Stokes-Strukturen meromorpher Zusammenhänge

Maximilian Huber

3. Dezember 2014

Outline

Abschnitt 1

Meromorphe Zusammenhänge

Meromorphe Zusammenhänge

Sei M eine **Riemann-Fläche** und Z ein **effektiver Divisor** auf M.
Sei $\mathscr{M}$ ein **holomorphes Bündel** $:\Leftrightarrow$ lokal freier $\mathcal{O}_M$-Modul.

Definition

Ein **meromorpher Zusammenhang auf $\mathscr{M}$ mit Polen auf Z** ist ein $\mathbb{C}$-linearer Garbenmorphismus

$$\nabla : \mathscr{M} \to \Omega^1_M(*Z) \otimes \mathscr{M}$$

welcher für alle $U \overset{\text{off.}}{\subset} M$ die **Leibniz Regel**

$$\nabla(fs) = f\nabla s + (df) \otimes s$$

$s \in \Gamma(U, \mathscr{M})$

$f \in \mathcal{O}_M(U)$

erfüllt.

Schreibe $(\mathscr{M}, \nabla)$ oder nur $\mathscr{M}$ für den meromorphen Zusammenhang.

Zusammenhangs Matrix

Zu einer Basis **e** einer lokalen Trivialisierung von $\mathscr{M}$ gibt es eine **Zusammenhangs Matrix** $A = A'dt$ für ein $A' \in M(n \times n, \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}])$ so dass $\nabla \mathbf{e} = A\mathbf{e}$. Damit ist lokal

$$\nabla s = ds - As$$

Ein Wechsel $F \in G\{t\} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}\{t\})$ der Trivialisierung entspricht der **Gauge Transformation** auf Zusammenhangs Matrizen

$$F[A] = (dF)F^{-1} + FAF^{-1}\,.$$

Definition

- A **äquivalent zu** $B :\Leftrightarrow \exists F \in G\{t\}$ mit $F[A] = B$.
- A **formal äquivalent zu** $B :\Leftrightarrow \exists \widehat{F} \in G[\![t]\!]$ mit $\widehat{F}[A] = B$.

Formale Zerlegung

Definition

Ein Keim $(\mathcal{M}, \nabla)$ ist ein **Model** oder eine **formale Zerlegung** falls

$$\lambda : (\mathcal{M}, \nabla) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\varphi} \underbrace{\mathcal{E}^{\varphi} \otimes \mathcal{R}_{\varphi}}_{\substack{\text{elementare}\\ \text{merom. Zus.}}}$$

irregulär singulär

regulär singulär

$\varphi \in t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ paarweise verschieden

wobei $(\mathcal{E}^{\varphi}, \nabla) = (\mathbb{C}\{t\}, d - d\varphi)$.

Formale Zerlegung

Lemma

Ist $(\mathcal{M}, \nabla)$ ein Modell, so lässt sich die Zusammenhangs Matrix schreiben als

$$A^0 = d{\color{green}Q} + \Lambda\frac{dt}{t}$$

${\color{green}Q = \mathrm{diag}(}{\color{red}\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\color{green})}$

Λ *konstant*

Definition

Der Zusammenhang heißt **generisch** falls der Grad der Singularität von $\varphi_i - \varphi_j = k$ für alle i, j.

Wir beschränken uns auf generische Zusammenhänge.

Levelt-Turittin-Theorem

Satz (Levelt-Turittin)

Zu einem unverzweigtem[a] *Keim $(\mathcal{M}, \nabla)$ eines meromorphen Zusammenhang gibt es immer einen **formalen** Isomorphismus*

$$\widehat{\lambda} : \widehat{\mathcal{M}} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{M}}^{good} := \widehat{\mathcal{O}}_M \otimes \mathcal{M}^{good}$$

zu einem Modell $\mathcal{M}^{good}$.

[a] Lässt sich durch einen Pullback immer erreichen

formale Vervollständigung von $\mathcal{O}_M$.

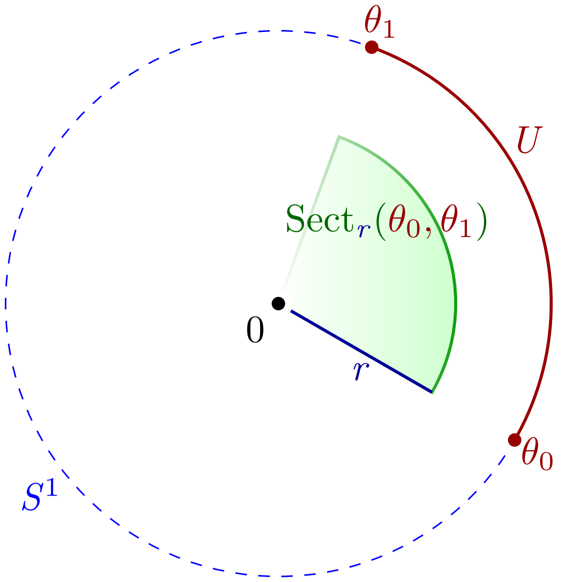
Abschnitt 2

Asymptotische Entwicklungen

Definition

Sei $\theta_0, \theta_1 \in S^1$.

- $\mathrm{Sect}_r(\theta_0, \theta_1) := \{t = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 < \rho < r, \theta \in (\theta_0, \theta_1)\}$
- $\mathrm{Sect}(\theta_0, \theta_1) := \mathrm{Sect}_r(\theta_0, \theta_1)$ für r klein genug
- $\mathrm{Sect}(U) \overset{U=(\theta_0,\theta_1)}{:=} \mathrm{Sect}(\theta_0, \theta_1)$



Asymptotische Entwicklung: Definition

Definition

$f \in \mathcal{O}_M(\mathrm{Sect}(U))$ hat $\sum_{n \geq n_0} c_n t^n \in \mathbb{C}((t))$ als **asymptotische Entwicklung auf** $\mathrm{Sect}(U)$, falls

$\exists\ r$ so dass $\forall\ \mathbf{N} \geq 0$ und $\forall\ V$ abg. Intervall in U eine Konstante $C(\mathbf{N}, V)$ existiert, so dass

$$\left| f(t) - \sum_{n_0 \leq n \leq \mathbf{N}-1} c_n t^n \right| \leq C(\mathbf{N}, V)|t|^{\mathbf{N}} \qquad \text{für alle } t \in \mathrm{Sect}_r(V)\,.$$

Erhalte die Garbe $\mathscr{A}$ auf S^1:

$$\underset{\substack{\text{off. Intervall}\\ \text{von } S^1}}{U} \mapsto \mathscr{A}(U) \subset \mathcal{O}(\mathrm{Sect}(U))$$

wobei $\mathscr{A}(U)$ die Funktionen mit asymptotischer Entwicklung auf $\mathrm{Sect}(U)$.

Borel-Ritt

Lemma (Borel-Ritt)

*Für jedes **echte** offene Intervall U von S^1 ist die Abbildung*

$$0 \to \mathscr{A}^{<0}(U) \to \mathscr{A}(U) \twoheadrightarrow \mathbb{C}((t)) \to 0$$

welche f die die asymptotische Entwicklung $\widehat{f}$ zuordnet, eine surjektion.

Satz

Für jedes genügend kleinem Intervall $V \subset S^1$ gibt es einen Lift

$$\widetilde{\lambda} : \underbrace{\mathscr{A}(V) \otimes \mathcal{M}}_{=:\widetilde{\mathcal{M}}(V)} \xrightarrow{\cong} \mathscr{A}(V) \otimes \mathcal{M}^{good}$$

von $\widehat{\lambda}$.

Abschnitt 3

Stokes-Strukturen

Modulräume

Fixiere ein **Modell** $(\mathscr{M}^{good}, \nabla^{good})$ auf $M = D$ mit Pol bei $\{0\} = Z$ und somit auch eine Zusammenhangs Matrix $A^0 = dQ + \Lambda \frac{dt}{t}$.
Wir sind interessiert an:

$$\left\{(\mathscr{M}, \nabla) \mid \widehat{f} : (\widehat{\mathscr{M}}, \widehat{\nabla}) \xrightarrow{\cong} (\widehat{\mathscr{M}}^{good}, \widehat{\nabla}^{good})\right\} \Big/ \sim.$$

Wir betrachten dazu aber die größere die punktierte Menge

$$\mathscr{H}(\mathscr{M}^{good}) := \left\{(\mathscr{M}, \nabla, \widehat{f}) \mid \widehat{f} : (\widehat{\mathscr{M}}, \widehat{\nabla}) \xrightarrow{\cong} (\widehat{\mathscr{M}}^{good}, \widehat{\nabla}^{good})\right\} \Big/ \sim$$

Als Zusammenhangs Matrizen:

$$\underbrace{\left\{A \mid A = \widehat{F}[A^0] \text{ für ein } \widehat{F} \in G[\![t]\!]\right\}}_{=:\mathrm{Syst}(A^0)} \Big/ G\{t\}$$

und

$$\mathscr{H}(A^0) := \left\{(A, \widehat{F}) \in \mathrm{Syst}(A^0) \times G[\![t]\!] \mid A = \widehat{F}[A^0]\right\} \Big/ G\{t\}$$

Garben Version: Stokes Raum

Definition

Definiere

- $\mathrm{Aut}^{<0}(\widetilde{\mathscr{M}}^{good})$ die Garbe auf S^1 der Automorphismen welche die Identität als asymptotische Entwicklung haben (Die Schnitte heißen **Stokes Matrizen**)
- und den **Stokes Raum**

$$\mathcal{S}t(\mathscr{M}^{good}) := H^1\left(S^1, \mathrm{Aut}^{<0}\left(\widetilde{\mathscr{M}}^{good}\right)\right)$$

Satz

$\mathcal{S}t(\mathscr{M}^{good})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Garben Version

Sei $\left[(\mathscr{M}, \nabla, \widehat{f})\right] \in \mathscr{H}(\mathscr{M}^{good})$. Es gibt dann eine (zyklische[1]) Überdeckung $\mathfrak{W}$ von S^1 so dass für jedes $W_i \in \mathfrak{W}$ ein Lift

$$f_i : (\widetilde{\mathscr{M}}, \widetilde{\nabla})_{|W_i} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathscr{M}}^{good}, \widetilde{\nabla}^{good})_{|W_i}$$

von $\widehat{f}$ existiert.

Dann ist $(f_j f_i^{-1})_{i,j}$ ein Kozykel in der Garbe $\mathrm{Aut}^{<0}(\widetilde{\mathscr{M}}^{good})$ relativ zur Überdeckung $\mathfrak{W}$ und damit haben wir eine Abbildung

$$\mathscr{H}(\mathscr{M}^{good}) \longrightarrow H^1\left(S^1, \mathrm{Aut}^{<0}\left(\widetilde{\mathscr{M}}^{good}\right)\right) = \mathcal{S}t(\mathscr{M}^{good})$$

Satz (Malgrange-Sibuya)

Das ist ein Isomorphismus von punktierter Mengen.

[1] Schnitt zweier Mengen in $\mathfrak{W}$ ist immer ein Intervall.

Matrix Version: Modulräume

Wir sind interessiert an:

$$\underbrace{\left\{A \mid A = \widehat{F}[A^0] \text{ für ein } \widehat{F} \in G[\![t]\!]\right\}}_{=:\mathrm{Syst}(A^0)} \Big/ G\{t\}$$

und betrachten dazu aber die größere die Menge

$$\mathscr{H}(A^0) := \left\{(A, \widehat{F}) \in \mathrm{Syst}(A^0) \times G[\![t]\!] \mid A = \widehat{F}[A^0]\right\} \Big/ G\{t\}$$

merke die formale Transformation.

Matrix Version

Satz (Balser, Jurkat, Lutz)

Es gibt einen Isomorphismus

$$\mathscr{H}(A^0) \cong (U_+ \times U_-)^{k-1} \qquad \cong \mathbb{C}^{(k-1)n(n-1)}$$

$$[(A, \widehat{F})] \mapsto \boldsymbol{S} = (S_1, \dots, S_{2k-2})$$

Korollar

Damit gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{Syst}(A^0)/G\{t\} \cong (U_+ \times U_-)^{k-1}/T\,.$$

Torus Wirkung durch Konjugation

Matrix Version: Definitionen

Definition
Sei $\varphi_{ij}(z)$ der führende Term von $\varphi_i - \varphi_j$.

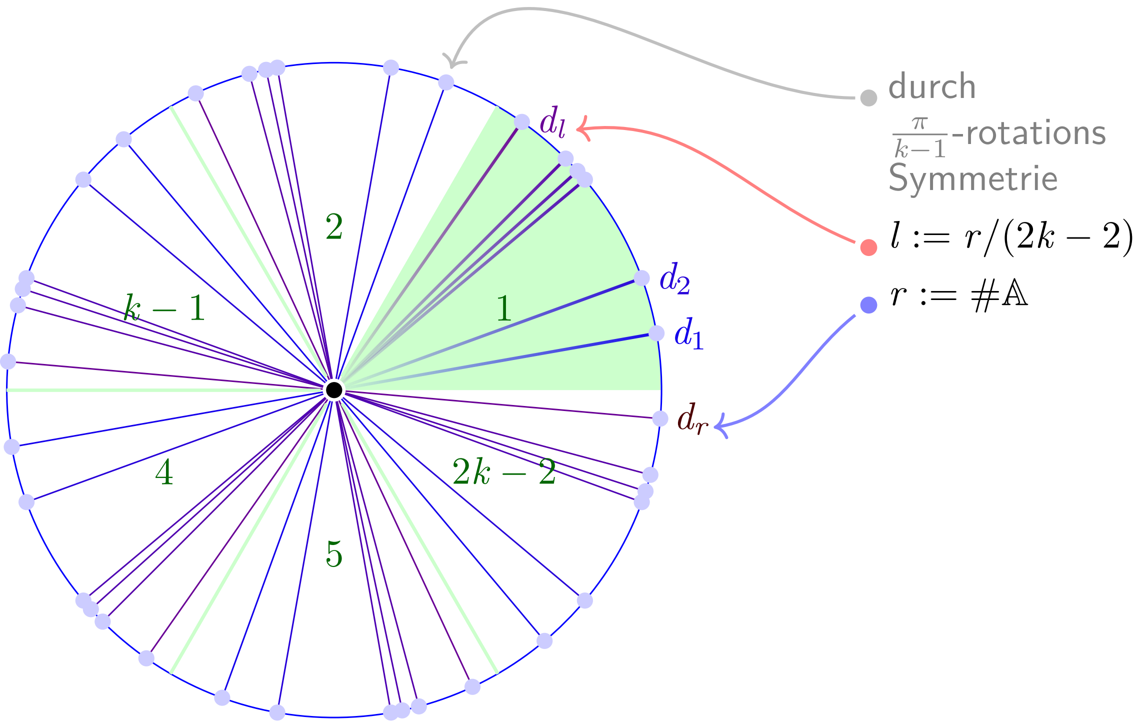
$$d \in \mathbb{A} \subset S^1 :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{es gibt } i \neq j \text{ so dass } \varphi_{ij}(z) \in \mathbb{R}_{<0} \\ \text{für } z \to 0 \text{ auf dem `Strahl durch } d\text{'.} \end{cases}$$

Die Elemente in $\mathbb{A}$ heißen **anti-Stokes-Richtungen**.

Sei

- $r := \#\mathbb{A}$,
- $l := r/(2k-2)$ und
- $\mathbf{d} := (d_1, \ldots, d_l)$ **Halb-Periode**.

Matrix Version: Definitionen



Matrix Version: Asymptotische Analysis

Satz

- *Zu* $(A, \widehat{F})$ *gibt es auf jedem Sektor* $\mathrm{Sect}\,(d_i, d_{i+1})$ *einen kanonischen Lift*

$$\Sigma_i(\widehat{F}) \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}_M(\mathrm{Sect}\,(d_i, d_{i+1}))\right)$$

  so dass $\Sigma_i(\widehat{F})[A^0] = A$.
- *Die analyt. Fortsetzung auf* $\mathrm{Sect}\left(d_i - \frac{\pi}{2k-2}, d_{i+1} + \frac{\pi}{2k-2}\right)$ *von* $\Sigma_i(\widehat{F})$ *ist dort immer noch asymptotisch zu* $\widehat{F}$.

Definition

Die begrenzenden Richtungen von $\mathrm{Sect}\left(d_i - \frac{\pi}{2k-2}, d_{i+1} + \frac{\pi}{2k-2}\right)$ heißen **Stokes-Richtungen**.

Matrix Version: Stokes Faktoren

Definition

Die **Stokes Faktoren** zu $(A, \widehat{F})$ sind

$$K_i := e^{-Q} \cdot e^{-\Lambda} \cdot \underbrace{\Sigma_i(\widehat{F})^{-1} \cdot \Sigma_{i-1}(\widehat{F})}_{\kappa_i} \cdot e^{\Lambda} \cdot e^{Q}$$

Lemma

K_i *ist in der* ***Gruppe der Stokes Faktoren***

$$\mathbb{S}\mathrm{to}_{d_i}(A^0) := \{K \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid (K)_{ij} = \delta_{ij} \text{ außer } \varphi_{ij} \in \mathbb{R}_{<0} \text{ entlang } d_i\}.$$

Lemma

Sei $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_l)$ *eine Halb-Periode.*

$$\prod_{d \in \boldsymbol{d}} \mathbb{S}\mathrm{to}_d(A^0) \cong U_+$$
$$(K_1, \ldots, K_l) \mapsto P^{-1} K_l \ldots K_2 K_1 P$$

für eine Permutations Matrix P.

Korollar

$$\prod_{d \in \mathbb{A}} \mathbb{S}\mathrm{to}_d(A^0) \cong (U_+ \times U_-)^{k-1}$$
$$(K_1, \ldots, K_r) \mapsto (S_1, \ldots, S_{2k-2})$$

mit $S_i := P^{-1} K_{il} \ldots K_{(i-1)l+1} P \in U_{+/-}$ *falls* i *ungerade/gerade die* ***Stokes Matrizen.***

Matrix Version

Satz (Balser, Jurkat, Lutz)

Die hier definierte Abbildung

$$\mathscr{H}(A^0) \cong (U_+ \times U_-)^{k-1} \qquad \cong \mathbb{C}^{(k-1)n(n-1)}$$
$$[(A, \widehat{F})] \mapsto \boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_{2k-2})$$

ist ein Isomorphismus

Korollar

Es ist auch

$$\mathrm{Syst}(A^0)/G\{t\} \cong (U_+ \times U_-)^{k-1}/T$$

ein Isomorphismus