

Bachelorarbeit

Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung einer Klasse von Fourier-Transformationen

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 11.05.2013

stand: 21. März 2013

Inhaltsverzeichnis

0	Mathematische Grundlagen	1
1	Moduln über \mathcal{D}_k	6
1.1	Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k	6
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise	8
1.2	(Links) \mathcal{D} -Moduln	9
1.2.1	Holonome \mathcal{D} -Moduln	10
1.3	Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln	10
1.4	Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls	10
2	Meromorphe Zusammenhänge	12
2.1	Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge	12
2.2	Alternativer Zugang	14
2.3	Eigenschaften	14
2.4	Newton Polygon	17
2.4.1	Die Filtrierung ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das L -Symbol	19
2.5	Formale Struktur regulärer Zusammenhänge	20
2.6	pull-back und push-forward	21
2.7	Fouriertransformation	30
3	Elementare Meromorphe Zusammenhänge	31
3.1	Defnintion in [Sab90]	31
3.2	Defnintion in [Sab07]	31
4	Levelt-Turrittin-Theorem	37
4.1	Klassische Version	38
4.2	Sabbah's Refined version	38
5	DIE Klasse der Fourier-Transformationen	39
5.1	Rezept für allgemeine φ	39

5.2	Angewendet für $\varphi_1 := \frac{a}{x}$	41
5.2.1	Levelt-Turritin-Zerlegung für φ_1	42
5.3	Angewendet für $\varphi_2 := \frac{a}{x^2}$	44
5.3.1	Levelt-Turritin-Zerlegung für φ_2	44
5.4	Angewendet für $\varphi_3 := \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$	46
5.5	Angewendet für $\varphi_4 := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$	47
Anhang		47
A Aufteilung von ...		48

Plan :

- * Grundlagen
- * Moduln über D
- * Meromorphe Zusammenhänge
 - Sind spezielle moduln über D ??
 - * ODE zu Meromorphe Zush
 - * Newton polygon und Steigungen
 - * pullback und pushforward
 - * Fouriertransformation
- * Elementare Meromorphe Zusammenhänge
 - Braucht pullback oder pushforward
- * Levelt Turritin Theorem
 - Braucht elem, Meromorphe Zush
- * Das Beispiel
 - * Rezept
 - * Anwenden

0 Mathematische Grundlagen

Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

Wir betrachten \mathbb{C} hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der Klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i | N \in \mathbb{N}\}$ die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i | \text{pos. Konvergenzradius}\}$ ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$ die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$ als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit \tilde{K} bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$ und $K \subsetneq \widehat{K}$ gelten.

Es bezeichnet der Hut ($\widehat{}$) das jeweils formale äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Lemma 0.1 (Seite 2). *ein paar eigenschaften*

1. $\mathbb{C}[x]$ ist ein graduierter Ring, durch die Grad der Polynome. Diese graduierung induziert eine aufsteigende Filtrierung.

alle Ideale haben die form $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{C}$

2. wenn \mathfrak{m} das maximale Ideal von $\mathbb{C}[x]$ (erzeugt von x ist), so ist

$$\mathbb{C}[[x]] = \varprojlim_k \mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}^k$$

The ring $\mathbb{C}[[x]]$ ist ein nöterscher lokaler Ring: jede Potenzreihe mit konstantem term $\neq 0$ ist invertierbar.

Der ring ist ebenfalls ein diskreter ??? Ring (discrete valuation ring)

Die Filtrierung nach grad des Maximalen Ideals, genannt \mathfrak{m} -adische Filtration, ist die Filtrierung $\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] | v(f) \geq k\}$

und es gilt $gr_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}[[x]]) = \mathbb{C}[x]$

Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein Vektor, bezeichnet

$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den Transponierten Vektor. Es bezeichnet $M(n \times m, k)$ die Menge der n mal m Dimensionalen Matrizen mit einträgen in k .

Definition 0.2 (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, eine *Direkte Summe* oder das *coprodukt* von x und y ist ein Objekt $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$ und $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$ und $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$ existiert ein eindeutiges $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ so dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 0.3 (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

Faserprodukt: [Sta12, 4(Categories).6.1]

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\
 & & T
 \end{array}$$

Für eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ definiere das Tensorprodukt davon über R mit N als

$$\begin{aligned}
 \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\
 n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m)
 \end{aligned}$$

Bemerkung 0.4. Hier ein paar Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

Definition 0.5 (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exact, wenn für alle i gilt, dass $\text{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$.

Definition 0.6 (Kurze exacte Sequenz). Eine kurze exacte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

welche exact ist.

Definition 0.7 (Kokern). Ist $f : M' \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist der *Kokern* von f definiert als $\text{coker}(f) = M / \text{im}(f)$.

Proposition 0.8. Ist $f : M' \rightarrow M$ eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exacte Sequenz und $M/f(M') = \text{coker}(f)$ ist der Kokern von f .

Beweis. □

Definition 0.9 (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung* F von einem Objekt (Ring) A ist eine Familie von $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Unterobjekten (Unter-ring), so dass

$$0 \subset \dots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \dots \subset A$$

und definiere weiter $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$ und damit das zu A mit Filtrierung F assoziierte *graduierete Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

gr_i^F als was??

Definition 0.10. [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

Definition 0.11 (Kommutator). Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von a und b* definiert.

Proposition 0.12. Sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$. Sei $\partial_x : k \rightarrow k$ der gewohnte Ableitungsoperator nach x , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

2. für $f \in k$ ist

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

3. Es gelten die Formeln

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \tag{0.4}$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \quad (0.5)$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \quad (0.6)$$

Beweis. 1. Klar.

2. Für ein Testobjekt $g \in k$ ist

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g$$

3. Siehe [AV09, ???]

□

1 Moduln über \mathcal{D}_k

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Ab hier sei $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$.

1.1 Weyl-Algebra und der Ring \mathcal{D}_k

Sei dazu $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ der Ableitungsoperator nach x und sei $f \in k$. Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator* f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.1)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ darstellt. Dies bedeutet, für alle $g \in \mathbb{C}[x]$ hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial fg}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

Definition 1.1. Definiere nun den Ring \mathcal{D}_k als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in k zusammen mit dem Element ∂_x , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.1). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[x]$, und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$ falls $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ ^[1].

Bemerkung 1.2. • Es gilt $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$ und $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

^[1]Wird mit $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$ bezeichnet, in [AV09].

- Offensichtlich erhält \mathcal{D}_k in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- \mathcal{D}_k ist offensichtlich nichtkommutativ.

Proposition 1.3. [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in \mathcal{D}_k kann auf eindeutige Weise als $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, mit $a_i(x) \in k$, geschrieben werden.

Beweis. Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3]

ein Teil des Beweises ist "left as an exercise"

□

Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

Definition 1.4. Sei $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$, wie in Proposition 1.3, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* von P .

Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung $F_N \mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$ mit

$$\cdots \subset F_{-1} \mathcal{D} \subset F_0 \mathcal{D} \subset F_1 \mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte $gr_k^F \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$.

Beweis. Sei $P \in F_N \mathcal{D}$ so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N \mathcal{D} / F_{N-1} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1} \mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

Proposition 1.5. Es gilt:

$$gr^F \mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F \mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

\cong
isomorph als grad. Ringe

also $gr^F \mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$ als graduierte Ringe.

Beweis. TODO

Treffen?

□

1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei X eine 1-Dimensionale Komplexe Mannigfaltigkeit und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X . Ein (holomorpher) *differential Operator* auf X ist ein Garben-Morphismus $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, lokal in der Koordinate x und mit holomorphen Funktionen $a_n(x)$ als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für $u \in \mathcal{O}_X$). Zusätzlich nehmen wir an, dass $a_n(x) \equiv 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$. Wir sagen ein Operator hat Ordnung m , falls $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$. Mit \mathcal{D}_X bezeichnen wir die Garbe von Differentialoperatoren auf X . Die Garbe \mathcal{D}_X hat eine Ring Struktur mittels der Komposition als Multiplikation und \mathcal{O}_X ist ein Unterring von \mathcal{D}_X . Sei Θ_X die Garbe der Vektorfelder über X . Es gilt, dass Θ_X in \mathcal{D}_X enthalten ist. Bemerke auch, dass Θ_X ein links \mathcal{O}_X -Untermodul, aber kein rechts \mathcal{O}_X -Untermodul ist.

Proposition 1.6. [Ark12, Exmp 1.1] Sei $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$ und $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$. Wobei ∂_x als $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$ wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die Alternative Definition schon mal mit der Einfachen überein.

Definition 1.7. [Ark12, Defn 2.1] Sei $X = \mathbb{A}^1$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{D}_X = [x, \partial_x]$ mit der Relation $[\partial_x, x] = 1$. Dann definieren wir die links \mathcal{D} -Moduln über \mathbb{A}^1 als die $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

1.2 (Links) \mathcal{D} -Moduln

Sei $\mathcal{D} := \mathcal{D}_k$ für eines der oben genannten k . Da \mathcal{D} ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts \mathcal{D} -Moduln unterscheiden. Wenn ich im folgendem von \mathcal{D} -Moduln rede, werde ich mich immer auf links \mathcal{D} -Moduln beziehen.

Beispiel 1.8 (links \mathcal{D} -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1. \mathcal{D} ist ein links und rechts \mathcal{D} -Modul
2. $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$ oder $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ jeweils durch $x \cdot x^m = x^{m+1}$ und $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol $\exp(\lambda x)$ ein, mit $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$. So ist $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda x)$ ein \mathcal{D} -Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol $\log(x)$ mit den Eigenschaften $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$ ein. Erhalte nun das \mathcal{D} -Modul $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dieses Modul ist über \mathcal{D} erzeugt durch $\log(x)$ und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

Lemma 1.9. [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist. Dann ist \mathcal{M} bereits ein freies $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.]. □

Korollar 1.10. [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon $\mathcal{M} = \{0\}$.

1.2.1 Holonome \mathcal{D} -Moduln

TODO: defn of Car als Charakteristische Varietät

Definition 1.11. [Sab90, Def 3.3.1.] Sei \mathcal{M} lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt, \mathcal{M} ist holonom, falls $\mathcal{M} = 0$ oder falls $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$.

Lemma 1.12. [Sab90, Lem 3.3.8.] Ein \mathcal{D} -Modul ist holonom genau dann, wenn $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$.

Beweis. Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

1.3 Lokalisierung von $\mathbb{C}\{x\}$ -Moduln

[Sab90, Chap 4.1.] Sei M ein $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul. Wir schreiben $M[x^{-1}]$ für den K -Vektor Raum $M \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$. Im allgemeinen gilt, falls M von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist, so ist $M[x^{-1}]$ von endlichem Typ über K . Bemerke aber, dass $M[x^{-1}]$ generell nicht von endlichem Typ über $\mathbb{C}\{x\}$ ist.

1.4 Lokalisierung eines (holonomen) \mathcal{D} -Moduls

[Sab90, Chap 4.2.] Sei \mathcal{M} ein links \mathcal{D} -Modul. Betrachte \mathcal{M} als $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul und definiere darauf

$$\mathcal{M}[x^{-1}] := \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K$$

als die Lokalisierung von \mathcal{M} .

Proposition 1.13. [Sab90, Prop 4.2.1.] $\mathcal{M}[x^{-1}]$ erhält in natürlicher Weise eine \mathcal{D} -Modul Struktur.

Beweis. [Sab90, Prop 4.2.1.] mit:

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

beweis der \mathcal{D} -linearität ist als übung gelassen

□

2 Meromorphe Zusammenhänge

Alle MeromZsh sind \mathcal{D} -Moduln aber nicht andersherum?

2.1 Systeme von ODEs und Meromorphe Zusammenhänge

[HTT07, Chap 5.1.1] Für eine Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$ betrachten wir das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (kurz ODEs)

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x) \quad (2.1)$$

wobei $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$ ein Spaltenvektor von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um $x = 0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an $x = 0$ (geschrieben als $\tilde{\mathcal{O}}$). Wir sagen $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$ ist eine Lösung von (2.1), falls $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und v die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

TODO: zeige, dass der Lösungsraum die Eigenschaften von \mathcal{D} -Moduln erfüllt
siehe alternativer Zugang

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der Meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

Definition 2.1 (Meromorpher Zusammenhang). Ein *Meromorpher Zusammenhang* (bei $x = 0$) ist ein Tupel $(\mathcal{M}_K, \partial)$ und besteht aus folgenden Daten:

- \mathcal{M}_K , ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Abbildung $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$, genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle $f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \quad (2.2)$$

erfüllen soll.

Bemerkung 2.2 (Formaler Meromorpher Zusammenhang). Analog definiert man einen *formalen Meromorphen Zusammenhang* $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$ bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$, ein endlich dimensionaler \widehat{K} -Vektor Raum
- einer \mathbb{C} -linearen Derivation $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

bei ZulaBarbara ist $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}} = \mathbb{C}((x)) < \partial_x >$ hier $= \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

Definition 2.3. Seien $(\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$ zwei Meromorphe Zusammenhänge. Eine K -lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ heißt Morphismus von Meromorphen Zusammenhängen, falls sie $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$ erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch $\varphi : (\mathcal{M}_K, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}_K, \partial_{\mathcal{N}})$.

Bemerkung 2.4. 1. Später wird man auf die Angabe von ∂ verzichten und einfach \mathcal{M}_K als den Meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von K verzichtet.

2. [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle $f \in \tilde{\mathcal{O}}$ und für alle $u \in \mathcal{M}_K$ erfüllt sein muss, äquivalent.

Definition 2.5 (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein Meromorpher Zusammenhang so wähle eine K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix* bzgl. der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, die Wirkung von ∂ auf $u =: {}^t(u_1, \dots, u_n)$ beschrieben durch

$$\begin{array}{c} \boxed{??} \\ \downarrow \\ \partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i. \end{array}$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung $\partial u(x) = 0$, für $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$, äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$. Damit haben wir gesehen, dass jeder Meromorphe Zusammenhang (\mathcal{M}, ∂) ausgestattet mit einer K -Basis $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von \mathcal{M} zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ den assoziierten Meromorphen Zusammenhang $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$ angeben, durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A e_i := - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) e_j.$$

2.2 Alternativer Zugang

Hier wird nun ein alternativer Zugang, wie in [Sab90, 3.1.1], präsentiert. Sei \mathcal{F} ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren \mathcal{D} wirken.

Sei P ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in $a_i(t) \in \mathbb{C}\{x\}$ geschrieben als $P = \sum_{i=0}^d a_i(t) \partial_t^i$. Man sagt eine Funktion $u \in \mathcal{F}$ ist Lösung von P , falls u die Gleichung $Pu = 0$ erfüllt. Man sagt 0 ist ein singulärer Punkt falls $a_d(0) = 0$. Falls 0 kein singulärer Punkt ist, hat P genau d über \mathbb{C} Unabhängige Lösungen in $\mathbb{C}\{t\}$.

Falls u ein Lösung von P ist, so ist u auch Lösung von $Q \cdot P$ mit $Q \in \mathcal{D}$. Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal I von \mathcal{D} , welches von P erzeugt wird.

2.3 Eigenschaften

[Sab90, 4.2] Let \mathcal{M} be a left \mathcal{D} -module. First we consider it only as a $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let $\mathcal{M}[x^{-1}]$ be the localized module.

Lemma 2.6 (Lemma vom zyklischen Vektor). [Sab90, Thm 4.3.3] [AV09, Satz 4.8] Sei \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang. Es Existiert ein Element $m \in \mathcal{M}_K$ und eine ganze Zahl d so dass $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ eine K -Basis von \mathcal{M}_K ist.

Beweis. [AV09, Satz 4.8] □

Satz 2.7. [Sab90, Thm 4.3.2] Ein Meromorpher Zusammenhang bestimmt ein \mathcal{D}_K -Modul und andersherum.

Beweis. [Sab90, Thm 4.3.2] □

Lemma 2.8. [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] Ist \mathcal{M}_K ein Meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein $P \in \mathcal{D}_K$ so dass $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$.

Beweis. [AV09, Satz 4.12] □

Bemerkung 2.9. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

Lemma 2.10. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und φ ein Basisisomorphismus von K^r nach \mathcal{M}_K , also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r \end{array}$$

gilt: $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ist ebenfalls ein Meromorpher Zusammenhang.

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.11. Sei $(\mathcal{M}_K, \partial)$ ein gegebener Meromorpher Zusammenhang, und $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Isomorphismus so ist $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$ ein zu $(\mathcal{M}_K, \partial)$ isomorpher Zusammenhang.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\ \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Beweis. TODO, (3. Treffen) □

Lemma 2.12. Sei \mathcal{M}_K ein endlich dimensionaler K -Vektor Raum mit ∂_1 und ∂_2 zwei darauf definierte Derivationen. So gilt, die Differenz zweier Derivationen ist K -linear.

Beweis. Seien ∂_1 und ∂_2 zwei Derivationen auf \mathcal{M}_K . Da ∂_1 und ∂_2 \mathbb{C} -linear, ist $\partial_1 - \partial_2$ \mathbb{C} -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$ und $u \in \mathcal{M}_K$ gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

Korollar 2.13. Für (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang existiert ein $A \in M(r \times r, K)$, so dass $\partial = \frac{d}{dx} - A$.

Beweis. Es sei (K^r, ∂) ein Meromorpher Zusammenhang. So ist $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$ K -linear, also es existiert eine Matrix $A \in M(r \times r, K)$ mit $\frac{d}{dx} - \partial = A$, also ist, wie behauptet, $\partial = \frac{d}{dx} - A$. □

Proposition 2.14 (Transformationsformel). [[HTT07](#), Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 & \searrow \varphi \cong & & & \swarrow \varphi \cong \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 & \nearrow \psi \cong & & & \nwarrow \psi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit φ, ψ und T K -Linear und $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$ und $(\frac{d}{dx} + B)$ \mathbb{C} -Linear, gilt:

Der Meromorphe Zusammenhang. $\frac{d}{dx} + A$ auf K^r wird durch Basiswechsel $T \in GL(r, K)$ zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

Definition 2.15 (Differenziell Äquivalent). Man nennt A und B differenziell Äquivalent ($A \sim B$) genau dann, wenn es ein $T \in GL(r, K)$ gibt, mit $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$.

Beweis. TODO

□

$$1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$$

$$1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$$

Proposition 2.16. [Sch, Prop 4.1.1] Seien $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$ und $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ Meromorphe Zusammenhänge. Durch setzen von

$$\partial(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n)$$

als die Wirkung von ∂ auf das K -Modul $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$, wird $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$ zu einem Meromorphen Zusammenhang.

Beweis. Klar

□

2.4 Newton Polygon

Quelle: sabba?

sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, also insbesondere auch jedes $P \in \mathcal{D}_K$, lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$ schreiben. Betrachte das zu P dazugehörige

$$H(P) := \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left((m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Bei Sabbah: $H \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und dann konvexe Hülle davon in \mathbb{R}^2

Definition 2.17. Das Randpolygon der konvexen Hülle $\text{conv}(H(P))$ von $H(P)$ heißt das *Newton Polygon* von P und wird als $N(P)$ geschrieben.

Definition 2.18. Die Menge $\text{slopes}(P)$ sind die nicht-vertikalen Steigungen von $N(P)$, die sich echt rechts von $\{0\} \times \mathbb{R}$ befinden.

- Schreibe $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ für die Menge der zu \mathcal{M} gehörigen slopes.

- P heißt *regulär* oder *regulär singulär* $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$ oder $\deg P = 0$, sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ (bzw. \mathcal{M}_K) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ (bzw. $P \in \mathcal{D}_K$) gibt, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ (bzw. $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$).

Beispiel 2.19. 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist $P_1 = x^1 \partial_x^2$. Es ist leicht abzulesen, dass

$$m = 2$$

$$l = 1$$

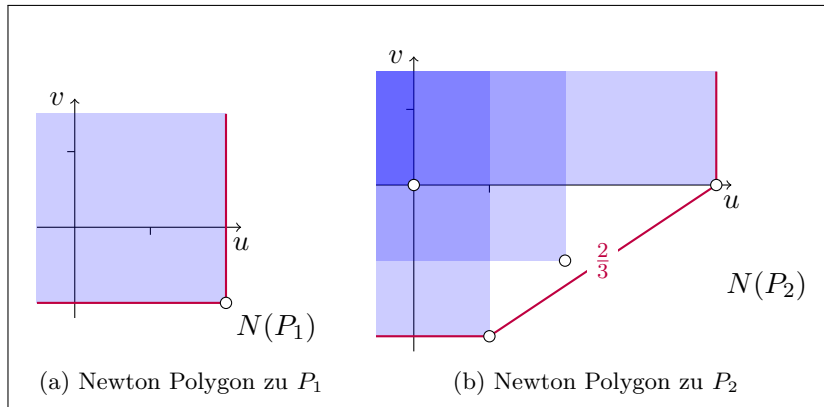
so dass

$$H(P_1) = \left((2, 1 - 2) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.2b ist $H(P_1)$ (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$ und damit ist P_1 regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$ so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung ?? visualisiert.

Abbildung 2.1: Zu Beispiel 2.19



Bemerkung 2.20. [AV09, Bem 5.4] Für alle $f \in \mathbb{C}(\{x\}) \setminus \{0\}$ gilt allgemein, dass das zu $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ gehörige Newton Polygon, bis auf Verschiebung mit dem von $f \cdot P$ übereinstimmt.

Lemma 2.21. [Sab90, 5.1]

1. $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$ ist nicht Leer, wenn $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exacte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$ hat, so gilt $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$.

Satz 2.22. [Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang und sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale Meromorphe Zusammenhänge mit $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$.

Beweis. [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

Aussagen, die aus dem Beweis entstehen:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

Korollar 2.23. [Sab90, Thm 5.3.4] $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$ und $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$

2.4.1 Die Filtrierung ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das L -Symbol

Sei $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ vollständig gekürzt, also mit λ_0 und λ_1 in \mathbb{N} relativ prim. Definiere die Linearform $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ in zwei Variablen. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. Falls $P = x^a \partial_x^b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\text{ord}_L(P) = L(b, b - a)$$

und falls $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$ mit $b_i \in \widehat{K}$ setzen wir

$$\text{ord}_L(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} L(i, i - v(b_i)).$$

Definition 2.24 (Die Filtrierung ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, welche mit \mathbb{Z} indiziert ist, durch

$${}^L V_{\lambda} \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_L(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

Bemerkung 2.25. Man hat $\text{ord}_L(PQ) = \text{ord}_L(P) + \text{ord}_L(Q)$ und falls $\lambda_0 \neq 0$ hat man auch, dass $\text{ord}_L([P, Q]) \leq \text{ord}_L(P) + \text{ord}_L(Q) - 1$.

Definition 2.26 (*L*-Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls $\lambda_0 \neq 0$ ist der graduierte Ring $gr^{LV} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_{\lambda}^{LV} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von ∂_x in dem Ring durch ξ , dann ist der Ring isomorph zu $\widehat{K}[\xi]$. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, so ist $\sigma_L(P)$ definiert als die Klasse von P in $gr_{\text{ord}_L(P)}^{LV} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$. σ_L wir hierbei als das *L*-Symbol Bezeichnet.

Zum Beispiel ist $\sigma_L(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$.

Bemerkung 2.27. Ist $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ geschrieben als $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$. So erhält man $\sigma_L(P)$ durch die Setzung

$$\sigma_L(P) = \sum_{\{(i,j) | L(i,j) = \text{ord}_L(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

Beweis. □

Ich will die Linearform vermeiden und direkt die skalare Steigung verwenden

Definition 2.28 (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf \{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als alternative zu dieser Ordnung verwendet.

Bemerkung 2.29. Wenn $L(x_0, s_1)$ wie oben aus Λ entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_L(P).$$

2.5 Formale Struktur regulärer Zusammenhänge

[Sab90, Chap 5.2] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein regulärer Formaler Meromorpher Zusammenhang.

Lemma 2.30. [Sab90, Def 5.1.1 Remarks 3.] Ein $P = \sum_{i=0}^d a_i(x)(x\partial_x)^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}[[x]]$ ist regulär, genau dann wenn der Koeffizient a_d vor dem dominanten Term eine Einheit ist.

Beweis. □

Lemma 2.31. [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die $x\partial_x$ beschreibt, nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$ hat.

Beweis. Wähle einen zyklischen Vektor $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und betrachte die Basis $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$ (siehe Lemma 2.6). Schreibe $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$ in Basisdarstellung mit Koeffizienten $b_i \in \widehat{K}$. Also erfüllt m die Gleichung $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$.

bis hier schon klar

Tatsächlich werden wir $b_i(x) = x^i b'_i(x)$ mit $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$ schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass $m, x \partial_x m, \dots, (x \partial_x)^{d-1} m$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ist.

Die Matrix von $x \partial_x$ zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in $\mathbb{C}[[x]]$. □

Lemma 2.32. [Sab90, Lem 5.2.2.] *Es existiert sogar eine Basis von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ über \widehat{K} so dass die Matrix zu $x \partial_x$ konstant ist.*

Beweis. TODO □

2.6 pull-back und push-forward

TODO: Variable zu x machen

Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3]. Sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \quad \in t\mathbb{C}[[t]]$$

mit Bewertung $p \geq 1$. Hier werden wir immer $\rho(t) = t^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho$$

analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho$$

wobei L (bzw. \widehat{L}) eine endliche Körpererweiterung von K (bzw. \widehat{K}) ist. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}((t))$ Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang ∇ .

Definition 2.33 (pull-back). [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *Inverses Bild* $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ von $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$ ist der Vektorraum $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$ mit dem *pull-back Zusammenhang* $\rho^* \nabla$ definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.3)$$

[Sab90, Page 34] Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. Man definiert $\pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ als den Vektor Raum über $\widehat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$. Dann definiert man die Wirkung von ∂_t durch: $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$ und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + \left(t \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \otimes m.$$

Man erhält damit die Wirkung von $\partial_t = t^{-1}(t\partial_t)$.

Lemma 2.34. Es gilt $\rho^*\mathcal{D}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$ mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes m(x, \partial_x) &\longmapsto f(t)m(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{aligned}$$

Beweis.

□

Bemerkung 2.35. BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma 2.34, definierte Φ erfüllt für Elementartensoren $1 \otimes m \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

$$\begin{aligned} \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\ &\xrightarrow{\Phi} \underbrace{\rho'(t)\rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\ &= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{aligned}$$

und somit (2.3) wie gewollt.

Lemma 2.36. Sei $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$. In der Situation

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P(t, \partial_t)} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\ \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{array}$$

mit Φ wie in Lemma 2.34 macht $\alpha := _ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$ das Diagramm kommutativ.

Beweis. □

Lemma 2.37. *In der Situation von Lemma 2.33, mit $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$ für ein $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$, gilt*

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t).$$

also wird der Übergang beschrieben durch

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \rho(t) \\ \partial_x &\rightarrow \rho'(t)^{-1} \partial_t \end{aligned}$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$. Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{-\cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\ & & & & u & \longmapsto & u \bmod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \end{array}$$

ist **exact**, weil $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(_ \cdot P)$. Weil \widehat{K} **flach** ist, da Körper, ist auch, nach anwenden des Funktors $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} _$, die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \end{array}$$

exact. Deshalb ist

$$\begin{aligned} \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} &\cong \text{coker}(\text{id} \otimes _ \cdot P) && \text{(weil exact)} \\ &\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \left((\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\text{id} \otimes _ \cdot P) \right) && \text{(nach def. von coker)} \end{aligned}$$

Also mit Φ wie in Lemma 2.34 und $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ nach Lemma 2.36 ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & &
 \end{array}$$

als kommutatives Diagram. Nun, weil $_ \cdot Q$ injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exacten Sequenz fortsetzen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes _ \cdot P} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{_ \cdot Q} & \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Nun konstruieren wir den Isomorphismus, den wir suchen mittels Diagrammjagd.

Nun wollen wir einen Isomorphismus

$$\varphi : \rho^* \mathcal{M} = \mathbb{C}((u)) \otimes_{\mathbb{C}((t))} (\mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} / \mathcal{D}_{\mathbb{C}((t))} \cdot P) \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q$$

finden, so dass $\varphi \circ (\text{id} \otimes \pi) = \Pi \circ \Phi$.

Ingo sagt:

Nun zu deiner Situation: Da geht es jeweils um die rechten Endstücke. Anders als die Mittelstücke sind diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; C ist der Kokern von $(A \rightarrow B)$ und c der Kokern von $(a \rightarrow b)$. Aufgrund der Kommutativität des Quadrats links müssen daher diese Kokerne zueinander isomorph sein.

Konkret kannst du einen Isomorphismus über eine Diagrammjagd konstruieren: Sei $x \in C$ beliebig. Wir wollen ein zugehöriges Element in c angeben. Da $(B \rightarrow C)$ surjektiv ist, gibt es ein $y \in B$, das unter $(B \rightarrow C)$ auf x geschickt wird. Unser gesuchtes Element in c ist dann das Bild von y unter $(B \rightarrow b)$ und $(b \rightarrow c)$. Dann ist noch Wohldefiniertheit nachzuweisen. Die Umkehrfunktion konstruiert man auf analoge Weise. Dann muss man natürlich noch nachrechnen, dass die beiden Morphismen zueinander invers sind.

(Geheimtipp: Linearität muss man, obwohl es eigentlich so scheint, tatsächlich nicht nachweisen – wenn man weiß, wie man intern in Topoi Mathematik betreiben kann. :-))

- warum sind die schon zusammenhänge isomorph?
eventuell noch ein Lemma bei kurzen exacten Sequenzen hinzufügen

□

Bemerkung 2.38 (versuch 1). Wieso sieht die Wirkung auf dem pull-back Zusammenhang so aus?

Betrachte ein Element der Form $f(t)m = f(\rho(u))m$.

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)m) &= \partial_{\rho(u)}(f(\rho(u))m) \\ &= f'(\rho(u)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(u))}{\partial(f(u))}}_{=1} m + f(\rho(u)) \underbrace{\partial_{\rho(u)}}_{=\partial_t} m = (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m) &= \frac{1}{pu^{p-1}} \partial_u(f(u^p)m) \\ &= f'(u^p)m + f(u^p) \frac{1}{pu^{p-1}} \partial_u m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1} \partial_u(f(t)m)$ und somit ist die Wirkung von ∂_t gleich der Wirkung von $\rho'(u)^{-1} \partial_u$.

Lemma 2.39. [*Sab90*, 5.4.3] Sei $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ die Menge der Slopes von $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ und $\rho : t \mapsto x := t^p$, dann gilt für $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$, dass $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$.

Beweis. Sei $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ mit $P = \sum a_i(x) \partial_x^i$, dann ist $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ mit

$$\begin{aligned}P'(t, \partial_t) &= P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ &= \sum a_i(\rho(t)) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^i \\ &= \sum a_i(t^p) ((p \cdot t^{p-1})^{-1} \partial_t)^i\end{aligned}$$

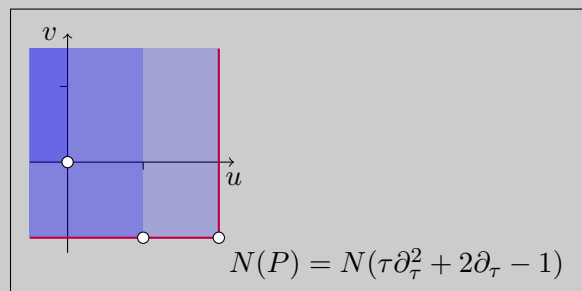
TODO: Hier weiter...

□

Beispiel 2.40 (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back.

Beginne mit

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$



und gehe von τ über zu t via $\tau \rightarrow \frac{1}{t}$:

- was passiert mit der Ableitung ∂_τ ? Es gilt:

$$\partial_\tau(f(\frac{1}{\tau})) = \partial_t(f) \cdot (-\frac{1}{\tau^2}) = -\partial_t(f) \cdot t^2 = -t^2 \cdot \partial_t(f)$$

also:

$$\partial_\tau = -t^2 \partial_t$$

- was ist $\partial_t(t^2 \partial_t)$?

$$\begin{aligned} \partial_t t^2 \partial_t &= (\partial_t t) t \partial_t \\ &= (t \partial_t - 1) t \partial_t \\ &= t(\partial_t t) \partial_t - t \partial_t \\ &= t(t \partial_t - 1) \partial_t - t \partial_t \\ &= t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t \end{aligned}$$

- was passiert mit $\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$?

$$\tilde{P} = \tau \partial_\tau^2 + 2\partial_\tau - 1$$

$$\xrightarrow{\tau \rightarrow \frac{1}{t}} \frac{1}{t} (-t^2 \partial_t)^2 + 2(-t^2 \partial_t) - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{t} t^2 (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\
 &= t (\partial_t (t^2 \partial_t)) - 2t^2 \partial_t - 1 \\
 &= t (t^2 \partial_t^2 - 2t \partial_t) - 2t^2 \partial_t - 1 \\
 &= t^3 \partial_t^2 - 4t^2 \partial_t - 1 =: P
 \end{aligned}$$

Wir wollen $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ bzgl. $P := x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$ betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige slopes zu erhalten. Es gilt $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$ (siehe Abbildung 2.3a) und es ist 2 der Hauptnenner aller Slopes. Wende den pull-back mit $\rho : t \rightarrow x := t^2$ an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Lemma 2.37 einfacher anwenden können.

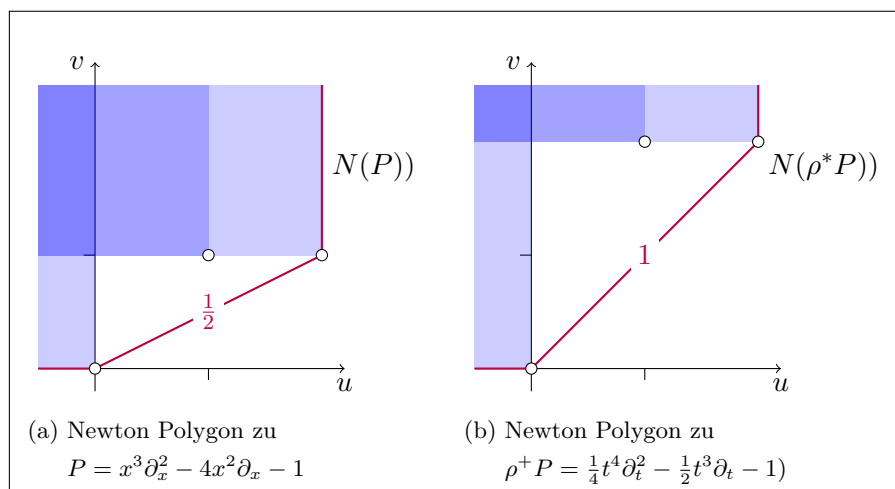
$$\begin{aligned}
 \partial_x &\rightarrow \frac{1}{\rho'(t)} \partial_t = \frac{1}{2t} \partial_t \\
 \partial_x^2 &\rightarrow \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2t} \partial_t \left(\frac{1}{2t} \partial_t\right) \\
 &= \frac{1}{2t} \left(-\frac{1}{2t^2} \partial_t + \frac{1}{2t} \partial_t^2\right) \\
 &= \frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t
 \end{aligned}$$

also ergibt einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^+ P &= t^6 \left(\frac{1}{4t^2} \partial_t^2 - \frac{1}{4t^3} \partial_t\right) - 4t^4 \frac{1}{2t} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - t^3 \frac{1}{4t^3} \partial_t - 4t^3 \frac{1}{2} \partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - 2 \frac{1}{4} t^3 \partial_t - 1
 \end{aligned}$$

Also ist $\rho^+ P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$ mit $\text{slopes}(\rho^+ P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.3b) und somit $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1)$.

Abbildung 2.2: Zu Beispiel 2.40

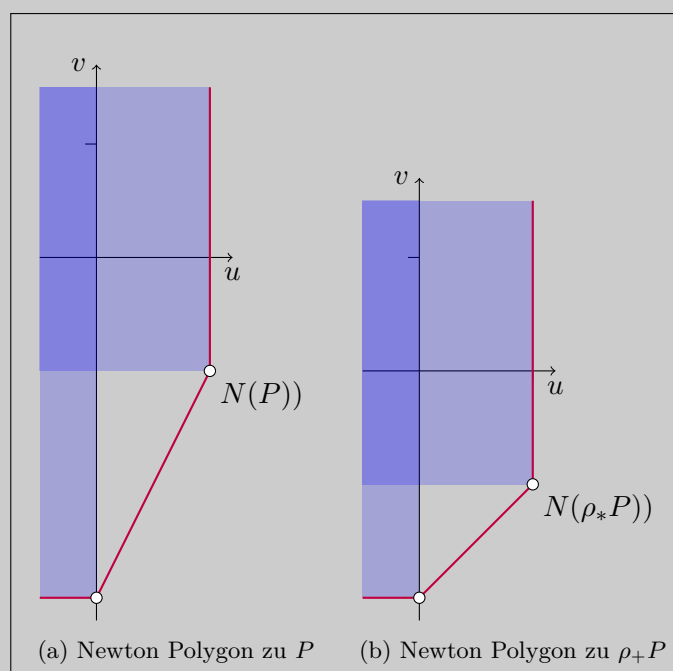


Sei $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ein endlich dimensionaler \widehat{L} -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

Definition 2.41 (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *Direktes Bild* $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ von $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ ist

- der \widehat{K} -VR $\rho_* \mathcal{N}$ ist definiert als der \mathbb{C} -Vektor Raum $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$ mit der \widehat{K} -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$ und $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung ∂_x beschrieben durch $\rho'(t)^{-1} \partial_t$.

Abbildung 2.3: Zu Beispiel 2.42



Beispiel 2.42 (push-forward). Für $\rho : t \rightarrow u^2$, $\varphi = \frac{1}{u^2}$ betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &\cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_u + \partial_u \frac{1}{u^2}) \\ &= \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=: P} \end{aligned}$$

mit $\text{slopes}(P) = \{2\}$ (siehe Abbildung 2.4a). Bilde nun das Direkte Bild über ρ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u(\frac{1}{2u}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1}\partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist $\rho_+\mathcal{E}^\varphi \cong \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{\mathcal{D}} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$ mit $\rho_+P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$ und $\text{slopes}(\rho_+P) = \{1\}$ (siehe Abbildung 2.4b)

Satz 2.43. [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.4)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})) && \text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\cong \rho_+((\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &\cong \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) && \text{(Rechenregeln Tensorprodukt)} \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} && (?) \end{aligned}$$

□

Sei $\rho(u) = u^p = t$ und $\varphi(t)$ gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

2.7 Fouriertransformation

Definition 2.44 (Fouriertransformation). [AV09, Def 6.1] Sei $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$. Dann ist die *Fouriertransformierte* von P gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i$$

TODO: beispiel aus [AV09]

3 Elementare Meromorphe Zusammenhänge

introduzieren als Bausteine oder kleinste Meromorphe Zusammenhänge

3.1 Definition in [Sab90]

in [Sab90] Teil 5.4.4 Seite 34

Definition 3.1. $\mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$

Definition 3.2. $\mathcal{F}_{\widehat{K}}^R \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{G}_{\widehat{K}}$

3.2 Definition in [Sab07]

Definition 3.3. [Sab07, 1.a] Sei $\varphi \in \widehat{K}$. Wir schreiben \mathcal{E}^φ für den (formalen) Rang 1 Vektorraum $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$ ausgestattet mit dem Zusammenhang $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$, im speziellen also $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$.

Also

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathbb{C}((x)) \xrightarrow{\partial_x} \mathbb{C}((x)) \\ 1 &\mapsto \varphi'(x) \\ f(x) &\mapsto f'(x) + f(x)\varphi'(x) \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4. [Sab07, 1.a] Es gilt $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$ genau dann wenn $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$.

Definition 3.5 (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1]

Alternative. ausführlichere / komplexe definition [Sab90, Def 5.4.5.]

Zu einem gegebenen $\rho \in t\mathbb{C}[[t]]$, $\varphi \in \widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t))$ und einem endlich dimensionalen \widehat{L} -Vektorraum R mit regulärem Zusammenhang ∇ , definieren wir den assoziierten Elementaren endlich dimensional \widehat{K} -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt $El(\rho, \varphi, R)$ nur von $\varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$ ab.

Lemma 3.6. [Sab07, Lem 2.2]

sabbah_Fourier-local.pdf lemma 2.4

Sei $\rho : t \mapsto x := t^p$ und $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$.

Lemma 3.7. [Sab07, Lem 2.4] Für alle $\varphi \in \widehat{L}$ gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagram, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Es sei oBdA $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, dies ist nach Bemerkung 3.4 berechtigt. Wir wählen eine \widehat{L} Basis e des Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum \mathcal{E}^φ und damit erhält man die Familie $e, te, \dots, t^{p-1}e$ als \widehat{K} -Basis von $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Durch die Setzung $e_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e$ wird die Familie $\mathbf{e} := (e_0, \dots, e_{p-1})$ eine \widehat{L} -Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$.

Zerlege nun $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ (siehe: Anhang A). Es gilt:

$$t\partial_t e_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned}
 t\partial_t e_k &= t\partial_t(t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e) \\
 &= t(-kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x(\underbrace{t^k e}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi})) \\
 &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} e + t^k \varphi'(t) e) \\
 &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1} e + t^k \varphi'(t) e) \\
 &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} e}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) e \\
 &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+1} \varphi'(t) e \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \underbrace{\psi_i(t^p) e}_{\in \widehat{K}} \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k e) \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p}
 \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass $\mathbf{e} \cdot V = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$ gilt, so dass gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned}
 t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t e_0, \dots, t\partial_t e_{p-1}) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\
 &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]$$

Die Wirkung von ∂_t auf die Basis von $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$ ist also Beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da V das Minimalpolynom $\chi_V(x) = X^p - 1$ hat, können wir diese Matrix durch Passendes T auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit $\xi^p = 1$, bringen. So dass gilt:

$$\begin{aligned} T \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j (\xi^{p-1})^j & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j \xi^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j \xi^{p-1} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit wissen wir bereits, das im Diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j & & \downarrow \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j D^j & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & &
 \end{array}$$

der mit (\star) bezeichnete Teil kommutiert. Um zu zeigen, dass alles kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(\Phi(x)) = \Phi\left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(x) D^j\right) \quad \forall x \in \widehat{L}^p$$

gilt.

TODO: zeige das noch

Sei $x = {}^t(x_1, \dots, x_p) \in \widehat{L}^p$. So ist

$$\partial_t(\Phi(x)) = \partial_t({}^t(\dots))$$

und

$$\begin{aligned}
 \Phi\left({}^t x \left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j\right)\right) &= \Phi\left((x_1, \dots, x_p) \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix}\right) \\
 &= \Phi\left((x_1 \varphi'(t), x_2 \varphi'(\xi t) \xi, \dots, x_p \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1})\right)
 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.8. [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$ genau dann, wenn

- es ein ζ gibt, mit $\zeta^p = 1$ und $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \pmod{\mathbb{C}[[t]]}$
- und $S \cong R$ als \widehat{L} -Vektorräume mit Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Lem 2.6.]

□

Proposition 3.9. [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale \widehat{K} -Vektorraum \mathcal{M} mit Zusammenhang ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$, wobei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, $\rho : t \rightarrow t^p$ vom Grad $p \geq 1$ und ist minimal unter φ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und L ist ein Rang 1 \widehat{L} -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

4 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft die Struktur von formalen Meromorphen Zusammenhängen besser zu verstehen.

Quellen:

sabbah_cimpa90 seite 28 / 30 / 35

Satz 4.1 (Levelt-Turrittin). *Es ex. endliche Körper $\widehat{L}|\widehat{K}$ mit $\widehat{L} = \mathbb{C}((t))$ mit $t \mapsto x := t^p$ so dass:*

$$\widehat{M} \otimes_{\widehat{K}} \widehat{L} = \bigoplus_{i=1}^r \widehat{M}_i$$

mit $\# \text{slopes}(\widehat{M}_i) = 1 \forall i$ bzw. genauer $\widehat{M}_i = \xi^{\varphi_i} \otimes R$

Satz 4.2 (Levelt-Turrittin-Malgrange). $\exists \widehat{L}|\widehat{K}$ mit $\widehat{M}_i \otimes_{\widehat{K}} \widehat{L} = \bigoplus_{j=1}^s \widehat{N}_j$ mit

$$\widehat{N}_i = \xi^{\varphi_j} \otimes R$$

und

- $\dim_L \xi^{\varphi_j} = 1, \varphi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}] \cdot x^{-1}$
- R regulär singulär, also mit $\text{slopes} = \{0\}$

Ab hier werden wir nur noch formale Meromorphe Zusammenhänge betrachten.

Sei $M_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ und nehme an, dass $N(P)$ zumindest 2 nichttriviale Steigungen hat. Spalte $N(P) = N_1 \dot{\cup} N_2$ in 2 Teile. Dann gilt:

Lemma 4.3. *Es existiert eine Aufteilung $P = P_1 P_2$ mit:*

- $N(P_1) \subset N_1$ und $N(P_2) \subset N_2$
- A ist eine kante von ...

4.1 Klassische Version

Satz 4.4. [Sab90, Thm 5.4.7] *Sie $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ ein formaler Meromorpher Zusammenhang. So gibt es eine ganze Zahl p so dass der Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$, mit $\rho : t \mapsto x := t^p$, isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Meromorphen Zusammenhänge ist.*

Beweis.

□

4.2 Sabbah's Refined version

Proposition 4.5. [Sab07, Prop 3.1] *Jeder irreduzible endlich dimensionale formale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$ ist isomorph zu $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$, wobei $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$, $\rho : x \mapsto t = x^p$ mit $\text{grad } p \geq 1$ minimal bzgl. φ (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und S ist ein Rang 1 \widehat{K} -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.*

Beweis. [Sab07, Prop 3.1]

□

Satz 4.6 (Refined Turrittin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] *Jeder endlich dimensionale Meromorphe Zusammenhang $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ kann in eindutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$, so dass jedes $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ irreduzibel ist und keine zwei $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ isomorph sind.*

In welchem Raum ist \mathcal{M} ?? in L oder in K

Beweis. [Sab07, Cor 3.3]

□

5 DIE Klasse der Fourier-Transformationen

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von \mathcal{D} -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu 2 Beispielen explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Eine weitere explizite Berechnung findet sich bei [Sab90, 5.b oder 5.c].

5.1 Rezept für allgemeine φ

siehe: [Sab07, 5.b]

bzeug zu \mathcal{E}^φ ??

sei $\varphi \in \left\{ \frac{1}{t^k}, \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}, \dots \right\}$

1. Starte mit: $P(t, \partial_t) := (\partial_t - \frac{d}{dt}\varphi(t)) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle$
2. Furiertrafo: $F_P(z, \partial_z) = P(\partial_z, -z) \in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle$
3. $x = z^{-1}$ und $\partial_x = -z^2 \partial_z$

$$Q(x, \partial_x) := F_P(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \cdot \text{Hauptnenner} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$$

Hauptnenner unnötig!?

4. Berechne für Q das NP usw...

[Sab07, 5.b.]

Hier wollen wir nun eine Spezielle Klasse von Meromorphen Zusammenhängen, die die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$ aus
2. und beginne mit $\mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \tilde{Q}$ mit $\tilde{Q}(t, \partial_t) := \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}] < \partial_t >$.
3. Wir wollen aber ein Element in $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$, deshalb multipliziere mit Hauptnenner und erhalte

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &:= (\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t)) \cdot \underbrace{\text{Hauptnenner}}_{\in \mathbb{C}[t]} \\ &= (\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t)) \cdot t^{\max(I)+1} \in \mathbb{C}[t] < \partial_t > \end{aligned}$$

Dies ändert den Assoziierten Meromorphen Zusammenhang nicht.

Lemma?

4. Fouriertransformiere Q und erhalte $\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) = Q(\partial_z, -z)$ in $\mathbb{C}[z] < \partial_z >$
5. Wende den Übergang $x \rightsquigarrow z^{-1}$ an.

Was passiert mit der Ableitung ∂_x ? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$.

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$$

6. Erhalte den zu P_φ assoziierten Meromorphen Zusammenhang $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$.

warum sind diese wichtig??

Wende das Rezept allgemein für $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$ an. So ist

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t, \partial_t) &= \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \\ &= \partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[t][t^{-1}] < \partial_t >$$

$$\begin{aligned} Q(t, \partial_t) &= \partial_t t^{\max(I)+1} + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k-\max(I)}} \\ &= \partial_t t^{\max(I)+1} + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \end{aligned} \quad \in \mathbb{C}[t] < \partial_t >$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -z \partial_z^{\max(I)+1} + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(x, \partial_x) &= F_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\
 &= x \partial_x (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \quad \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch $(x^2 \partial_x)^{k+1}$ besser verstehen.

$$\begin{aligned}
 (x^2 \partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(2x + x^2 \partial_x)} (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= x^2 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(2x + x^2 \partial_x)} + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2 \partial_x}_{(2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2)}) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x + x^4 (2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2) \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (4x^4 \partial_x + 2x^5 \partial_x^2 + 2x^5 \partial_x^2 + x^4 \partial_x + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
 \end{aligned}$$

Stirlingzahlen

also gilt für spezielle k

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \end{cases} \quad (5.1)$$

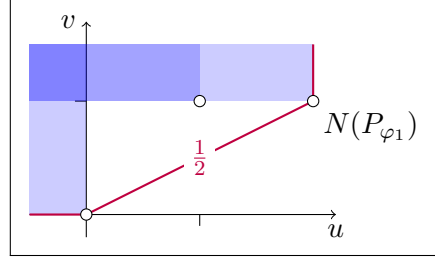
5.2 Angewendet für $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Das wohl einfachste Beispiel ist \mathcal{M}_{φ_1} bezüglich $\varphi_1 := \frac{a}{x}$.

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi_1} &= a - x \underbrace{\partial_x x^2 \partial_x}_{(0.4)} \\
 &\downarrow \\
 &= a - x (2x + x^2 \partial_x) \partial_x \\
 &= a - 2x^2 \partial_x - x^3 \partial_x^2
 \end{aligned}$$

Finde nun das Newton-Polygon mit den Slopes $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\varphi_1})$

Abbildung 5.1: Newton Polygon zu P_{φ_1}



5.2.1 Levelt-Turrittin-Zerlegung für φ_1

Zeige zunächst: ist noch nicht zerlegt!

Es ist $\mathcal{M}_{\varphi_1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_{\varphi_1}$. Wäre dieser bereits zerlegt, also gleich einem elementarem meromorphen Zusammenhang, so müsste es $\rho \in t\mathbb{C}[[t]]$, $\varphi \in \widehat{L}$ und R geben, so dass $\mathcal{M}_{\varphi_1} \cong El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$.

vergleiche mit [Sab90, Proof of theorem 5.4.7]

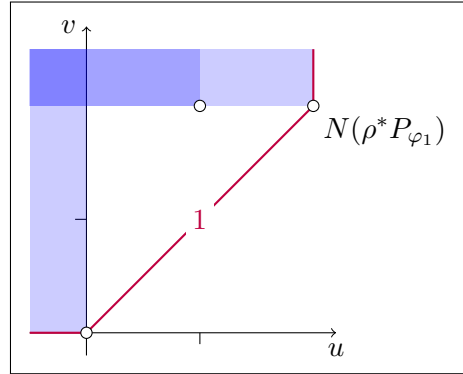
was ist $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[[\xi]]$?

\mathcal{M}_{φ_1} hat genau den Slope $\frac{1}{2}$ mit Nenner 2.

Sei $\rho : t \mapsto x := t^2$ und betrachte

$$\begin{aligned}
 \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1} &= \rho^+ \left(\mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (a - 2x^2 \partial_x - x^3 \partial_x^2) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - 2\rho(t)^2 (\rho'(t)^{-1} \partial_t) - \rho(t)^3 (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^2) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - 2t^4 (\frac{1}{2} t^{-1} \partial_t) - t^6 (\frac{1}{2} t^{-1} \partial_t)^2) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - t^3 \partial_t - \frac{1}{4} t^6 (t^{-1} \partial_t t^{-1} \partial_t)) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - t^3 \partial_t - \frac{1}{4} t^6 (t^{-1} \overbrace{(t^{-1} \partial_t - t^{-2})} \partial_t)) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - t^3 \partial_t - \frac{1}{4} t^6 (t^{-2} \partial_t^2 - t^{-1} t^{-2} \partial_t)) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - t^3 \partial_t - \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 + \frac{1}{4} t^3 \partial_t) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (a - \frac{3}{4} t^3 \partial_t - \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2)
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.2: Newton Polygon zu $\rho^*P_{\varphi_1}$



Ab hier nochmal neu / verbessern!

wechselt variable t \rightarrow x

Nun hat ρ^*P nur noch den Slope $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ und definiere damit die Linearform $L(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$. Berechne nun die *Determinanten Gleichung* $\sigma_L(\rho^*P_{\varphi_1}) \in \widehat{K}[\xi]$ von ρ^*P .

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^*P) &= \sum_{\{(i,j) | L(i,i-j) = \text{ord}_L(\rho^*P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{\{(i,j) | i+i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= a - \frac{1}{4} t^4 \xi^2\end{aligned}$$

Setze $\theta = x^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = x^2 \xi$ so können wir

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^*P) &= \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \\ &= a - \frac{1}{4} \theta^2\end{aligned}$$

schreiben, welches wir als nächstes faktorisieren

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^*P) &= a - \frac{1}{4} \theta^2 \\ &= -\frac{1}{4} (\theta^2 - 4a) \\ &= -\frac{1}{4} (\theta - \underbrace{2\sqrt{a}}_{=: \beta_0}) (\theta + 2\sqrt{a})\end{aligned}$$

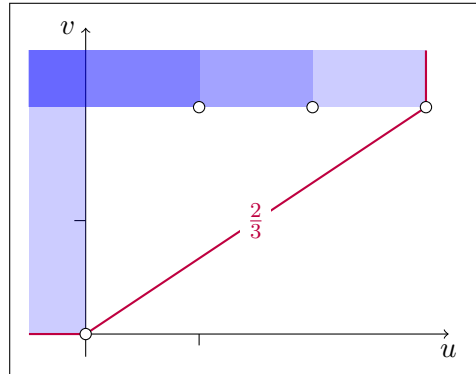
Dies geht, weil $\widehat{K}[\xi]$ kommutativ ist. Setze $R(z) := (\beta_0/(\lambda_0 + 1))z^{\lambda_0+1} = \sqrt{a}z^2$ und betrachte $\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$.

5.3 Angewendet für $\varphi_2 := \frac{a}{x^2}$

also für $\varphi_2 := \frac{a}{x^2}$ ist

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi_2} &= 2a + x \partial_x \underbrace{(-x^2 \partial_x)^2}_{(2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2)} \\
 &= 2a + x \partial_x (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) \\
 &= 2a + 2x \underbrace{\partial_x x^3}_{(3x^2 + x^3 \partial_x)} \partial_x + x \underbrace{\partial_x x^4}_{(4x^3 + x^4 \partial_x)} \partial_x^2 \\
 &= 2a + 2x (3x^2 + x^3 \partial_x) \partial_x + x (4x^3 + x^4 \partial_x) \partial_x^2 \\
 &= 2a + 5x^3 \partial_x + 4x^4 \partial_x^2 + x^5 \partial_x^3
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.3: Newton Polygon zu P_{φ_2}



5.3.1 Levelt-Turrittin-Zerlegung für φ_2

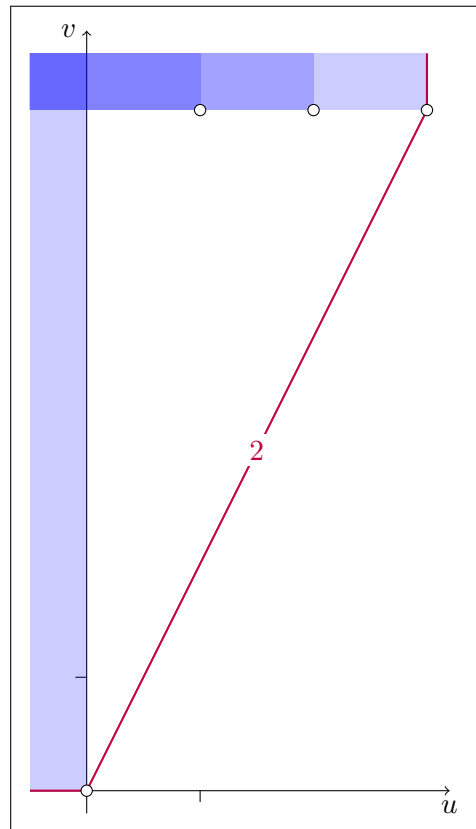
\mathcal{M}_{φ_2} hat genau den Slope $\frac{2}{3}$ mit Nenner 3.

Sei $\rho : t \mapsto x := t^3$ und betrachte

$$\begin{aligned}
 \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi_1} &= \rho^+ \left(\mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (2a + 5x^3 \partial_x + 4x^4 \partial_x^2 + x^5 \partial_x^3) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (2a + 5\rho(t)^3 (\rho'(t)^{-1} \partial_t) + 4\rho(t)^4 (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^2 + \rho(t)^5 (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^3) \\
 &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (2a + 5t^9 (\frac{1}{3} t^{-2} \partial_t) + 4t^{12} (\frac{1}{3} t^{-2} \partial_t)^2 + t^{15} (\frac{1}{3} t^{-2} \partial_t)^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (2a + \frac{5}{3}t^7\partial_t + \frac{4}{9}t^{12}(\underbrace{\partial_t t^{-2}}_{\partial_t t^{-2}}\partial_t) + \frac{1}{27}t^{15}(\underbrace{\partial_t t^{-2}}_{\partial_t t^{-2}}\underbrace{\partial_t t^{-2}}_{\partial_t t^{-2}}\partial_t)) \\
 &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (2a + \frac{5}{3}t^7\partial_t + \frac{4}{9}t^{10}(\overbrace{t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}}^{(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3})})\partial_t \\
 &\quad + \frac{1}{27}t^{13}(\overbrace{(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3})(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3})}^{(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3})(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3})})\partial_t) \\
 &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (2a + \frac{5}{3}t^7\partial_t + \frac{4}{9}t^8\partial_t^2 - \frac{8}{9}t^7\partial_t \\
 &\quad + \frac{1}{27}t^{13}(\overbrace{t^{-2}\partial_t t^{-2}\partial_t - 2t^{-2}\partial_t t^{-3} - 2t^{-5}\partial_t + 4t^{-6}}^{(t^{-2}\partial_t t^{-2}\partial_t - 2t^{-2}\partial_t t^{-3} - 2t^{-5}\partial_t + 4t^{-6})})\partial_t) \\
 &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (2a + (\frac{5}{3} - \frac{7}{9} + \frac{4}{27})t^7\partial_t + (\frac{4}{9} - \frac{2}{27})t^8\partial_t^2 + \frac{1}{27}t^{11}(\overbrace{t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}}^{(t^{-2}\partial_t - 2t^{-3})})\partial_t^2 \\
 &\quad - \frac{2}{27}t^{11}(\overbrace{t^{-3}\partial_t - 3t^{-4}}^{(t^{-3}\partial_t - 3t^{-4})})\partial_t) \\
 &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (2a + \frac{28}{27}t^7\partial_t + \frac{10}{27}t^8\partial_t^2 + \frac{1}{27}t^9\partial_t^3 - \frac{2}{27}t^8\partial_t^2 - \frac{2}{27}t^8\partial_t^2 + \frac{6}{27}t^7\partial_t) \\
 &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (2a + \frac{34}{27}t^7\partial_t + \frac{6}{27}t^8\partial_t^2 + \frac{1}{27}t^9\partial_t^3)
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.4: Newton Polygon zu $\rho^*P_{\varphi_2}$



$\rho^* \mathcal{M}_{\varphi_2}$ hat genau den Slope 2.

5.4 Angewendet für $\varphi_3 := \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

also für $\varphi_3 := \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ist

$$P_{\varphi_3} = x \partial_x (-x^2 \partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i \in I} k_i (-x^2 \partial_x)^{\max_j(k_j) - k_i}$$

$$= x \partial_x \underbrace{(x^2 \partial_x)^2}_{(5.1)} + 1(-x^2 \partial_x)^1 + 2(-x^2 \partial_x)^0$$

(5.1)

$$\downarrow$$

$$= x \partial_x \underbrace{(2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2)}_{(0.4)} - x^2 \partial_x + 2$$

$$= 2x \underbrace{\partial_x x^3}_{(0.4)} \partial_x + x \underbrace{\partial_x x^4}_{(0.4)} \partial_x^2 - x^2 \partial_x + 2$$

(0.4)

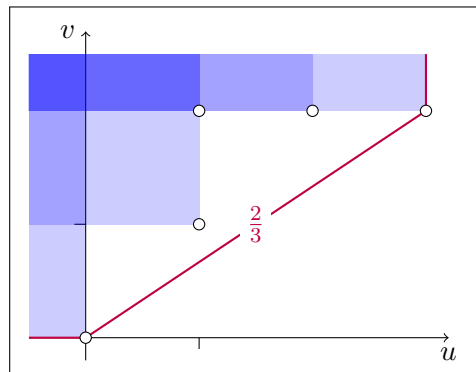
$$\downarrow$$

$$= \underbrace{2x(3x^2 + x^3 \partial_x)}_{(0.4)} \partial_x + x \underbrace{(4x^3 + x^4 \partial_x)}_{(0.4)} \partial_x^2 - x^2 \partial_x + 2$$

$$= \underbrace{6x^3 \partial_x + 2x^4 \partial_x^2}_{(0.4)} + \underbrace{4x^4 \partial_x^2 + x^5 \partial_x^3}_{(0.4)} - x^2 \partial_x + 2$$

$$= x^5 \partial_x^3 + 6x^4 \partial_x^2 + (6x^3 - x^2) \partial_x + 2$$

Abbildung 5.5: Newton Polygon zu P_{φ_3}



5.5 Angewendet für $\varphi_4 := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

also für $\varphi_4 := \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ist

$$P_{\varphi_4} = x \partial_x (-x^2 \partial_x)^{\max_j(k_j)} + \sum_{i \in I} k_i (-x^2 \partial_x)^{\max_j(k_j) - k_i}$$

$$= -x \partial_x \underbrace{(x^2 \partial_x)^3} - 2x^2 \partial_x + 3$$

(5.1)

$$\downarrow$$

$$= -x \partial_x (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) - 2x^2 \partial_x + 3$$

$$= -5x \underbrace{\partial_x x^4}_{\partial_x} \partial_x - 4x \underbrace{\partial_x x^5}_{\partial_x} \partial_x^2 - x \underbrace{\partial_x x^6}_{\partial_x} \partial_x^3 - 2x^2 \partial_x + 3$$

(0.4)

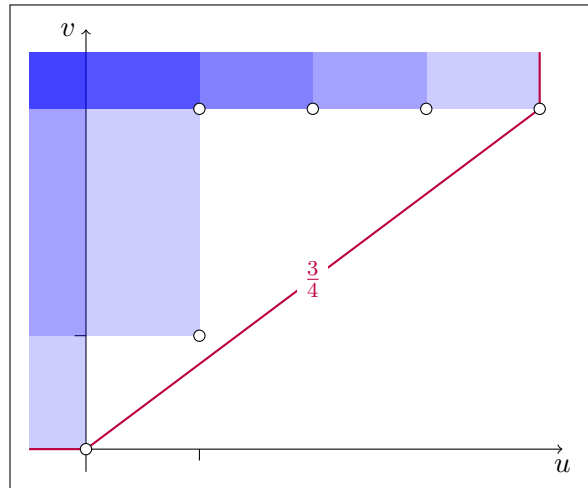
$$\downarrow$$

$$= \underbrace{-5x(4x^3 + x^4 \partial_x) \partial_x}_{-20x^4 \partial_x} - \underbrace{4x(5x^4 + x^5 \partial_x) \partial_x^2}_{-20x^5 \partial_x^2} - \underbrace{x(6x^5 + x^6 \partial_x) \partial_x^3}_{-4x^6 \partial_x^3 - 6x^6 \partial_x^3 - x^7 \partial_x^4} - 2x^2 \partial_x + 3$$

$$= -20x^4 \partial_x - 5x^5 \partial_x^2 - 20x^5 \partial_x^2 - 4x^6 \partial_x^3 - 6x^6 \partial_x^3 - x^7 \partial_x^4 - 2x^2 \partial_x + 3$$

$$= -x^7 \partial_x^4 - 10x^6 \partial_x^3 - 25x^5 \partial_x^2 - (20x^4 + 2x^2) \partial_x + 3$$

Abbildung 5.6: Newton Polygon zu P_{φ_4}



A Aufteilung von ...

Sei $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, so ist $\varphi' =: \sum_{i=2}^N a_{-i}t^{-i} \in t^{-2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ also $u\varphi'(t) = \sum_{i=1}^N a_{-i-1}t^{-i} \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$, welches wir zerlegen wollen. Zerlege also $t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j\psi_j(t^p)$ mit $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$ für alle $j > 0$ und $\psi_0 \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$:

$$\begin{array}{c}
 t\varphi'(t) = a_{-2}t^{-1} + \dots + a_{-p}t^{-(p-1)} + a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(p+2)}t^{-(p+1)} + \dots + a_{-2p}t^{-(2p-1)} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + a_{-(2p+3)}t^{-(2p+1)} + \dots \\
 \psi_0(t^p) \\
 t^{p-1}\psi_{p-1}(t^p) \quad t\psi_1(t^p)
 \end{array}$$

also:

$$\begin{aligned}\psi_0(t^p) &= a_{-(p+1)}t^{-p} + a_{-(2p+1)}t^{-2p} + \dots \\ \psi_1(t^p) &= a_{-p}t^{-p} + a_{-2p}t^{2p} + \dots \\ &\vdots \\ \psi_{p-1}(t^p) &= a_{-2}t^p + a_{-(p+2)}t^{2p} + \dots\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on d -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov, *D -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic d -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic d -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott, *D -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on d -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki, *D -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara, *D -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d -modules*.

- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>,
December 2012.

TODO: Erklärung das das wirklich selbstgemacht ist