

# Kolloquium zur Master Arbeit

Classification of meromorphic connections using Stokes structures  
and Stokes groups

Maximilian Huber

9. September 2015

## Outline

Zusammenhangs-Matrizen und die klassifizierende Menge

Levelt-Turittin und die Normalform

Die klassifizierende Menge der Systeme

Die Stokes Strukturen

Die anti-Stokes Richtungen

Aufteilen bezüglich der Level

Beispiel

# Abschnitt 1

## Zusammenhangs-Matrizen und die klassifizierende Menge

### Systeme und die Gauge Transformation

#### Definition

Eine *Zusammenhangs-Matrix*  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$  beschreibt ein System (also: System linearer gewöhnlicher komplexer Differentialgleichungen)

$$dX = AX.$$

#### Proposition

Durch einen Wechsel  $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}((t)))$  der Basis erhält man das System  ${}^F A$ , gegeben durch die Gauge-Transformation

$${}^F A := (dF)F^{-1} + FAF^{-1}.$$

#### Definition

Die Zusammenhangs-Matrizen  $A$  und  $B$  sind (*formal*) äquivalent, falls es einen (formalen) Basiswechsel  $F$  gibt, so dass  ${}^F A = B$ .

•  $F$  ist konvergent  $:\Leftrightarrow F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$   
sonst ist  $F$  formal (geschrieben  $\widehat{F}$ ).

# Die Normalform und formale Klassifikation

## Definition

Eine *Normalform* ist einem System der Form

$$A^0 = {}^F \left( Q'(t^{-1}) + \frac{1}{t} L \right)$$

wobei

- ▶  $Q(t^{-1}) := \bigoplus_{j=1}^s q_j(t^{-1}) \cdot \text{id}_{n_j}$  mit  $q_j(t^{-1}) \in \mathbb{C}[t^{-1}]$ ,
- ▶  $L := \bigoplus_{j=1}^s L_j$  mit  $L_j \in \text{GL}_{n_j}(\mathbb{C})$  in Jordan-Normalform und
- ▶  $F \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(\{t\}))$  eine Gauge-Transformation.

Aus dem Levelt-Turittin Theorem erhalten wir:

## Korollar

*Jedes (unverzweigte) System  $A$  ist formal äquivalent zu einer Normalform und Normalformen sind bis auf (konvergente) Äquivalenz eindeutig.*

## Die klassifizierende Menge

Fixiere eine Normalform  $A^0$ .

**Ziel:** verstehe die Menge

$${}^0C(A^0) := \left\{ [A] \mid A = {}^{\widehat{F}}A^0 \text{ für ein } \widehat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen vom Zusammenhangs-Matrizen formal äquivalent zu  $A^0$ .

Betrachte dazu die folgende Menge:

## Definition

Die *klassifizierende Menge* ist definiert als die Menge

$$\mathcal{H}(A^0) := \left\{ \left[ (A, \widehat{F}) \right] \mid A = {}^{\widehat{F}}A^0 \text{ mit } \widehat{F} \in G((t)) \right\}$$

der Äquivalenzklassen *markierter Paare* zu  $A^0$ .

einfach

## Abschnitt 2

### Die Stokes Strukturen

#### Die Stokes Garbe und Stokes Keime

Sei  $\mathcal{A}$  die Garbe der Funktionen mit asymptotischer Erweiterung.

##### Definition

- ▶ Die *Stokes Garbe*  $\Lambda(\mathbf{A}^0)$  ist die Untergarbe von  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$  bestehend aus den Schnitten  $f$ , welche
  1. *multiplikativ flach* ( $f$  ist asymptotisch zu  $\mathrm{id}$ ) und
  2. eine *Isotropie* von  $\mathbf{A}^0$  ( ${}^f A^0 = A^0$ )sind.
- ▶ Die *Stokes Gruppe*  $\mathrm{Sto}_\theta(A^0) \subset \Lambda(A^0)_\theta$  sind die Keime  $f$ , für die auch noch jeder Eintrag
  3. von *maximal decay* in Richtung  $\theta$

ist.

##### Definition

$e^{q(t^{-1})}$  mit  $q(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$  hat *maximal decay* in Richtung  $\theta$  genau dann wenn  $\mathbf{a}e^{-ik\theta}$  reell negativ ist.

# Malgrange-Sibuya-Isomorphismus

Zu einem  $(A, \widehat{F})$  wähle sektorweise asymptotische Lifts  $F_j \in \Lambda(A^0)(U_j)$  der formalen Transformation  $\widehat{F}$ . Durch  $(F_k F_j^{-1})$  ist dann ein Kozykel in  $H^1(S^1; \Lambda(A^0))$  definiert. Dies liefert den folgenden Isomorphismus:

## Satz (Malgrange-Sibuya)

$$\mathcal{H}(A^0) \xrightarrow{\cong} H^1(S^1; \Lambda(A^0))$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \prod_{\theta \in \mathbb{A}} \text{Sto}_{\theta}(A^0) & & \end{array}$$

### Definition

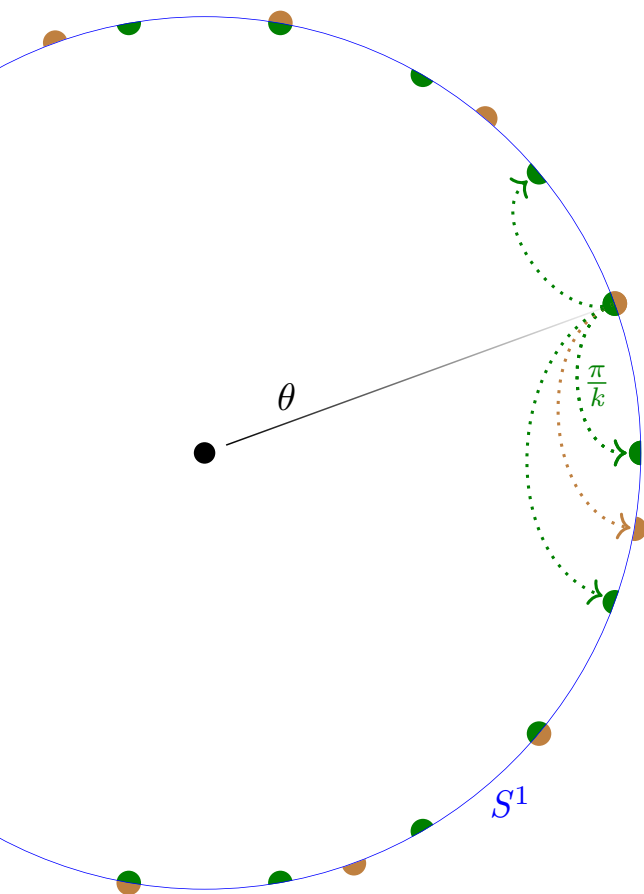
Die *anti-Stokes Richtungen*  $\mathbb{A}$  sind die  $\theta \in S^1$  für die  $\text{Sto}_{\theta}(A^0) \neq \{\text{id}\}$ .

● durch summations-Theorie

## Abschnitt 3

Fragen?

# Die anti-Stokes Richtungen



## Definition

Zu jeder Richtung  $\theta$  definieren wir Menge der dazugehörigen Level  $\mathcal{K}_\theta$  als die  $k \in \mathbb{N}$  für die

für jedes  $i \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\theta + i \frac{\pi}{k} \in \mathbb{A}.$$

## Lemma

Gilt für jedes  $\theta \in \mathbb{A}$  dass  $\mathcal{K}_\theta = \{k\}$ , so haben die anti-Stokes Richtungen eine  $\frac{\pi}{k}$ -drehsymmetrie.

## Aufteilen bezüglich der Level

Die Menge aller Level  $\mathcal{K}$  ist  $\bigcup_{\theta \in \mathbb{A}} \mathcal{K}_\theta$ .

## Lemma

Die Aufteilung in „Anteile von Level  $k$ “

$$\text{Sto}_\theta(A^0) \longrightarrow \prod_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\theta^k(A^0)$$

ist ein Isomorphismus und haben damit den Isomorphismus

$$\mathcal{H}(A^0) \longrightarrow \prod_{\theta \in \mathbb{A}} \prod_{k \in \mathcal{K}} \text{Sto}_\theta^k(A^0) = \prod_{k \in \mathcal{K}} \left( \prod_{\theta \in \mathbb{A}} \text{Sto}_\theta^k(A^0) \right).$$

## Abschnitt 4

### Beispiel

## Stokes Matrizen

### Definition

1. Definiere die Relation  $q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l$  als äquivalent zu

$e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$  ist von maximal decay in Richtung  $\theta$ .

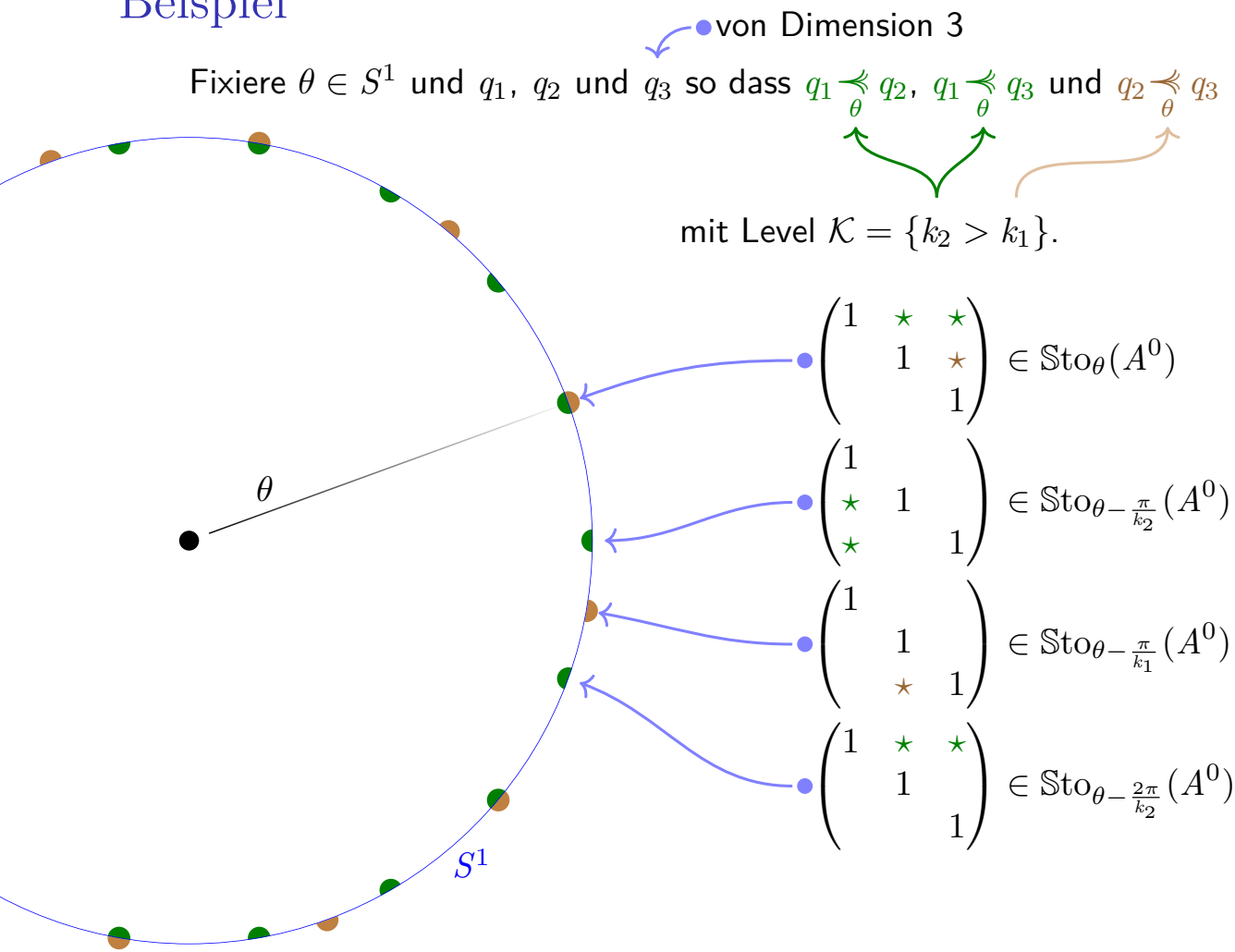
Die anti-Stokes Richtungen sind genau die  $\theta \in S^1$ , so dass  $q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l$  für ein Paar  $(q_j, q_l)$ .

### Definition

Definiere die *Gruppe der Stokes Matrizen* als

$$\text{Sto}_\theta(A^0) := \left\{ C = (c_{jl})_{j,l \in \{1, \dots, n\}} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid c_{(l,j)} = \delta_{jl} \text{ außer wenn } q_j \xrightarrow[\theta]{} q_l \right\}.$$

Beispiel



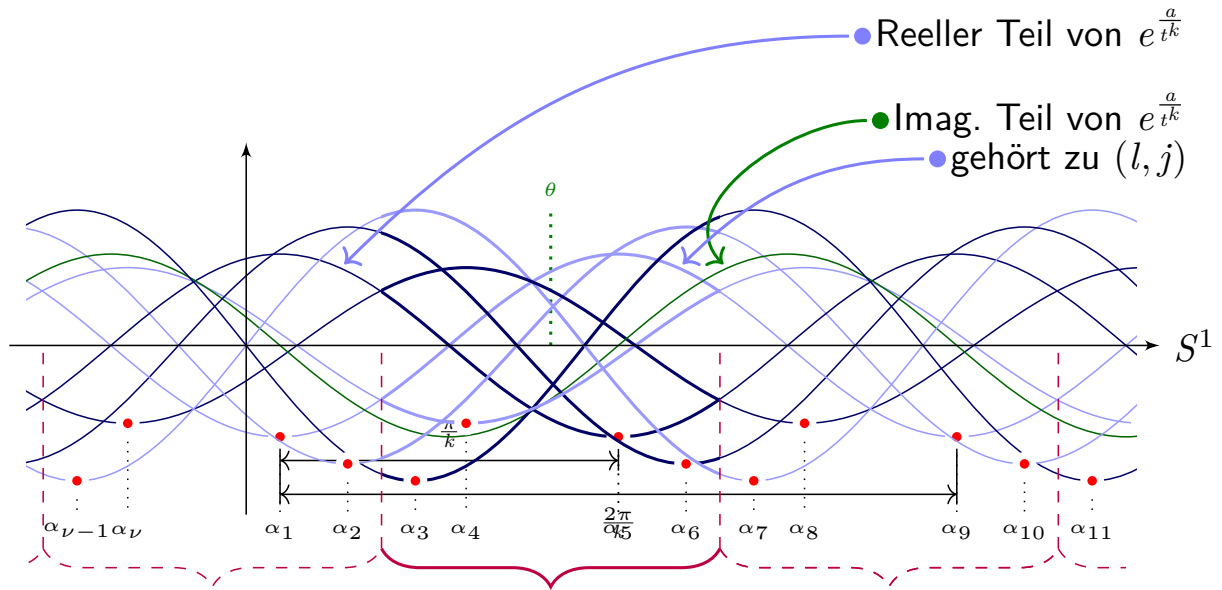
Abschnitt 5

Anhang



## Was weiß man für fixierten Level $k$ ?

Fixiere  $(j, l)$  mit  $j \neq l$  und damit  $(q_l - q_j)(t^{-1}) \in \frac{a}{t^k} + o(t^{-k})$ .



## Wann ist $f \in \Lambda_\theta(A^0)$ von maximal decay?

Ein Keim  $f \in \text{GL}_n(\mathcal{A}_\theta)$ , der eine Isotropie von  $A^0$  ist, sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} f &= t^L e^{Q(t^{-1})} \rho_\theta(f) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L e^{Q(t^{-1})} \left( 1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} \right) e^{-Q(t^{-1})} t^{-L} \\ &= t^L \left( 1_n + \sum_{(l,j)} C^{(l,j)} e^{(q_l - q_j)(t^{-1})} \right) t^{-L}. \end{aligned}$$

Also ist  $f$

1. multiplikativ flach falls für jedes  $C^{(l,j)} \neq 0$  der Faktor  $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$  asymptotisch zu 0 ist und
2. von maximal decay falls für jedes  $C^{(l,j)} \neq 0$  der Faktor  $e^{(q_l - q_j)(t^{-1})}$  von maximal decay in Richtung  $\theta$  ist.