

Kolloquium zur Master Arbeit

Classification of meromorphic connections using Stokes structures
and Stokes groups

Maximilian Huber

9. September 2015

Outline

Zusammenhangs-Matrizen und die klassifizierende Menge

Levelt-Turittin und die Normalform

Die klassifizierende Menge der Systeme

Die Stokes Strukturen

Die anti-Stokes Richtungen

Aufteilen bezüglich der Level

Beispiel

Abschnitt 1

Zusammenhangs-Matrizen und die
klassifizierende Menge

Systeme und die Gauge Transformation

Definition

Eine **Zusammenhangs-Matrix** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ beschreibt ein System (also: System linearer gewöhnlicher komplexer Differentialgleichungen)

$$dX = AX.$$

Systeme und die Gauge Transformation

Definition

Eine **Zusammenhangs-Matrix** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ beschreibt ein System (also: System linearer gewöhnlicher komplexer Differentialgleichungen)

$$dX = AX.$$

Proposition

Durch einen Wechsel $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}((t)))$ der Basis erhält man das System ${}^F A$, gegeben durch die **Gauge-Transformation**

$${}^F A := (dF)F^{-1} + FAF^{-1}.$$

Systeme und die Gauge Transformation

Definition

Eine **Zusammenhangs-Matrix** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ beschreibt ein System (also: System linearer gewöhnlicher komplexer Differentialgleichungen)

$$dX = AX.$$

Proposition

• F ist **konvergent** $:\Leftrightarrow F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$
sonst ist F **formal** (geschrieben \hat{F}).

Durch einen Wechsel $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ der Basis erhält man das System ${}^F A$, gegeben durch die **Gauge-Transformation**

$${}^F A := (dF)F^{-1} + FAF^{-1}.$$

Systeme und die Gauge Transformation

Definition

Eine **Zusammenhangs-Matrix** $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ beschreibt ein System (also: System linearer gewöhnlicher komplexer Differentialgleichungen)

$$dX = AX.$$

Proposition

• F ist **konvergent** $:\Leftrightarrow F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$
sonst ist F **formal** (geschrieben \hat{F}).

Durch einen Wechsel $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ der Basis erhält man das System ${}^F A$, gegeben durch die **Gauge-Transformation**

$${}^F A := (dF)F^{-1} + FAF^{-1}.$$

Definition

Die Zusammenhangs-Matrizen A und B sind (**formal**) **äquivalent**, falls es einen (formalen) Basiswechsel F gibt, so dass ${}^F A = B$.

Die Normalform und formale Klassifikation

Die Normalform und formale Klassifikation

Definition

Eine **Normalform** ist einem System der Form

$$A^0 = {}^F \left(Q'(t^{-1}) + \frac{1}{t} L \right)$$

wobei

- ▶ $Q(t^{-1}) := \bigoplus_{j=1}^s q_j(t^{-1}) \cdot \text{id}_{n_j}$ mit $q_j(t^{-1}) \in \mathbb{C}[t^{-1}]$,
- ▶ $L := \bigoplus_{j=1}^s L_j$ mit $L_j \in \text{GL}_{n_j}(\mathbb{C})$ in Jordan-Normalform und
- ▶ $F \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ eine Gauge-Transformation.

Die Normalform und formale Klassifikation

Definition

Eine **Normalform** ist einem System der Form

$$A^0 = {}^F \left(Q'(t^{-1}) + \frac{1}{t} L \right)$$

wobei

- ▶ $Q(t^{-1}) := \bigoplus_{j=1}^s q_j(t^{-1}) \cdot \text{id}_{n_j}$ mit $q_j(t^{-1}) \in \mathbb{C}[t^{-1}]$,
- ▶ $L := \bigoplus_{j=1}^s L_j$ mit $L_j \in \text{GL}_{n_j}(\mathbb{C})$ in Jordan-Normalform und
- ▶ $F \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$ eine Gauge-Transformation.

Aus dem Levelt-Turittin Theorem erhalten wir:

Korollar

Jedes (unverzweigte) System A ist formal äquivalent zu einer Normalform und Normalformen sind bis auf (konvergente) Äquivalenz eindeutig.

Die klassifizierende Menge

Fixiere eine Normalform A^0 .

Ziel: verstehe die Menge

$${}^0C(A^0) := \left\{ [A] \mid A = \hat{F}A^0 \text{ für ein } \hat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen vom Zusammenhangs-Matrizen
formal äquivalent zu A^0 .

Die klassifizierende Menge

Fixiere eine Normalform A^0 .

Ziel: verstehe die Menge

$${}^0C(A^0) := \left\{ [A] \mid A = \widehat{F}A^0 \text{ für ein } \widehat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen vom Zusammenhangs-Matrizen formal äquivalent zu A^0 .

Betrachte dazu die folgende Menge:

Definition

Die **klassifizierende Menge** ist definiert als die Menge

$$\mathcal{H}(A^0) := \left\{ \left[(A, \widehat{F}) \right] \mid A = \widehat{F}A^0 \text{ mit } \widehat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen **markierter Paare** zu A^0 .

Die klassifizierende Menge

Fixiere eine Normalform A^0 .

Ziel: verstehe die Menge

$${}^0C(A^0) := \left\{ [A] \mid A = \widehat{F}A^0 \text{ für ein } \widehat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen vom Zusammenhangs-Matrizen
formal äquivalent zu A^0 .

Betrachte dazu die folgende Menge:

Definition

Die **klassifizierende Menge** ist definiert als die Menge

$$\mathcal{H}(A^0) := \left\{ \left[(A, \widehat{F}) \right] \mid A = \widehat{F}A^0 \text{ mit } \widehat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen **markierter Paare** zu A^0 .

einfach

Abschnitt 2

Die Stokes Strukturen

Die Stokes Garbe und Stokes Keime

Sei \mathcal{A} die Garbe der Funktionen mit asymptotischer Erweiterung.

Definition

- ▶ Die **Stokes Garbe** $\Lambda(\mathcal{A}^0)$ ist die Untergarbe von $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ bestehend aus den Schnitten f , welche
 1. **multiplikativ flach** (f ist asymptotisch zu id)sind.

Die Stokes Garbe und Stokes Keime

Sei \mathcal{A} die Garbe der Funktionen mit asymptotischer Erweiterung.

Definition

- ▶ Die **Stokes Garbe** $\Lambda(\mathcal{A}^0)$ ist die Untergarbe von $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ bestehend aus den Schnitten f , welche
 1. **multiplikativ flach** (f ist asymptotisch zu id) und
 2. eine **Isotropie von \mathcal{A}^0** (${}^f\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^0$)sind.

Die Stokes Garbe und Stokes Keime

Sei \mathcal{A} die Garbe der Funktionen mit asymptotischer Erweiterung.

Definition

- ▶ Die **Stokes Garbe** $\Lambda(A^0)$ ist die Untergarbe von $GL_n(\mathcal{A})$ bestehend aus den Schnitten f , welche
 1. **multiplikativ flach** (f ist asymptotisch zu id) und
 2. eine **Isotropie von A^0** (${}^f A^0 = A^0$)sind.
- ▶ Die **Stokes Gruppe** $\text{Sto}_\theta(A^0) \subset \Lambda(A^0)_\theta$ sind die Keime f , für die auch noch jeder Eintrag
 3. von **maximal decay** in Richtung θ

ist.

Die Stokes Garbe und Stokes Keime

Sei \mathcal{A} die Garbe der Funktionen mit asymptotischer Erweiterung.

Definition

- ▶ Die **Stokes Garbe** $\Lambda(A^0)$ ist die Untergarbe von $GL_n(\mathcal{A})$ bestehend aus den Schnitten f , welche
 1. **multiplikativ flach** (f ist asymptotisch zu id) und
 2. eine **Isotropie von A^0** (${}^f A^0 = A^0$)sind.
- ▶ Die **Stokes Gruppe** $\text{Sto}_\theta(A^0) \subset \Lambda(A^0)_\theta$ sind die Keime f , für die auch noch jeder Eintrag
 3. von **maximal decay** in Richtung θ

ist.

Definition

$e^{q(t^{-1})}$ mit $q(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$ hat **maximal decay** in Richtung θ genau dann wenn $ae^{-ik\theta}$ reell negativ ist.

Malgrange-Sibuya-Isomorphismus

Zu einem (A, \widehat{F}) wähle sektorweise asymptotische Lifts $F_j \in \Lambda(A^0)(U_j)$ der formalen Transformation \widehat{F} . Durch $(F_k F_j^{-1})$ ist dann ein Kozykel in $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$ definiert.

Malgrange-Sibuya-Isomorphismus

Zu einem (A, \widehat{F}) wähle sektorweise asymptotische Lifts $F_j \in \Lambda(A^0)(U_j)$ der formalen Transformation \widehat{F} . Durch $(F_k F_j^{-1})$ ist dann ein Kozykel in $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$ definiert. Dies liefert den folgenden Isomorphismus:

Satz (Malgrange-Sibuya)

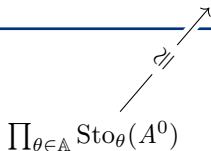
$$\mathcal{H}(A^0) \longrightarrow \cong \longrightarrow H^1(S^1; \Lambda(A^0))$$

Malgrange-Sibuya-Isomorphismus

Zu einem (A, \widehat{F}) wähle sektorweise asymptotische Lifts $F_j \in \Lambda(A^0)(U_j)$ der formalen Transformation \widehat{F} . Durch $(F_k F_j^{-1})$ ist dann ein Kozykel in $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$ definiert. Dies liefert den folgenden Isomorphismus:

Satz (Malgrange-Sibuya)

$$\mathcal{H}(A^0) \xrightarrow{\cong} H^1(S^1; \Lambda(A^0))$$



The diagram shows the expression $\prod_{\theta \in \mathbb{A}} \text{Sto}_\theta(A^0)$ with a blue arrow pointing from the definition box to it. A black arrow with a double slash (indicating an isomorphism) points from $\prod_{\theta \in \mathbb{A}} \text{Sto}_\theta(A^0)$ to the right-hand side of the equation in the box above, $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$.

$$\prod_{\theta \in \mathbb{A}} \text{Sto}_\theta(A^0)$$

Definition

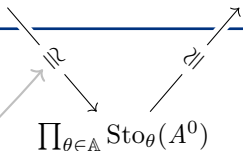
Die **anti-Stokes Richtungen** \mathbb{A} sind die $\theta \in S^1$ für die $\text{Sto}_\theta(A^0) \neq \{\text{id}\}$.

Malgrange-Sibuya-Isomorphismus

Zu einem (A, \widehat{F}) wähle sektorweise asymptotische Lifts $F_j \in \Lambda(A^0)(U_j)$ der formalen Transformation \widehat{F} . Durch $(F_k F_j^{-1})$ ist dann ein Kozykel in $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$ definiert. Dies liefert den folgenden Isomorphismus:

Satz (Malgrange-Sibuya)

$$\mathcal{H}(A^0) \xrightarrow{\cong} H^1(S^1; \Lambda(A^0))$$



Definition

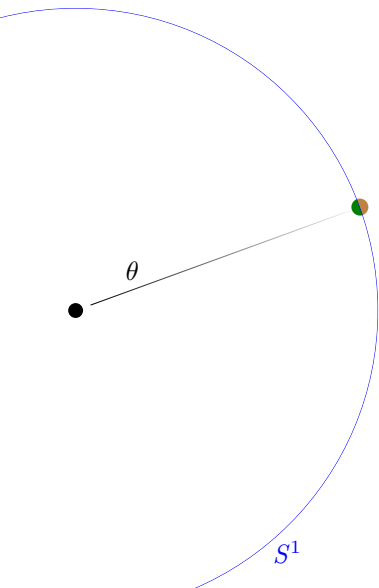
Die **anti-Stokes Richtungen** \mathbb{A} sind die $\theta \in S^1$ für die $\text{Sto}_\theta(A^0) \neq \{\text{id}\}$.

• durch summations-Theorie

Abschnitt 3

Fragen?

Die anti-Stokes Richtungen



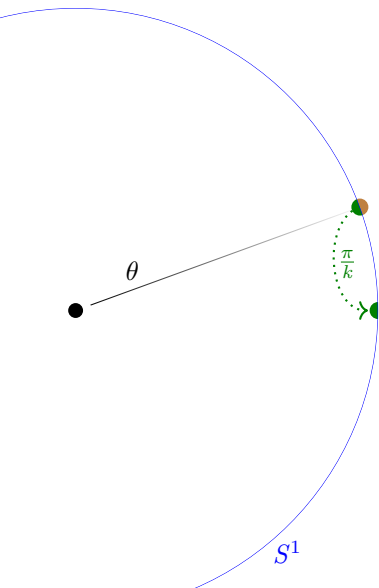
Definition

Zu jeder Richtung θ
definieren wir **Menge der
dazugehörigen Level \mathcal{K}_θ**
als die $k \in \mathbb{N}$ für die

für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\theta + i \frac{\pi}{k} \in \mathbb{A}.$$

Die anti-Stokes Richtungen



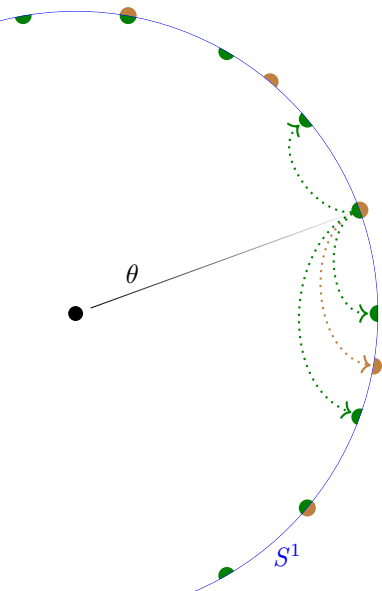
Definition

Zu jeder Richtung θ
definieren wir **Menge der
dazugehörigen Level \mathcal{K}_θ**
als die $k \in \mathbb{N}$ für die

für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\theta + i \frac{\pi}{k} \in \mathbb{A}.$$

Die anti-Stokes Richtungen



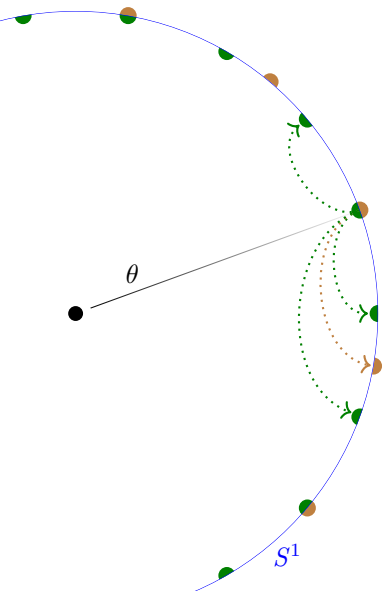
Definition

Zu jeder Richtung θ
definieren wir **Menge der dazugehörigen Level \mathcal{K}_θ**
als die $k \in \mathbb{N}$ für die

für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\theta + i \frac{\pi}{k} \in \mathbb{A}.$$

Die anti-Stokes Richtungen



Definition

Zu jeder Richtung θ
definieren wir **Menge der dazugehörigen Level \mathcal{K}_θ**
als die $k \in \mathbb{N}$ für die

für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\theta + i \frac{\pi}{k} \in \mathbb{A}.$$

Lemma

*Gilt für jedes $\theta \in \mathbb{A}$ dass
 $\mathcal{K}_\theta = \{k\}$, so haben die
anti-Stokes Richtungen eine
 $\frac{\pi}{k}$ -drehsymmetrie.*

Aufteilen bezüglich der Level

Die Menge aller Level \mathcal{K} ist $\bigcup_{\theta \in \mathbb{A}} \mathcal{K}_\theta$.

Lemma

Die Aufteilung in „Anteile von Level k “

$$\text{Sto}_\theta(A^0) \longrightarrow \prod_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\theta^k(A^0)$$

ist ein Isomorphismus und haben damit den Isomorphismus

$$\mathcal{H}(A^0) \longrightarrow \prod_{\theta \in \mathbb{A}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\theta^k(A^0)$$

.

Aufteilen bezüglich der Level

Die Menge aller Level \mathcal{K} ist $\bigcup_{\theta \in \mathbb{A}} \mathcal{K}_\theta$.

Lemma

Die Aufteilung in „Anteile von Level k “

$$\text{Sto}_\theta(A^0) \longrightarrow \prod_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\theta^k(A^0)$$

ist ein Isomorphismus und haben damit den Isomorphismus

$$\mathcal{H}(A^0) \longrightarrow \prod_{\theta \in \mathbb{A}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\theta^k(A^0) = \prod_{k \in \mathcal{K}} \left(\prod_{\theta \in \mathbb{A}} \text{Sto}_\theta^k(A^0) \right).$$

Abschnitt 4

Beispiel

Stokes Matrizen

Stokes Matrizen

Definition

1. Definiere die Relation $q_j \underset{\theta}{\asymp} q_l$ als äquivalent zu

$e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ ist von maximal decay in Richtung θ .

Stokes Matrizen

Definition

1. Definiere die Relation $q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l$ als äquivalent zu

$e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ ist von maximal decay in Richtung θ .

Die anti-Stokes Richtungen sind genau die $\theta \in S^1$, so dass $q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l$ für ein Paar (q_j, q_l) .

Stokes Matrizen

Definition

1. Definiere die Relation $q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l$ als äquivalent zu

$e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ ist von maximal decay in Richtung θ .

Die anti-Stokes Richtungen sind genau die $\theta \in S^1$, so dass $q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l$ für ein Paar (q_j, q_l) .

Definition

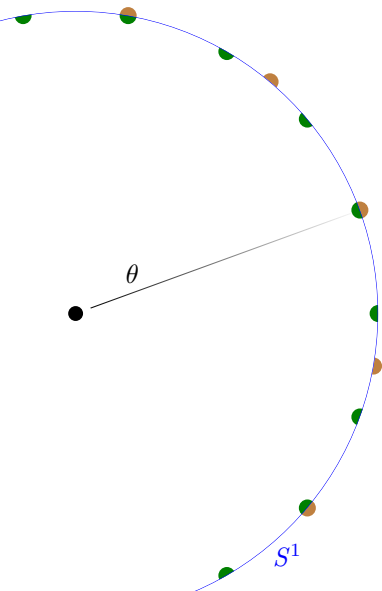
Definiere die **Gruppe der Stokes Matrizen** als

$$\text{Sto}_\theta(A^0) := \left\{ C = (c_{jl})_{j,l \in \{1, \dots, n\}} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \right. \\ \left. c_{(l,j)} = \delta_{jl} \text{ außer wenn } q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l \right\}.$$

Beispiel

• von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_2$, $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$ und $q_2 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$

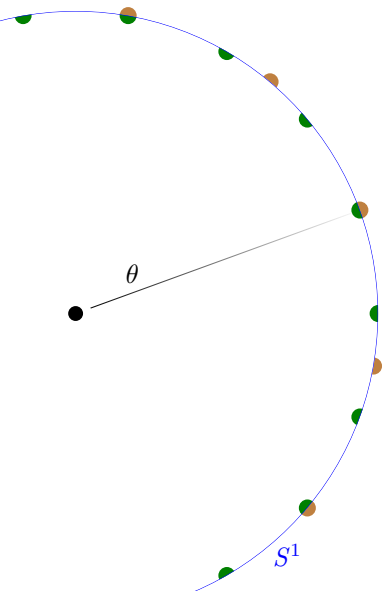


Beispiel

• von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_2$, $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$ und $q_2 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$

mit Level $\mathcal{K} = \{k_2 > k_1\}$.

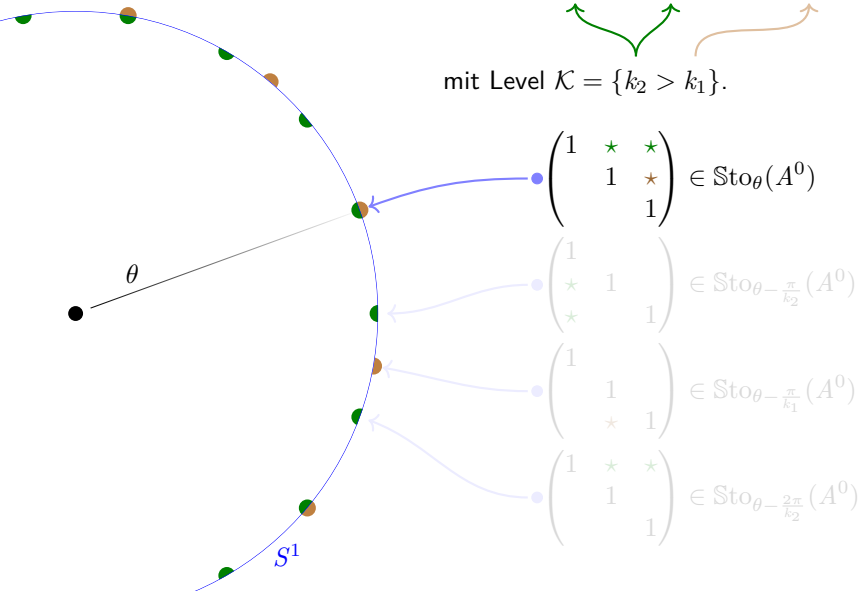


Beispiel

• von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \xrightarrow[\theta]{\ll} q_2, q_1 \xrightarrow[\theta]{\ll} q_3$ und $q_2 \xrightarrow[\theta]{\ll} q_3$

mit Level $\mathcal{K} = \{k_2 > k_1\}$.

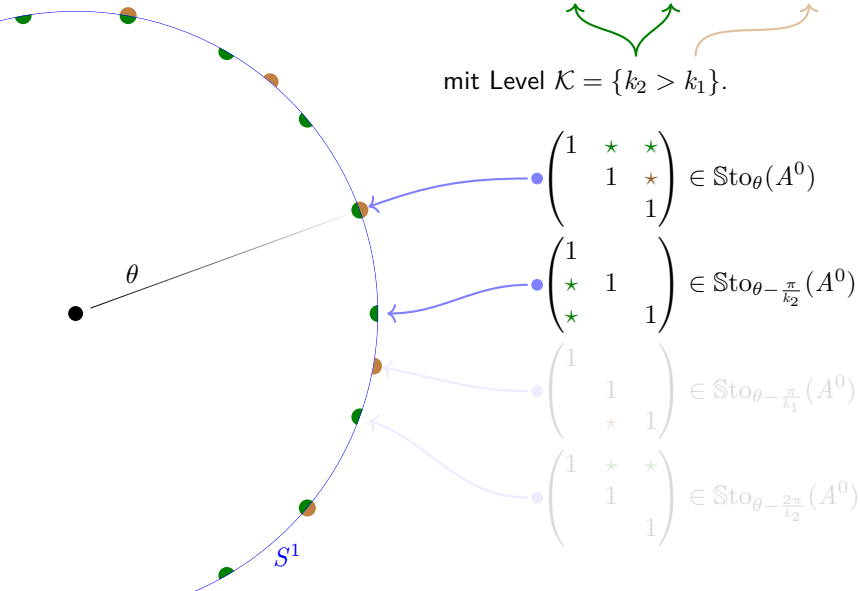


Beispiel

• von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_2, q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$ und $q_2 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$

mit Level $\mathcal{K} = \{k_2 > k_1\}$.

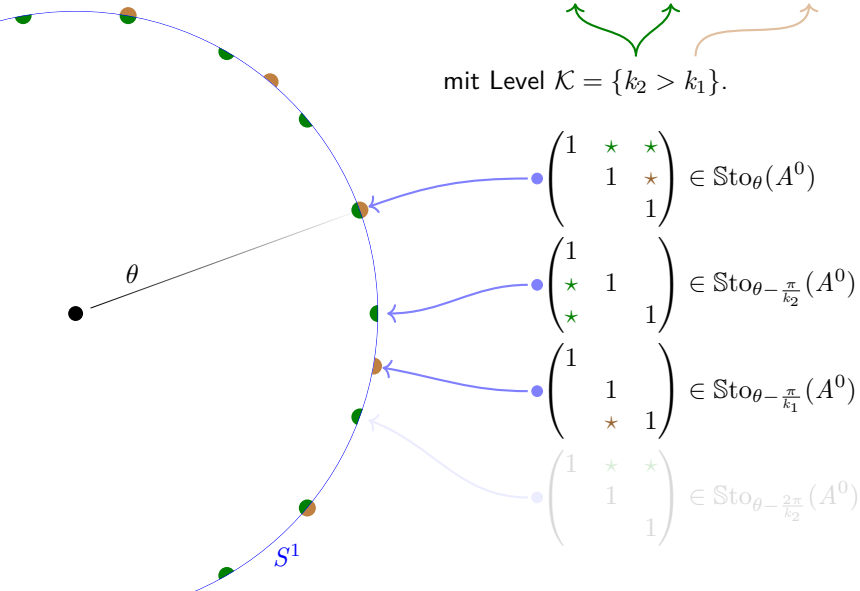


Beispiel

• von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_2, q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$ und $q_2 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$

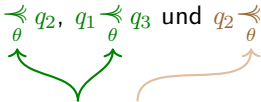
mit Level $\mathcal{K} = \{k_2 > k_1\}$.



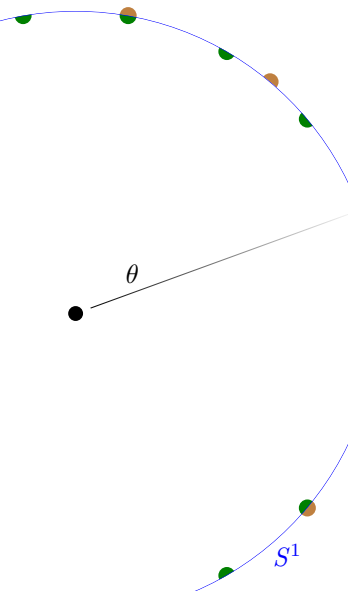
Beispiel

• von Dimension 3

Fixiere $\theta \in S^1$ und q_1, q_2 und q_3 so dass $q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_2, q_1 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$ und $q_2 \overset{\theta}{\rightsquigarrow} q_3$



mit Level $\mathcal{K} = \{k_2 > k_1\}$.



$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ & 1 & \star \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sto}_{\theta}(A^0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \star & 1 & \\ \star & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sto}_{\theta - \frac{\pi}{k_2}}(A^0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \star & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sto}_{\theta - \frac{\pi}{k_1}}(A^0)$$

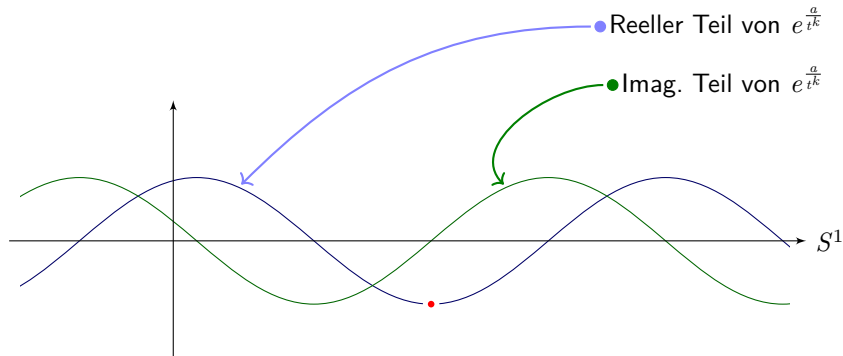
$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sto}_{\theta - \frac{2\pi}{k_2}}(A^0)$$

Abschnitt 5

Anhang

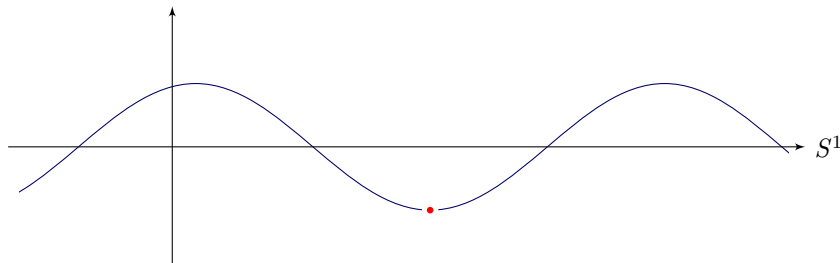
Was weiß man für fixierten Level k ?

Fixiere (j, l) mit $j \neq l$ und damit $(q_l - q_j)(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$.



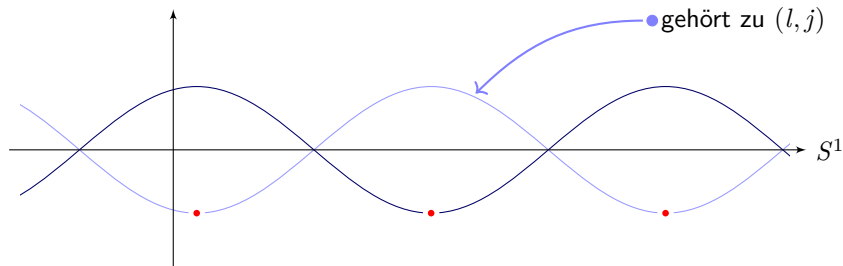
Was weiß man für fixierten Level k ?

Fixiere (j, l) mit $j \neq l$ und damit $(q_l - q_j)(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$.



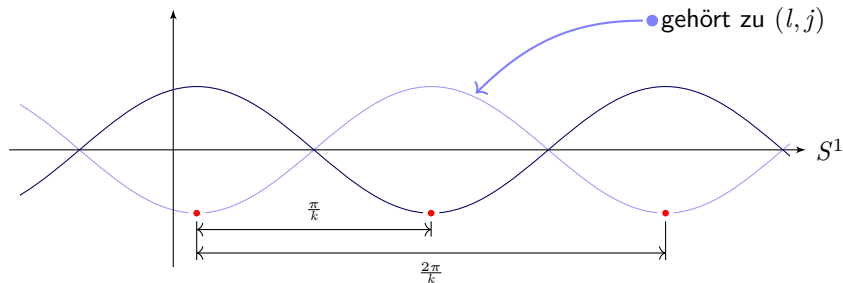
Was weiß man für fixierten Level k ?

Fixiere (j, l) mit $j \neq l$ und damit $(q_l - q_j)(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$.

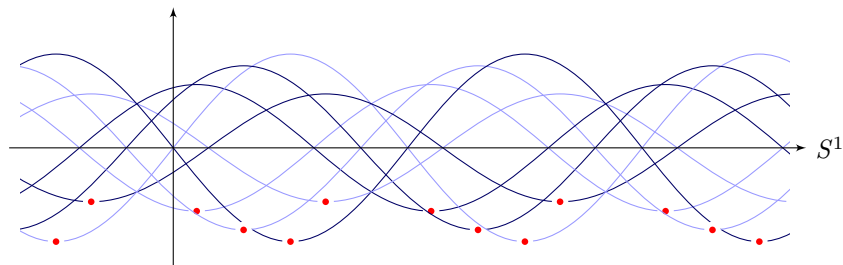


Was weiß man für fixierten Level k ?

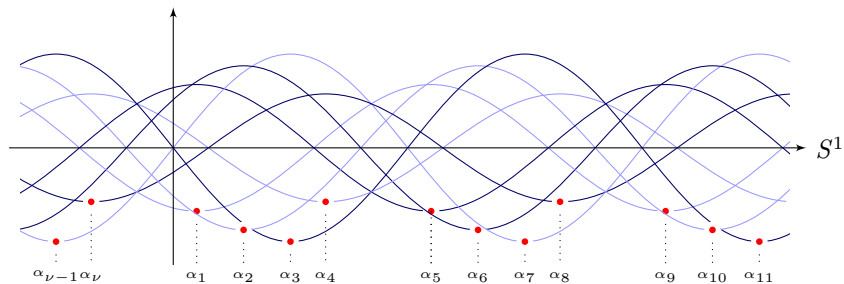
Fixiere (j, l) mit $j \neq l$ und damit $(q_l - q_j)(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$.



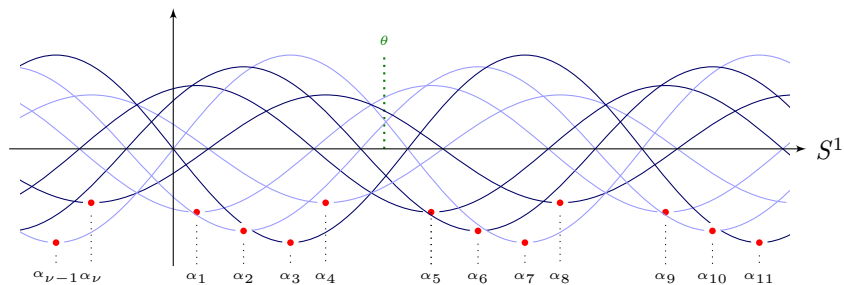
Was weiß man für fixierten Level k ?



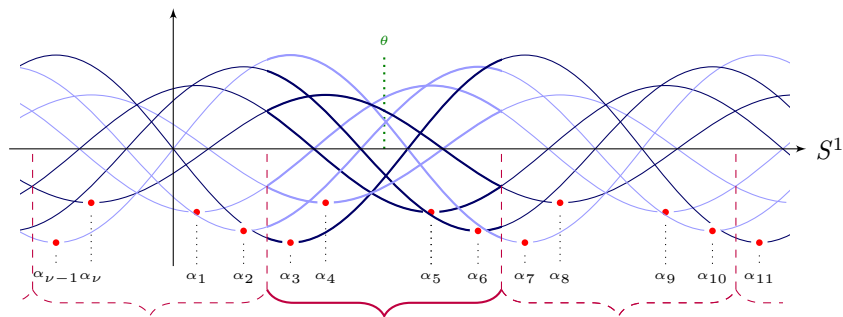
Was weiß man für fixierten Level k ?



Was weiß man für fixierten Level k ?



Was weiß man für fixierten Level k ?



Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim $f \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$, der eine Isotropie von A^0 ist, sieht wie folgt aus

$$f = \underbrace{t^L e^{Q(t^{-1})}}_{\bullet \text{Fundamentallösung von } A^0 = (df)f^{-1} + fA^0f^{-1}} \underbrace{\rho_\theta(f)}_{\bullet \text{konstant, also in } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \underbrace{e^{-Q(t^{-1})} t^{-L}}_{\bullet (t^L e^{Q(t^{-1})})^{-1}}$$

Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim $f \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$, der eine Isotropie von A^0 ist, sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} f &= t^L e^{Q(t^{-1})} \rho_\theta(f) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L e^{Q(t^{-1})} \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} \right) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \end{aligned}$$

Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim $f \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$, der eine Isotropie von A^0 ist, sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} f &= t^L e^{Q(t^{-1})} \rho_\theta(f) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L e^{Q(t^{-1})} \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} \right) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \right) t^{-L}. \end{aligned}$$

Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim $f \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$, der eine Isotropie von A^0 ist, sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} f &= t^L e^{Q(t^{-1})} \rho_\theta(f) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L e^{Q(t^{-1})} \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} \right) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \right) t^{-L}. \end{aligned}$$

Also ist f

1. multiplikativ flach falls für jedes $C^{(l,j)} \neq 0$ der Faktor $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ asymptotisch zu 0 ist und

Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim $f \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$, der eine Isotropie von A^0 ist, sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} f &= t^L e^{Q(t^{-1})} \rho_\theta(f) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L e^{Q(t^{-1})} \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} \right) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L \left(1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \right) t^{-L}. \end{aligned}$$

Also ist f

1. multiplikativ flach falls für jedes $C^{(l,j)} \neq 0$ der Faktor $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ asymptotisch zu 0 ist und
2. von maximal decay falls für jedes $C^{(l,j)} \neq 0$ der Faktor $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$ von maximal decay in Richtung θ ist.