Bachelorarbeit

mein thema

vorgelegt von

Maximilian Huber

am

Institut für Mathematik

der

Universität Augsburg

betreut durch

Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am

noch nicht

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Teil I

Theorie

1 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [6] und [2] beziehen.

1.1 Einige Ergebnise aus der Kommutativen Algebra

In dieser Arbeit spielen die folgenden Ringe eine Große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^{N} a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i |\text{pos. Konvergenzradius}\}$
- $\mathbb{C}[\![x]\!] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\hat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Wobei offensichtlich gilt $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Definition 1.1 (Direkte Summe)**.** [8, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in Ob(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
x \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\alpha"'] & x \oplus y \arrow[dr, dashed, "\exists!\gamma"] & \\
& & w
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 1.2 (Tensorprodukt)**.** [8, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists! \gamma"] \\ & T \end{tikzcd}$$

1.2 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [6, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Sei $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in \mathbb{C}[x]$ (bzw. $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. $\mathbb{C}[\![x]\!]$). Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{1.1}$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, f] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g$$

Definition 1.3 (Weyl Algebra)**.** Definiere nun die Weyl Algebra $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. die Algebra $\mathcal{D}$ von linearen Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{C}\{x\}$ bzw. die Algebra $\hat{\mathcal{D}}$ (Koeffizienten in $\mathbb{C}[\![x]\!]$)) als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring zusammen mit dem Element ∂_x, erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1).

Wir werden die Notation $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] < \partial_x >$ (bzw. $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} < \partial_x >$ bzw. $\hat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[\![x]\!] < \partial_x >$) verwenden.

Lemma 1.4. *Sei A einer der 3 soeben eingeführten Objekten, so definieren die Addition*

$$+ : A \times A \to A$$

und die Multiplikation

$$\cdot : A \times A \to A$$

eine Ringstruktur auf A.

Beweis. [1, Kapittel 2 Section 1] □

Bemerkung 1.5. $A_1(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}$ und $\hat{\mathcal{D}}$ sind nicht kommutative Algebren.

Definition 1.6 (Kommutator)**.** Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

der *Kommutator von a und b* genannt.

Proposition 1.7. *1. Es gilt*

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$$

2. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$, so gilt:

$$[\partial_x, f] = \frac{}{\partial x}.$$

Denn für $g \in \mathbb{C}[x]$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned}[\partial_x, x^k] &= kx^{k-1} \\ [\partial_x^j, x] &= j\partial_x^{j-1} \\ [\partial_x^j, x^k] &= \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)\cdot j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} x^{k-i}\partial_x^{j-i}\end{aligned}$$

Beweis. [1] □

Proposition 1.8. *Jedes Element in $A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$) kann auf eindeutige weiße als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$, mit $a_i(x) \in A_1(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{D}$ oder $\hat{\mathcal{D}}$), geschrieben werden.*

Beweis. [6, Proposition 1.2.3] □

Definition 1.9. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$ gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

In natürlicher Weise erhält man $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ sowie die entsprechende aufsteigende Filtrierung

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F\mathcal{D} \underset{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N\mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \to \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.10. *Es gilt:*

$$\underbrace{gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{N\in\mathbb{Z}} gr^F_N\mathcal{D} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} gr^F_N\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N}_{\substack{\text{isomorph als grad. Ringe} \\ \cong}}$$

also

$$gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\}\cdot\xi^N\,.$$

Beweis. TODO □

1.2.1 Struktur von Links-Idealen auf $\mathcal{D}$

2 Der Meromorpher Zusammenhang

Quelle ist [6]

2.1 Definition

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang)**.** Ein (*Keim eines*) *Meromorpher Zusammenhang* (an $x = 0$) $(\mathcal{M}_K, \partial)$ besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$, ein endlich dimensionaler K-Vr
- einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

  $$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.1}$$

  erfüllen soll.

Bemerkung 2.2. Später wird man auf die Angabe von ∂ verichten und einfach $\mathcal{M}_K$ als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen.

Definition 2.3. [7, 1.a] Sei $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$. Wir schreiben $\mathscr{E}^\varphi$ für den Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_u + \partial_u\varphi$, so dass $\nabla_{\partial_u} 1 = \varphi'$. Es gilt $\mathscr{E}^\varphi \cong \mathscr{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi$ mod $\mathbb{C}(\!(u)\!)$.

Bemerkung 2.4. [7, 1.a] Es gilt $\mathscr{E}^\varphi \cong \mathscr{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[\![u]\!]$.

2.2 Eigenschaften

Hier nun einige Eigenschaften Meromorpher Zusammenhänge.

Satz 2.5. *[6, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein $\mathcal{D}$-Modul und andersherum.*

Beweis. [6, Thm 4.3.2] □

Lemma 2.6. *[1, Satz 4.12] [6, Thm 4.3.2] Ist $\mathcal{M}_K$ ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.*

Beweis. [1, Satz 4.12] □

Lemma 2.7. *Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach $\mathcal{M}_K$, also in der Situation*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_K \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{M}_K \\
K^r \arrow[u, "\cong\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\partial\varphi"] & K^r \arrow[u, "\varphi\cong"']
\end{tikzcd}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1}\partial\varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Sind ∂_1 und ∂_2 zwei Meromorphe Zusammenhänge auf $\mathcal{M}_K \cong K^r$. So betrachte $\partial_1 - \partial_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$:

$$\begin{aligned}
(\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
&= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
&= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
\end{aligned}$$

Lemma 2.8. *Da $\partial_1 - \partial_2$ $\mathbb{C}$-linear und, wie eben gezeigt, $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)$ allgemein, gilt: Die differenz zweier Meromorpher Zusammenhäge ist K-linear.*

Insbesondere ist $\frac{d}{dz} - \partial : K^r \to K^r$ K-linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dz} - \partial = A$, also ist $\partial = \frac{d}{dz} - A$.

Definition 2.9 (Transformationsformel)**.** In der Situation

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[rrr, "\frac{d}{dz} + A"] \arrow[dr, "\varphi"', "\cong"] & & & K^r \arrow[dl, "\varphi", "\cong"'] \\
& M \arrow[r, "\partial"] & M & \\
K^r \arrow[uu, "\cong T"] \arrow[ur, "\psi", "\cong"'] \arrow[rrr, "\frac{d}{dz} + B"] & & & K^r \arrow[uu, "T\cong"'] \arrow[ul, "\psi"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

mit φ, ψ und T K-Linear und $\partial, (\frac{d}{dz} + A)$ und $(\frac{d}{dz} + B)$ $\mathbb{C}$-Linear, gilt:
Der Merom. Zush. $\frac{d}{dz} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dz} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dz} + B$$

Definition 2.10. $A \sim B$ differenziell Äquivalent $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(r, K)$ mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$

2.3 pull-back und push-forward

Nach [7, 1.a]. Sei $\rho \in u\mathbb{C}[\![u]\!]$ mit Bewertung $p \geq 1$ und sei $\mathcal{M}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇.

Definition 2.11 (pull-back)**.** [7, 1.a] Der *pull-back* $\rho^+\mathcal{M}$ ist der Vektorraum $\rho^*\mathcal{M} = \mathbb{C}(\!(u)\!) \otimes_{\mathbb{C}(\!(u)\!)} \mathcal{M}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^*\nabla$ definiert durch $\partial_u(1 \otimes m) := \rho'(u) \otimes \partial_t m$.

Sei $\mathcal{N}$ ein $\mathbb{C}(\!(u)\!)$-VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.12 (push-forward)**.** [7, 1.a] Der *push-forward* $\rho_+\mathcal{N}$ ist definiert durch:

- der $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-VR $\rho_*\mathcal{N}$ ist der $\mathbb{C}$-VR $\mathcal{N}$ mit der $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ Struktur durch $f(t) \cdot m := f(\rho(t))m$
- die Wirkung von ∂_t ist die von $\rho'(u)^{-1}\partial_u$

Beispiel 2.13 (push-forward)**.** Für $\rho : t \to u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^{\varphi} &\cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_t \frac{1}{u^2}) \\ &= \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \frac{2}{u^3})\end{aligned}$$

TODO

also $P = \partial_u + \frac{2}{u^3}$ mit slopes$(P) = \{2\}$

mache nun einen push-forward mittels ρ:

$$\begin{aligned}(\partial_u + \frac{2}{u^3}) &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2})\end{aligned}$$

Also ist

$$\rho_+\mathscr{E}^\varphi \cong \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$$

also $\rho_* P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ mit $\text{slopes}(P) = \{1\}$

TODO

Satz 2.14. *[7, 1.a] Es gilt die Projektionsformel*

$$\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) \cong \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}\,. \tag{2.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \rho^+\mathcal{M}) &= \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} (\mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M})) \\
&\cong \rho_+((\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((u))} \mathbb{C}((u))) \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\
&\cong \rho_+(\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}) \\
&= \rho_+\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}((t))} \mathcal{M}
\end{aligned}$$

□

2.4 Newton Polygon

Jedes $P \in \mathcal{D}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$P = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} t^l \partial_t^k$$

mit $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ schreiben und betrachte das dazugehörige

$$H := \bigcup_{k,l \text{ mit } \alpha_{kl} \neq 0} \{(k, l-k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Definition 2.15. Das Randpolygon von $\text{conv}(H)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird geschrieben als $N(P)$.

Definition 2.16. Die *Steigungen (engl. slopes)* sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- P heißt *regulär singulär* $:\Leftrightarrow$ slopes $P = \{0\}$, sonst *irregulär singulär*.
- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ für die Menge der zu $\mathcal{M}_K$ gehörigen slopes
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_K$ heißt regulär singulär, falls $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ mit P regulär singulär, sonst irregulär singulär

3 Levelt-Turittin-Theorem

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten. Alle bisher getroffenen Aussagen gelten für diese aber analog.

Satz 3.1. *[6, Thm 5.3.1]*

Sei $\rho : u \mapsto u^p$ und $\mu_\xi : u \mapsto \xi u$.

Lemma 3.2. *[7, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \mathbb{C}(\!(u)\!)$ gilt*

$$\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}\,.$$

Beweis. Wir wählen eine $\mathbb{C}(\!(u)\!)$ Basis $\{e\}$ von $\mathscr{E}^\varphi$ und zur vereinfachung nehmen wir an, dass $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ [1].
Dann ist die Familie $e, ue, ..., u^{p-1}e$ eine $\mathbb{C}(\!(t)\!)$-Basis von $\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Setze $e_k = u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} u^k e$. Dann ist die Familie $\mathbf{e} = (e_0, ..., e_{p-1})$ eine $\mathbb{C}((u))$-Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^\varphi$.
Zerlege nun $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p) \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$ (siehe: Anhang A).

Sei P die Permutationsmatrix, definiert durch $\mathbf{e} \cdot P = (e_1, ..., e_{p-1}, e_0)$ [2].
Es gilt:

$$u\partial_u e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} u\partial_u e_k &= u\partial_u(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} u^k e) \\ &= u(-ku^{-k-1} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} u^k e + pu^{p-1}u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} \partial_t(\underbrace{u^k e}_{\in\rho_+\mathscr{E}^\varphi})) \\ &= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} u^k e + pu^{p-1}u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}(\!(t)\!)} (pu^{p-1})^{-1}(ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \end{aligned}$$

[1] $\mathscr{E}^\varphi = \mathscr{E}^\psi \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi \mod \mathbb{C}[[u]]$

[2] $P = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= -ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} (ku^{k-1}e + u^k\varphi'(u)e) \\
&= \underbrace{-ku^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} ku^{k-1}e}_{=0} + u^{-k+1} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k\varphi'(u)e \\
&= u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^{k+1}\varphi'(u)e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k u^i \underbrace{\psi_i(u^p)}_{\in\mathbb{C}((t))} e \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)(u^{-k} \otimes_{\mathbb{C}((t))} u^k e) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p}
\end{aligned}
$$

so dass gilt:

$$
u\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j P^j]
$$

denn:

$$
\begin{aligned}
u\partial_u \mathbf{e} &= (u\partial_u e_0, ..., u\partial_u e_{p-1}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} u^i\psi_i(u^p)e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} u^i\psi_i(u^p)e_{k+i-p} \right)_{k\in\{0,..,p-1\}} \\
&= \mathbf{e} \begin{pmatrix}
u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) \\
u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & & & \ddots & u^2\psi_2(u^p) \\
u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & \ddots & & & u^3\psi_3(u^p) \\
u^3\psi_3(u^p) & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p) & \\
u^{p-2}\psi_{p-2}(u^p) & \cdots & u^3\psi_3(u^p) & u^2\psi_2(u^p) & u^1\psi_1(u^p) & u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)
\end{pmatrix} \\
&= \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^j\psi_j(u^p)P^j]
\end{aligned}
$$

Die Wirkung von ∂_u auf die Basis von $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ ist also Beschrieben durch:

$$
\partial_u \mathbf{e} = \mathbf{e}[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j]
$$

Diagonalisiere nun $TPT^{-1} = D = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix}$[3], mit $\xi^p = 1$ und $T \in Gl_p(\mathbb{C})$.

So dass gilt:

$$\begin{aligned}
T[\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)P^j]T^{-1} &= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)(TPT^{-1})^j] \\
&= [\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j(u^p)D^j] \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j \left(\xi^1\right)^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j \left(\xi^{p-1}\right)^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^1)^{j-1}\psi_j\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1}(u\xi^{p-1})^{j-1}\psi_j\xi^{p-1} \end{pmatrix} \text{[4]} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi'(u) & & & \\ & \varphi'(\xi u)\xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1}u)\xi^{p-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wie sieht denn die Wirkung auf die Basis von $\bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \overset{\Phi}{\cong} \mathbb{C}((u))^p$ aus?

$$\partial_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u 0 \\ \partial_u 1 \\ \partial_u 0 \\ \vdots \\ \partial_u 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi'(u)\xi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also kommutiert das Diagram:

[3]Klar, da mipo $X^p - 1$

$$\begin{tikzcd}
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} \arrow[d, "\partial_u"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j P^j"] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j"] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi} \arrow[d, "\partial_u"] \\
\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)} & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "\cong"'] & \mathbb{C}((u))^p \arrow[l, "T", "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathscr{E}^{\varphi\circ\mu_\xi}
\end{tikzcd}$$

Und deshalb ist klar ersichtlich das auf $\rho^+\rho_+\mathscr{E}^{\varphi(u)}$ und $\sum_{j=0}^{p-1} u^{j-1}\psi_j D^j$ ein Äquivalenter Meromorpher Zusammenhang definiert ist.

$\square$

Teil II

Beispiele

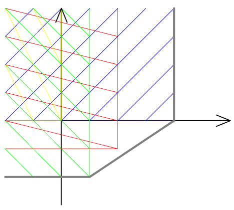
4 Beispiele/Anwendung

4.1 Einfache Beispiele

Hier soll ein einfaches Beispiel hergeleitet werden, an dem die Zerlegung nach dem Levelt-Turittin-Theorem einmal explizit ausformuliert werden soll.

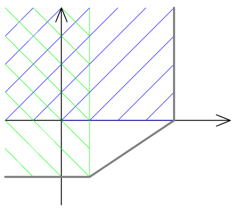
Beginne mit

$$t^4(t+1)\partial_t^4 + t\partial_t^2 + \frac{1}{t}\partial_t + 1$$



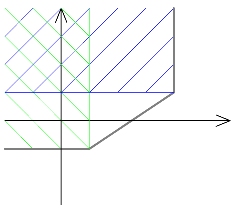
(von ZulaBarbara Seite 47) und ignoriere zuerst die Terme, die zum Newton Polygon keinen Beitrag leisten

$$t^4\partial_t^4 + \frac{1}{t}\partial_t$$



multipliziere dieses mit t und ändere aber dadurch den assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht [6, Chapter 5.1]

$$P := t^5\partial_t^4 + \partial_t$$



und es gilt slopes$(P) = \{0, \frac{2}{3}\}$. Eliminiere als nächstes nun die Brüche in den Slopes mittels einem geeignetem Pullback. Da hier der Hauptnenner 3 ist bietet sich $\rho : t \mapsto u^3$ für den Pullback an.

$$\rho^+ P = ???$$

welches die Slopes $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{0, 2\} \subset \mathbb{Z}$ hat. Schreibe nun dieses $\rho^+ P = Q \cdot R$ mit $P, Q \in \mathbb{C}[\![u]\!]$ wobei gilt $\text{slopes}(Q) = \{0\}$ und $\text{slopes}(R) = \{2\}$.

Also gilt:

$$\hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot \rho^+ P) \cong \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot Q) \oplus \hat{\mathcal{D}}/(\hat{\mathcal{D}} \cdot R)$$

4.2 Meromorpher Zusammenhang der formal, aber nicht Konvergent, zerfällt

4.2.1 beispiel von sabbah

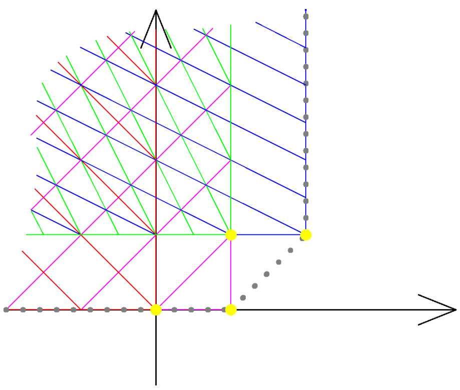
Sei $P = t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2}$

Schritt 1

Zeige das $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ einen Meromorphen Zusammenhag Definiert.

Schritt 2

$$\begin{aligned} P &= t(t\partial_t)^2 + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= tt(\partial_t t)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= t^2(t\partial_t + 1)\partial_t + t\partial_t + \frac{1}{2} \\ &= t^3\partial_t^2 + (t^2 + t)\partial_t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Also mit slopes $P = \{0, 1\}$

Schritt 3 a)

Schritt 3 b)

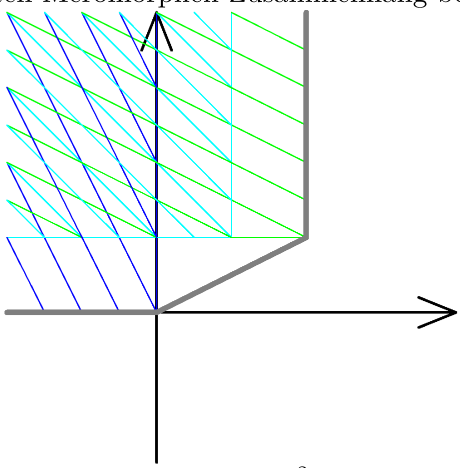
Schritt 3 c)

4.2.2 Beispiel ohne namen

Wir wollen nun den zum folgendem P assoziierten Meromorphen Zusammenhang betrachten:

$$P = t^3\partial_t^2 - 4t^2\partial_t - 1$$

mit slopes$(P) = \{\frac{1}{2}\}$



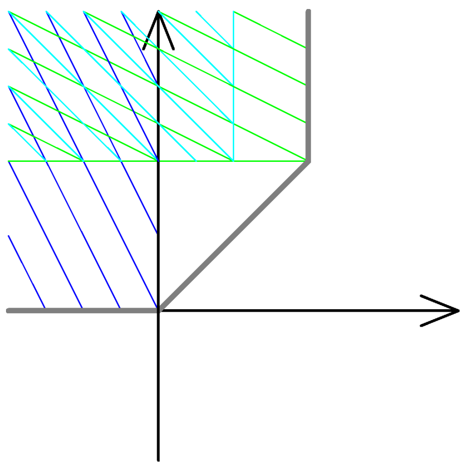
Wir wollen ganzzahlige slopes haben, also wernde den pull-back $\rho : t \to u^2$ an.

Zunächst ein paar nebenrechnungen:

$$\begin{aligned}
\partial_t &= \frac{1}{\rho'}\partial_u = \frac{1}{2u}\partial_u \\
\partial_t^2 &= (\frac{1}{2u}\partial_u)^2 \\
&= \frac{1}{2u}(-\frac{1}{2u^2}\partial_u + \frac{1}{2u}\partial_u^2) \\
&= -\frac{1}{4u^3}\partial_u + \frac{1}{4u^2}\partial_u^2
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\rho^+P &= u^6(-\frac{1}{4u^3}\partial_u + \frac{1}{4u^2}\partial_u^2) - 4u^4\frac{1}{2u}\partial_u - 1 \\
&= -u^3\frac{1}{4u^3}\partial_u + \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 4u^3\frac{1}{2}\partial_u - 1 \\
&= \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1
\end{aligned}$$



$$\rho^+ P = \frac{1}{4}u^4\partial_u^2 - 2\frac{1}{4}u^3\partial_u - 1$$

mit slopes$(\rho^+ P) = \{1\}$

A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^{N} a_{-i}u^{-i} \in u^{-2}\mathbb{C}[u^{-1}]$ also $u\varphi'(u) = \sum_{i=1}^{N} a_{-i-1}u^{-i} \in u^{-1}\mathbb{C}[u^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $u\varphi'(u) = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \psi_j(u^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$:

$\psi_0(u^p)$

$$u\varphi'(u) = a_{-2}u^{-1} + \ldots + a_{-p}u^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(p+2)}u^{-(p+1)} + \ldots + a_{-2p}u^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + a_{-(2p+3)}u^{-(2p+1)} + \ldots$$

$u^{p-1}\psi_{p-1}(u^p)$ $u\psi_1(u^p)$

also:

$$\begin{aligned}
\psi_0(u^p) &= a_{-(p+1)}u^{-p} + a_{-(2p+1)}u^{-2p} + \ldots \\
\psi_1(u^p) &= a_{-p}u^{-p} + a_{-2p}u^{2p} + \ldots \\
&\vdots \\
\psi_{p-1}(u^p) &= a_{-2}u^{p} + a_{-(p+2)}u^{2p} + \ldots
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] B. Alkofer and F. Vogl. Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht, 2009.

[2] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[4] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory.* Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2007.

[5] H. Matsumura and M. Reid. *Commutative Ring Theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[6] C. Sabbah. Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations. Vorlesungsskript.

[7] C. Sabbah. An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform, June 2007.

[8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project.* http://stacks.math.columbia.edu.