

Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

**Institut für Mathematik
der
Universität Augsburg**

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

stand: 24. November 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Mathematische Grundlagen	1
1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra	1
1.2 Weiterführende Definitionen	2
1.3 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}	2
1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring	4
1.4 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D}	4
1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules	4
1.6 Lokalisierung eines holonomen \mathcal{D} -Modules	4
2 Der Meromorpher Zusammenhang	5
2.1 Definition	5
2.2 Eigenschaften	5
3 Weiterführende Aussagen	7
Anhang	10
A Aufteilung von ...	10

Einleitung

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [4] und [1] beziehen.

1.1 Einige Ergebnisse aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$

wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$.

Lemma 1.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Firation, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] \mid v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

3. $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]$ ist ein Unterring der Potenzreihen, wobei der Konvergenzradius echt positiv ist.
ist ähnlich zu $\mathbb{C}[[x]]$

Definition 1.2 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = b \cdot a - a \cdot b$$

der *Kommutator von a und b* genannt.

1.2 Weiterführende Definitionen

Definition 1.3 (pull-back). Der *pull-back* ρ^+M ist der Vektorraum $\rho^*M = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((u))} M$ mit der *pull-back Verknüpfung (connection)* $\rho^*\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$

sei nun N ein $\mathbb{C}((u))$ -VR mit Verknüpfung

Definition 1.4 (push-forward). Der *push-forward* ρ_+N ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}((t))$ -VR ρ_*N ist der \mathbb{C} -VR N mit der $\mathbb{C}((t))$ Struktur durch $f(t) \cdot 0 := f(\rho(t))m$
- die Wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$

Satz 1.5. es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(N \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+M) \cong \rho_+N \otimes_{\mathbb{C}((t))} M \quad (1.1)$$

TEST für ref

1.5

TEST für eqref

(1.1)

1.3 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [4, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[[x]]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f :

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.2)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.6 (Weyl Algebra). Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra \mathcal{D} von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[[x]]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.2).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ (bzw. $\mathcal{D} = \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$) verwenden.

countinho's ansicht: Sei $K\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ eine freie Algebra in $2n$ variablen. Die Multiplikation von zwei Monomen ist als einfaches Nebeneinanderschreiben Definiert. Betrachte nun den folgenden Homomorphismus:

$$\varphi : K\{z_1, \dots, z_{2n}\} \rightarrow A_n$$

mit $\varphi(z_i) = x_i$ und $\varphi(z_{i+n}) = \partial_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sei J das (two sided) Ideal von $K\{x_1, \dots, x_{2n}\}$ generiert durch:

- $[z_{i+n}, z_i] - 1$ für $i = 1, \dots, n$
- $[z_i, z_j]$ für $j \neq i + n$ und $1 \leq i, j \leq 2n$

So dass φ einen homomorphismus

$$\varphi : K\{z_1, \dots, z_{2n}\}/J \rightarrow A_n$$

induziert.

Bemerkung 1.7. $A_1(\mathbb{C})$, \mathcal{D} und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Lemma 1.8. *Es gelten die Formeln*

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1}$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i}$$

Beweis. Zula Barbara □

Proposition 1.9. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. \mathcal{D} oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [4, Proposition 1.2.3]

ein teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Definition 1.10. Sei $\deg P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ bzgl. n minimal geschrieben, so ist $\deg P := n$ der *Grad* von P . So definiere $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P \leq N\}$ und erhalte die aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} \mid \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. mit isom: $[P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$

□

Proposition 1.11. *Es gilt:*

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
Isom. von grad. Ringen

1.3.1 Weyl Algebra als Graduierter Ring

Sei A nun einer der drei Koeffizienten Ringe, welche zuvor behandelt wurden. Der Ring $A \langle \partial_x \rangle$ kommt zusammen mit einer aufsteigenden Filtrierung, welche wir mit $F(A \langle \partial_x \rangle)$ bezeichnen werden. Sei P ein bzgl. 1.9 minimal geschriebener Operator, so ist P in F_k falls der maximale Grad von ∂_x in P kleiner oder gleich k . So definiere den Grad $\deg P$ von P als die Eindeutige ganze Zahl k mit $P \in F_k A \langle \partial_x \rangle \setminus F_{k-1} A \langle \partial_x \rangle$

Unabhängigkeit von Schreibung wird in Sabbah Script behauptet

1.4 Struktur von Links-Idealen auf \mathcal{D}

1.5 Lokalisierung eines $\mathbb{C}\{x\}$ -Modules

1.6 Lokalisierung eines holonomen \mathcal{D} -Modules

2 Der Meromorpher Zusammenhang

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher zusammenhang* (Bzw. besser *Keim eines Meromorphen Zusammenhangs*) besteht aus folgenden Daten:

- M , ein endlich dimensionaler K -Vr wobei $K = \mathbb{C}\{z - x_0\}[(z - x_0)^{-1}]$
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : M \rightarrow M$, welche die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u$$

erfüllt.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften von Meromorphen Zusammenhängen.

Sei (M, ∂) ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, so wähle eine Basis $(m_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ von M . Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\partial} & M \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \partial \varphi} & K^r \end{array}$$

Definition 2.2 (Transformationsformel). In der Situation

$$\begin{array}{ccccc} K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\ & \searrow \cong \varphi & & & \nearrow \cong \varphi \\ & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\ & \nearrow \cong \psi & & & \searrow \cong \psi \\ K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

3 Weiterführende Aussagen

Lemma 3.1. $\rho : u \mapsto u^p$, $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$, für alle $\varphi \in \mathbb{C}((u))$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}$$

Wir wählen eine $\mathbb{C}((u))$ Basis $\{e\}$ von \mathcal{E}^φ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].

Dann ist die Familie $e, ue, \dots, u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}((t))$ -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$ -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[j^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ [2].

Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k \varphi'(u)e) \\ &= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \varphi'(u)e \\ &= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1} \varphi'(u)e \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k \underbrace{u^i \psi_i(u^p)}_{\in \mathbb{C}((t))} e \end{aligned}$$

[1] $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[u]]}$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) (u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p}
\end{aligned}$$

so dass gilt:

$$u \partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j P^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
u \partial_u \mathbf{e} &= (u \partial_u e_0, \dots, u \partial_u e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i \psi_i(u^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i \psi_i(u^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) \\ u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) & & \ddots & u^2 \psi_2(u^p) \\ u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & \ddots & & u^3 \psi_3(u^p) \\ u^3 \psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \\ u^{p-2} \psi_{p-2}(u^p) & \dots & u^3 \psi_3(u^p) & u^2 \psi_2(u^p) & u^1 \psi_1(u^p) & u^{p-1} \psi_{p-1}(u^p) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p) P^j \right]
\end{aligned}$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j \right]$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}^{[3]}$, mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) P^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) (TPT^{-1})^j \right] \\
&= \left[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j(u^p) D^j \right]
\end{aligned}$$

^[3] Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (u \xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} \end{pmatrix} [4] \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} u) \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wie sieht dann die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi}$ aus?

$$\begin{array}{ccccccc}
 e_i & \rho^+ \rho_+ \mathcal{O}^{\varphi(u)} & \longleftarrow \cong & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{T} & \mathbb{C}((u))^p & \longrightarrow \cong & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi} & \mathbf{e} \\
 \downarrow & \downarrow \partial_u & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_u & \downarrow \\
 \partial_u e_i & \rho^+ \rho_+ \mathcal{O}^{\varphi(u)} & \longleftarrow \cong & \mathbb{C}((u))^p & \xleftarrow{T} & \mathbb{C}((u))^p & \longrightarrow \cong & \bigoplus_{\xi^{p=1}} \mathcal{O}^{\varphi \circ \mu_\xi} & \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1} \psi_j P^j] \\
 & ? & \longleftarrow \vdash & (... , 0, 1, 0, ...) & & (... , 0, 1, 0, ...) & \vdash \longrightarrow & (... , 0, 1, 0, ...) &
 \end{array}$$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i} u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1} u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \dots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \dots + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \dots$$

also:

$$\begin{aligned} \psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \dots \\ \psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \dots \\ &\vdots \\ \psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^p + a_{-(p+2)}u^{2p} + \dots \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [3] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [4] Claude Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.