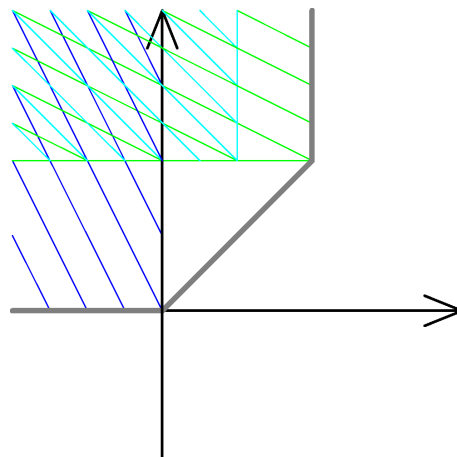
$$\begin{aligned}\partial_t &= \frac{1}{\rho'} \partial_u = \frac{1}{2u} \partial_u \\ \partial_t^2 &= \left( \frac{1}{2u} \partial_u \right)^2 \\ &= \frac{1}{2u} \left( -\frac{1}{2u^2} \partial_u + \frac{1}{2u} \partial_u^2 \right) \\ &= -\frac{1}{4u^3} \partial_u + \frac{1}{4u^2} \partial_u^2\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\rho^+ P &= u^6 \left( -\frac{1}{4u^3} \partial_u + \frac{1}{4u^2} \partial_u^2 \right) - 4u^4 \frac{1}{2u} \partial_u - 1 \\ &= -u^3 \frac{1}{4u^3} \partial_u + \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - 4u^3 \frac{1}{2} \partial_u - 1 \\ &= \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - 2 \frac{1}{4} u^3 \partial_u - 1\end{aligned}$$

$$\rho^+ P = \frac{1}{4} u^4 \partial_u^2 - 2 \frac{1}{4} u^3 \partial_u - 1$$

mit  $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{1\}$







# Literaturverzeichnis

- [1] B. Alkofer and F. Vogl. Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht, 2009.
- [2] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [4] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2007.
- [5] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [6] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.
- [7] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform, June 2007.
- [8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>.