Kolloquium zur Master Arbeit

Classification of meromorphic connections using Stokes structures and Stokes groups

Maximilian Huber

9. September 2015

Outline

Abschnitt 1

Zusammenhangs-Matrizen und die klassifizierende Menge

Systeme und die Gauge Transformation

Definition

Eine *Zusammenhangs-Matrix* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ beschreibt ein System (also: System linearer gewöhnlicher komplexer Differentialgleichungen)

$$dX = AX\,.$$

- F *ist* konvergent $:\Leftrightarrow F \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\{t\})\right)$ *sonst ist* F formal *(geschrieben* $\widehat{F}$*).*

Proposition

Durch einen Wechsel $F \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{C}(\!(t)\!)\right)$ *der Basis erhält man das System* ${}^{F}\!A$*, gegeben durch die* Gauge-Transformation

$${}^{F}\!A := (dF)F^{-1} + FAF^{-1}\,.$$

Definition

Die Zusammenhangs-Matrizen A und B sind *(formal) äquivalent*, falls es einen (formalen) Basiswechsel F gibt, so dass ${}^{F}\!A = B$.

Die Normalform und formale Klassifikation

Definition

Eine *Normalform* ist einem System der Form

$$A^0 = {}^{\mathrm{F}}\!\left(Q'(t^{-1}) + \frac{1}{t}L\right)$$

wobei

- $Q(t^{-1}) := \bigoplus_{j=1}^{s} q_j(t^{-1}) \cdot \mathrm{id}_{n_j}$ mit $q_j(t^{-1}) \in \mathbb{C}[t^{-1}]$,
- $L := \bigoplus_{j=1}^{s} L_j$ mit $L_j \in \mathrm{GL}_{n_j}(\mathbb{C})$ in Jordan-Normalform und
- $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ eine Gauge-Transformation.

Aus dem Levelt-Turittin Theorem erhalten wir:

Korollar

Jedes (unverzweigte) System A ist formal äquivalent zu einer Normalform und Normalformen sind bis auf (konvergente) Äquivalenz eindeutig.

Die klassifizierende Menge

Fixiere eine Normalform A^0.

Ziel: verstehe die Menge

$${}^0C(A^0) := \left\{ [A] \mid A = {}^{\widehat{F}}A^0 \text{ für ein } \widehat{F} \in G(\!(t)\!) \right\}$$

der Äquivalenzklassen vom Zusammenhangs-Matrizen formal äquivalent zu A^0.

Betrachte dazu die folgende Menge:

einfach

Definition

Die *klassifizierende Menge* ist definiert als die Menge

$$\mathcal{H}(A^0) := \left\{ \left[(A, \widehat{F}) \right] \mid A = {}^{\widehat{F}}A^0 \text{ mit } \widehat{F} \in G(\!(t)\!) \right\}$$

der Äquivalenzklassen *markierter Paare* zu A^0.

Abschnitt 2

Die Stokes Strukturen

Die Stokes Garbe und Stokes Keime

Sei $\mathcal{A}$ die Garbe der Funktionen mit asymptotischer Erweiterung.

Definition

- Die *Stokes Garbe* $\boldsymbol{\Lambda(A^0)}$ ist die Untergarbe von $Gl_n(\mathcal{A})$ bestehend aus den Schnitten f, welche
  1. *multiplikativ flach* (f ist asymptotisch zu id) und
  2. eine *Isotropie von* $\boldsymbol{A^0}$ $\left({}^f A^0 = A^0\right)$

  sind.
- Die *Stokes Gruppe* $\mathrm{Sto}_\theta(A^0) \subset \Lambda(A^0)_\theta$ sind die Keime f, für die auch noch jeder Eintrag
  3. von *maximal decay* in Richtung θ

  ist.

Definition

$e^{q(t^{-1})}$ mit $q\left(t^{-1}\right) \in \frac{a}{t^k} + o\left(t^{-k}\right)$ hat *maximal decay* in Richtung $\boldsymbol{\theta}$ genau dann wenn $\boldsymbol{a e^{-ik\theta}}$ reell negativ ist.

Malgrange-Sibuya-Isomorphismus

Zu einem $(A, \widehat{F})$ wähle sektorweise asymptotische Lifts $F_j \in \Lambda(A^0)(U_j)$ der formalen Transformation $\widehat{F}$. Durch $(F_k F_j^{-1})$ ist dann ein Kozykel in $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$ definiert. Dies liefert den folgenden Isomorphismus:

Satz (Malgrange-Sibuya)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(A^0) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & & H^1(S^1; \Lambda(A^0)) \\
& \prod_{\theta \in \mathbb{A}} \mathrm{Sto}_\theta(A^0) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

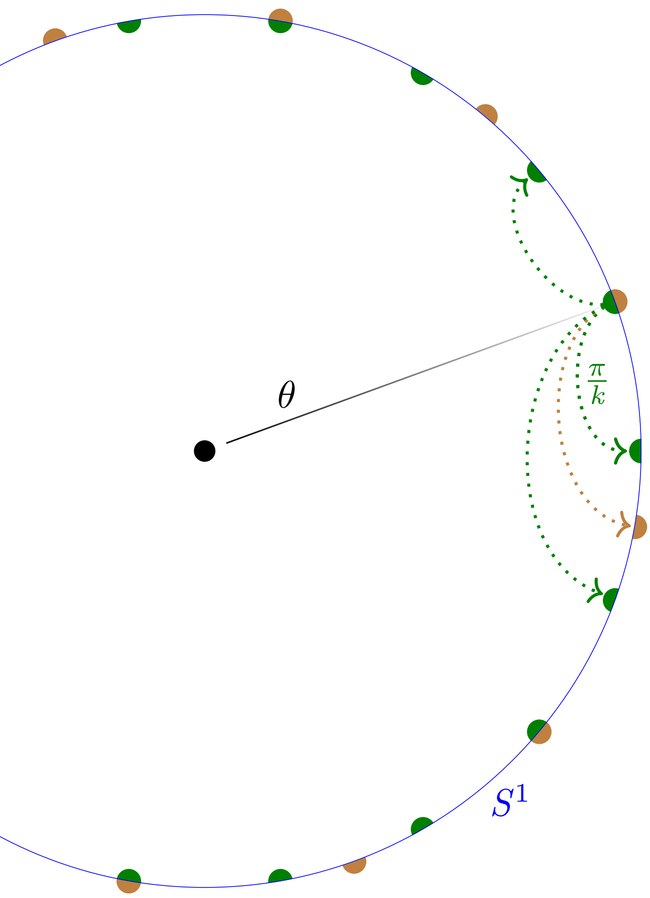
Definition
Die *anti-Stokes Richtungen* $\mathbb{A}$ sind die $\theta \in S^1$ für die $\mathrm{Sto}_\theta(A^0) \neq \{\mathrm{id}\}$.

durch summations-Theorie

Abschnitt 3

Fragen?

Die anti-Stokes Richtungen



Definition

Zu jeder Richtung θ definieren wir *Menge der dazugehörigen Level* $\boldsymbol{\mathcal{K}_\theta}$ als die $k \in \mathbb{N}$ für die

für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\theta + i\frac{\pi}{k} \in \mathbb{A}\,.$$

Lemma

Gilt für jedes $\theta \in \mathbb{A}$ dass $\mathcal{K}_\theta = \{k\}$, so haben die anti-Stokes Richtungen eine $\frac{\pi}{k}$-drehsymmetrie.

Aufteilen bezüglich der Level

Die Menge aller Level $\mathcal{K}$ ist $\bigcup_{\theta\in\mathbb{A}} \mathcal{K}_\theta$.

Lemma

Die Aufteilung in „Anteile von Level k“

$$\mathrm{Sto}_\theta(A^0) \longrightarrow \prod_{k\in\mathcal{K}} \mathrm{Sto}_\theta^k(A^0)$$

ist ein Isomorphismus und haben damit den Isomorphismus

$$\mathcal{H}(A^0) \longrightarrow \prod_{\theta\in\mathbb{A}} \prod_{k\in\mathcal{K}} \mathrm{Sto}_\theta^k(A^0) = \prod_{k\in\mathcal{K}} \Big(\prod_{\theta\in\mathbb{A}} \mathrm{Sto}_\theta^k(A^0)\Big).$$

Abschnitt 4

Beispiel

Stokes Matrizen

Definition

1. Definiere die Relation $q_j \underset{\theta}{\prec} q_l$ als äquivalent zu

$$e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \text{ ist von maximal decay in Richtung } \theta.$$

Die anti-Stokes Richtungen sind genau die $\theta \in S^1$, so dass $q_j \underset{\theta}{\prec} q_l$ für ein Paar (q_j, q_l).

Definition

Definiere die *Gruppe der Stokes Matrizen* als

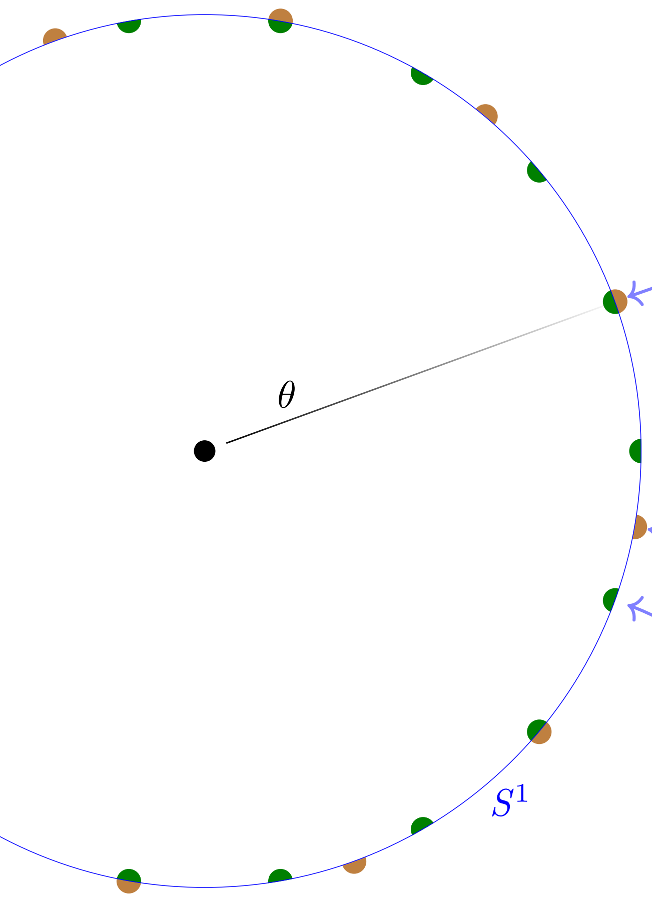
$$\mathbb{S}\mathrm{to}_\theta(A^0) := \Big\{ C = (c_{jl})_{j,l \in \{1,\dots,n\}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Big| \\ c_{(l,j)} = \delta_{jl} \text{ außer wenn } q_j \underset{\theta}{\prec} q_l \Big\}.$$

Beispiel

von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \underset{\theta}{\prec} q_2$, $q_1 \underset{\theta}{\prec} q_3$ und $q_2 \underset{\theta}{\prec} q_3$

mit Level $\mathcal{K} = \{k_2 > k_1\}$.



$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ & 1 & \star \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}\mathrm{to}_{\theta}(A^0)$$

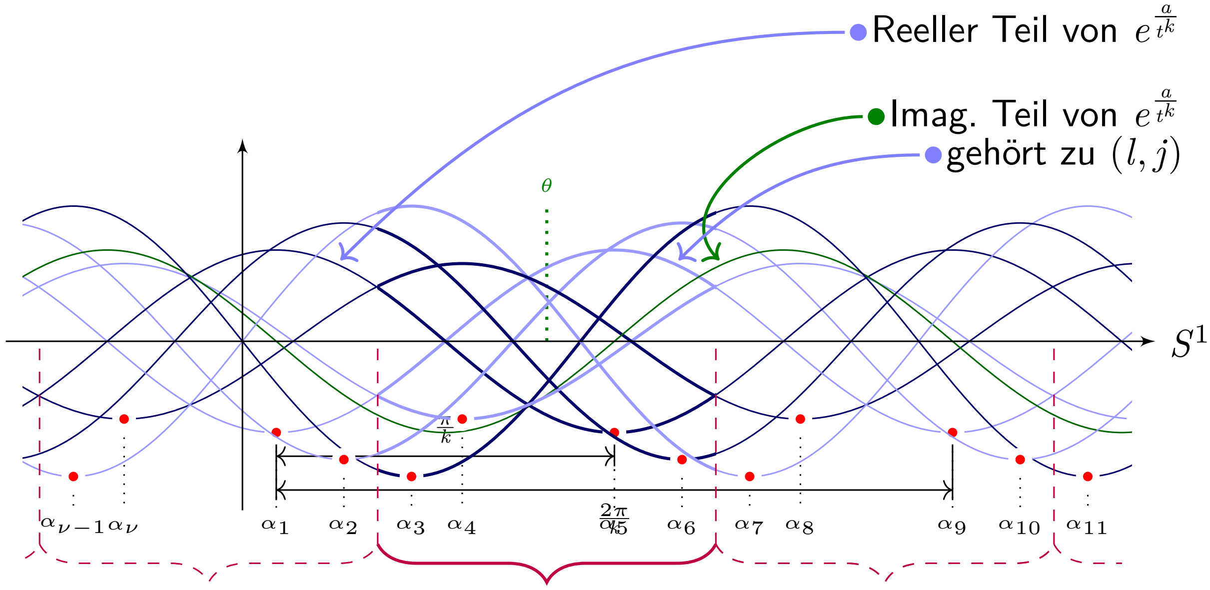
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \star & 1 & \\ \star & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}\mathrm{to}_{\theta-\frac{\pi}{k_2}}(A^0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \star & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}\mathrm{to}_{\theta-\frac{\pi}{k_1}}(A^0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}\mathrm{to}_{\theta-\frac{2\pi}{k_2}}(A^0)$$

Was weiß man für fixierten Level k?

Fixiere (j, l) mit $j \neq l$ und damit $(q_l - q_j)(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$.



Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim $f \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$, der eine Isotropie von A^0 ist, sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} f &= t^L e^{Q(t^{-1})} \rho_\theta(f) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L e^{Q(t^{-1})} \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} \right) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \right) t^{-L}. \end{aligned}$$

Also ist f

1. multiplikativ flach falls falls für jedes $C^{(l,j)} \neq 0$ der Faktor $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ asymptotisch zu 0 ist und
2. von maximal decay falls für jedes $C^{(l,j)} \neq 0$ der Faktor $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ von maximal decay in Richtung θ ist.

Die Stokes Matrizen und die anti-Stokes Richtungen

Definition

1. Definiere die Relation $q_j \underset{\theta}{\prec\!\!\!\!\!\!\prec} q_l$ als äquivalent zu

$$e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \text{ ist von maximal decay in Richtung } \theta.$$

Die anti-Stokes Richtungen sind genau die $\theta \in S^1$, so dass $q_j \underset{\theta}{\prec\!\!\!\!\!\!\prec} q_l$ für ein Paar (q_j, q_l).

Definition

Definiere die *Gruppe der Stokes Matrizen* als

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_\theta(A^0) := \Big\{ C = (c_{jl})_{j,l \in \{1,\dots,n\}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Big| \; c_{(l,j)} = \delta_{jl} \text{ außer wenn } q_j \underset{\theta}{\prec\!\!\!\!\!\!\prec} q_l \Big\}.$$