

Bachelorarbeit

---

# Explizite Berechnung der Levelt-Turritin-Zerlegung für spezielle D-Moduln

---

vorgelegt von Maximilian Huber

am Institut für Mathematik  
der Universität Augsburg

betreut durch Prof. Dr. Marco Hien

abgegeben am 04.07.2013

stand: 1. Juni 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Moduln über <math>\mathcal{D}_k</math></b>	<b>4</b>
1.1	Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$ . . . . .	5
1.1.1	Alternative Definition / Sichtweise . . . . .	7
1.2	(Links) $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	8
1.3	Holonome $\mathcal{D}_k$ -Moduln . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>11</b>
2.1	Meromorphe Zusammenhänge . . . . .	12
2.2	Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln . . . . .	14
2.3	Newton Polygon . . . . .	17
2.3.1	Die Filtrierung ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $\ell$ -Symbol . . . . .	22
2.4	Operationen auf meromorphen Zusammenhängen . . . . .	24
2.4.1	Tensorprodukt . . . . .	24
2.4.2	pull-back und push-forward . . . . .	24
2.4.3	Fouriertransformation . . . . .	35
2.4.4	Betrachten bei Unendlich . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Elementare meromorphe Zusammenhänge</b>	<b>37</b>
3.1	Elementare formale meromorphe Zusammenhänge . . . . .	37
3.2	Elementare meromorphe Zusammenhänge . . . . .	38
3.3	Defnition in [Sab07] . . . . .	44
3.4	Twisten von meromorphen Zusammenhängen . . . . .	44
3.5	Levelt-Turrittin-Theorem . . . . .	46
3.5.1	Klassische Version . . . . .	46
3.5.2	Sabbah's Refined version . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Explizite Berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung</b>	<b>50</b>
4.1	Rezept für allgemeine $\varphi$ . . . . .	50

4.2	Levelt-Turritin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$	56
4.2.1	Konvergenz der Summanden	64
<b>Anhang</b>		<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Aufteilung von <math>t\varphi'(t)</math></b>	<b>70</b>
<b>B</b>	<b>Genaueres zu <math>(x^2\partial_x)^k</math></b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>Quelltexte</b>	<b>72</b>
C.1	ComplRat.hs	72
C.2	Koeffs.hs	73
C.3	SaveToFile.hs	77

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Newton-Polygon zu $P_1 = x\partial_x^2$	19
2.2	Newton-Polygon zu $P_2$	19
2.3	Newton Polygon zu $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$	21
2.4	Newton Polygon zu $P$	22
2.5	Newton Polygon zu $P = x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$	33
2.6	Newton Polygon zu $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$	33
2.7	Newton-Polygon zu $P$	36
2.8	Newton-Polygon zu $\mathcal{F}_P$	36
4.1	Newton-Polygon zu $P_\varphi$ mit $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$	53
4.2	Newton Polygon zu $P_\varphi$	56
4.3	Newton Polygon zu $\rho^*P_\varphi$	57
4.4	Newton Polygon zu $\mathcal{N}$	58
4.5	Newton-Polygon zu $Q_1$	60
4.6	Newton-Polygon zu $Q_2$	60
4.7	Die Beträge der $v_n$ in Abhängigkeit von $n$ für unterschiedliche $u_{-2}$	67
4.8	Wurzlkriterium angewendet auf die Koeffizienten	68

4.9	Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten . . . . .	69
-----	--	----

## Tabellenverzeichnis

C.1	Numerisch berechnete Koeffizienten von $v(t)$ für $u_{-2} = i$ bzw. $a = \frac{1}{8}$ . . . . .	76
-----	---	----

## Listings

C.1	ComplRat.hs . . . . .	72
C.2	Koeffs.hs . . . . .	73
C.3	testKoeffs.hs . . . . .	74
C.4	SaveToFile.hs . . . . .	77
C.5	GeneratePlots.sh . . . . .	78

# 0 Mathematische Grundlagen

Kommentar: Hier werde ich mich auf [Sab90] und [Cou95] beziehen.

Wir betrachten  $\mathbb{C}$  hier als Komplexe Mannigfaltigkeit mit der klassischen Topologie. In dieser Arbeit spielen die folgenden Funktionenräume eine große Rolle:

- $\mathbb{C}[x] := \{\sum_{i=1}^N a_i x^i \mid N \in \mathbb{N}\}$  die einfachen Potenzreihen
- $\mathbb{C}\{x\} := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid \text{pos. Konvergenzradius}\}$  ([HTT07, Chap 5.1.1])
- $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\}$  die formalen Potenzreihen
- $K := \mathbb{C}(\{x\}) := \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$  der Ring der Laurent Reihen.
- $\widehat{K} := \mathbb{C}((x)) := \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  der Ring der formalen Laurent Reihen.
- $\tilde{\mathcal{O}}$  als der Raum der Keime aller (möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen. (bei [HTT07] mit  $\tilde{K}$  bezeichnet)

Wobei offensichtlich die Inklusionen  $\mathbb{C}[x] \subsetneq \mathbb{C}\{x\} \subsetneq \mathbb{C}[[x]]$  und  $K \subsetneq \widehat{K}$  gelten.

Es bezeichnet der Hut ( $\widehat{\phantom{x}}$ ) das jeweils formale Äquivalent zu einem konvergentem Objekt.

Kommentar: Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ein Vektor, bezeichnet

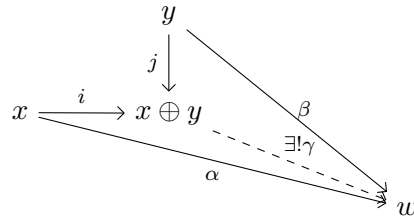
$${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den transponierten Vektor.

Es bezeichnet  $M(n \times m, k)$  die Menge der  $n$  mal  $m$  dimensionalen Matritzen mit Einträgen in  $k$ .

Sei  $R$  ein Ring, dann bezeichnet  $R^\times$  die Einheitengruppe von  $R$ .

**Definition 0.1** (Direkte Summe). [Sta12, 4(Categories).5.1] Seien  $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , eine *direkte Summe*, oder das *Coproduct* von  $x$  und  $y$  ist ein Objekt  $x \oplus y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  zusammen mit Morphismen  $i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x \oplus y)$  und  $j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x \oplus y)$ , so dass die folgende universelle Eigenschaft gilt: für jedes  $w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Morphismen  $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, w)$  und  $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, w)$  existiert ein eindeutiges  $\gamma \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x \oplus y, w)$ , so dass das Diagramm



kommutiert.

**Definition 0.2** (Tensorprodukt). [Sta12, 3(Algebra).11.21]

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \gamma \\ & & T \end{array}$$

Für eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  definiere das Tensorprodukt davon über  $R$  mit  $N$  als

$$\begin{aligned} \text{id}_N \otimes f : N \otimes_R M &\rightarrow N \otimes_R M' \\ n \otimes m &\mapsto n \otimes f(m) \end{aligned}$$

*Bemerkung 0.3.* Hier einige Rechenregeln für das Tensorprodukt,

$$(M \otimes_R N) \otimes_S L \cong M \otimes_R (N \otimes_S L) \quad (0.1)$$

$$M \otimes_R R \cong M \quad (0.2)$$

Sei  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so gilt

$$N \otimes_R (M / \text{im}(f)) \cong N \otimes_R M / \text{im}(\text{id}_R \otimes f) \quad (0.3)$$

**Definition 0.4** (Exakte Sequenz). Eine Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

heißt exakt, wenn für alle  $i$  gilt, dass  $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker f_i$ .

**Definition 0.5** (Kurze exakte Sequenz). Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

welche exakt ist.

**Definition 0.6** (Kokern). Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine Abbildung, so ist der *Kokern* von  $f$  definiert als  $\operatorname{coker}(f) = M / \operatorname{im}(f)$ .

**Proposition 0.7.** Ist  $f : M' \rightarrow M$  eine injektive Abbildung, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\pi} & M/f(M') \longrightarrow 0 \\ & & & & m & \longmapsto & m \bmod f(M') \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz und  $M/f(M') = \operatorname{coker}(f)$  ist der Kokern von  $f$ .

*Beweis.*

□

Kommentar:

**Definition 0.8** (Filtrierung). [Sta12, Def 10.13.1.] [Ell10, Rem 2.5.] Eine *aufsteigende Filtrierung*  $F$  von einem Objekt (Ring)  $A$  ist eine Familie von  $(F_i A)_{i \in \mathbb{Z}}$  von Unterobjekten (Unter-ring), so dass

$$0 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset A$$

und definiere weiter  $gr_i^F A := F_i A / F_{i-1} A$  und damit das zu  $A$  mit Filtrierung  $F$  assoziierte *graduierete Modul*

$$gr^F A := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} gr_k^F A.$$

**Definition 0.9.** [Ayo09] [Sab90, Def 3.2.1] Eine Filtrierung heißt *gut*, falls ...

# 1 Moduln über $\mathcal{D}_k$

Ich werde hier die Weyl Algebra, wie in [Sab90, Chapter 1], in einer Veränderlichen einführen. Wir werden als Körper  $k$  immer ein Element aus  $\{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$  betrachten.

**Definition 1.1** (Kommutator). Sei  $R$  ein Ring. Für  $a, b \in R$  wird

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

als der *Kommutator von  $a$  und  $b$*  definiert.

**Proposition 1.2.** Sei  $k \in \{\mathbb{C}[x], \mathbb{C}\{x\}, \mathbb{C}[[x]], K, \widehat{K}\}$ . Sei  $\partial_x : k \rightarrow k$  der gewohnte Ableitungsoperator nach  $x$ , so gilt

$$1. \quad [\partial_x, x] = \partial_x x - x \partial_x = 1$$

$$2. \quad \text{für } f \in k \text{ ist}$$

$$[\partial_x, f] = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (1.1)$$

$$3. \quad \text{Es gelten die Formeln}$$

$$[\partial_x, x^k] = kx^{k-1} \quad (1.2)$$

$$[\partial_x^j, x] = j\partial_x^{j-1} \quad (1.3)$$

$$[\partial_x^j, x^k] = \sum_{i \geq 1} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1) \cdot j(j-1) \cdots (j-i+1)}{i!} x^{k-i} \partial_x^{j-i} \quad (1.4)$$

*Beweis.* 1. Klar.

$$2. \quad \text{Für ein Testobjekt } g \in k \text{ ist}$$

$$[\partial_x, f] \cdot g = \partial_x(fg) - f\partial_x g = (\partial_x f)g + \underbrace{f(\partial_x g) - f(\partial_x g)}_{=0} = (\partial_x f)g.$$

$$3. \quad \text{Siehe [Sab90, 1.2.4.]}$$

□



## 1.1 Weyl-Algebra und der Ring $\mathcal{D}_k$

Sei dazu  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$  der Ableitungsoperator nach  $x$  und sei  $f \in k$ . Man hat die folgende Kommutations-Relation zwischen dem *Ableitungsoperator* und dem *Multiplikations Operator*  $f$ :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.5)$$

wobei die Rechte Seite die Multiplikation mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  darstellt. Dies bedeutet, für alle  $g \in \mathbb{C}[x]$  hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f\right] \cdot g = \frac{\partial f g}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g.$$

**Definition 1.3.** Definiere nun den Ring  $\mathcal{D}_k$  als die Quotientenalgebra der freien Algebra, welche von dem Koeffizientenring in  $k$  zusammen mit dem Element  $\partial_x$ , erzeugt wird, Modulo der Relation (1.5). Wir schreiben diesen Ring auch als

- $A_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[x]$ , und nennen ihn die *Weyl Algebra*
- $\mathcal{D} := \mathbb{C}\{x\} \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}\{x\}$
- $\widehat{\mathcal{D}} := \mathbb{C}[[x]] \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \mathbb{C}[[x]]$
- $\mathcal{D}_K := \mathbb{C}(\{x\}) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$
- $\mathcal{D}_{\widehat{K}} := \mathbb{C}((x)) \langle \partial_x \rangle$  falls  $k = \widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$  <sup>[1]</sup>.

*Bemerkung 1.4.* • Es gilt  $\mathcal{D}[x^{-1}] = \mathcal{D}_K$  und  $\widehat{\mathcal{D}}[x^{-1}] = \mathcal{D}_{\widehat{K}}$

- Offensichtlich erhält  $\mathcal{D}_k$  in kanonischer Weise eine Ringstruktur, dies ist in [AV09, Kapitel 2 Section 1] genauer ausgeführt.
- $\mathcal{D}_k$  ist nichtkommutativ.

**Proposition 1.5.** [Sab90, Proposition 1.2.3] Jedes Element in  $\mathcal{D}_k$  kann auf eindeutige Weise als  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial_x^i$ , mit  $a_i(x) \in k$ , geschrieben werden.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Proposition 1.2.3] □

---

<sup>[1]</sup>Wird mit  $\widehat{\mathcal{D}}_{\widehat{K}}$  bezeichnet, in [AV09].

Kommentar: Gilt das folgende??

$$\alpha_i(x)\partial_x^i \equiv \frac{\alpha_i}{x^i}(x\partial_x)^i \mod F_{i-1}\mathcal{D}$$

Kommentar: Besser?:

erst Filtrierung definieren und dadurch dann den Grad?

**Definition 1.6.** Sei  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\partial_x^i$ , wie in Proposition 1.5, gegeben, so definiere

$$\deg P := \max\{i | a_i \neq 0\}$$

als den *Grad* (oder den  $\partial_x$ -Grad) von  $P$ .

Kommentar: Unabhängigkeit von Schreibung? Sabbah script!

In natürlicher Weise erhält man die aufsteigende Filtrierung  $F_N\mathcal{D} := \{P \in \mathcal{D} | \deg P \leq N\}$  mit

$$\cdots \subset F_{-1}\mathcal{D} \subset F_0\mathcal{D} \subset F_1\mathcal{D} \subset \cdots \subset \mathcal{D}$$

und erhalte  $gr_k^F\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} = \{P \in \mathcal{D} | \deg P = N\} \cong \mathbb{C}\{x\}$ .

*Beweis.* Sei  $P \in F_N\mathcal{D}$  so betrachte den Isomorphismus:

$$F_N\mathcal{D}/F_{N-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}; [P] = P + F_{N-1}\mathcal{D} \mapsto a_n(x)$$

□

**Proposition 1.7.** *Es gilt:*

$$gr^F\mathcal{D} := \bigoplus_{N \in \mathbb{Z}} gr_N^F\mathcal{D} = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} gr_N^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cong \mathbb{C}\{x\}[\xi] = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$$

$\cong$   
*isomorph als grad. Ringe*

also  $gr^F\mathcal{D} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}\{x\} \cdot \xi^N$  als graduierte Ringe.

*Beweis.* TODO

Kommentar: Treffen?

□

### 1.1.1 Alternative Definition / Sichtweise

Kommentar: Nur abgeschrieben

[Kas03, Chap 1.1.] Sei  $X$  eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{O}_X$  die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X$ . Ein (*holomorpher*) *differenzial Operator* auf  $X$  ist ein Garben-Morphismus  $P : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ , lokal in der Koordinate  $x$  und mit holomorphen Funktionen  $a_n(x)$  als

$$(Pu)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \partial_x^n u(x)$$

geschrieben (für  $u \in \mathcal{O}_X$ ). Zusätzlich nehmen wir an, dass  $a_n(x) \equiv 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wir setzen  $\partial_x^n u(x) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x)$ . Wir sagen ein Operator hat höchstens Ordnung  $m$ , falls  $\forall n \geq m : a_n(x) \equiv 0$ .

**Definition 1.8.** Mit  $\mathcal{D}_X$  bezeichnen wir die *Garbe von Differentialoperatoren* auf  $X$ .

Die Garbe  $\mathcal{D}_X$  hat eine Ringstruktur mittels der Komposition als Multiplikation und  $\mathcal{O}_X$  ist ein Unterring von  $\mathcal{D}_X$ . Sei  $\Theta_X$  die Garbe der Vektorfelder über  $X$ . Es gilt, dass  $\Theta_X$  in  $\mathcal{D}_X$  enthalten ist. Bemerke auch, dass  $\Theta_X$  ein links  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule, aber kein rechts  $\mathcal{O}_X$ -Untermodule ist.

**Proposition 1.9.** [Ark12, Exmp 1.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[t]$  und  $\Theta_X = \mathbb{C}[x]\partial_x$ . Wobei  $\partial_x$  als  $\partial_x(x^n) = nx^{n-1}$  wirkt. Dann sind die Differentialoperatoren

$$\mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \partial_x], \quad \text{mit} \quad \partial_x x - x \partial_x = 1.$$

Somit stimmt die alternative Definition bereits mit der einfachen überein.

Kommentar:

**Definition 1.10.** [Ark12, Defn 2.1] Sei  $X = \mathbb{A}^1$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x]$  und  $\mathcal{D}_X = [x, \partial_x]$  mit der Relation  $[\partial_x, x] = 1$ . Dann definieren wir die links  $\mathcal{D}$ -Moduln über  $\mathbb{A}^1$  als die  $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ -Moduln. Sie werden geschrieben als  $\mathcal{D} - \text{mod}(\mathbb{A}^1)$

## 1.2 (Links) $\mathcal{D}$ -Moduln

Da  $\mathcal{D}$  ein nichtkommutativer Ring ist, muss man vorsichtig sein und zwischen links und rechts  $\mathcal{D}$ -Moduln unterscheiden. Wenn im folgendem von  $\mathcal{D}$ -Moduln gesprochen wird, werden immer links  $\mathcal{D}$ -Moduln gemeint.

**Beispiel 1.11** (links  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Ark12, Exmp 2.2]

1.  $\mathcal{D}$  ist ein links und rechts  $\mathcal{D}$ -Modul
2.  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x]$  oder  $\mathcal{M} = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  jeweils durch  $x \cdot x^m = x^{m+1}$  und  $\partial(x^m) = mx^{m-1}$
3. [Ark12, Exmp 2.2] Führe formal, also ohne analytischen Hintergrund, ein Symbol  $\exp(\lambda x)$  ein, mit  $\partial(f(x) \exp(\lambda x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \exp(\lambda x) + f \lambda \exp(\lambda x)$ . So ist  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \exp(\lambda x)$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul.
4. [Gin98, Exmp 3.1.4] Führe formal ein Symbol  $\log(x)$  mit den Eigenschaften  $\partial_x \log(x) = \frac{1}{x}$  ein. Erhalte nun das  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Dieses Modul ist über  $\mathcal{D}$  erzeugt durch  $\log(x)$  und man hat

$$\mathbb{C}[x] \log(x) + \mathbb{C}[x, x^{-1}] = \mathcal{D} \cdot \log(x) = \mathcal{D} / \mathcal{D}(\partial_x x \partial_x).$$

Kommentar:

**Lemma 1.12.** [Sab90, Lem 2.3.3.] Sei  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul von endlichem Typ, welches auch von endlichem Typ über  $\mathbb{C}\{x\}$  ist. Dann ist  $\mathcal{M}$  bereits ein freies  $\mathbb{C}\{x\}$ -Modul.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 2.3.3.] □

**Korollar 1.13.** [Sab90, Cor 2.3.4.] Falls  $\mathcal{M}$  ein links  $\mathcal{D}$ -Modul von endlichem typ, welches außerdem ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, so ist schon  $\mathcal{M} = \{0\}$ .

## 1.3 Holonome $\mathcal{D}_k$ -Moduln

**Definition 1.14.** Sei  $\mathcal{M}_k$  ein links  $\mathcal{D}_k$ -Modul.  $\mathcal{M}_k$  heißt *holonom*, falls es ein Element  $m \in \mathcal{M}_k$  gibt, das  $\mathcal{M}_k$  als  $\mathcal{D}_k$ -Modul erzeugt. Im speziellen folgt damit, dass  $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{D}_k / \mathfrak{a}$  für ein  $0 \neq \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{D}_k$ .

*Bemerkung 1.15.* In [Cou95] wird dies über die Dimension definiert, und bei [Sab90] über die charakteristische Varietät.

*Bemerkung 1.16.* Nach [Cou95, Prop 10.1.1] gilt

- Submoduln und Quotienten von holonomen  $\mathcal{D}_k$ -Moduln sind holonom
- sowie endliche Summen von holonomen  $\mathcal{D}_k$ -Moduln sind holonom

und laut [Sab90, Thm. 4.2.3] gilt, dass

- für ein holonomes  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$ -Modul  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}$  (bzw. ein  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ -Modul  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}$ ) ist die Lokalisierung

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}\{x\}} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} K \quad (\text{bzw. } \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]}[x^{-1}] := \mathcal{M}_{\mathbb{C}[[x]]} \otimes_{\mathbb{C}[[x]]} \widehat{K}),$$

mit der  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{x\}}$  (bzw.  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}[[x]]}$ ) Modul Struktur durch

$$\partial_x(m \otimes x^{-k}) = ((\partial_x m) \otimes x^{-k}) - km \otimes x^{-k-1}$$

wieder holonom.

**Satz 1.17.** *Sei  $\mathcal{M}_k$  ein holonomes  $\mathcal{D}_k$ -Modul, dann gilt, dass seine Lokalisierung isomorph zu  $\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_k \cdot P$ , mit einem  $P \in \mathcal{D}_k$  ungleich Null, ist.*

*Beweis.* Siehe [Sab90, Cor 4.2.8]. □

Kommentar:

### Alternative Definition B

**Definition 1.18.** [Sab90, Def 3.3.1.] Sei  $\mathcal{M}$  lineares Differentialsystem (linear differential system). Man sagt,  $\mathcal{M}$  ist holonom, falls  $\mathcal{M} = 0$  oder falls  $\text{Car } \mathcal{M} \subset \{x = 0\} \cup \xi = 0$ .

**Lemma 1.19.** [Sab90, Lem 3.3.8.] *Ein  $\mathcal{D}$ -Modul ist holonom genau dann, wenn  $\dim_{gr^F \mathcal{D}, 0} gr^F \mathcal{M} = 1$ .*

*Beweis.* Siehe [Sab90, Lem 3.3.8.] □

Kommentar:

### Alternative Definition A

**Definition 1.20** (Holonome  $\mathcal{D}$ -Moduln). [Cou95, Chap 10 §1] Ein endlich genertierter  $\mathcal{D}$ -Modul  $\mathcal{M}$  ist *holonom*, falls  $\mathcal{M} = 0$  gilt, oder falls es die Dimension 1 hat.

*Bemerkung 1.21.* [Cou95, Chap 10 §1] Sei  $\mathfrak{a} \neq 0$  ein Links-Ideal von  $\mathcal{D}$ . Es gilt nach [Cou95, Corollary 9.3.5], dass  $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) \leq 1$ . Falls  $\mathfrak{a} \neq \mathcal{D}$ , dann gilt nach der *Bernstein's inequality* [Cou95, Chap 9 §4], dass  $d(\mathcal{D}/\mathfrak{a}) = 1$ . Somit ist  $\mathcal{D}/\mathfrak{a}$  ein holonomes  $\mathcal{D}$ -Modul.

## 2 Meromorphe Zusammenhänge

Sei  $\mathcal{M}$  ein  $\mathcal{D}$ -Modul ungleich Null von endlichem Typ. Falls die links-Multiplikation mit  $x$  bijektiv ist, so nennen wir  $\mathcal{M}$  einen meromorphen Zusammenhang. [Sab90, Chap 4]

Kommentar: [HTT07, Chap 5.1.1]

**Systeme von ODEs** Für eine Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij} \in M(n \times n, K)$  definieren wir das *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen* (kurz *ODEs*) als

$$\frac{d}{dx}u(x) = A(x)u(x), \quad (2.1)$$

wobei  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x))$  ein Spaltenvektor<sup>[1]</sup> von unbekannten Funktionen. Wir werden (2.1) immer in einer Umgebung um  $x = 0 \in \mathbb{C}$  betrachten. Als Lösungen von (2.1) betrachten wir Keime von holomorphen (aber möglicherweise mehrdeutigen) Funktionen an  $x = 0$  (geschrieben als  $\tilde{\mathcal{O}}$ ). Wir sagen  $v(x) = {}^t(v_1(x), \dots, v_n(x))$  ist eine Lösung von (2.1), falls  $v_i \in \tilde{\mathcal{O}}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $v$  die Gleichung (2.1), auf einer Umgebung um die 0, erfüllt.

Kommentar: TODO: zeige, dass der Lösungsraum die Eigenschaften von  $\mathcal{D}$ -Moduln erfüllt  
siehe alternativer Zugang

### Alternativer Zugang

---

<sup>[1]</sup>Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ein Vektor, bezeichnet  ${}^t v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  den transponierten Vektor.

**Kommentar:** Sei  $P$  ein linearer Differentialoperator mit Koeffizienten in  $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  geschrieben als  $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$ . Man sagt eine Funktion  $u \in \mathcal{F}$  ist Lösung von  $P$ , falls  $u$  die Gleichung  $Pu = 0$  erfüllt. Man sagt  $0$  ist ein singulärer Punkt falls  $a_d(0) = 0$ . Falls  $0$  kein singulärer Punkt ist, hat  $P$  genau  $d$  über  $\mathbb{C}$  Unabhängige Lösungen in  $\mathbb{C}\{x\}$ .

[Sab90, 3.1.1] Sei  $\mathcal{F}$  ein Funktionenraum, auf dem die Differentialoperatoren  $\mathcal{D}$  wirken. Ein Element  $u \in \mathcal{F}$  ist Lösung von  $P \in \mathcal{D}$  falls  $P \cdot u = 0$  gilt.

Falls  $u$  ein Lösung von  $P$  ist, so ist  $u$  auch Lösung von  $Q \cdot P$  mit  $Q \in \mathcal{D}$ . Also hängt die Lösung nur vom Links Ideal  $\mathcal{D} \cdot P \triangleleft \mathcal{D}$  ab.

## 2.1 Meromorphe Zusammenhänge

Nun wollen wir dieses klassische Gebilde nun in die moderne Sprache der meromorphen Zusammenhänge übersetzen.

**Definition 2.1** (Meromorpher Zusammenhang). Ein *meromorpher Zusammenhang* (bei  $x = 0$ ) ist ein Tupel  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  und besteht aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_K$ , ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial : \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$ , genannt *Derivation* oder *Zusammenhang*, welche für alle  $f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  die *Leibnitzregel*

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u \tag{2.2}$$

erfüllen soll.

*Bemerkung 2.2* (Formaler meromorpher Zusammenhang). Analog definiert man einen *formalen meromorphen Zusammenhang*  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \partial)$  bestehend, analog wie in Definition 2.1, aus folgenden Daten:

- $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , ein endlich dimensionaler  $\widehat{K}$ -Vektor Raum
- einer  $\mathbb{C}$ -linearen Derivation  $\partial : \mathcal{M}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , welche die *Leibnitzregel* (2.2) erfüllen soll.

**Definition 2.3.** Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  zwei meromorphe Zusammenhänge über  $k$ . Eine  $k$ -lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ist ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, falls sie  $\varphi \circ \partial_{\mathcal{M}} = \varphi \circ \partial_{\mathcal{N}}$  erfüllt. In diesem Fall schreiben wir auch  $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ .



Kommentar: TODO: Wann sind die Isomorph

$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$  und die Ableitungen kommutieren mit dem Isomorphismus

Kommentar:

**Definition 2.4.** Wir erhalten damit die Kategorie der meromorphen Zusammenhänge über  $k$  mit

Objekte:  $(M, \partial)$  meromorpher Zusammenhang über  $k$

Morphismen:  $(M, \partial) \xrightarrow{f} (M', \partial')$  Morphismus von meromorphen Zusammenhängen.

*Bemerkung 2.5.* Später wird man auf die Angabe von  $\partial$  verzichten und einfach  $\mathcal{M}_K$  als den meromorphen Zusammenhang bezeichnen, auch wird manchmal auf die Angabe von  $K$  verzichtet, sofern klar ist, welches  $K$  gemeint ist.

Kommentar: [HTT07, Rem 5.1.2.] Die Bedingung (2.2) ist zur schwächeren Bedingung

$$\partial(fu) = f'u + f\partial u,$$

welche für alle  $f \in \tilde{\mathcal{O}}$  und für alle  $u \in \mathcal{M}_K$  erfüllt sein muss, äquivalent.

**Definition 2.6** (Zusammenhangsmatrix). [HTT07, Seite 129] Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein meromorpher Zusammenhang so wähle eine  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$ . Dann ist die *Zusammenhangsmatrix* bzgl. der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  die Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M(n \times n, K)$  definiert durch

$$a_{ij}(x) = -{}^t e_i \partial e_j.$$

Also ist, bezüglich der Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , die Wirkung von  $\partial$  auf  $u = {}^t(u_1, \dots, u_n)$  beschrieben durch

$$\begin{array}{c} \boxed{??} \\ \downarrow \\ \partial(u) = \partial\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(u'_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(x)\right)e_i. \end{array}$$

Einfache Umformungen zeigen, dass die Bedingung  $\partial u(x) = 0$ , für  $u(x) \in \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \tilde{\mathcal{O}} \otimes_K \mathcal{M}$ , äquivalent zu der Gleichung

$$u'(x) = A(x)u(x)$$

für  $u(x) = {}^t(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}^n$ . Damit haben wir gesehen, dass jeder meromorphe Zusammenhang  $(\mathcal{M}, \partial)$  ausgestattet mit einer  $K$ -Basis  $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  von  $\mathcal{M}$  zu einem ODE zugeordnet werden kann.

Umgekehrt können wir für jede Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))$  den assoziierten meromorphen Zusammenhang  $(\mathcal{M}_A, \partial_A)$  angeben durch

$$\mathcal{M}_A := \bigoplus_{i=1}^n K e_i, \quad \partial_A \sum_{i=1}^n u_i e_i := \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_j \right) e_i.$$

Genauer ausgeführt wird dies beispielsweise in [HTT07, Sec 5.1].

## 2.2 Eigenschaften / Äquivalenz zu holonomen lokalisierten $\mathcal{D}$ -Moduln

**Satz 2.7.** [Sab90, Thm 4.3.2] *Ein meromorpher Zusammenhang bestimmt ein holonomes lokalisiertes  $\mathcal{D}_K$ -Modul und umgekehrt.*

*Beweis.* [Sab90, Thm 4.3.2] □

**Lemma/Definition 2.8.** [AV09, Satz 4.12] [Sab90, Thm 4.3.2] *Ist  $\mathcal{M}_K$  ein meromorpher Zusammenhang, dann existiert ein  $P \in \mathcal{D}_K$  so dass  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ . So ein wird  $P$  dann als Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_K$  bezeichnet.*

*Beweis.* [AV09, Satz 4.12] □

Kommentar:

Bemerkung 2.9. [Sab90, Proof of Theorem 5.4.7]

$$\dim_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}} = \deg P \text{ wenn } \mathcal{M}_{\hat{K}} = \mathcal{D} / \mathcal{D} \cdot P$$

Kommentar: [Sab90, 4.2] Let  $\mathcal{M}$  be a left  $\mathcal{D}$ -module. First we consider it only as a  $\mathbb{C}\{x\}$ -module and let  $\mathcal{M}[x^{-1}]$  be the localized module.

**Lemma 2.10** (Lemma vom zyklischen Vektor). *Sei  $\mathcal{M}_K$  ein meromorpher Zusammenhang. Es existiert ein Element  $m \in \mathcal{M}_K$  und eine ganze Zahl  $d$  so dass  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  eine  $K$ -Basis von  $\mathcal{M}_K$  ist.*

*Beweis.* Ein Beweis ist beispielsweise in [Sab90, Thm 4.3.3] oder ausführlicher in [AV09, Satz 4.8].  $\square$

**Korollar 2.11.** *In der Situation von Lemma 2.10 gibt es ein  $P \in \mathcal{D}_K$  mit  $\partial$ -Grad von  $P$  ist gleich  $d$  und  $P \cdot m = 0$ , in diesem Fall ist  $P$  ein Minimalpolynom zu  $\mathcal{M}_K$ , also gilt  $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P$ . Explizit ergibt sich aus der Basisdarstellung*

$$\partial_x^d m = \alpha_{d-1} \partial_x^{d-1} m + \alpha_{d-2} \partial_x^{d-2} m + \dots + \alpha_1 \partial_x m + \alpha_0 m \quad \alpha_i \in K$$

von  $\partial_x^d m$ , dass

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot \underbrace{(\partial^d - \alpha_{d-1} \partial_x^{d-1} - \alpha_{d-2} \partial_x^{d-2} - \dots - \alpha_1 \partial_x - \alpha_0)}_{=: P}$$

gilt.

**Satz 2.12.** [AV09, Seite 64] *Ist  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2.$$

*Beweis.* [AV09, Seite 57-64]  $\square$

**Korollar 2.13.** *Sei  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $P_1, P_2 \in \mathcal{D}_K$  wie in Satz 2.12 so gilt*

$$\mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1)$$

*Beweis.* Denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_1 \cdot P_2) \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \\ &= \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_2 \oplus \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot P_1 \\ &\cong \mathcal{D}_K / \mathcal{D}_K \cdot (P_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 2.14.** *Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi$  ein Basisisomorphismus von  $K^r$  nach  $\mathcal{M}_K$ , also in der Situation*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 K^r & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & K^r
 \end{array}$$

*gilt:  $(K^r, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ist ebenfalls ein meromorpher Zusammenhang.*

*Beweis.* TODO, (3. Treffen) □

Kommentar:

**Lemma 2.15.** *Sei  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  ein gegebener meromorpher Zusammenhang, und  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Isomorphismus so ist  $(\mathcal{N}, \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi)$  ein zu  $(\mathcal{M}_K, \partial)$  isomorpher Zusammenhang.*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_K & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{M}_K \\
 \uparrow \cong \varphi & & \uparrow \varphi \cong \\
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi} & \mathcal{N}
 \end{array}$$

*Beweis.* TODO, (3. Treffen) □

**Lemma 2.16.** *Sei  $\mathcal{M}_K$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektor Raum mit  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei darauf definierte Derivationen, so gilt, die Differenz zweier Derivationen ist  $K$ -linear.*

*Beweis.* Seien  $\partial_1$  und  $\partial_2$  zwei Derivationen auf  $\mathcal{M}_K$ . Da  $\partial_1$  und  $\partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, ist  $\partial_1 - \partial_2$   $\mathbb{C}$ -linear, also muss nur noch gezeigt werden, dass  $(\partial_1 - \partial_2)(fu) = f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u) \forall f \in K$  und  $u \in \mathcal{M}_K$  gilt.

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 - \partial_2)(fu) &= \partial_1(fu) - \partial_2(fu) \\
 &= f'u + f\partial_1 u - f'u - f\partial_2 u \\
 &= \underbrace{f'u - f'u}_{=0} + f \cdot (\partial_1 u - \partial_2 u) \\
 &= f \cdot (\partial_1 - \partial_2)(u)
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.17.** Für  $(K^r, \partial)$  ein meromorpher Zusammenhang existiert ein  $A \in M(r \times r, K)$ , so dass  $\partial = \frac{d}{dx} - A$ .

*Beweis.* Es sei  $(K^r, \partial)$  ein meromorpher Zusammenhang. So ist  $\frac{d}{dx} - \partial : K^r \rightarrow K^r$   $K$ -linear, also lässt sich durch eine Matrix  $A \in M(r \times r, K)$  darstellen, also ist, wie behauptet,  $\partial = \frac{d}{dx} - A$ .  $\square$

**Proposition 2.18** (Transformationsformel). [[HTT07](#), Chap 5.1.1] In der Situation

$$\begin{array}{ccccc}
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + A} & & & K^r \\
 \uparrow & \searrow \varphi & & \swarrow \varphi & \uparrow \\
 & & M & \xrightarrow{\partial} & M \\
 \cong T \uparrow & & & & T \cong \uparrow \\
 & \nearrow \psi & & \nwarrow \psi & \\
 K^r & \xrightarrow{\frac{d}{dz} + B} & & & K^r
 \end{array}$$

mit  $\varphi, \psi$  und  $T$   $K$ -Linear und  $\partial, (\frac{d}{dx} + A)$  und  $(\frac{d}{dx} + B)$   $\mathbb{C}$ -Linear, gilt:

Der meromorphe Zusammenhang  $(\frac{d}{dx} + A)$  auf  $K^r$  wird durch Basiswechsel  $T \in GL(r, K)$  zu

$$\frac{d}{dx} + (T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT) = \frac{d}{dx} + B$$

**Definition 2.19** (Differenziell Äquivalent). Man nennt  $A$  und  $B$  differenziell Äquivalent ( $A \sim B$ ) genau dann, wenn es ein  $T \in GL(r, K)$  gibt, mit  $B = T^{-1} \cdot T' + T^{-1}AT$ .

Kommentar:  $1 = TT^{-1} \rightsquigarrow T'T^{-1} + T(T^{-1})' = 0$   
 $1 = T^{-1}T \rightsquigarrow (T^{-1})'T + T^{-1}T' = 0$

## 2.3 Newton Polygon

Kommentar: Quelle: sabbah?  
 sabbah mach alles formal, barbara mach alles konvergent

Jedes  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , also insbesondere auch jedes  $P \in \mathcal{D}_K$ , lässt sich eindeutig als

$$P = \sum_{k=0}^n a_k(x) \partial_x^k = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l \right) \partial_x^k$$

mit  $\alpha_{ml} \in \mathbb{C}$  schreiben. Betrachte das zu  $P$  dazugehörige

$$\begin{aligned} H(P) &:= \bigcup_{m,l \text{ mit } \alpha_{ml} \neq 0} \left( (m, l - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2 \\ &= \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m) - m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Definition 2.20.** Das Randpolygon der konvexen Hülle  $\text{conv}(H(P))$  von  $H(P)$  heißt das *Newton Polygon* von  $P$  und wird als  $N(P)$  geschrieben.

*Bemerkung 2.21.* Claude Sabbah definiert das Newton-Polygon in [Sab90, 5.1] auf eine andere Weise. Er schreibt

$$P = \sum_k a_k(x)(x\partial_x)^k$$

mit  $a_k(x) \in \mathbb{C}\{x\}$  und definiert das Newton-Polygon als das Randpolygon der konvexen Hülle von

$$H'(P) := \bigcup_{m \text{ mit } a_m \neq 0} \left( (m, \deg(a_m)) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

**Definition 2.22.** Die Menge  $\text{slopes}(P)$  sind die nicht-vertikalen Steigungen von  $N(P)$ , die sich echt rechts von  $\{0\} \times \mathbb{R}$  befinden.

- Schreibe  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  für die Menge der zu  $\mathcal{M}$  gehörigen slopes.
- $P$  heißt *regulär* oder *regulär singulär*  $:\Leftrightarrow \text{slopes}(P) = \{0\}$  oder  $\deg P = 0$ , sonst *irregulär singulär*.
- Ein meromorpher Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $\mathcal{M}_K$ ) heißt regulär singulär, falls es ein regulär singuläres  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  (bzw.  $P \in \mathcal{D}_K$ ) gibt, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  (bzw.  $\mathcal{M}_K \cong \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K \cdot P$ ).

**Beispiel 2.23.** 1. Ein besonders einfaches Beispiel ist  $P_1 = x^{\textcolor{red}{1}}\partial_x^{\textcolor{blue}{2}}$ . Es ist leicht abzulesen, dass

$$\textcolor{blue}{m} = 2 \qquad \text{und} \qquad \textcolor{red}{l} = 1$$

so dass

$$H(P_1) = \left( (\textcolor{blue}{2}, \textcolor{red}{1} - \textcolor{blue}{2}) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 2, v \geq -1\}.$$

In Abbildung 2.1 ist  $H(P_1)$  (blau) sowie das Newton Polygon eingezeichnet. Offensichtlich ist  $\text{slopes}(P_1) = \{0\}$  und damit ist  $P_1$  regulär singulär.

2. [AV09, Bsp 5.3. 2.] Sei  $P_2 = x^4(x+1)\partial_x^4 + x\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1$ , so kann man das entsprechende Newton Polygon konstruieren. Das Newton Polygon wurde in Abbildung 2.2 visualisiert. Man erkennt, dass  $\mathcal{P}(P_2) = \{0, \frac{2}{3}\}$  ist.

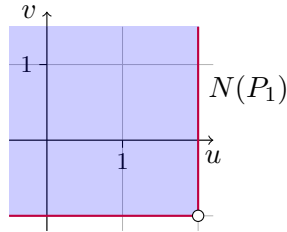


Abbildung 2.1: Newton-Polygon zu  $P_1 = x\partial_x^2$

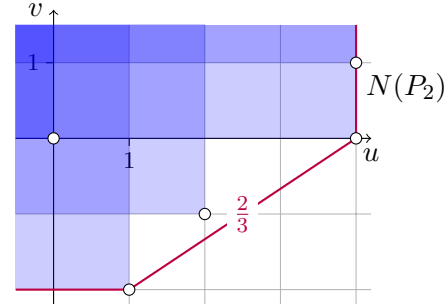


Abbildung 2.2: Newton-Polygon zu  $P_2$

Kommentar: ZUM LÖSCHEN

*Bemerkung 2.24.* Für alle  $f \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}^\times$  gilt allgemein, dass das zu  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  gehörige Newton Polygon, bis auf vertikale Verschiebung mit dem von  $f \cdot P$  übereinstimmt.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Seite 25] bzw. [AV09, Bem 5.4]. □

*Bemerkung 2.25.* Nach [Sab90, Seite 25] gilt, dass das Newton-Polygon, bis auf vertikales verschieben, nur von dem assoziierten meromorphen Zusammenhang abhängt. Dies wird auch in [AV09, Bem 5.4] diskutiert.

Kommentar: Damit lässt sich das Newton Polygon, durch ein  $f$ , immer so verschieben, dass  $(0,0) \in N(f \cdot P)$ , und es gilt, dass

$$\mathcal{D}_K \cdot P = \mathcal{D}_K \cdot (f \cdot P) \triangleleft \mathcal{D}_K$$

ist.

**Definition 2.26.** In einem Polynom  $P = \varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l) \partial_x^k$ , mit  $\varepsilon, \alpha_{kl} \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{Z}$  sind die restlichen Monome Terme im Quadranten von  $\varepsilon x^p \partial_x^q$ , falls für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $l \in \mathbb{Z}_{\geq -N}$  mit  $\alpha_{kl} \neq 0$  gilt:  $k \leq q$  und  $l - k \geq p - q$ .

*Bemerkung 2.27.* • Anschaulich bedeutet das, dass

$$H(\varepsilon x^p \partial_x^q) = \left( (q, p - q) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \supset \left( (k, l - k) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) = H(\alpha_{kl} x^l \partial_x^k),$$

für alle relevanten  $k$  und  $l$ .

- Sei  $P$  ein Polynom, bei dem alle Koeffizienten im Quadranten von  $\varepsilon x^p \partial_x^q$  sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} H(P) &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \sum_{k=0}^n (\sum_{l=-N}^{\infty} \alpha_{kl} x^l) \partial_x^k) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q + \mathbf{T.i.Q. \ von } x^p \partial_x^q) \\ &= H(\varepsilon x^p \partial_x^q) \\ \Rightarrow N(P) &= N(\varepsilon x^p \partial_x^q). \end{aligned}$$

Also können Terme, die sich bereits im Quadranten eines anderen Terms befinden und nicht der Term selbst sind, vernachlässigt werden, wenn das Newton-Polygon gesucht ist. Das **T.i.Q.** ist eine hier Abkürzung für Terme im Quadranten.

Kommentar:

**Beispiel 2.28.**

$$(x^a \partial_x^b)^c = x^{ac} \partial_x^{bc} + \mathbf{T.i.Q. \ von } x^{ac} \partial_x^{bc}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} N((x^a \partial_x^b)^c) &= N(x^{ac} \partial_x^{bc} + \mathbf{T.i.Q. \ von } x^{ac} \partial_x^{bc}) \\ &= N(x^{ac} \partial_x^{bc}) \end{aligned}$$

**Lemma 2.29.** [[Sab90](#), 5.1]

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K)$  ist nicht Leer, wenn  $\mathcal{M}_K \neq \{0\}$
2. Wenn man eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{M}'_K \rightarrow \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}''_K \rightarrow 0$  hat, so gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_K) = \mathcal{P}(\mathcal{M}'_K) \cup \mathcal{P}(\mathcal{M}''_K)$ .

Kommentar: Siehe auch [[Sab90](#), Thm 5.3.4]

Dort Steht:

Wir erhalten die Exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_1 \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_2 \rightarrow 0$$

**Korollar 2.30.** [[Sab90](#), Thm 5.3.4]  $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(P_1) \cup \mathcal{P}(P_2)$  und  $\mathcal{P}(P_1) \cap \mathcal{P}(P_2) = \emptyset$



**Satz 2.31.** [Sab90, Thm 5.3.1] [AV09, 5.15] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler meromorpher Zusammenhang und sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge seiner slopes. Es existiert eine (bis auf Permutation) eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}$$

in formale meromorphe Zusammenhänge mit  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}^{(i)}) = \{\Lambda_i\}$ .

*Beweis.* [Sab90, Thm 5.3.1] oder [AV09, 5.15] □

*Bemerkung 2.32.* In Satz 2.31 ist es wirklich notwendig, formale meromorphe Zusammenhänge zu betrachten, denn das Resultat gilt nicht für konvergente meromorphe Zusammenhänge.

Kommentar:

**Beispiel 2.33.** [Sab90, Ex 5.3.6] Sei  $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$ . So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

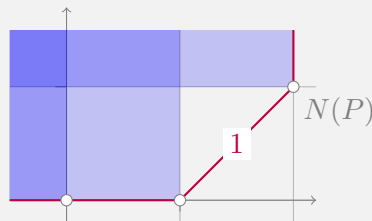


Abbildung 2.3: Newton Polygon zu  $P = x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2}$

mit den Slopes  $\mathcal{P}(P) = \{0, 1\} =: \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ . Nach dem Satz 2.31 existiert eine Zerlegung  $P = P_1 \cdot P_2$  mit  $\mathcal{P}(P_1) = \{\Lambda_1\}$  und  $\mathcal{P}(P_2) = \{\Lambda_2\}$ . Durch scharfes hinsehen erkennt man, dass

$$\begin{aligned} P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\ &\dots \\ &= (x(x\partial_x) + \dots) \cdot (x\partial_x + \dots) \\ &\dots \\ &= P_1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

anders geschrieben

$$\begin{aligned}
 P &= x(x\partial_x)^2 + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= xx\partial_x x\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= x^2(x\partial_x + 1)\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= x^3\partial_x^2 + x^2\partial_x + x\partial_x + \frac{1}{2} \\
 &= x^3\partial_x^2 + (x^2 + x)\partial_x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

So sieht das Newton-Polygon wie folgt aus

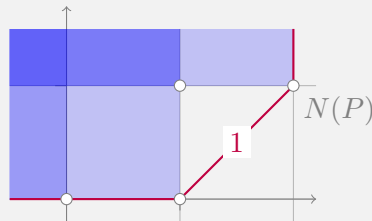


Abbildung 2.4: Newton Polygon zu  $P$

Kommentar:

**Korollar 2.34.** [Sab90, Cor 5.2.6] Falls  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein regulärer formaler meromorpher Zusammenhang ist, dann ist  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen Zusammenhängen. Wobei die elementaren formalen Zusammenhänge die sind, die zu passendem  $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$  isomorph sind.

### 2.3.1 Die Filtrierung ${}^\ell V\mathcal{D}_{\widehat{K}}$ und das $\ell$ -Symbol

Kommentar: TODO: mache alle Linearform  $L$  zu  $\ell$

Sei  $\Lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$  vollständig gekürzt, also mit  $\lambda_0$  und  $\lambda_1$  in  $\mathbb{N}$  relativ prim. Definiere die Linearform  $\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$  in zwei Variablen, sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . Falls  $P = x^a \partial_x^b$  mit  $a \in \mathbb{Z}$

und  $b \in \mathbb{N}$ , setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \ell(b, b - a)$$

und falls  $P = \sum_{i=0}^d b_i(x) \partial_x^i$  mit  $b_i \in \widehat{K}$ , setzen wir

$$\text{ord}_\ell(P) = \max_{\{i | a_i \neq 0\}} \ell(i, i - v(b_i)).$$

**Definition 2.35** (Die Filtrierung  ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ ). [Sab90, Seite 25] Nun können wir die aufsteigende Filtration  ${}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , welche mit  $\mathbb{Z}$  indiziert ist, durch

$${}^\ell V_\lambda \mathcal{D}_{\widehat{K}} := \{P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}} \mid \text{ord}_\ell(P) \leq \lambda\}$$

definieren.

*Bemerkung 2.36.* Man hat  $\text{ord}_\ell(PQ) = \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q)$  und falls  $\lambda_0 \neq 0$ , hat man auch, das  $\text{ord}_\ell([P, Q]) \leq \text{ord}_\ell(P) + \text{ord}_\ell(Q) - 1$ .

**Definition 2.37** ( $\ell$ -Symbol). [Sab90, Seite 25] Falls  $\lambda_0 \neq 0$ , ist der graduierte Ring  $gr {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} gr_\lambda {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  ein kommutativer Ring. Bezeichne die Klasse von  $\partial_x$  in dem Ring durch  $\xi$ , dann ist der Ring isomorph zu  $\widehat{K}[\xi]$ . Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , so ist  $\sigma_\ell(P)$  definiert als die Klasse von  $P$  in  $gr_{\text{ord}_\ell(P)} {}^\ell V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ .  $\sigma_\ell$  wird hierbei als das  $\ell$ -Symbol bezeichnet.

Zum Beispiel ist  $\sigma_\ell(x^a \partial_x^b) = x^a \xi^b$ .

*Bemerkung 2.38.* Bei [Sab90] wird der Buchstabe  $L$  anstatt  $\ell$  für Linearformen verwendet, dieser ist hier aber bereits für  $\mathbb{C}\{t\}$  reserviert. Dementsprechend ist die Filtrierung dort als  ${}^L V \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und das  $\ell$ -Symbol als  $L$ -Symbol zu finden.

*Bemerkung 2.39.* Ist  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  geschrieben als  $P = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^j \partial_x^i$ . So erhält man  $\sigma_\ell(P)$  durch die Setzung

$$\sigma_\ell(P) = \sum_{\{(i,j) | \ell(i, i-j) = \text{ord}_\ell(P)\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i.$$

*Beweis.* TODO □

**Kommentar:** Ich will die Linearform vermeiden und direkt die skalare Steigung verwenden

**Definition 2.40** (Stützfunktion). Die Funktion

$$\omega_P : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \omega_P(t) := \inf\{v - tu \mid (u, v) \in N(P)\}$$

heißt Stützfunktion und wird in [AV09] als Alternative zu dieser Ordnung verwendet.

*Bemerkung 2.41.* Wenn  $\ell(x_0, s_1)$  wie oben aus  $\Lambda$  entstanden ist, so gilt

$$\omega_P(\Lambda) = \text{ord}_\ell(P).$$

**Kommentar:** TODO: ist  $\ell$  Slope (gehört zu Slope) dann hat  $\sigma_\ell(P)$  zumindest 2 Monome

## 2.4 Operationen auf meromorphen Zusammenhängen

### 2.4.1 Tensorprodukt

**Proposition 2.42.** [Sch, Prop 4.1.1] Seien  $(\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}})$  und  $(\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$  meromorphe Zusammenhänge. Sei  $n \otimes n \in \mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ . Durch Setzen von

$$\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial_{\mathcal{M}}(m) \otimes n + m \otimes \partial_{\mathcal{N}}(n) \tag{2.3}$$

als die Wirkung von  $\partial$  auf das  $K$ -Modul  $\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}$ , wird  $(\mathcal{M} \otimes_K \mathcal{N}, \partial)$  zu einem meromorphen Zusammenhang.

**Kommentar:**

*Beweis.* Klar □

**Lemma 2.43.** [Sab90, Ex 5.3.7] Falls  $\mathcal{N}$  regulär und nicht Null, dann ist die Menge der Slopes von  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  genau die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}$ .

*Beweis.* TODO □

### 2.4.2 pull-back und push-forward

Kommentar: Nach [Sab07, 1.a] und [HTT07, 1.3].

Es sei

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x := \rho(t) \quad \in t\mathbb{C}[[t]]$$

eine polynomielle Abbildung mit Bewertung  $p \geq 1$ . Hier werden wir meistens  $\rho(t) = t^p$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  betrachten. Diese Funktion induziert eine Abbildung

$$\rho^* : \mathbb{C}\{x\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\}, f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \mathbb{C}[[x]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]], f \mapsto f \circ \rho.$$

Analog erhalten wir

$$\rho^* : K \hookrightarrow L := \mathbb{C}(\{t\}), f \mapsto f \circ \rho \quad \text{bzw.} \quad \rho^* : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{L} := \mathbb{C}((t)), f \mapsto f \circ \rho,$$

wobei  $L$  (bzw.  $\widehat{L}$ ) eine endliche Körpererweiterung von  $K$  (bzw.  $\widehat{K}$ ) ist.

Kommentar: TODO: damit wird  $\widehat{L}$  zu einem  $\widehat{K}$  Vektorraum.

Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}((t))$  Vektorraum ausgestattet mit einem Zusammenhang  $\nabla$ .

**Definition 2.44** (pull-back). [Sab07, 1.a] und [Sab90, Page 34] Der *pull-back* oder das *inverse Bild*  $\rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  von  $(\mathcal{M}_{\widehat{K}}, \nabla)$  ist der Vektorraum

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} := \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t)) \otimes_{\mathbb{C}((x))} \mathcal{M}_{\mathbb{C}((x))}$$

mit dem *pull-back Zusammenhang*  $\rho^* \nabla$  definiert durch

$$\partial_t(1 \otimes m) := \rho'(t) \otimes \partial_x m. \quad (2.4)$$

Für ein allgemeines  $\varphi \otimes m \in \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  gilt somit

$$\partial_t(\varphi \otimes m) := \rho'(t)(\varphi \otimes \partial_x m) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \otimes m. \quad (2.5)$$

Kommentar: Nun wollen wir uns noch genauer mit dem pull-back beschäftigen, und stellen uns die Frage:

**Wie sieht die Wirkung der Derivation auf dem pull-back Zusammenhang aus?** Für  $\rho(t) = t^p$  betrachten wir beispielsweise ein Element der Form  $f(x)m = f(\rho(t))m \in \rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , dann gilt

$$\begin{aligned}\partial_x(f(x)m) &= \partial_{\rho(t)}(f(\rho(t))m) \\ &= f'(\rho(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial(f(t))}{\partial(f(t))}}_{=1} m + f(\rho(t)) \underbrace{\partial_{\rho(t)} m}_{=\partial_x m} \\ &= f'(\rho(t))m + f(\rho(t))\partial_x m = (\star) \\ \rho'(t)^{-1}\partial_t(f(x)m) &= \frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t(f(t^p)m) \\ &= f'(t^p)m + f(t^p)\frac{1}{pt^{p-1}}\partial_t m = (\star)\end{aligned}$$

Also gilt  $\partial_t(f(t)m) = \rho'(u)^{-1}\partial_u(f(t)m)$  und somit lässt sich vermuten, dass die Wirkung von  $\partial_x$  gleich der Wirkung von  $\rho'(t)^{-1}\partial_t$  ist. In der Tat stimmt diese Vermutung, wie das folgende Lemma zeigt.

**Satz 2.45.** *In der Situation von Lemma 2.44, mit  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$  für ein  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , gilt*

$$\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t).$$

Für  $P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$  werden wir auch  $\rho^*P(t, \partial_t)$  schreiben.

**Kommentar:** [Cou95, Seite 130] Holonomic modules are preserved under this construction.

**Kommentar:** [Sab90, Page 34] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler meromorpher Zusammenhang. Man definiert  $\pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  als den Vektor Raum über  $\widehat{L} : \pi^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ . Dann definiert man die Wirkung von  $\partial_t$  durch:  $t\partial_t \cdot (1 \otimes m) = q(1 \otimes (x\partial_x \otimes m))$  und damit

$$t\partial_t \cdot (\varphi \otimes m) = q(\varphi \otimes (x\partial_x \cdot m)) + ((t\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \otimes m).$$

Man erhält damit die Wirkung von  $\partial_t = t^{-1}(t\partial_t)$ .

Für den Beweis von Satz 2.45 werden zunächst ein paar Lemmata bewiesen.

**Lemma 2.46.** *Es gilt  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  als  $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$ -Vektorräume, mittels*

*Kommentar: TODO: VR oder Moduln??*

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \\ f(t) \otimes Q(x, \partial_x) &\longmapsto f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \end{aligned}$$

Kommentar:

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass  $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$  die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  erfüllt, in diesem Fall folgt die Behauptung. Zunächst sei die bilineare Abbildung

$$\kappa : \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} \rightarrow \mathcal{D}_{\widehat{L}}, (f(t), Q(x, \partial_x)) \mapsto f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)$$

gegeben, und nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es genau eine lineare Abbildung, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L} \times \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\otimes} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\ & \searrow \kappa & \downarrow \exists! \\ & & \mathcal{D}_{\widehat{L}} \end{array}$$

Dieser so erhaltene eindeutige Morphismus ist genau unser  $\Phi$ .

$$\begin{array}{ccc}
\hat{L} \times \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\otimes} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\
& \searrow \kappa & \downarrow \Phi \\
& & \mathcal{D}_{\hat{L}} \\
& \searrow \gamma & \downarrow \text{?} \\
& & V
\end{array}
\quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{!} \\ \text{?} \end{array}$$

☐

*Beweis.* Prüfe zunächst die Injektivität. Sei  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \ker(\Phi)$  so, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(f(t) \otimes Q(x, \partial_x)) \\ &= f(t)Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \end{aligned}$$

und, da hier alles nullteilerfrei ist, ist die Bedingung äquivalent zur folgenden

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 0 &= f(t) & \text{oder} & \quad 0 = Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= f(t) & \text{oder} & \quad 0 = Q(x, \partial_x) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= f(t) \otimes Q(x, \partial_x). \end{aligned}$$

Kommentar: TODO: korrekt?

Nun zur Surjektivität. Sei  $g(t, \partial_t) = \sum_k a_k(t) \partial_t^k \in \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  so gilt

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k a_k(t) \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \underbrace{(\rho'(t) \rho'(t)^{-1})^k}_{=1} \partial_t^k \\ &= \sum_k a_k(t) \rho'(t)^k (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \end{aligned}$$

und zerlege  $a_k(t) \rho'(t)^k = \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p)$ . Damit gilt dann

$$\begin{aligned} g(t, \partial_t) &= \sum_k \sum_{i=0}^{p-1} t^i a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \left( \sum_k a_{k,i}(t^p) (\rho'(t)^{-1} \partial_t)^k \right) \\ &= \Phi \left( \sum_{i=0}^{p-1} t^i \otimes \left( \sum_k a_{k,i}(x) (\partial_x)^k \right) \right). \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.47.** *Das in Lemma 2.46 definierte  $\Phi$  ist sogar ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen, also gilt sogar  $\rho^* \mathcal{D}_{\widehat{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}$  als meromorphe Zusammenhänge.*

*Beweis.* Sei  $\partial_t$  wie gewohnt und  $\partial_{\otimes}$  der Zusammenhang auf  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ , welcher wie in Proposition 2.42 definiert sei. Wir wollen noch zeigen, dass  $\partial_t \circ \Phi = \Phi \circ \partial_{\otimes}$  gilt, also dass  $\Phi$  ein Morphismus von meromorphen Zusammenhängen ist. Betrachte dazu das Diagramm



$$\begin{array}{ccc}
 \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\hat{L}} & \xrightarrow{\partial_t} & \mathcal{D}_{\hat{L}}
 \end{array}$$

und für einen Elementartensor  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$

**Kommentar:** Q wie in großen beweis später, Namenskollision

folgt dann

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\partial_{\otimes}} & \partial_t f(t) \otimes Q(x, \partial_x) + \rho'(t) \otimes \partial_x Q(x, \partial_x) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
 & & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \underbrace{\rho'(t) \cdot \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t) \\
 & & \uparrow \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\partial_t} & \partial_t f(t) Q(x, \partial_x) + \partial_t Q(\rho(t), \rho'(t)^{-q} \partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm. □

**Kommentar:**

*Bemerkung 2.48.* BENÜTZT BEREITS DAS NÄCHSTE LEMMA...

Das soeben, in Lemma 2.46, definierte  $\Phi$  erfüllt für Elementartensoren  $1 \otimes m \in \hat{L} \otimes_{\hat{K}} \mathcal{D}_{\hat{K}}$

$$\begin{aligned}
 \partial_u(1 \otimes m) &\stackrel{\text{def}}{=} \rho'(t) \otimes \partial_x m \\
 &\stackrel{\Phi}{\mapsto} \underbrace{\rho'(t) \rho'(t)^{-1}}_{=1} \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \partial_t m(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

und somit (2.4) wie gewollt.

**Lemma 2.49.** Sei  $P(x, \partial_x) \in \mathcal{D}_K$ . In der Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(x, \partial_x)} & \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \\
 \downarrow \cong \Phi & & \downarrow \cong \Phi \\
 \mathcal{D}_{\widehat{L}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D}_{\widehat{L}}
 \end{array}$$

mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.46 macht  $\alpha := \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  das Diagramm kommutativ.

*Beweis.* Betrachte ein  $f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \in \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}$ . So gilt

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P(x, \partial_x)} & f(t) \otimes Q(x, \partial_x) \cdot P(x, \partial_x) \\
 & & \downarrow \Phi \\
 & & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) \otimes Q(x, \partial_x) & & \\
 \downarrow \Phi & & \\
 f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) & \xrightarrow{\_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)} & f(t) Q(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)
 \end{array}$$

also kommutiert das Diagramm mit  $\alpha = \_ \cdot P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$ . □

*Beweis zu Satz 2.45.* Sei  $P \in \mathcal{D}_{\widehat{K}}$  und  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \stackrel{!}{\cong} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q$$

für  $Q = P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  gilt. Betrachte dazu die kurze Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\_ \cdot P} & \mathcal{D}_{\widehat{K}} & \xrightarrow{\pi_{\widehat{K}}} & \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0 \\
 & & u & \longmapsto & u \cdot P & & \\
 & & & & & & u \longmapsto u \mod \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P
 \end{array}$$

ist exakt, weil  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P = \text{coker}(\_ \cdot P)$ . Weil  $\widehat{K}$  flach ist, da Körper, ist auch, nach Anwenden des Funktors  $\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \_$ , die Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}$$

exakt.

Kommentar: Deshalb ist

$$\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \text{coker}(\text{id} \otimes \_ \cdot P) \quad (\text{weil exakt})$$

$$\cong \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \left( (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}}) \cdot (\text{id} \otimes \_ \cdot P) \right) \quad (\text{nach def. von coker})$$

Also mit  $\Phi$  wie in Lemma 2.46 und  $Q(t, \partial_t) := P(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t)$  nach Lemma 2.49 ergibt sich

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi \quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi$$

$$\quad \quad \quad \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\_ \cdot Q} \mathcal{D}_{\widehat{L}}$$

als kommutatives Diagramm. Nun, weil  $\_ \cdot Q$  injektiv ist, lässt sich die untere Zeile zu einer exakten Sequenz fortsetzen

$$0 \longrightarrow \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \_ \cdot P} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{D}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\text{id} \otimes \pi_{\widehat{K}}} \widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi \quad \quad \quad \downarrow \cong \Phi$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\_ \cdot Q} \mathcal{D}_{\widehat{L}} \xrightarrow{\pi_{\widehat{L}}} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot Q \longrightarrow 0$$

und damit folgt, wegen Isomorphie der Cokerne, die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.50.** Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$  die Menge der Slopes von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , dann gilt für  $\mathcal{P}(\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}}) = \{\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_r\}$ , dass  $\Lambda'_n = p \cdot \Lambda_n$ .

*Beweis.* Siehe [Sab90, 5.4.3].  $\square$

Kommentar:

*Beweis.* Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  mit  $P = \sum a_i(x)\partial_x^i$ , dann ist  $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} \cong \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$  mit

$$\begin{aligned}
 H(P'(t, \partial_t)) &= H(P(\rho(t), \rho'(t)^{-1}\partial_t)) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(\rho(t))(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(\rho(t))(\rho'(t)^{-1}\partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p)((p \cdot t^{p-1})^{-1}\partial_t)^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p)(p \cdot t^{p-1})^{-i}\partial_t^i\right) \\
 &= H\left(\sum_i a_i(t^p)t^{-i(p-1)}\partial_t^i\right) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.51** (pull-back). Hier nun ein explizit berechneter pull-back. Wir wollen  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  bzgl.  $P := x^3\partial_x^2 - 4x^2\partial_x - 1$  betrachten. Unser Ziel ist es hier ganzzahlige Slopes zu erhalten. Es gilt  $\text{slopes}(P) = \{\frac{1}{2}\}$  (siehe Abbildung 2.5). Wende den pull-back mit  $\rho : t \rightarrow x := t^2$  an. Zunächst ein paar Nebenrechnungen, damit wir Satz 2.45 einfacher anwenden können:

$$\begin{aligned}
 \partial_x &\rightsquigarrow \frac{1}{\rho'(t)}\partial_t = \frac{1}{2t}\partial_t, \\
 \partial_x^2 &\rightsquigarrow \left(\frac{1}{2t}\partial_t\right)^2 = \frac{1}{2t}\partial_t\left(\frac{1}{2t}\partial_t\right) = \frac{1}{2t}\left(-\frac{1}{2t^2}\partial_t + \frac{1}{2t}\partial_t^2\right) = \frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t.
 \end{aligned}$$

Also ergibt Einsetzen

$$\begin{aligned}
 \rho^*P &= (t^2)^3\left(\frac{1}{4t^2}\partial_t^2 - \frac{1}{4t^3}\partial_t\right) - 4(t^2)^2\frac{1}{2t}\partial_t - 1 \\
 &= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \underbrace{t^3\frac{1}{4}\partial_t - 4t^3\frac{1}{2}\partial_t}_{-2\frac{1}{4}t^3\partial_t} - 1 \\
 &= \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - 2\frac{1}{4}t^3\partial_t - 1.
 \end{aligned}$$

Also ist  $\rho^*P = \frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1$  mit  $\text{slopes}(\rho^*P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.6) und somit  $\rho^*\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\frac{1}{4}t^4\partial_t^2 - \frac{1}{2}t^3\partial_t - 1)$ .

Sei  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ein endlich dimensionaler  $\widehat{L}$ -VR mit Verknüpfung, so definiere den push-forward wie folgt.

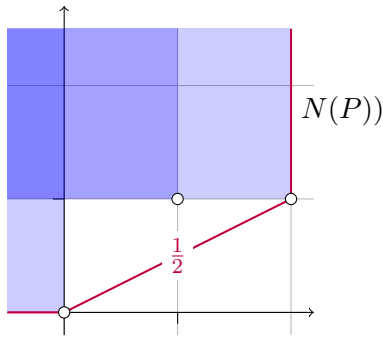


Abbildung 2.5: Newton Polygon zu  
 $P = x^3 \partial_x^2 - 4x^2 \partial_x - 1$

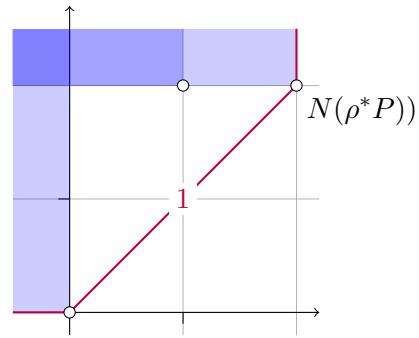
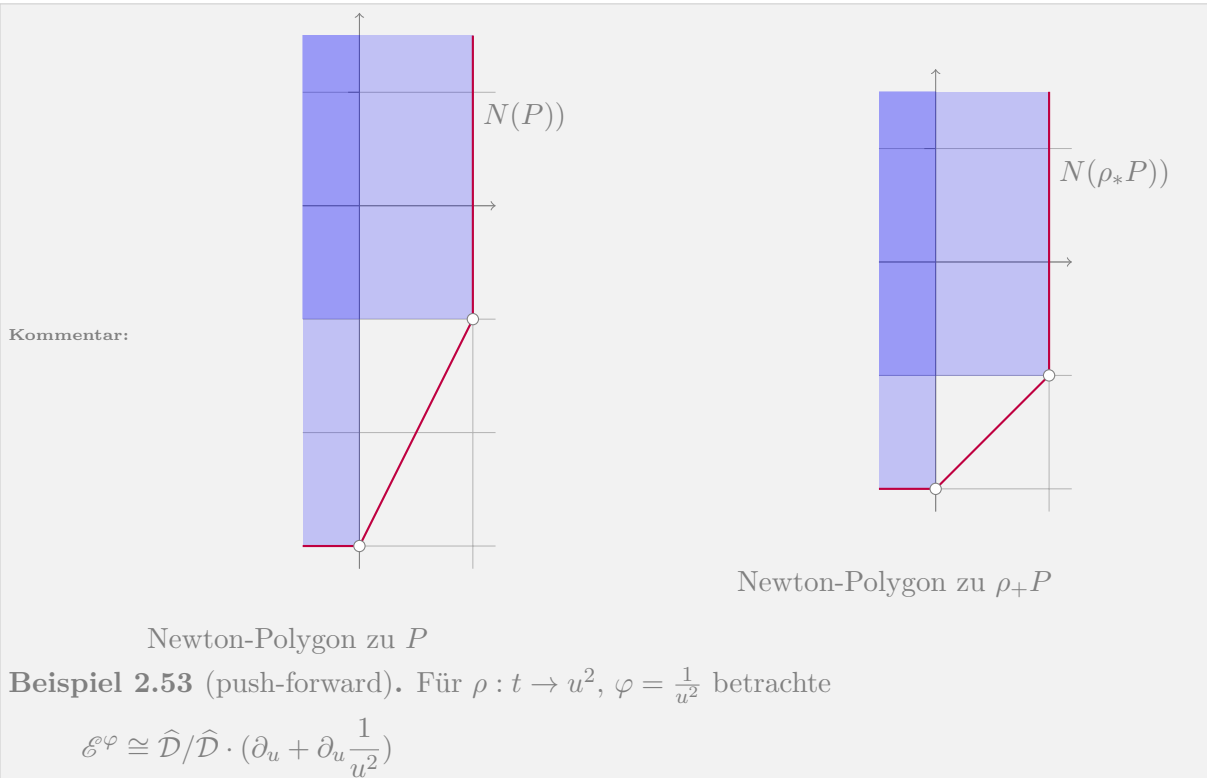


Abbildung 2.6: Newton Polygon zu  
 $\rho^* P = \frac{1}{4} t^4 \partial_t^2 - \frac{1}{2} t^3 \partial_t - 1$

**Definition 2.52** (push-forward). [Sab07, 1.a] Der *push-forward* oder das *direkte Bil*  $\rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}}$  von  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  ist

- der  $\widehat{K}$ -VR  $\rho_* \mathcal{N}$  ist definiert als der  $\mathbb{C}$ -Vektor Raum  $\mathcal{N}_{\widehat{L}}$  mit der  $\widehat{K}$ -Vektor Raum Struktur durch die skalare Multiplikation  $\cdot : \widehat{K} \times \mathcal{N}_{\widehat{L}} \rightarrow \mathcal{N}_{\widehat{L}}$  und  
 $(f(x), m) \mapsto f(x) \cdot m := f(\rho(t))m$
- mit der Wirkung  $\partial_x$  beschrieben durch  $\rho'(t)^{-1} \partial_t$ .



$$= \widehat{D}/\widehat{D} \cdot \underbrace{(\partial_u + \frac{2}{u^3})}_{=:P}$$

mit  $\text{slopes}(P) = \{2\}$  (siehe Abbildung 2.4.2). Bilde nun das Direkte Bild über  $\rho$ , betrachte dazu

$$\begin{aligned} \partial_u + \frac{2}{u^3} &= 2u \left( \frac{1}{2u} \partial_u + \frac{1}{u^4} \right) \\ &= 2u(\rho'(u)^{-1} \partial_u + \frac{1}{u^4}) \\ &= 2u(\partial_t + \frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

Also ist  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi \cong \widehat{D}/\widehat{D} \cdot (\partial_t + \frac{1}{t^2})$  mit  $\rho_+ P = \partial_t + \frac{1}{t^2}$  und  $\text{slopes}(\rho_+ P) = \{1\}$  (siehe Abbildung 2.4.2)

**Satz 2.54.** [Sab07, 1.a] Es gilt die Projektionsformel

$$\rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \cong \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \quad (2.6)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \rho_+(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}) &= \rho_+(\underbrace{\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} (\widehat{L} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{L}})}_{\text{(def von } \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}})}) \\ &\cong \rho_+(\underbrace{(\mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{L}} \widehat{L})}_{\text{(Rechenregeln Tensorprodukt)}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &\cong \rho_+(\underbrace{\mathcal{N}_{\widehat{L}}}_{\text{(Rechenregeln Tensorprodukt)}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}) \\ &= \rho_+ \mathcal{N}_{\widehat{L}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \quad (?) \end{aligned}$$

□

**Kommentar:** Sei  $\rho(u) = u^p = t$  und  $\varphi(t)$  gegeben.

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{E}^{\varphi(t)} &= \mathcal{E}^{\varphi(\rho(u))} = \mathcal{E}^{\varphi(u^p)} \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} &= \bigoplus_{\zeta \in \mu_p} \mathcal{E}^{\varphi(\zeta \cdot u)} \end{aligned}$$

### 2.4.3 Fouriertransformation

**Definition 2.55** (Fouriertransformation). Sei  $P = \sum_{i=0}^d a_i(x) \partial_x^i$ , dann ist die *fouriertransformierte* von  $P$  gegeben durch

$$\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_P(z, \partial_z) = \sum_{i=0}^d a_i(\partial_z) (-z)^i.$$

Kommentar: [Blo04, Def 3.1] [GL04] [AV09, Def 6.1]

**Definition 2.56** (Fouriertransformation von lokalisierten holonomen D-Moduln). Ist  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot P$  so ist die fouriertransformierte davon  ${}^{\mathcal{F}}\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \widehat{K}/\widehat{K} \cdot \mathcal{F}_P(x, \partial_x)$ .

**Beispiel 2.57.** Sei  $P = x^3 \partial_x^4 + x^2 \partial_x^2 + x$  dann ist die Fouriertransformierte davon

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_P &= \partial_z^3 (-z)^4 + \partial_z^2 (-z)^2 + \partial_z \\ &= \underbrace{\partial_z^2 z^2}_{z^4 \partial_z^3} + \underbrace{\partial_z^3 z^4}_{[\partial_z^3, z^4]} + \partial_z \\ &= \underbrace{z^4 \partial_z^3 + [\partial_z^3, z^4]}_{z^4 \partial_z^3 + \sum_{i=1}^3 \frac{4 \cdot 3 \dots (5-i) \cdot 3 \cdot 2 \dots (4-i)}{i!} z^{4-i} \partial_z^{3-i}} + \underbrace{z^2 \partial_z^2 + [\partial_z^2, z^2]}_{z^2 \partial_z^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{2 \cdot 1 \dots (3-i) \cdot 2 \cdot 1 \dots (3-i)}{i!} z^{2-i} \partial_z^{2-i}} + \partial_z \\ &= \underbrace{z^4 \partial_z^3 + 12z^3 \partial_z^2 + \frac{72}{2} z^2 \partial_z + \frac{144}{6} z}_{z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z} + \underbrace{4z \partial_z + \frac{4}{2}}_{24z + 2} + \partial_z \\ &= z^4 \partial_z^3 + (12z^3 + z^2) \partial_z^2 + (36z^2 + 4z + 1) \partial_z + 24z + 2 \end{aligned}$$

mit den Newton Polygonen wie in Abbildung 2.7 und 2.8.

Kommentar:

### 2.4.4 Betrachten bei Unendlich

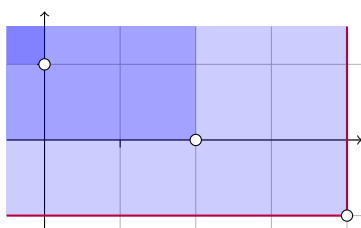


Abbildung 2.7: Newton-Polygon zu  $P$

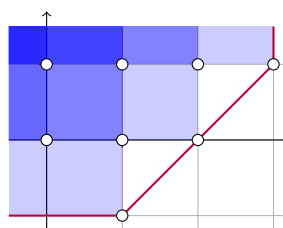


Abbildung 2.8: Newton-Polygon zu  $\mathcal{F}_P$



## 3 Elementare meromorphe Zusammenhänge

### 3.1 Elementare formale meromorphe Zusammenhänge

**Definition 3.1.** Ein *elementarer formaler meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang  $\mathcal{M}$ , welcher isomorph zu  $\mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (x\partial_x - \alpha)^p$ , mit passendem  $\alpha$  und  $p$ , ist.

**Lemma 3.2.** [Sab90, Lem 5.2.1.] Es existiert eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  mit der Eigenschaft, dass die Matrix, die  $x\partial_x$  beschreibt, nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.

*Beweis.* Wähle einen zyklischen Vektor  $m \in \mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und betrachte die Basis  $m, \partial_x m, \dots, \partial_x^{d-1} m$  (siehe Lemma 2.10). Schreibe  $\partial_x^d m = \sum_{i=0}^{d-1} (-b_i(x)) \partial_x^i m$  in Basisdarstellung mit Koeffizienten  $b_i \in \widehat{K}$ . Also erfüllt  $m$  die Gleichung  $\partial_x^d m + \sum_{i=0}^{d-1} b_i(x) \partial_x^i m = 0$ .

Kommentar: TODO: bis hier schon klar

Tatsächlich kann man  $b_i(x) = x^i b'_i(x)$  mit  $b'_i \in \mathbb{C}[[x]]$  schreiben (wegen Regularität).

Dies impliziert, dass  $m, x\partial_x m, \dots, (x\partial_x)^{d-1} m$  ebenfalls eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist.

Die Matrix von  $x\partial_x$  zu dieser neuen Basis hat nur Einträge in  $\mathbb{C}[[x]]$ . □

**Lemma 3.3.** [Sab90, Lem 5.2.2.] Es existiert sogar eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  über  $\widehat{K}$  so dass die Matrix zu  $x\partial_x$  konstant ist.

*Beweis.* Siehe [Sab90, Thm 5.2.2] □

**Satz 3.4.** Ein regulärer formaler Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen.

*Beweisskizze.* Siehe [Sab90, Cor. 5.2.6]. Man wählt eine Basis von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , in der die Matrix zu  $x\partial_x$  konstant ist. Diese Matrix kann in Jordan Normalform gebracht werden und damit erhält man das Ergebnis. □

## 3.2 Elementare meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: einführen als Bausteine oder kleinste meromorphe Zusammenhänge

Kommentar: ALT:

**Definition 3.5.** [Sab07, 1.a] Sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}_K^\varphi$  für den (formalen) Rang 1 Vektorraum  $\mathbb{C}((x)) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{K}$  ausgestattet mit dem Zusammenhang  $\nabla = \partial_x + \partial_x \varphi$ , im speziellen also  $\nabla_{\partial_x} 1 = \partial_x 1 = \varphi'$ .

**Definition 3.6.** [Sab07, 1.a] Sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . Wir schreiben  $\mathcal{E}_K^\varphi$  für den (formalen) Rang 1 Vektorraum  $\mathbf{e} \cdot \widehat{K}$ , wobei  $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_K^\varphi$  Basis ist, ausgestattet mit  $\partial_x(f \cdot \mathbf{e}) = (\frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \cdot \mathbf{e}$ , im speziellen also  $\partial_x \mathbf{e} = \varphi'$ .

*Bemerkung 3.7.* 1. Die  $\mathcal{E}_K^\varphi$  stellen so etwas, wie die einfachsten meromorphen Zusammenhänge mit einem ganzzahligem Slope, dar.

2. Wir werden oft  $\mathbf{e} = 1$  als Basis nehmen.

3. Auf die Angabe von des Rang 1 Vektorraums im Subscript wird, falls dieser klar ist, meist verzichtet.

4. Es ist  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot (\partial_x - \varphi'(x))$ , weil für den zyklischen Vektor 1 gilt, dass  $\partial_x \cdot 1 = \varphi'(x) \cdot 1$ .

**Lemma 3.8.** Für  $\varphi(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i \in \widehat{K}$  mit  $a_{-p} \neq 0$  gilt, dass  $\mathcal{P}(\mathcal{E}_K^\varphi) = \begin{cases} \{p\} & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ \{0\} & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}$ .

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{i=-p}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\ &= \sum_{i=-p+1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \\ &= \underbrace{-p a_{-p}}_{\neq 0} x^{-(p+1)} + \sum_{i=-p}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \end{aligned}$$

und damit wissen wir, dass die einzigen zwei Punkte, die Ecken des Newton Polygons sein können,  $(1, -1)$  und  $(0, -(p+1))$  sind. Da einer der Punkte auf der vertikalen Achse liegt, kann es insgesamt nur einen Slope  $\Lambda$  geben, welcher sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \max\left\{0, \frac{-1 - (-(p+1))}{1}\right\} \\ &= \max\{0, p\} \\ &= \begin{cases} p & , \text{ wenn } p \geq 0 \\ 0 & , \text{ wenn } p < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

Kommentar:

*Bemerkung 3.9.* [Sab07, 1.a] Es gilt  $\mathcal{E}^\varphi \cong \mathcal{E}^\psi$  genau dann wenn  $\varphi \equiv \psi \pmod{\mathbb{C}[[x]]}$ .

Sei  $\rho : t \mapsto x := t^p$  und  $\mu_\xi : t \mapsto \xi t$ .

**Lemma 3.10.** [Sab07, Lem 2.4] Für alle  $\varphi \in \hat{L}$  gilt

$$\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi = \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi}.$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm, für einen passenden Isomorphismus, kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \\ \downarrow \partial_t & & \downarrow \partial_t \\ \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{\xi^p=1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_\xi} \end{array}$$

Es sei oBdA  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ , dies ist nach Bemerkung 3.9 berechtigt. Wir wählen eine  $\hat{L}$  Basis  $\mathbf{e}$  des Rang 1  $\hat{L}$ -Vektorraum  $\mathcal{E}^\varphi$  und damit erhält man die Familie  $\mathbf{e}, t\mathbf{e}, \dots, t^{p-1}\mathbf{e}$  als  $\widehat{K}$ -Basis von  $\rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ . Es gilt

$$\partial_x t^k \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \underbrace{\partial_t t^k}_{\text{}} \mathbf{e} = \rho'(t)^{-1} \overbrace{(t^k \partial_t + k t^{k-1})} \mathbf{e}. \quad (3.1)$$

Durch die Setzung  $\mathbf{e}_k := t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}$  wird die Familie  $\mathbf{e} := (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{p-1})$  eine  $\widehat{L}$ -Basis von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^\varphi$ .

Zerlege nun

$$t\varphi'(t) = \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) \in t^{-2} \mathbb{C}[t^{-1}] \quad (3.2)$$

mit  $\psi_j \in \mathbb{C}[x^{-1}]$  für alle  $j > 0$  und  $\psi_0 \in x^{-1} \mathbb{C}[x^{-1}]$  (siehe: Anhang A). Damit gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e}_k &= t \partial_t (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e}) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} t \left( -kt^{-k-1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} \cdot t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} \partial_x \left( \underbrace{t^k \mathbf{e}}_{\in \rho_+ \mathcal{E}^\varphi} \right) \right) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + pt^{p-1} t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (pt^{p-1})^{-1} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e}) \\ &= -kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} (kt^{k-1} \mathbf{e} + t^k \varphi'(t) \mathbf{e}) \\ &= \underbrace{-kt^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \mathbf{e} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} kt^{k-1} \mathbf{e}}_{=0} + t^{-k+1} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &= t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \varphi'(t) \mathbf{e} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t^p) (t^{-k} \otimes_{\widehat{K}} t^k t^i \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) (t^{-k-i} \otimes_{\widehat{K}} t^{k+i} \mathbf{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) \mathbf{e}_{k+i-p}. \end{aligned}$$

Sei

$$V := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass  $\mathbf{e} \cdot V = (e_1, \dots, e_{p-1}, e_0)$  gilt. Es gilt:

$$t\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j V^j \right]$$

denn:

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathbf{e} &= (t\partial_t e_0, \dots, t\partial_t e_{p-1}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{p-1-k} t^i \psi_i(t^p) e_{k+1} + \sum_{i=p-k}^{p-1} t^i \psi_i(t^p) e_{k+i-p} \right)_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \\ &= \mathbf{e} \begin{pmatrix} u^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) \\ t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) & & \ddots & t^2 \psi_2(t^p) \\ t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & \ddots & & t^3 \psi_3(t^p) \\ t^3 \psi_3(t^p) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \\ t^{p-2} \psi_{p-2}(t^p) & \dots & t^3 \psi_3(t^p) & t^2 \psi_2(t^p) & t^1 \psi_1(t^p) & t^{p-1} \psi_{p-1}(t^p) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^j \psi_j(t^p) V^j \right]. \end{aligned}$$

Die Wirkung von  $\partial_t$  auf die Basis  $\mathbf{e}$  von  $\rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(t)}$  ist also beschrieben durch

$$\partial_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j V^j \right].$$

Da  $V$  das Minimalpolynom  $\chi_V(X) = X^p - 1$  hat, können wir diese Matrix durch Ähnlichkeitstransformation mit  $T$  auf die Form

$$D := TVT^{-1} = \begin{pmatrix} \xi^0 & & & \\ & \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi^{p-1} \end{pmatrix},$$

mit  $\xi^p = 1$ , bringen. Sei so ein  $\xi$  ab jetzt fixiert. So dass gilt:

$$\begin{aligned} T \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j \right] T^{-1} &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (TVT^{-1})^j \right] \\ &= \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^1)^j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) (\xi^{p-1})^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) & & & \\ & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^1)^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=0}^{p-1} (t\xi^{p-1})^{j-1} \psi_j(t^p) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'(t) & & & \\ & \varphi'(\xi t) \xi^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi'(\xi^{p-1} t) \xi^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} pt^{p-1} & & & \\ & p(\xi t)^{p-1} \xi & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\xi^{p-1} t)^{p-1} \xi^{p-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da  $\varphi'(t) = pt^{p-1}$ . Damit wissen wir bereits, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \downarrow \partial_t & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) V^j} & & \downarrow \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \downarrow \partial_t \\
 \rho^+ \rho_+ \mathcal{E}^{\varphi(u)} & \xleftarrow{\cong} & \widehat{L}^p & \xleftarrow[\cong]{T} & \widehat{L}^p & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{(\star)} & & & & & & 
 \end{array}$$

k-te Stelle

↓

der mit  $(\star)$  bezeichnete Teil kommutiert, wobei  $\Phi : (0, \dots, 0, \ 1, \ 0, \dots, 0) \mapsto e_k$  der kanonische Basisisomorphismus und  $e_k$  Basis von  $\mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}}}$ . Um zu zeigen, dass das vollständige Diagramm kommutiert, zeigen wir noch, dass

$$\partial_t(v) = \Phi \left( \Phi^{-1}(v) \cdot \left[ \sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j \right] \right) \quad \forall v \in \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{E}^{\varphi \circ \mu_{\xi^i}}$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass die Aussage für alle Basiselemente  $e_k$  gilt. Nach Definition 3.6 gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_t e_k &= \underbrace{(\varphi \circ \mu_{\xi^{k-1}})'(t)}_{\text{Kettenregel}} e_k \\
 &\downarrow \\
 &= \underbrace{\varphi(\mu'_{\xi^{k-1}})} \cdot \underbrace{\varphi'(t)} e_k \\
 &= \underbrace{(\xi^{k-1})^p} \cdot \underbrace{(pt^{p-1})} e_k \\
 &= p(\xi^{k-1}t)^{p-1} \xi^{k-1} e_k
 \end{aligned}$$

und auf dem anderem Weg gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi^{-1}(e_k) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & e_k \\
 \downarrow & & \\
 \boxed{\sum_{j=0}^{p-1} t^{j-1} \psi_j(t^p) D^j} & & \\
 \downarrow & & \\
 (\dots, 0, p(\xi^{k-1}t)^{p-1}, 0, \dots) & \xrightarrow{\Phi} & \varphi'(\xi^{k-1}t) \xi^{k-1} e_k
 \end{array}$$

Also kommutiert das Diagramm und damit ist die Aussage gezeigt.  $\square$

**Definition 3.11.** Ein *elementarer meromorpher Zusammenhang* ist ein Zusammenhang  $\mathcal{M}$ , für den es  $\psi \in \mathbb{C}((x))$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $p \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p},$$

mit  $R_{\alpha,p} := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial_x - \alpha)^p$ , also ein elementarer formaler meromorpher Zusammenhang, ist.

Kommentar:

**Lemma 3.12.**  $\mathcal{E}^\psi \otimes R_{\alpha,p} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot (x\partial_x - (\alpha + x \frac{\partial \psi}{\partial x}))^p$

*Beweis.* Siehe [Hei10, Lem 5.12]  $\square$

Kommentar:

### 3.3 Defnintion in [Sab07]

**Definition 3.13** (Elementarer formaler Zusammenhang). [Sab07, Def 2.1] Zu einem gegebenen  $\rho \in t\mathbb{C}[[t]]$ ,  $\varphi \in \hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((t))$  und einem endlich dimensionalen  $\hat{L}$ -Vektorraum  $R$  mit regulärem Zusammenhang  $\nabla$ , definieren wir den assoziierten elementaren endlich dimensionalen  $\hat{K}$ -Vektorraum mit Zusammenhang, durch:

$$El(\rho, \varphi, R) = \rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes R)$$

[Sab07, nach Def 2.1] Bis auf Isomorphismus hängt  $El(\rho, \varphi, R)$  nur von  $\varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$  ab.

**Lemma 3.14.** [Sab07, Lem 2.2]

**Lemma 3.15.** [Sab07, Lem 2.6.] Es gilt  $El([t \mapsto t^p], \varphi, R) \cong El([t \mapsto t^p], \psi, S)$  genau dann, wenn

- es ein  $\zeta$  gibt, mit  $\zeta^p = 1$  und  $\psi \circ \mu_\zeta \equiv \varphi \bmod \mathbb{C}[[t]]$
- und  $S \cong R$  als  $\hat{L}$ -Vektorräume mit Zusammenhang.

*Beweis.* Siehe [Sab07, Lem 2.6.] □

**Proposition 3.16.** [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale  $\hat{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{M}$  mit Zusammenhang ist isomorph zu  $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes L)$ , wobei  $\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ ,  $\rho : t \rightarrow t^p$  vom Grad  $p \geq 1$  und ist minimal unter  $\varphi$ . (siehe [Sab07, Rem 2.8]) und  $L$  ist ein Rang 1  $\hat{L}$ -Vektorraum mit regulärem Zusammenhang.

*Beweis.* Siehe [Sab07, Prop 3.1] □

### 3.4 Twisten von meromorphen Zusammenhängen



Kommentar: [Cou95, Chap 5 §2]

**Lemma 3.17.** Sei  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P$  ein meromorpher Zusammenhang mit  $P$  von Grad  $q$  und mit  $e$  als ein zyklischer Vektor, so ist  $e \otimes \underbrace{1}_{\in \widehat{K}}$  ein zyklischer Vektor für  $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}_{\widehat{K}}^\psi$ .

*Beweis.* Da der Grad von  $P$  gleich  $q$  ist, ist nach Lemma 3.18 auch  $Q$  von Grad  $q$  und somit  $\dim_{\widehat{K}} \mathcal{N} = q$ . Also reicht es zu zeigen, dass  $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$  ein linear unabhängiges System ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x(e \otimes 1) &= (\partial_x e) \otimes 1 + x \otimes \partial_x 1 \\ &= (\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x) \\ &= (\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) &= \partial_x((\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)(e \otimes 1)) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + (\partial_x e) \otimes \psi'(x) + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)((\partial_x e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(x)) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi''(x)(e \otimes 1) + \psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + \psi'(x)^2(e \otimes 1) \\ &= (\partial_x^2 e) \otimes 1 + 2\psi'(x)(\partial_x e) \otimes 1 + (\psi''(x) + \psi'(x)^2)(e \otimes 1) \\ &\vdots \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) &= (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 + \lambda_{q-2}(\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 + \dots + \lambda_1(\partial_x e) \otimes 1 + \lambda_0(e \otimes 1) \end{aligned}$$

und somit ist dann

$$\begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ \partial_x(e \otimes 1) \\ \partial_x^2(e \otimes 1) \\ \vdots \\ \partial_x^{q-2}(e \otimes 1) \\ \partial_x^{q-1}(e \otimes 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \psi'(x) & 1 & 0 & & & \vdots \\ \star & \star & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_{q-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \otimes 1 \\ (\partial_x e) \otimes 1 \\ (\partial_x^2 e) \otimes 1 \\ \vdots \\ (\partial_x^{q-2} e) \otimes 1 \\ (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

Da bekanntlich  $e \otimes 1, (\partial_x e) \otimes 1, (\partial_x^2 e) \otimes 1, \dots, (\partial_x^{q-1} e) \otimes 1$  linear unabhängig sind, gilt dies auch für  $e \otimes 1, \partial_x(e \otimes 1), \partial_x^2(e \otimes 1), \dots, \partial_x^{q-1}(e \otimes 1)$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 3.18.** Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x)$  und sei  $\varphi \in \widehat{K}$ . So gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot Q(x, \partial_x)$$

mit  $Q(x, \partial_x) = P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})$ .

*Beweisskizze.* Zeige, dass  $P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = 0$  gilt, da  $e \otimes 1$  ein zyklischer Vektor folgt damit aus Gradgründen die Behauptung. Genauer ausgeführt wird dies in [Hei10, Seiten 39 bis 44].

Kommentar:

$$P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x})e \otimes 1 = \text{TODO}$$

□

**Korollar 3.19.** Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  und  $\varphi$  wie in 3.18, so gilt

$$\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} = \mathcal{M}_{\widehat{K}}.$$

*Beweis.* Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{\varphi} \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \otimes_{\widehat{K}} \mathcal{E}^{-\varphi} \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x - \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial(-\varphi)}{\partial x}}_{=0}) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P(x, \partial_x) = \mathcal{M}_{\widehat{K}}. \end{aligned}$$

□

## 3.5 Levelt-Turrittin-Theorem

Das Levelt-Turrittin-Theorem ist ein Satz, der hilft, meromorphe Zusammenhänge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen.

Kommentar:

### 3.5.1 Klassische Version

**Satz 3.20.** [Sab90, Thm 5.4.7] Sei  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  ein formaler meromorpher Zusammenhang, so gibt es eine ganze Zahl  $p$ , so dass der Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{L}} := \rho^+ \mathcal{M}_{\widehat{K}}$ , mit  $\rho : t \mapsto x := t^p$ , isomorph zu einer direkten Summe von formalen elementaren meromorphen Zusammenhängen ist.

Der folgende Beweis stammt hauptsächlich aus [Sab90, Seite 35].

*Beweis.* Zum Beweis wird Induktion auf die lexicographisch geordneten Paare  $(\dim_{\widehat{K}} \mathcal{M}_{\widehat{K}}, \kappa)$  angewendet. Wobei  $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  dem größten Slope von  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  entspricht. Es wird  $\kappa = \infty$  gesetzt, falls der größte Slope nicht ganzzahlig ist.

Kommentar: TODO: induktionsanfang und -schritt kennzeichnen

Wir nehmen oBdA an, dass  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  genau einen Slope  $\Lambda$  hat, sonst Teile  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  mittels Satz 2.31 in meromorphe Zusammenhänge mit je einem Slope und wende jeweils die Induktion an. Mit  $\Lambda =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  (vollständig gekürzt) definieren wir die dem Slope entsprechende Linearform  $L(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ . Wir nennen  $\sigma_L(P) \in \widehat{K}[\xi]$  die *Determinanten Gleichung* von  $P$ . Da  $L$  zu einem Slope von  $P$  gehört, besteht  $\sigma_L(P)$  aus zumindest zwei Monomen.

Kommentar: and is homogeneous of degree  $\text{ord}_L(P) = 0$  because  $P$  is chosen with coefficients in  $\mathbb{C}[[x]]$ , one of them, being a unit.

Schreibe

$$\begin{aligned} \sigma_L(P) &= \sum_{L(i, i-j) = \text{ord}_L(P)} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= \sum_{L(i, i-j) = 0} \alpha_{ij} x^j \xi^i. \end{aligned}$$

Sei  $\theta := x^{\lambda_0 + \lambda_1} x i^{\lambda_1}$  so können wir

$$\sigma_L(P) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k$$

schreiben, wobei  $\alpha_0 \neq 0$  ist.

**Erster Fall:**  $\lambda_1 = 1$ . Das bedeutet, dass der Slope ganzzahlig ist. Betrachte die Faktorisierung

$$\sigma_L(P) = \varepsilon \prod_{\beta} (\theta - \beta)^{\gamma_{\beta}}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  eine Konstante ist. Sei  $\beta_0$  eine der Nullstellen, so setze  $R(z) := (\beta_0 / (\lambda_0 + 1)) z^{\lambda_0 + 1}$  und betrachte  $\mathcal{M}_{\widehat{K}} \otimes \mathcal{F}_{\widehat{K}}^R$ .

Kommentar: AB HIER VLT NICHT RICHTIG, nur versuch

Falls  $P(x, \partial_x) \cdot e = 0$  gilt

$$P\left(x, \partial_x - \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x}\right) \cdot e \otimes e(R) = 0$$

und hier haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x^{-1})}{\partial x} &= \frac{\partial(\frac{\beta_0}{\lambda_0+1}x^{-(\lambda_0+1)})}{\partial x} \\ &= -\beta_0 x^{-(\lambda_0+2)}. \end{aligned}$$

Schreibe  $P' = P(x, \partial_x + \beta_0 x^{-(\lambda_0+2)})$ .

**Lemma 3.21.** *Es gilt, dass  $P'$  Koeffizienten in  $\mathbb{C}[[x]]$  hat.*

*Beweis.* TODO □

Des weiteren ist  $\sigma_L(P') = \sum_{k \geq 0} \alpha_k (\theta + \beta_0)^k$ . Wir unterscheiden nun 2 Unterfälle:

1. **Die Determinanten Gleichung  $\sigma_L(P)$  hat nur eine Nullstelle.**

Kommentar: TODO: Hier weiter

2. **Die Determinanten Gleichung  $\sigma_L(P)$  hat mehrere Nullstellen.**

Kommentar: TODO: Hier weiter

**Zweiter Fall:**  $\lambda_1 \neq 1$ . In diesem Fall ist einzige Slope  $\Lambda$  nicht ganzzahlig. Mache deshalb einen pull-back mit  $\lambda_1$ . Sei  $\rho : t \mapsto x := t^{\lambda_1}$  und erhalte  $P'$  so dass  $\rho^* \mathcal{M}_{\widehat{K}} = \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$ . Nach Lemma 2.50 hat  $P'$  den einen Slope  $\Lambda \cdot \lambda_1 = \lambda_0$ . Damit können wir nun die zugehörige Linearform  $L' := \lambda_0 s_0 + s_1$  definieren. Es gilt dass

$$\sigma_{L'}(P') = \dots$$

ist, welches zumindest zwei unterschiedliche Nullstellen hat. Nun wendet man den zweiten Unterfall des ersten Fall an. □

Kommentar:

### 3.5.2 Sabbah's Refined version

**Proposition 3.22.** [Sab07, Prop 3.1] Jeder irreduzible endlich dimensionale formale meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{L}}$  ist isomorph zu  $\rho_+(\mathcal{E}^\varphi \otimes_{\widehat{K}} S)$ , wobei  $\varphi \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ ,  $\rho : x \mapsto t = x^p$  mit  $\text{grad } p \geq 1$  minimal bzgl.  $\varphi$  (siehe [Sab07, Rem 2.8]), und  $S$  ist ein Rang 1  $\widehat{K}$ -Vektor Raum mit regulärem Zusammenhang.

Beweis. [Sab07, Prop 3.1] □

**Satz 3.23** (Refined Turrittin-Levelt). [Sab07, Cor 3.3] Jeder endlich dimensionale meromorphe Zusammenhang  $\mathcal{M}_{\widehat{K}}$  kann in eindeutiger weiße geschrieben werden als direkte Summe  $\bigoplus \text{El}(\rho, \varphi, R) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus \rho_+(\mathcal{E}^\varphi) \otimes R$ , so dass jedes  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$  irreduzibel ist und keine zwei  $\rho_+\mathcal{E}^\varphi$  isomorph sind.

Beweis. [Sab07, Cor 3.3] □

## 4 Explizite Berechnung einer Levelt-Turrittin-Zerlegung

In diesem Kapitel werden Beispiele einer speziellen Klasse von  $\mathcal{D}$ -Moduln diskutiert. Dazu wird im folgendem zu einem Beispiel unter anderem explizit der Beweis aus [Sab90] zur Levelt-Turrittin-Zerlegung nachvollzogen.

Es wird zunächst ein allgemeines Rezept gegeben, welches zu gegebenem  $\varphi$  D-Moduln ergibt. Im Laufe des Kapitels werden immer speziellere  $\varphi$  betrachtet und zuletzt wird für konkrete Beispiele eine explizite Rechnung gegeben.

### 4.1 Rezept für allgemeine $\varphi$

Hier wollen wir nun eine spezielle Klasse von meromorphen Zusammenhängen, die durch das folgende Rezept entstehen.

1. Wähle zunächst ein  $\varphi \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$  aus
2. und beginne mit  $\mathcal{E}^\varphi$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left( \text{Hauptnenner von } \frac{d}{dt} \varphi(t) \right)}_{\in \mathbb{C}[t] \subset \mathcal{D}_{\widehat{L}}^*} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{\left( t^{\max(I)+1} \cdot \left( \partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \right)}_{=: Q(t, \partial_t)}. \end{aligned}$$

**Kommentar:** Dies ändert den meromorphen Zusammenhang nicht, weil  $t^{\max(I)+1}$  eine Einheit in  $\mathcal{D}_{\widehat{L}}$  (und auch in  $\mathcal{D}_L$ ) ist.

3. Fouriertransformiere  $\mathcal{E}^\varphi$  und erhalte

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{E}^\varphi &= \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \mathcal{F}_Q(z, \partial_z) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \underbrace{Q(\partial_z, -z)}_{\in \mathbb{C}[z] \langle \partial_z \rangle}.\end{aligned}$$

4. Betrachte den Zusammenhang bei Unendlich, also wende den Übergang  $x \rightsquigarrow z^{-1}$  an.

Was passiert mit der Ableitung  $\partial_x$ ? Es gilt

$$\partial_x(f(\frac{1}{x})) = \partial_z(f) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\partial_z(f) \cdot z^2 = -z^2 \cdot \partial_z(f)$$

also  $\partial_x \rightsquigarrow -z^2 \partial_z$ , und somit

$$P_\varphi(x, \partial_x) := \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle.$$

Im folgendem werden wir den zum Minimalpolynom  $P_\varphi$  assoziierten formalen meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{D}_{\widehat{K}}/\mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi$  betrachten.

**Lemma 4.1.** *Zu einem  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \in \{\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k} \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich}, a_k \in \mathbb{C}\}$  ist das Minimalpolynom von  $\mathcal{M}_\varphi$  explizit gegeben durch*

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle.$$

*Beweis.* Sei  $\varphi = \sum_{k \in I} \frac{a_k}{t^k}$ , so ist

$$\begin{aligned}Q(t, \partial_t) &= t^{\max(I)+1} \underbrace{(\partial_t - \frac{d}{dt} \varphi(t))}_{\overbrace{\partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}}}} \\ &= t^{\max(I)+1} \left( \partial_t + \sum_{k \in I} k \frac{a_k}{t^{k+1}} \right) \\ &= t^{\max(I)+1} \partial_t + \sum_{k \in I} k a_k t^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[t] \langle \partial_t \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q(z, \partial_z) &= Q(\partial_z, -z) \\ &= -\partial_z^{\max(I)+1} z + \sum_{k \in I} k a_k \partial_z^{\max(I)-k}\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}P_\varphi(x, \partial_x) &= \mathcal{F}_Q(x^{-1}, -x^2 \partial_x) \\ &= \underbrace{-(-x^2 \partial_x)^{\max(I)+1} x^{-1}}_{\overbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\ &= \underbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}_{\overbrace{(-x^2 \partial_x)^{\max(I)} x^2 \partial_x x^{-1}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{x^2 (x^{-1} \partial_x - x^{-2})} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \\
 &= (-x^2 \partial_x)^{\max(I)} \overbrace{(x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{\max(I)-k} \in \mathbb{C}[x] \langle \partial_x \rangle
 \end{aligned}$$

□

Im Anhang B wird das  $(x^2 \partial_x)^k$  genauer diskutiert. Dies führt aber hier an dieser Stelle nicht mehr weiter in die gewünschte Richtung.

**Lemma 4.2.** *Es gilt  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{q}{q+1}\}$ .*

*Beweis.* *Kommentar:* [Sab07, 5.b.]

Um zu zeigen, dass die Behauptung gilt, formen wir  $P_\varphi$  um und isolieren die Monome, die für das Newton-Polygon nicht von Bedeutung sind und deshalb vernachlässigt werden können. Betrachte dazu die konvexen Hüllen, die wie in Abschnitt 2.3 konstruiert werden. Sei  $q := \max(I)$ .

$$\begin{aligned}
 H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H\left(\underbrace{(-x^2 \partial_x)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{(-1)^q (x^{2q} \partial_x^q + \text{T.i.Q. von } x^{2q} \partial_x^q)}^{\text{liefert keinen Beitrag}} (x \partial_x - 1) + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\underbrace{(-1)^q}_{\text{liefert keinen Beitrag}} \underbrace{x^{2q} \partial_x^q (x \partial_x - 1)} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(\overbrace{x^{2q} \partial_x^q x \partial_x - x^{2q} \partial_x^q} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q} \overbrace{(x \partial_x^q + q \partial_x^{q-1})} \partial_x - x^{2q} \partial_x^q + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + \underbrace{q x^{2q} \partial_x^q - x^{2q} \partial_x^q}_{\substack{\text{im Quadranten von } x^{2q+1} \partial_x^{q+1}, \\ \text{sind also vernachlässigbar}}} + \sum_{k \in I} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \\
 &= H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right)
 \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Summe auch vernachlässigt werden kann.

**Behauptung:** Es gilt

$$H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} k a_k (-x^2 \partial_x)^{q-k}\right) \subset H\left(x^{2q+1} \partial_x^{q+1} + q a_q\right)$$



**Denn:** Betrachte zu einem  $m \in I \setminus \{q\}$ , einen Summanden  $ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}$  aus der Summe:

$$\begin{aligned} H(ma_m(-x^2\partial_x)^{q-m}) &= H(ma_m(-1)^q(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m} + \mathbf{T.i.Q. von } x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})) \\ &= H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m}) \\ &= (q-m, q-m) + \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

In Abbildung 4.1 ist die Situation, die wir gerade betrachten, mit  $N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q)$  in der gewohnten Farbe und  $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$  in Blau, dargestellt. Man sieht also, dass die Behauptung gilt. Beh.  $\square$

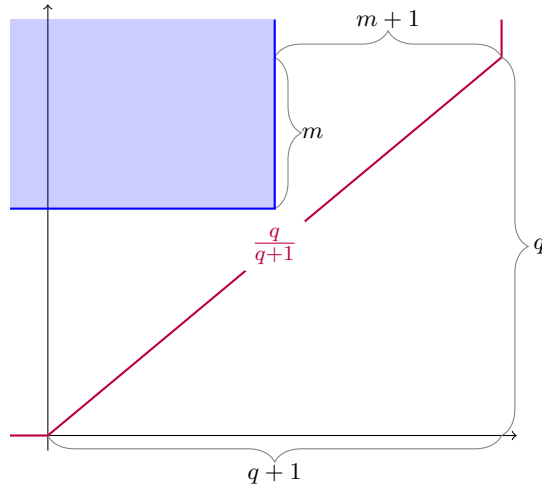


Abbildung 4.1: Newton-Polygon zu  $P_\varphi$  mit  $H(x^{2(q-m)}\partial_x^{q-m})$

Mit der Behauptung gilt dann, dass

$$\begin{aligned} H(P_\varphi(x, \partial_x)) &= H(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q + \sum_{k \in I \setminus \{q\}} ka_k(-x^2\partial_x)^{q-k}) \\ &\stackrel{\text{Beh.}}{=} H(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q). \end{aligned}$$

Also ist

$$N(P_\varphi(x, \partial_x)) = N(x^{2q+1}\partial_x^{q+1} + qa_q).$$

womit die Behauptung des Lemmas folgt und das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.1 aussieht.  $\square$

Also ist, nach Lemma 2.50, ein pull-back mit Grad  $q+1$  hinreichend, um einen ganzzahligen Slope zu bekommen. Denn wir wissen, dass nach Anwenden eines solchem pull-backs die Slopes mit  $q+1$  multipliziert werden, also gilt  $\mathcal{P}(\rho^+\mathcal{M}_\varphi) = \{q\} \subset \mathbb{N}$ .

**Lemma 4.3.** Im Fall  $\varphi = \frac{a}{t^q}$  ist mit  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$  der pull-back gegeben durch

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot ((t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa).$$

*Beweis.* Sei  $\varphi = \frac{a}{t^q}$ , so ist  $P$  gegeben durch

$$P_\varphi(x, \partial_x) = (-x^2 \partial_x)^q (x \partial_x - 1) + qa,$$

und sei  $\rho : t \mapsto x := -(q+1)t^{q+1}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_\varphi &= \rho^+ (\mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot P_\varphi(x, \partial_x)) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \rho^* P_\varphi(t, \partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi(\rho(t), \rho'(t)^{-1} \partial_t) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P_\varphi\left(- (q+1)t^{q+1}, -\frac{1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t\right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \underbrace{\left( -(-(q+1)t^{q+1})^2 \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t \right)^q}_{\substack{=1}} \underbrace{\left( -(q+1)t^{q+1} \frac{-1}{(q+1)^2 t^q} \partial_t - 1 \right)}_{\substack{=1}} + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \left( \underbrace{\frac{(q+1)^2}{(q+1)^2}}_{=1} \underbrace{t^{2(q+1)-q}}_{\substack{=1}} \partial_t \right)^q \left( \frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( \underbrace{(t^{q+2} \partial_t)^q}_{\substack{=1}} \left( \frac{1}{q+1} t \partial_t - 1 \right) + qa \right) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot \left( (t^{q+2} \partial_t)^q (t \partial_t - (q+1)) + (q+1)qa \right) \end{aligned}$$

□

Kommentar:

**Korollar 4.4.** Ordnung vom pull-back ist 0

Definiere mittels  $q = \frac{q}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$  die Linearform

$$\ell(s_0, s_1) = \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = q s_0 + s_1.$$

Schreibe  $\rho^* P_\varphi = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} t^j \partial_t^i$  und berechne die Determinanten Gleichung  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$ .

Kommentar: Schon gezeigt, dass  $\text{ord}_\ell = 0$ ?

$$\begin{aligned}\sigma_L(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid \ell(i,i-j)=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i \\ &= \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid (q+1)i-j=0\}} \alpha_{ij} t^j \xi^i\end{aligned}$$

Da  $\widehat{L}[\xi]$  kommutativ ist, gilt hier, dass  $(t^j \xi^i)^k = t^{jk} \xi^{ik}$  ist. Setze  $\theta = t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^{q+1} \xi$  so, können wir

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \theta^k \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$

schreiben, welches wir als nächsten Schritt faktorisieren

$$\sigma_L(\rho^* P_\varphi) = \varepsilon \prod_{\beta \text{ Nullstelle}} (\theta - \beta)^{\gamma_\beta}.$$

Wobei  $\varepsilon \in \mathbb{C}^\times$  eine Konstante ist. Sei  $\beta$  eine der Nullstellen. Da  $\text{ord}_\ell(\rho^* P_\varphi) = 0$  und der einzige Slope von  $\rho^* P_\varphi$  nicht gleich 0 ist, gilt offensichtlich, dass  $\alpha_0 \neq 0$ . Also ist 0 keine Nullstelle von  $\sigma_L(\rho^* P_\varphi)$ . Setze  $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = (\beta/q)t^{-q}$  und betrachte

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &:= \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t)) \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^\psi \\ &\stackrel{3.18}{=} \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t - \frac{\partial \psi}{\partial t})) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (\rho^* P_\varphi(t, \partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}})) \\ &= \mathcal{D}_{\widehat{L}} / \mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot (t^{q+2}(\partial_t + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}))^q (t(\partial_x + \frac{\beta}{t^{\lambda+1}}) - (q+1)) + (q+1)qa\end{aligned}$$

Kommentar: TODO: hier weiter vereinfachen

Zerlege nun wie in Satz 2.31 den meromorphen Zusammenhang  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$  wobei  $\mathcal{N}_i$  meromorphe Zusammenhänge mit genau einem Slope sind. Twiste die  $\mathcal{N}_i$  jeweils mit  $\mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}$  und somit ist dann

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \bigoplus_i \mathcal{N}_i \otimes_{\widehat{L}} \mathcal{E}_{\widehat{L}}^{-\psi}.$$

Für jeden Summanden lässt sich nun, falls dieser nicht schon ein elementarer meromorpher Zusammenhang ist, Induktion anwenden.

Kommentar: nicht elementar, sondern regulär otimes E

## 4.2 Level-Turritin-Zerlegung für $\mathcal{M}_\varphi$ mit $\varphi_1 := \frac{a}{x}$

Kommentar: rechtfertigen, das mehr gerechnet wird, als nötig

Als konkreten Fall betrachten wir nun  $\mathcal{M}_\varphi$  bezüglich  $\varphi_1 := \frac{a}{x}$ . Es ist das zugehörigen Minimalpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(x, \partial_x) &= -x^2 \partial_x (x \partial_x - 1) + a \\
 &= -x^2 \underbrace{\partial_x x \partial_x}_{\partial_x^2} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^2 \underbrace{(x \partial_x + 1) \partial_x}_{\partial_x^2} + x^2 \partial_x + a \\
 &= -x^3 \underbrace{\partial_x^2 - x^2 \partial_x + x^2 \partial_x}_{=0} + a \\
 &= -x^3 \partial_x^2 + a.
 \end{aligned}$$

Erhalte daraus das Newton-Polygon mit den Slopes  $\mathcal{P}(\mathcal{M}_\varphi) = \{\frac{1}{2}\}$ .

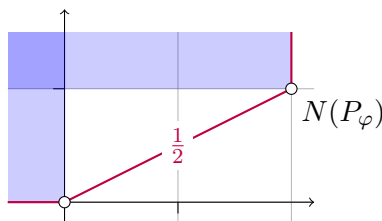


Abbildung 4.2: Newton Polygon zu  $P_\varphi$

Berechne nun zu  $\rho : t \mapsto x := -2t^2$  ein Minimalpolynom  $\rho^* P_\varphi$  zu  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
 \rho^* P_\varphi(x, \partial_x) &= t^3 \partial_t (t \partial_t - 2) + 2a \\
 &= t^3 \underbrace{\partial_t t \partial_t}_{\partial_t^2} - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^3 (t \partial_t + 1) \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 + t^3 \partial_t - 2t^3 \partial_t + 2a \\
 &= t^4 \partial_t^2 - t^3 \partial_t + 2a
 \end{aligned}$$

und erhalte einen meromorphen Zusammenhang  $\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{D}_{\widehat{K}} / \mathcal{D}_{\widehat{K}} \cdot \rho^* P_\varphi$  mit genau dem Slope  $1 = \frac{1}{1} =: \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ .

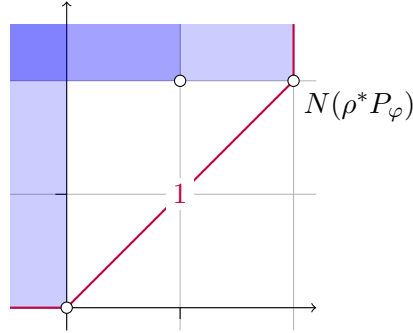


Abbildung 4.3: Newton Polygon zu  $\rho^* P_\varphi$

Definiere die Linearform  $\ell(s_0, s_1) := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 = s_0 + s_1$ . Berechne nun die *Determinanten Gleichung*  $\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) \in \widehat{L}[\xi]$  von  $\rho^* P_\varphi$ .

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) &= \sum_{\{(i,j)|2i-j=0\}} \alpha_{ij} x^j \xi^i \\ &= t^4 \xi^2 + 2a \end{aligned}$$

Setze  $\theta := t^{\lambda_0 + \lambda_1} \xi^{\lambda_1} = t^2 \xi$ , so erhalten wir

$$\sigma_\ell(\rho^* P_\varphi) = \theta^2 + 2a,$$

mit den Nullstellen  $i\sqrt{2a} =: \beta$  und  $-i\sqrt{2a}$ . Setze  $\psi(x) := (\beta/\lambda_0)t^{-\lambda_0} = i\sqrt{2a}t^{-1}$  und betrachte den Twist  $\mathcal{N} := \rho^+ \mathcal{M}_\varphi \otimes \mathcal{E}^\psi$  von  $\rho^+ \mathcal{M}$ . Es ist  $e \otimes 1$  ein zyklischer Vektor, wobei  $e$  ein zyklischer Vektor von  $\rho^+ \mathcal{M}$  ist. Mit dem Lemma vom Zyklischen Vektor wollen wir nun ein Minimalpolynom zu  $\mathcal{N}$  berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_t^2(e \otimes 1) &= \partial_t(\underbrace{\partial_t(e \otimes 1)}) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \partial_t(\underbrace{(\partial_t e) \otimes 1 + e \otimes \psi'(t)}) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \underbrace{(\partial_t^2 e) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{(\partial_t e) \otimes \psi'(t) + (\partial_t e) \otimes \psi'(t)}_{\in K} + \underbrace{e \otimes (\psi''(t) + \psi'(t)^2)}_{\in K} \\ &= \underbrace{((t^{-1} \partial_t - 2at^{-4})e) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{(\psi''(t) + \psi'(t)^2)e \otimes 1}_{\in K} \\ &= \underbrace{(t^{-1} \partial_t e) \otimes 1 - 2at^{-4} e \otimes 1}_{\in K} + \underbrace{2\psi'(t)(\partial_t e) \otimes 1 + \psi''(t)e \otimes 1 + \psi'(t)^2 e \otimes 1}_{\in K} \\ &= (t^{-1} + 2\psi'(t)) \underbrace{(\partial_t e) \otimes 1}_{\in K} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2) e \otimes 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{(2.3)}{=} (t^{-1} + 2\psi'(t)) \overbrace{(\partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - \mathbf{e} \otimes \psi'(t))}^{=0} + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t(\mathbf{e} \otimes 1) - (\psi'(t)t^{-1} + 2\psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &\quad + (-2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= \left( (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2\psi'(t)^2 - 2at^{-4} + \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right) \mathbf{e} \otimes 1 \\
 &= \left( (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t - \psi'(t)t^{-1} - 2at^{-4} + \psi''(t) - \psi'(t)^2 \right) \mathbf{e} \otimes 1
 \end{aligned}$$

also

$$0 = \underbrace{\left( \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \right)}_{=: P'} \mathbf{e} \otimes 1$$

und mit  $\psi(t) = i\sqrt{2at}^{-1}$  ist  $\psi'(t) = -i\sqrt{2at}^{-2}$  und  $\psi''(t) = 2i\sqrt{2at}^{-3}$ . Also durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P' &= \partial_t^2 - (t^{-1} + 2\psi'(t)) \partial_t + \psi'(t)t^{-1} + 2at^{-4} - \psi''(t) + \psi'(t)^2 \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - i\sqrt{2at}^{-3} + 2at^{-4} - 2i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{(-i\sqrt{2at}^{-2})^2}_{=0} \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3} + \underbrace{2at^{-4} - 2at^{-4}}_{=0} \\
 &= \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at}^{-2}) \partial_t - 3i\sqrt{2at}^{-3}
 \end{aligned}$$

mit, wie gewünscht, einem regulärem Anteil.

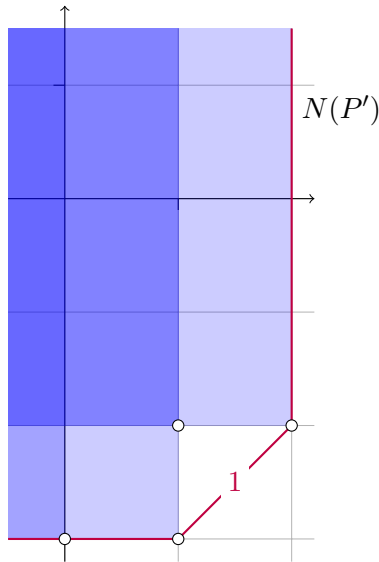


Abbildung 4.4: Newton Polygon zu  $\mathcal{N}$

Kommentar:

Bemerkung 4.5. Alternativ ließe sich ein Minimalpolynom von  $\mathcal{N}$  mit der Formel aus Lemma 3.18 berechnen. Denn mit  $\rho^*P(t, \partial_t) = t^4\partial_t^2 - t^3\partial_t + 2a$ , ist

$$\begin{aligned}
 \rho^*P(t, \partial_t - \frac{\partial\psi}{\partial t}) &= \rho^*P(t, \partial_t - \frac{-i\sqrt{2a}}{t^2}) \\
 &= t^4 (\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2})^2 - t^3(\partial_t + \frac{i\sqrt{2a}}{t^2}) + 2a \\
 &= t^4 (\partial_t + i\sqrt{2at}^{-2})(\partial_t + i\sqrt{2at}^{-2}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2at} + 2a \\
 &= t^4 (\partial_t^2 + i\sqrt{2at}^{-2}\partial_t + \partial_t i\sqrt{2at}^{-2} + (i\sqrt{2at}^{-2})^2) - t^3\partial_t - i\sqrt{2at} + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2at}^2\partial_t + i\sqrt{2at}^4 \partial_t t^{-2} - 2at^{-4}t^4 - t^3\partial_t - i\sqrt{2at} + 2a \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2at}^2\partial_t + i\sqrt{2at}^4 (t^{-2}\partial_t - 2t^{-3}) - t^3\partial_t - i\sqrt{2at} \\
 &= t^4\partial_t^2 + i\sqrt{2at}^2\partial_t + i\sqrt{2at}^2\partial_t - 2i\sqrt{2at} - t^3\partial_t - i\sqrt{2at} \\
 &= t^4\partial_t^2 - (t^3 - 2i\sqrt{2at}^2)\partial_t - 3i\sqrt{2at} \\
 &= t^4P'(t, \partial_t)
 \end{aligned}$$

Nachdem wir jetzt ein Minimalpolynom gefunden haben, ist unser nächstes Ziel,  $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\widehat{L}}/\mathcal{D}_{\widehat{L}} \cdot P'$  in zwei meromorphe Zusammenhänge mit nur einem Slope zerlegen. Betrachte hierzu das Minimalpolynom und zerlege dieses in ein Produkt  $P'(t, \partial_t) = Q_1(t, \partial_t) \cdot Q_2(t, \partial_t)$ .

Da der  $\partial_t$ -Grad von  $P'$  genau 2 ist, müssen die  $Q_i$  jeweils den Grad 1 haben, um eine nichttriviale Zerlegung zu bekommen. Allgemein haben die  $Q_i$  also die Form

$$Q_1 := \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 := \bar{u}(t)\partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), \bar{u}(t), u(t) \in \widehat{L}.$$

Beobachtung 4.6. Ist  $Q_1$  und  $Q_2$  so ein solches Paar, dann ist für  $\sigma \in \widehat{L}$  das Paar  $\bar{Q}_1 := Q_1 \cdot \sigma^{-1}$  und  $\bar{Q}_2 := \sigma \cdot Q_2$  ebenfalls eine Zerlegung, denn

$$P' = Q_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \sigma}_{=1} \cdot Q_2 = \bar{Q}_1 \cdot \bar{Q}_2.$$

Mit der Beobachtung 4.6 ist klar, dass wir den Faktor vor  $\partial_t$  in  $Q_2$  frei wählen können. Setze  $\bar{u}(t) := 1$  und erhalte

$$Q_1 = \bar{v}(t)\partial_t + v(t) \quad Q_2 = \partial_t + u(t) \quad \text{mit } \bar{v}(t), v(t), u(t) \in \widehat{L}$$

und somit ist ist das Produkt gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= \bar{v}(t)\partial_t^2 + \bar{v}(t)\partial_t u(t) + v(t)\partial_t + v(t)u(t) \\ &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2}at^{-2})\partial_t - 3i\sqrt{2}at^{-3}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Damit ist ebenfalls  $\bar{v}(t) = 1$ .

Durch das Wissen über die Slopes der  $Q_i$  erhalten wir noch Informationen über die Reihen  $v(t) := \sum_n v_n t^n$  und  $u(t) := \sum_n u_n t^n$ . Die beiden Polynome  $Q_1$  und  $Q_2$  enthalten  $\partial_t$  als einziges Monom vom  $\partial_t$ -Grad 1, deshalb ist  $(1, -1)$  in beiden zugehörigen Newton-Polygonen enthalten. Da  $Q_1$  nur den Slope 0 hat, muss das Newton-Polygon wie in Abbildung 4.5 aussehen und somit wissen wir, dass  $v_n = 0$  für alle  $n < -1$ . Da  $Q_2$  genau den Slope 1 hat, ist das Newton-Polygon gegeben durch Abbildung 4.6. Damit ist  $u_n = 0$  für alle  $n < -2$  und  $u_{-2} \neq 0$ .

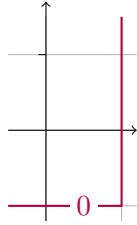


Abbildung 4.5: Newton-Polygon zu  $Q_1$

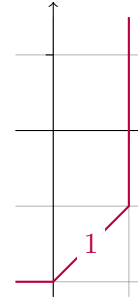


Abbildung 4.6: Newton-Polygon zu  $Q_2$

Mit diesen Informationen erhalten wir aus (4.1) die Gleichung

$$Q_1 \cdot Q_2 = \partial_t^2 + \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \quad (4.2)$$

und mit denn Kommutatorregeln gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n &= \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \overbrace{[\partial_t, u_n t^n]}) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n t^n \partial_t + \overbrace{n u_n t^{n-1}}) \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1} \end{aligned}$$



Wenn wir dieses Ergebnis nun in (4.2) einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \partial_t + \underbrace{\sum_{n=-2}^{\infty} n u_n t^{n-1}}_{\text{Indexshift}} + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \partial_t + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right) \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Betrachte nun das letzte Glied, auf welches wir die Cauchy-Produktformel anwenden wollen:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\left( \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \left( \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n \right)}_{\text{Indexshift}} = t^{-3} \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1} t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{n-2} t^n \right)}_{\text{Cauchy Produkt}} \\
 &\quad \downarrow \\
 &= t^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} t^k u_{n-k-2} t^{(n-k)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} t^{k+(n-k)-3} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n v_{k-1} u_{n-k-2} \right)}_{\text{Indexshift}} t^{n-3} \\
 &\quad \downarrow \\
 &= \sum_{n=-3}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n
 \end{aligned}$$

Wenn wir auch diese Rechnung in (4.3) integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1) u_{n+1} t^n + \underbrace{\sum_{n=-3}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n}_{\text{Indexshift}} \\
 &= \partial_t^2 + \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \partial_t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left( (n+1) u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1} u_{n-k+1} \right) t^n \\
 &\stackrel{!}{=} \partial_t^2 - (t^{-1} - 2i\sqrt{2at^{-2}}) \partial_t - 3i\sqrt{2at^{-3}}.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir ein Ergebnis, das sich Koeffizientenweise mit der gewünschten Formel vergleichen lässt:

$$2i\sqrt{2at^{-2}} - t^{-1} = \sum_{n=-2}^{\infty} (u_n + v_n) t^n \tag{4.4}$$

$$-3i\sqrt{2a}t^{-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left( (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) t^n \quad (4.5)$$

Nun können wir mit (4.4) und (4.5) jeweils nochmals einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten zunächst aus (4.4), die Bedingungen

$$2i\sqrt{2a} = u_{-2} + \underbrace{v_{-2}}_{=0} = u_{-2} \quad (4.6)$$

$$-1 = u_{-1} + v_{-1} \quad (4.7)$$

$$0 = u_n + v_n \quad \forall n \geq 0 \quad (4.8)$$

welche wir als nächstes mit (4.5) kombinieren wollen. Betrachte zunächst die Vorfaktoren vor  $t^{-3}$ :

$$\begin{aligned} -3i\sqrt{2a} &= (-2)u_{-2} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1}u_{-3-k+1} \\ &= -2u_{-2} + v_{-1}u_{-2} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -2 \cdot 2i\sqrt{2a} + v_{-1}2i\sqrt{2a} \\ \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} v_{-1} &= \frac{4i\sqrt{2a} - 3i\sqrt{2a}}{2i\sqrt{2a}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} -1 &= u_{-1} + v_{-1} \\ &= u_{-1} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow u_{-1} &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinem Koeffizienten vor  $t^n$  mit  $n > -3$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)u_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+3} v_{k-1}u_{n-k+1}}_{\substack{n+2 \\ = (n+1)u_{n+1} + (\sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1}) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{v_{n+2}u_{-2}}}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left( \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + \underbrace{v_{n+3-1}u_{n-(n+3)+1}}_{v_{n+2}u_{-2}} \\ &= (n+1)u_{n+1} + \left( \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) + \underbrace{v_{n+2}}_{\overline{v_{n+2}}} \underbrace{u_{-2}}_{\overline{u_{-2}}} \\ \Rightarrow v_{n+2}u_{-2} &= - \left( (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{u_{-2} \neq 0}{\Rightarrow} v_{n+2} = -\frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+2} v_{k-1}u_{n-k+1} \right)$$

und nach passendem Indexshift folgt

Kommentar:  $n+2 \rightarrow n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -\frac{1}{2i\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$  mit  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n)$  und  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-2}^{\infty} u_n t^n)$ .  
Zusammen mit  $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$ ,  $u_{-1} = -\frac{3}{2}$  und  $v_{-1} = \frac{1}{2}$  sind durch

$$v_n = -u_n = \frac{i}{2\sqrt{2a}} \left( (n-1)u_{n-1} + \sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1} \right) \quad \forall n \geq 0 \quad (4.9)$$

die Koeffizienten von  $v(t)$  und  $u(t)$  vollständig bestimmt.

Nun lässt sich diese Zerlegung mit  $\mathcal{E}^{-\psi(t)}$  zurücktwisten und wir erhalten damit die Zerlegung

$$\begin{aligned} \rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} &\stackrel{3.19}{=} \underbrace{\rho^+ \mathcal{M}_{\varphi} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}}_{=} \\ &= (\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\ &= \underbrace{\mathcal{N}_1}_{=} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \oplus \underbrace{\mathcal{N}_2}_{=} \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \\ &= (\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_1 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \oplus (\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}) \end{aligned}$$

wobei  $Q_1$  bereits regulär. Betrachte also noch  $\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2 \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} &\stackrel{3.18}{=} \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot Q_2(t, \partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2}) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t - i\sqrt{2a}t^{-2} + \underbrace{u(t)}_{= \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n}) \\ &= \mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + i\sqrt{2a}t^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \\ &\stackrel{3.18}{=} \underbrace{\mathcal{D}_{\hat{L}}/\mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n)}_{\text{regulär}} \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \end{aligned}$$

**Kommentar:** Damit ist der zweite Summand also auch ein elementarer meromorpher Zusammenhang.

Also zerlegt sich  $\mathcal{M}$ , nach einem pull-back mit  $\rho : t \mapsto x = -2t^2$ , in

$$\rho^+ \mathcal{M}_\varphi = \underbrace{\left( \mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \left( \partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{-\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_1} \oplus \underbrace{\left( \mathcal{D}_{\hat{L}} / \mathcal{D}_{\hat{L}} \cdot \left( \partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n \right) \otimes \mathcal{E}^{\psi(t)} \right)}_{=: \mathcal{R}_2}.$$

Nach Zerlegen von  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  in eine direkte Summe von elementaren formalen meromorphen Zusammenhängen, wie in Satz 3.4, ist die Levelt-Turrittin-Zerlegung vollständig gegeben.

#### 4.2.1 Konvergenz der Summanden

**Kommentar:** TODO: text

Es ist klar, dass die Potenzreihen nicht konvergent sein dürfen, trotzdem wollen wir die Potenzreihen auf Konvergenz untersuchen

Für  $n > 0$  gilt  $v_{n-1} \stackrel{(4.8)}{=} -u_{n-1}$  und damit wollen wir die Formel (4.9) noch weiter vereinfachen, um eine Version zu bekommen, die sich gut implementieren lässt. Aus (4.9) ergeben sich zunächst für  $n = 0$  die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (-1)u_{-1} + \sum_{k=0}^0 v_{k-1} u_{-k-1} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) \\ &= -\frac{3}{4u_{-2}} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{3i}{8\sqrt{2a}} = -u_0 \end{aligned}$$

**Kommentar:** Somit ergeben sich für  $n = 1$  die Koeffizienten

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (1-1)u_{1-1} + \sum_{k=0}^1 v_{k-1} u_{1-k-1} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} (v_{-1}u_0 + v_0u_{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{v_0}{u_{-2}}(-v_{-1} + u_{-1}) \\
 &= \frac{3}{u_{-2} \cdot 4u_{-2}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{3}{4u_{-2}^2}(-2) \\
 &= -\frac{3}{2u_{-2}^2} \\
 &= \frac{3}{16a} = -u_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{8} \\
 &= 1.5
 \end{aligned}$$

und für  $n = 2$  ist

$$\begin{aligned}
 v_2 &= -\frac{1}{u_{-2}}((2-1)u_{2-1} + \sum_{k=0}^2 v_{k-1}u_{2-k-1}) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}(u_1 + v_{-1}u_1 + v_0u_0 + v_1u_{-1}) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}}\left(\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2u_{-2}^2} + \frac{-3}{4u_{-2}}\frac{3}{4u_{-2}} + \frac{-3}{2u_{-2}^2}\frac{-3}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{u_{-2}^3}\left(\frac{24}{16} + \frac{12}{16} - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right) \\
 &= -\frac{63}{16u_{-2}^3} \\
 &= -\frac{63}{16(2i\sqrt{2a})^3} \\
 &= \frac{63}{256ia\sqrt{2a}} \\
 &= -\frac{63}{256a\sqrt{2a}} = -u_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{8} \\
 &\approx -3.9375i
 \end{aligned}$$

und für  $n = 3$  ist

$$\begin{aligned}
 v_3 &= -\frac{1}{u_{-2}}((3-1)u_{3-1} + \sum_{k=0}^3 v_{k-1}u_{3-k-1}) \\
 &\approx -u_{-2}^{-4}\left(-\frac{63}{8} - \frac{1}{2}v_2 - v_0v_1 - v_1v_0 - \frac{3}{2}v_2\right) \\
 &= -u_{-2}^{-4}\left(\underbrace{\left(-\frac{(4-1)63}{32} - 2\frac{-3-3}{4}\frac{-3}{2} - \frac{3-63}{2}\frac{16}{16}\right)}_{-8 \cdot 9} - \frac{3-63}{2}\frac{16}{16}\right) \\
 &= -\frac{-(4-1)63 - 8 \cdot 9 + 3 \cdot 63}{32u_{-2}^4} \\
 &= -\frac{-8 \cdot 9}{8 \cdot 4u_{-2}^4} \\
 &= \frac{9}{4u_{-2}^4}
 \end{aligned}$$

Kommentar: und analog, für  $n = 1$  und  $n = 2$

$$v_1 = -\frac{3}{2u_{-2}^2} = \frac{3}{16a} = -u_1 \quad \text{und} \quad v_2 = -\frac{63}{16u_{-2}^3} = -\frac{63i}{256a\sqrt{2a}} = -u_2.$$

Die letzten zwei Paare sind für die Berechnung nicht von Bedeutung und dienen nur dazu, das Programm zu prüfen.

Nun vereinfachen wir die Formel:

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( (n-1)u_{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n v_{k-1}u_{n-k-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( \underbrace{(n-1)u_{n-1}} + v_{-1} \underbrace{u_{n-1}} + \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{u_{n-k-1}} \right)} + v_{n-1}u_{-1} \right) \\ &\stackrel{(4.8)}{=} -\frac{1}{u_{-2}} \left( \underbrace{-(n-1)v_{n-1}} + v_{-1} \underbrace{(-v_{n-1})} + \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1} \underbrace{(-v_{n-k-1})} \right)} + \underbrace{v_{n-1}u_{-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_{-2}} \left( -(n-1)v_{n-1} - \underbrace{\frac{1}{2}v_{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} - \underbrace{\frac{3}{2}v_{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left( (n-1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \\ &= \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) \end{aligned}$$

Zu gegebenem  $u_{-2} = 2i\sqrt{2a}$ , sind die Koeffizienten gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_{-1} &= \frac{1}{2} & u_{-1} &= -\frac{3}{2} \\ v_0 &= -u_0 = -\frac{3}{4u_{-2}} \\ v_n &= -u_n = \frac{1}{u_{-2}} \left( (n+1)v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_{n-k-1} \right) & \forall n > 0 \end{aligned}$$

Im Anhang wird in Abschnitt C.2 eine Haskell Modul vorgestellt, welches zu gegebenem  $u_{-1}$  die Werte von  $v(t)$  und  $u(t)$  berechnet.

In der Abbildung 4.7 sind die Beträge der Koeffizienten von  $v(t)$  in Abhängigkeit von  $n$  für verschiedene  $u_{-2}$  angetragen.

Nun zum Konvergenzverhalten. Es ist klar, dass

$$Q_1 \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow v(t) \in \hat{L} \setminus L \quad \text{bzw.} \quad (\partial_t + \sum_{n=-1}^{\infty} u_n t^n) \in \mathcal{D}_{\hat{L}} \setminus \mathcal{D}_L \Leftrightarrow u(t) \in \hat{L} \setminus L$$

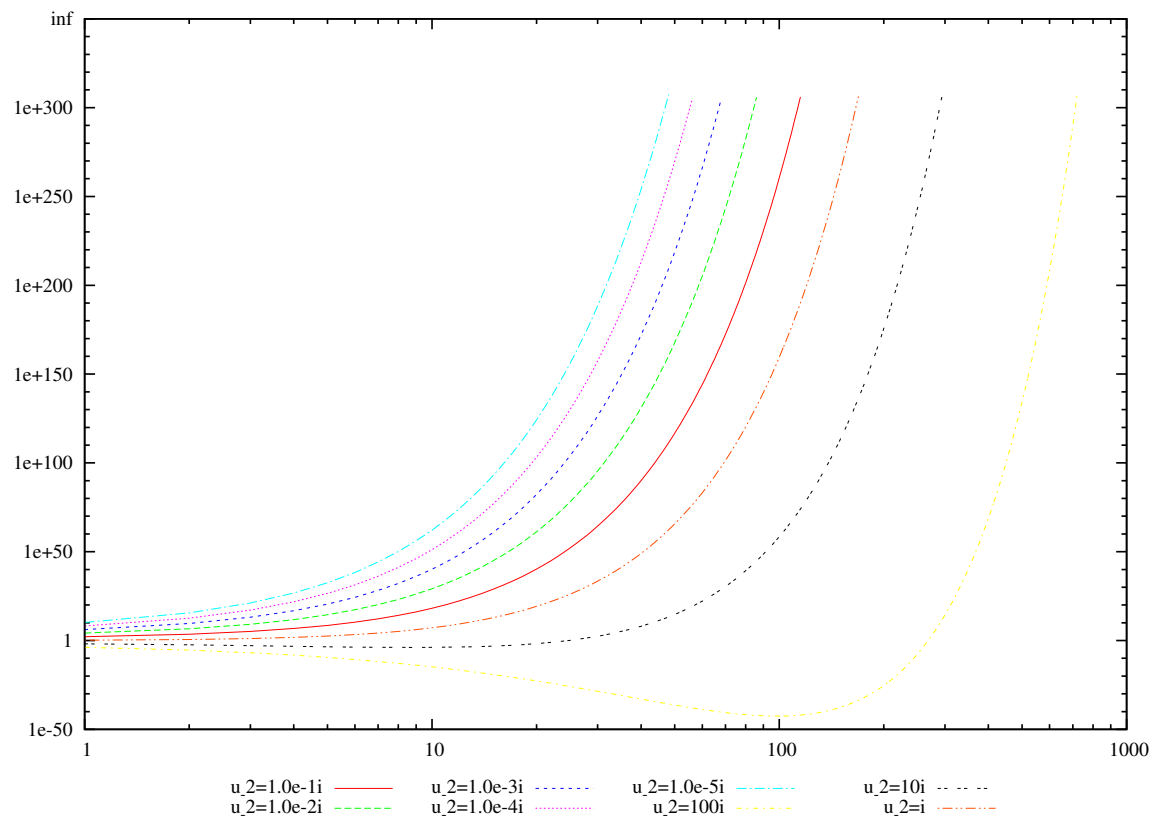


Abbildung 4.7: Die Beträge der  $v_n$  in Abhängigkeit von  $n$  für unterschiedliche  $u_{-2}$ .

gilt. Deshalb wollen wir die Potenzreihen  $v$  und  $u$  und im besonderen deren Konvergenzverhalten, noch genauer betrachten. Außerdem gilt, dass  $v(t) \in \widehat{L} \setminus L \Leftrightarrow u(t) \in \widehat{L} \setminus L$ . Wir betrachten die folgenden zwei klassischen Konvergenzkriterien.

**Satz 4.7** (Wurzkriterium nach Cauchy). *Sei  $\sum_n a_n x^n$  eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends konvergent.}$$

*Beweis.* siehe [Kno64, §18, Satz 94]. □

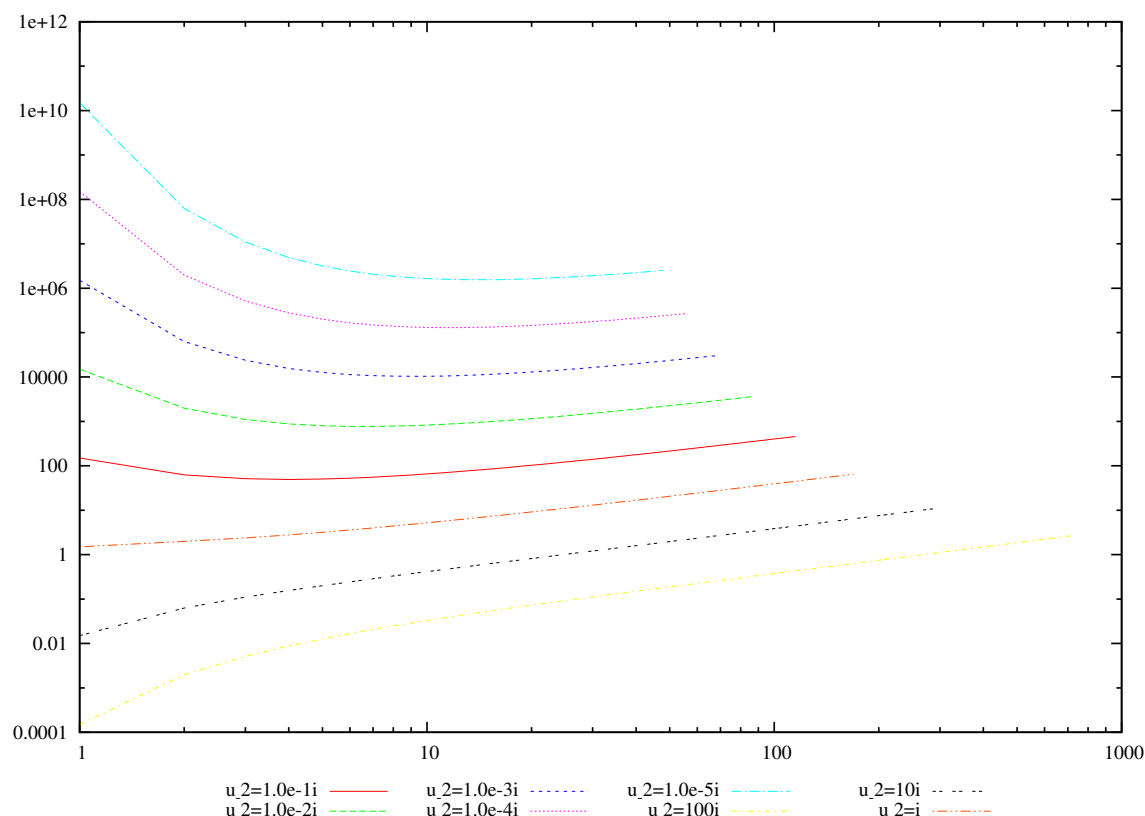


Abbildung 4.8: Wurzkriterium angewendet auf die Koeffizienten

**Satz 4.8** (Quotientenkriterium). *Sei  $\sum_n a_n x^n$  eine Potenzreihe. Es gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \text{die Potenzreihe ist nirgends konvergent.}$$

*Beweis.* Es gilt, dass  $\sum_n a_n x^n$  für ein  $x \in \mathbb{C}$  konvergent ist, falls

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \leq \eta < 1$$



und das ist äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1.$$

Also konvergiert die Reihe für alle  $x$  mit  $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

□

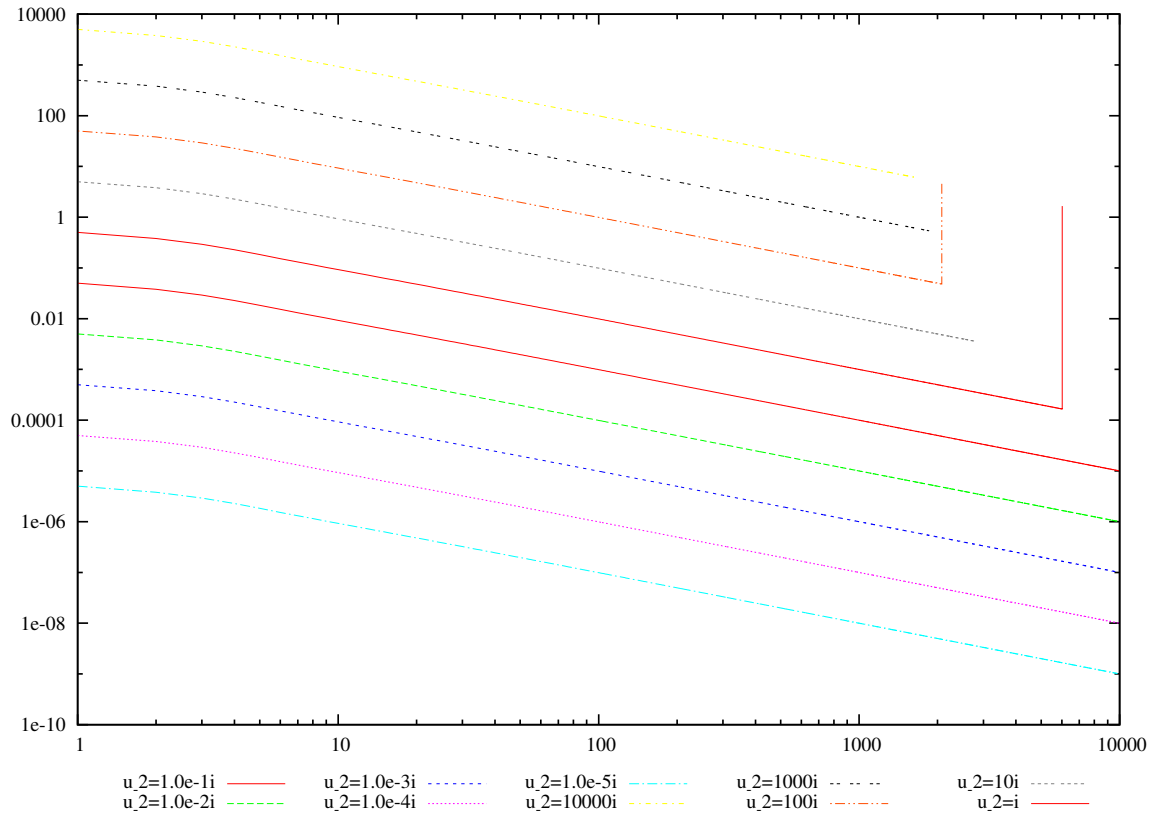


Abbildung 4.9: Quotientenkriterium angewendet auf die Koeffizienten



## B Genaueres zu $(x^2 \partial_x)^k$

Nun wollen wir noch  $(x^2 \partial_x)^{k+1}$  besser verstehen.

$$\begin{aligned}
 (x^2 \partial_x)^{k+1} &= x^2 \underbrace{\partial_x x^2}_{2x + x^2 \partial_x} \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= x^2 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x)^{k-1} \\
 &= (2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2) (x^2 \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 \underbrace{\partial_x x^2}_{2x + x^2 \partial_x} \partial_x + x^4 \underbrace{\partial_x^2 x^2}_{2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2} \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (2x^3 (2x + x^2 \partial_x) \partial_x + x^4 (2x \partial_x + 1 + x^2 \partial_x^2) \partial_x) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (4x^4 \partial_x + 2x^5 \partial_x^2 + 2x^5 \partial_x^2 + x^4 \partial_x + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= (5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3) (x^2 \partial_x)^{k-2} \\
 &= \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n
 \end{aligned}$$

Kommentar: Stirlingzahlen

also gilt für spezielle  $k$

$$(x^2 \partial_x)^{k+1} = \begin{cases} 2x^3 \partial_x + x^4 \partial_x^2 & \text{falls } k = 1 \\ 5x^4 \partial_x + 4x^5 \partial_x^2 + x^6 \partial_x^3 & \text{falls } k = 2 \\ \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \frac{(k+1)!}{n!} x^{n+k} \partial_x^n & \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

# C Quelltexte

## C.1 ComplRat.hs

Das Modul ComplRat implementiert die Zahlen  $\mathbb{Q}(i)$ .

Listing C.1: ComplRat.hs

```
1  -- | Dieses Modul stellt den Datentyp 'ComplRat' komplexrationaler
2  -- Zahlen, also den Elementen von  $\mathbb{Q}(i)$ , bereit.
3  module ComplRat
4      ( ComplRat(..)
5        , realPart
6        , imagPart
7        , magnitude
8        , magnitudeSq
9        ) where
10 import Data.Ratio
11
12 -- | Typ für komplexrationale Zahlen in kartesischer Darstellung.
13 -- Der Konstruktor ist strikt in seinen beiden Argumenten.
14 data ComplRat = !Rational :+: !Rational
15     deriving (Eq)
16
17 -- -----
18 -- Funktionen
19
20 -- | Gibt den reellen Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
21 realPart :: ComplRat -> Rational
22 realPart (x :+: _) = x
23
24 -- | Gibt den imaginären Teil einer gegebenen complexen Zahl zurück
25 imagPart :: ComplRat -> Rational
26 imagPart (_ :+: y) = y
27
28 -- | Der nichtnegative Betrag einer complexen Zahl
29 -- nur für rein reelle oder complexe Zahlen, da es sonst, aufgrund der fehlenden
30 -- Wurzel, zu problemen kommt
31 magnitude :: ComplRat -> Rational
32 magnitude (x :+: 0) = abs x
33 magnitude (0 :+: y) = abs y
```

```
34 magnitude (_ :+: _) = error "Oops! Use magnitudeSq instead."
35 {-magnitude (x :+: y) = P.sqrt ( sqr x P.+ (sqr y) )-}
36 {-where sqr z = z P.* z-}
37
38 -- | Das Quadrat des Betrags einer complexen Zahl
39 -- ist für alle complexen zahlen geeignet
40 magnitudeSq :: ComplRat -> Rational
41 magnitudeSq (x :+: y) = x*x + y*y
42
43 -----
44 -- Instanzen von ComplRat
45
46 instance Show ComplRat where
47     show (x :+: y) | y == 0      = show x
48                       | otherwise = "(" ++ show x ++ "+i" ++ show y ++ ")"
49
50 instance Num ComplRat where
51     (x :+: y) + (x' :+: y') = (x+x') :+: (y+y')
52     (x :+: y) * (x' :+: y') = (x*x' - y*y') :+: (x*y' + y*x')
53     negate (x :+: y)        = negate x :+: negate y
54     fromInteger i           = fromInteger i :+: 0
55     abs z                    = magnitude z :+: 0
56     signum (0:::0)          = 0
57     {-signum z@(x :+: y)     = x P./ r :+: y P./ r where r = magnitude z-}
58
59 instance Fractional ComplRat where
60     fromRational r          = fromRational r :+: 0
61     (a :+: b)/(c :+: d) = ((a*c + (b*d))/n) :+: ((b*c - (a*d))/n)
62     where n = c*c + d*d
```

Hier ist `:+:` ein Infix-Konstruktor der Klasse `ComplRat` und erzeugt mit einem Aufruf der Form `a :+: b` eine Imaginärzahl, die  $a + ib$  entspricht.

## C.2 Koeffs.hs

Dieses Modul `Koeffs` stelle die Funktionen `vKoeffs` und `uKoeffs` bereit, welche zu einem gegebenem Wert von  $u_{-2}$  eine unendliche Liste der Koeffizienten generieren. Die Einträge in der Liste sind vom Typ `ComplRat`. Dies ermöglicht es, dass die Berechnung ohne numerische Fehler erfolgt, da nie gerundet wird.

Listing C.2: Koeffs.hs

```
1 -- | Dieses Modul stellt Funktionen bereit, welche die zu einem Startwert
2 -- gehörigen Koeffizienten von v(t) und u(t) generieren
3 module Koeffs
4   ( vKoeffs
5     , uKoeffs
```

```

6   ) where
7   import ComplRat
8   import Data.MemoTrie (memo) -- https://github.com/conal/MemoTrie
9
10  -- returns array with the coefficients of v(t)
11  -- first element in array is koefficient from t^{-1}
12  vKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
13  vKoeffs uMin2 = 1/2+:0 : [koeff i|i <- [0..]]
14  where koeff :: Int -> ComplRat
15         koeff = memo koeff'
16         koeff' :: Int -> ComplRat
17         koeff' n | n > 0 = (koeff (n-1)*(fromIntegral n+1)+summe)/uMin2
18                   | n == 0 = -3/(uMin2*4)
19                   | n == -1 = 1/2
20                   | otherwise = 0
21         where summe = sum [koeff (k-1)*(koeff (n-k-1))|k <- [1..n-1]]
22
23  -- returns array with the coefficients of u(t)
24  -- first element in array is koefficient from t^{-2}
25  uKoeffs :: ComplRat -> [ComplRat]
26  uKoeffs uMin2 = uMin2 : -3/2+:0 : (map negate (tail $ vKoeffs uMin2))

```

Beispielhaft kann man mit dem folgendem Programm die Koeffizienten von  $v(t)$ , zu  $a = \frac{1}{8}$  also  $u_{-2} = i = 2i\sqrt{2a}$ , erzeugen lassen.

Listing C.3: testKoeffs.hs

```

1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4  import System.Environment
5
6  uMin2=(0+:1)
7
8  main :: IO()
9  main = do x <- getArgs
10         putStrLn $ "n\t| v_n\n-----"++(replicate 70 '-')
11         main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x
12  where main' :: Int -> IO()
13         main' end = mapM_ addLine $ zip [-1..end] $ vKoeffs uMin2
14         where addLine (i,a) = putStrLn $ show i ++ "\t| " ++ show a

```

Ist der Code in einer Datei `/Pfad/zu/testKoeffs.hs` gespeichert, so lässt er sich in Unix-Ärtigen Systemen beispielsweise mit den folgenden Befehlen compilieren und ausführen.

```

1 $ ghc --make /Pfad/zu/testKoeffs.hs
2 $ /Pfad/zu/testKoeffs 15

```

Durch das Ausführen berechnet das Programm die Koeffizienten von  $v$  bis zum Index 15 und gibt in der Konsole das folgende aus

```

1  n      | v_n
2  -----+-----
3  -1     | 1 % 2
4  0      | (0 % 1+i3 % 4)
5  1      | 3 % 2
6  2      | (0 % 1+i(-63) % 16)
7  3      | (-27) % 2
8  4      | (0 % 1+i1899 % 32)
9  5      | 324 % 1
10 6      | (0 % 1+i(-543483) % 256)
11 7      | (-32427) % 2
12 8      | (0 % 1+i72251109 % 512)
13 9      | 2752623 % 2
14 10     | (0 % 1+i(-30413055339) % 2048)
15 11     | (-175490226) % 1
16 12     | (0 % 1+i9228545313147 % 4096)
17 13     | 31217145174 % 1
18 14     | (0 % 1+i(-30419533530730323) % 65536)
19 15     | (-14741904895227) % 2

```

Übersetzt in unsere Zahlenschreibweise ergibt sich daraus die folgende Tabelle:

n	$v_n$
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{4}i$
1	$\frac{3}{2}$
2	$-\frac{63}{16}i$
3	$-\frac{27}{2}$
4	$\frac{1899}{32}i$
5	$\frac{342}{1}$
6	$-\frac{543483}{256}i$
7	$-\frac{32427}{2}$
8	$\frac{72251109}{512}i$
9	$\frac{2752623}{2}$
10	$-\frac{30413055339}{2048}i$
11	$-\frac{175490226}{1}$
12	$\frac{9228545313147}{4096}i$
13	$\frac{31217145174}{1}$
14	$-\frac{30419533530730323}{65536}i$
15	$-\frac{14741904895227}{2}$

Tabelle C.1: Numerisch berechnete Koeffizienten von  $v(t)$  für  $u_{-2} = i$  bzw.  $a = \frac{1}{8}$

Kommentar:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \frac{1}{2}t^{-1} + \frac{3}{4}it^0 + \frac{3}{2}t^1 + \frac{-63}{16}it^2 + \frac{-27}{2}t^3 + \frac{1899}{32}it^4 + \frac{324}{1}t^5 + \frac{-543483}{256}it^6 + \\
 & \frac{-32427}{2}t^7 + \frac{72251109}{512}it^8 + \frac{2752623}{2}t^9 + \frac{-30413055339}{2048}it^{10} + \frac{-175490226}{1}t^{11} + \\
 & \frac{9228545313147}{4096}it^{12} + \frac{31217145174}{1}t^{13} + \frac{-30419533530730323}{65536}it^{14} + \\
 & \frac{-14741904895227}{2}t^{15} + \frac{16317191917079376129}{131072}it^{16} + \frac{4456057685561073}{2}t^{17} + \\
 & \frac{-22082325223708363779009}{524288}it^{18} + \frac{-1677161966915352627}{2}t^{19} + \\
 & \frac{18391039987731669876160557}{1048576}it^{20} + \frac{384452768592440499024}{1}t^{21} + \\
 & \frac{-73930258776609869550094166319}{8388608}it^{22} + \frac{-210878717949731493002826}{1}t^{23} + \\
 & \frac{88204980719873920964105544038937}{16777216}it^{24} + \frac{136346686011011135869054074}{1}t^{25} + \\
 & \frac{-246474684300724210330466557670749827}{67108864}it^{26} +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \frac{-102614997677451303311734530276}{1} t^{27} + \\ & \frac{398608966820777951112056743321778108571}{134217728} i t^{28} + \\ & \frac{88929857099067937229443324337874}{1} t^{29} + \\ & \frac{-11819876688678190917510659802435441505814403}{4294967296} i t^{30} + \dots \end{aligned}$$

## C.3 SaveToFile.hs

Listing C.4: SaveToFile.hs

```
1  module Main where
2  import ComplRat
3  import Koeffs
4
5  import qualified Control.Monad.Parallel as P
6
7  import System.Environment
8  import System.IO
9  import Data.Time
10
11  main :: IO()
12  main = do x <- getArgs
13           P.sequence_ (main' $ head $ map (\x -> read x :: Int) x)
14  where
15      main' x = map (saveData x) [ ("./data/u_-2=i"      , (0+:1))
16                                  {-, ("./data/u_-2=10000i" , (0+:10000))-}
17                                  {-, ("./data/u_-2=1000i"  , (0+:1000))-}
18                                  {-, ("./data/u_-2=100i"   , (0+:100))-}
19                                  {-, ("./data/u_-2=10i"    , (0+:10))-}
20                                  {-, ("./data/u_-2=1.0e-1i" , (0+:1.0e-1))-}
21                                  , ("./data/u_-2=1.0e-2i" , (0+:1.0e-2))
22                                  {-, ("./data/u_-2=1.0e-3i" , (0+:1.0e-3))-}
23                                  {-, ("./data/u_-2=1.0e-4i" , (0+:1.0e-4))-}
24                                  {-, ("./data/u_-2=1.0e-5i" , (0+:1.0e-5))-}
25                                  ]
26
27  saveData :: Int -> (String, ComplRat) -> IO()
28  saveData end (fn, uMin2) =
29      do start <- getCurrentTime
30         withFile fn WriteMode (\handle -> do
31             hPutStr handle (concat $ take end $ map genLine triples))
32         stop <- getCurrentTime
33         putStrLn $ fn ++ " " ++ (show $ diffUTCTime stop start)
```

```

34     where vals      = vKoeffs uMin2
35           triples = zip3 [0..] (tail vals) vals
36
37     genLine :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
38     genLine (i,v1,v2) = concat [ show i                      , "\t"
39                                , genItemBetrag (i,v1,v2) , "\t"
40                                , genItemCauchy (i,v1,v2) , "\t"
41                                , genItemQuot (i,v1,v2)   , "\n" ]
42     where genItemBetrag :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
43           genItemBetrag (_,v,_) = show $ fromRational $ magnitude v
44
45           genItemCauchy :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
46           genItemCauchy (i,v,_) = show $ genItemCauchy'*(1/(fromIntegral i))
47           where genItemCauchy' = fromRational $ magnitude v
48
49           genItemQuot :: (Int, ComplRat, ComplRat) -> String
50           genItemQuot (_,v1,v2) = show $ sqrt $ fromRational $ genItemQuot'
51           where genItemQuot' = magnitudeSq v2/magnitudeSq v1

```

Das folgende Script nutzt 7 Prozessoren, um mit `SaveToFile.hs` die ersten 10000 werte zu berechnen. Anschließend werden mittels `gnuplot` die Plots als PDF erzeugt.

Listing C.5: GeneratePlots.sh

```

1  #!/bin/sh
2  max=10000
3  ghc --make -threaded ./SaveToFile.hs
4  mkdir -p ./data
5  ./SaveToFile $max +RTS -N7
6  mkdir -p ./plot
7  art[2]="betrag"; art[3]="cauchy"; art[4]="quot";
8  for i in 2 3 4; do
9      name="${art[i]}"
10     echo $name
11     gnuplot << EOF
12     set samples 1001
13     set key below
14     set term push #TODO: unnötig?
15     set term post enh color lw 1 12 "Times-Roman"
16     set output "${name}.eps"
17     set log xy
18     plot for [fn in `system("ls data/*")`] fn every ::0::${max} using 1:${i}\
19         with lines title `system("basename ".fn)`
20 EOF
21     epstopdf "${name}.eps" --outfile "./plot/${name}.pdf"
22     rm "${name}.eps"
23 done

```

# Literaturverzeichnis

- [Ara] D. Arapura, *Notes on  $d$ -modules and connections with hodge theory*, Notizen?
- [Ark12] S. Arkhipov,  *$D$ -modules*, unpublished lecture notes available online, May 2012.
- [AV09] B. Alkofer and F. Vogl, *Lineare differentialgleichungen und deren fouriertransformierte aus algebraischer sicht / lineare differentialgleichungen aus algebraischer sicht*, 2009.
- [Ayo09] J. Ayoub, *Introduction to algebraic  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 2009.
- [BD04] A. Beilinson and V.G. Drinfeld, *Chiral algebras*, Colloquium Publications - American Mathematical Society, no. Bd. 51, American Mathematical Society, 2004.
- [Blo04] Spencer Bloch, *Local fourier transforms and rigidity for  $d$ -modules*, Asian J. Math (2004), 587–605.
- [Cou95] S.C. Coutinho, *A primer of algebraic  $d$ -modules*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1995.
- [Ell10] C. Elliott,  *$D$ -modules*, unpublished notes available online, April 2010.
- [Gin98] V. Ginzburg, *Lectures on  $d$ -modules*, Vorlesungsskript, 1998.
- [GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR MR2127946 (2005m:32014)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [Hei10] Hedwig Heizinger, *Verschwindungszykel regulär singulärer  $D$ -Moduln und Fouriertransformation*, 2010.
- [HTT07] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki,  *$D$ -modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2007.
- [Hut07] Graham Hutton, *Programming in Haskell*, Cambridge University Press, January 2007.
- [Kas03] M. Kashiwara,  *$D$ -modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

- [Kno64] Konrad Knopp, *Theorie und anwendung der unendlichen reihen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1964.
- [MR89] H. Matsumura and M. Reid, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
- [Sab90] C. Sabbah, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, Vorlesungsskript, 1990.
- [Sab07] ———, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, June 2007.
- [Sch] J.P. Schneiders, *An introduction to d-modules*.
- [Sta12] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, <http://stacks.math.columbia.edu>, December 2012.

Kommentar: TODO: Erklärung das das wirklich selbstgemacht ist